RUANG MORREY KECIL PADA RUANG BANACH

SKRIPSI

OLEH
MEIDITAMA FIRMANDIO SANURIBAS
NIM. 16610109

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

RUANG MORREY KECIL PADA RUANG BANACH

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

OLEH
MEIDITAMA FIRMANDIO SANURIBAS
NIM. 16610109

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

RUANG MORREY KECIL PADA RUANG BANACH

SKRIPSI

OLEH
MEIDITAMA FIRMANDIO SANURIBAS
NIM. 16610109

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Hairur Rahman, M.Si	Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19571005 1998203 1 006

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 19650414 200312 1 001

RUANG MORREY KECIL PADA RUANG BANACH

SKRIPSI

OLEH
MEIDITAMA FIRMANDIO SANURIBAS
NIM. 16610109

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 13 April 2020

Penguji Utama	: Dr. Elly Susanti, M.Sc.	....
Ketua Penguji	: Dian Maharani, S.Pd., M.Si.	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Hairur Rahman, M.Si.	....
Anggota Penguji	: Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Meiditama Firmandio Sanuribas

NIM : 16610109

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Ruang Morrey Kecil Pada Ruang Banach

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencamtumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 April 2020

Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL

6D6C5AHF407966844

6000 ENAM RIBU RUPIAH

Meiditama Firmandio Sanuribas

NIM. 16610109

MOTTO

"Akal yang sehat itu terletak pada badan yang sehat"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk :

Papa Sario, Mama Holifa Ika Nurhayati, Adik tersayang Frido Qoribillah yang selalu memberi dukungan fisik dan psikis, yang setiap saat berdoa untuk kesuksesan penulis, dan yang memberikan semangat kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul "Ruang Morrey Pada Ruang Banach" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulan Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun manusia dari jalan gelap gulita menuju jalan terang benderang yaitu agama Islam.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis mendapatkan banyak bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terimaksih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat dan motivasi kepada penulis.
5. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan banyak arahan, ilmu, dan pengalaman bagi penulis.

6. Muhammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen wali yang selalu memberikan motivasi dan arahan kepada penulis.
7. Segenap civitas akademik Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam proses perkuliahan.
8. Ayah, ibu, serta adik tersayang yang selalu memberikan doa, semangat dan motivasi demi keberhasilan penulis.
9. Seluruh anggota keluarga MAKBI yang selalu menghibur dan memberikan semangat kepada penulis, terimakasih atas segala waktu yang diberikan dan kenangan-kenangan manis di setiap pertemuan dalam mengisi kesenggangan untuk menggapai sebuah impian.
10. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2016, khususnya untuk dua orang Qintifly Mumtaz dan Rifqi yang selalu memberikan semangat untuk bangkit dan sabar dengan sifat egois dan temperamen penulis. Aminah, Maziyah, Helli, dan Iif yang telah ikut serta memberikan semangat dan pemikirannya kepada penulis. Serta Rozi yang bersedia menyediakan kost untuk tempat singgah penulis.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaaat bagi penulis maupun pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 13 April 2020

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Sanuribas, Meiditama Firmandio. 2020. **Ruang Morrey Kecil pada Ruang Banach**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.

Kata kunci: Ruang Banach, Ruang Lebesgue, Ruang Morrey, Ruang Morrey kecil, Barisan Cauchy.

Ruang Banach merupakan salah satu kajian yang cukup sering dikaji pada mata kuliah analisis fungsional. Beberapa peneliti telah mendefinisikan berbagai ruang pada Ruang Banach, antara lain Ruang Lebesgue dan Ruang Morrey. Ruang-ruang tersebut diketahui telah memenuhi beberapa aksioma pada Ruang Banach. Pada penelitian ini penulis tertarik untuk membuktikan Ruang Morrey kecil dan Ruang Morrey kecil lemah pada Ruang Banach. Dalam pembuktiannya, penulis perlu membuktikan ruang-ruang tersebut pada empat aksioma Ruang Bernorma. Sedangkan untuk membuktikan bahwa ruang-ruang tersebut adalah Ruang Banach, penulis akan membuktikan kekonvergenan dari Barisan Cauchy yang terdapat pada ruang-ruang tersebut mengingat bahwa definisi Ruang Banach adalah Ruang Bernorma yang lengkap.

ABSTRACT

Sanuribas, Meiditama Firmandio. 2020. **Small Morrey Spaces in Banach Spaces**. Thesis. Mathematics Departement, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State of Islamic University of Malang. Advisors: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.

Keywords: Banach Spaces, Lebesgue Spaces, Morrey Spaces, Small Morrey Spaces, Cauchy Sequences.

Banach Spaces is one of the studies that is often reviewed in Functional Analysis. Some researchers have defined various spaces in Banach spaces, including Lebesgue Spaces and Morrey Spaces. These spaces are known to have fulfilled several axioms in Banach spaces. In this research, the writer is interested in proving the small Morrey spaces and weak small Morrey spaces in Banach spaces. In this proof, the writer needs to prove these spaces fulfilled the four axioms of the Normed Space as the first step. Meanwhile, to prove that these spaces are Banach Spaces, the writer will prove the convergence of the Cauchy sequences contained in these spaces given that the definition of Banach Spaces is a complete normed space.

ملخص

سانورباس، ميديتاما فرمانديو. 2020. **الفضاء موري الصغيرة في الفضاء بناح**. البحث الجامعى. قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجية، جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: 1) الدوكتور حير الرحمن الماجستير. 2) الدوكتور الحاج ترمذي الماجستير.

الكلمات المفتاحيات: الفضاء بناح، الفضاء لبسغوي، الفضاء موري الصغيرة، متثالية كوجي.

الفضاء بناح هي واحدة من البحوث الكثيرة للبحث في الدراسة التحليلية الوظيفية. يحدد الباحثون الغرف في الفضاء بناح ، مثل الفضاء لبسغوي والفضاء موري. تعرف تلك الغرف أترع المسَلمات في الفضاء بناح . في هذا البحث، ترغب الباحثة في تدل الفضاء موري الصغيرة والفضاء موري الصغيرة الضعيفة في الفضاء بناح. في تدليلها، تحتاج الباحثة ان تدل تلك الغرف في أربع المسلمات الغرف المعيارية. أما لتدليل أن تلك الغرف هي الفضاء بناح، ستدل الباحثة متقاربا من صف كوجي الذي يكون تلك الغرف، يذكر أن إصطلاح الفضاء بناح هو الفضاء المعيارية الكاملة.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Bekenaan dengan salah satu pembahasan dalam matematika analisis, kita tidak akan terlepas dari pembahasan analisis fungsional. Pembahasan analisis fungsional termasuk bahasan yang paling sering dikaji oleh banyak peneliti. Salah satu bahasan yang masih terus dikaji hingga sekarang yakni mengenai Ruang Banach, baik sifat-sifatnya, karakteristiknya, dan lain sebagainya. Ruang Banach sendiri merupakan ruang bernorma yang lengkap (Kreyszig, 1987).

Suatu ruang yang diikuti dengan suatu norma, dapat dikatakan ruang bernorma apabila memenuhi 4 aksioma, yakni sebagai berikut :

1. $\|x\| \geq 0$ untuk semua $x \in X$
2. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ untuk semua $x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (ketaksamaan segitiga)

Sedangakan suatu ruang akan dikatakan lengkap apabila untuk setiap Barisan Cauchy pada ruang tersebut konvergen ke suatu titik di $\mathbb{R}$ (Stein dan Shakarchi, 2011).

Selain dua ruang tersebut, juga terdapat Ruang Lebesgue L_p yaitu himpunan fungsi terukur Lebsgue yang diikuti dengan norma sebagai berikut :

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_B |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Kadets, 2010).

Seiring berjalannya waktu banyak penelitian-penelitian yang dilakukan oleh ahli matematika terhadap Ruang Lebesgue, hingga ditemukannya suatu ruang baru yakni Ruang Morrey $L^{p,\lambda}$, yang didefinisikan dengan

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}} = \sup_{B=B(a,r)} \left(\frac{1}{r^{\lambda}} \int_{B(a,r)} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Limanta, 2014).

Ruang Morrey ini merupakan perluasan dari Ruang Lebesgue yang diperhalus dengan menambah satu parameter yang bertujuan untuk melihat secara detail perilaku fungsi-fungsi di Ruang Lebesgue. Tak berhenti sampai disitu, Ruang Morrey $L^{p,\lambda}$ juga memiliki variasi yakni Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p$, atau dengan kata lain Ruang Morrey $L^{p,\lambda}$ lebih dikenal dengan nama Ruang Morrey klasik. Berikut definisi Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p$

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r>0}} |B(a,r)|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

untuk $1 \leq q \leq p < \infty$ (Limanta, 2014).

Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p$ ini juga menjelaskan sifat-sifat fungsi dengan lebih baik dari Ruang Lebesgue, sama halnya dengan Ruang Morrey klasik $L^{p,\lambda}$. Selain penjelasan Ruang Lebesgue dan Ruang Morrey sebelumnya, terdapat pula Ruang Morrey kecil m_q^p yang telah didefinisikan oleh Sawano (2018):

$$\|f\|_{m_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(a,r)} |f(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

untuk $0 < q < p < \infty$.

Berdasarkan penjelasan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa definisi Ruang Morrey klasik $L^{p,\lambda}$, Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p$, dan Ruang Morrey kecil m_q^p yakni berasal dari Ruang Lebesgue. Beberapa penelitian telah menyatakan bahwa ruang-ruang tersebut adalah Ruang Banach, di antaranya yakni Ruang Lebesgue L^p dan Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p$. Penelitian Morrey $\mathcal{M}_q^p$ dilakukan baru-baru ini oleh Limanta (2014) yang mendefinisikan bahwa $\mathcal{M}_q^p$ adalah Ruang Banach. Dari beberapa penelitian tersebut, terutama penelitian yang dilakukan oleh Limanta (2014) yang membuktikan bahwa Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p$ adalah Ruang Banach, maka penulis tertarik untuk membuktikan Ruang Morrey kecil pada Ruang Banach.

Dalam menggambarkan suatu ruang, tentu diperlukan pengetahuan mengenai ruang. Seperti penjelasan alam semesta yang tercantum dalam al-Quran surah Qaf ayat 38, yakni :

وَلَقَدْ خَلَقْنَا السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضَ وَمَا بَيْنَهُمَا فِي سِتَّةِ أَيَّامٍ وَمَا مَسَّنَا مِنْ لُغُوبٍ

"Dan sungguh, Kami telah mencipakan langit dan bumi dan apa yang antara keduanya dalam enam masa, dan Kami tidak merasa letih sedikitpun."

Pada ayat tersebut dijelaskan secara tersirat bahwa Allah telah menciptakan alam semesta, yakni berupa langit, bumi dan apa yang ada diantara keduanya. Sedangkan pada kata وَمَا بَيْنَهُمَا dapat menjadikan bukti bahwa langit dan bumi memiliki isi didalamnya dan termasuk gambaran dari ruang. Sama hal nya dengan alam semesta, alam semesta juga dikatakan ruang karena memiliki isi berupa langit dan bumi.

Dari penjelasan di atas, dapat kita lihat bahwa di dalam suatu ruang memiliki ruang. Begitu juga halnya dengan ruang-ruang yang ada dalam analisis fungsional, misalnya Ruang Banach dan Ruang Morrey kecil. Ruang Banach sebagai kiasan dari alam semesta, sedangkan Ruang Morrey kecil dimisalkan sebagai bumi, yang mana Ruang Morrey kecil ini ada atau termasuk Ruang Banach.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan penjelasan latar belakang diatas,maka rumusan masalah yang akan dibahas adalah sebagai berikut :

1. Apakah Ruang Morrey kecil termasuk Ruang Banach?
2. Apakah Ruang Morrey kecil lemah termasuk Ruang Banach?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah tersebut, maka penilitian ini bertujuan untuk :

1. Membuktikan Ruang Morrey kecil pada Ruang Banach.
2. Membuktikan Ruang Morrey kecil lemah pada Ruang Banach.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini yakni membuktikan bahwa Ruang Morrey kecil dan Ruang Morrey kecil lemah adalah Ruang Banach.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini yakni sebagai tambahan bahan kajian literatur bagi peneliti selanjutnya mengenai Ruang Banach.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini yaitu studi literatur (*literature study*). Studi literatur adalah serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat, serta mengelolah bahan penelitian. Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan untuk membuktikan Ruang Morrey kecil dan perumuman Ruang Morrey kecil pada Ruang Banach yakni sebagai berikut :

1. Membuktikan bahwa Ruang Morrey kecil dan Ruang Morrey kecil lemah adalah ruang bernorma dengan menunjukkan norma pada ruang tersebut memenuhi 4 aksioma dalam ruang bernorma.
2. Membuktikan bahwa setiap barisan Cauchy di Ruang Morrey kecil dan Ruang Morrey kecil lemah konvergen.
3. Menarik kesimpulan dari beberapa pembuktian sebelumnya.

1.7 Sistematika Penulisan

Terdapat 4 bagian sistematika penulisan yang digunakan didalam penelitian ini, yaitu :

Bab I Pendahuluan

Pada bagian pendahuluan berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bagian ini berisi teori yang akan digunakan sebagai pendukung dari rumusan masalah. Dalam penelitian ini, yang akan dikaji meliputi; ruang bernorma, Ruang Banach, Ruang Lebesgue, Ruang Morrey, Ruang Morrey kecil, Ruang Morrey kecil lemah, dan kajian agama.

Bab III Pembahasan

Pada bagian pembahasan, akan di paparkan penjelasan dan pembuktian Ruang Morrey kecil dan Ruang Morrey kecil lemah pada Ruang Banach sesuai dengan langkah-langkah penelitian.

Bab IV Penutup

Bagian ini adalah bagian akhir, di mana pada bagian ini akan dituliskan kesimpulan dari pembahasan serta saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Konvergensi

Konvergensi atau kekonvergenan merupakan salah satu kajian yang telah di bahas di analisis riil. Bartle dan Sherbert (1927) telah mendefinisikan konvergensi sebagai berikut.

Definisi 2.1. Sebuah barisan (x_n) di $\mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, atau x dikatakan limit dari (x_n), jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$, pada x_n berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.

Sebagai contoh yakni $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Bukti. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{K} < \varepsilon$. Kemudian, jika $n \geq K$ maka didapatkan $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$. Akibatnya, jika $n \geq K$, maka

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Oleh karena itu, kita dapat menyatakan bahwa barisan $\frac{1}{n}$ konvergen ke 0.

2.2 Ruang Vektor

Suatu vektor V atas lapangan $\mathbb{F}$ merupakan himpunan yang didefinisikan atas operasi penjumlahan vektor $+: V^2 \to V$, untuk setiap $x, y, z \in V$ memenuhi beberapa sifat berikut:

a. $x + (y + z) = (x + y) + z$,

b. $x + y = y + x$,

c. $0 + x = x$,

d. $x + (-x) = 0$.

(Muscat, 2014).

Pada sifat penjumlahan (a) dinamakan hukum asosiatif, sedangkan sifat penjumlahan (b) dinamakan hukum komutatif. Catatan untuk sifat penjumlahan (c), 0 merupakan suatu unsur tunggal pada V. Pada sifat yang terakhir, dapat dijelaskan untuk setiap $x \in V$, terdapat suatu unsur tunggal $x' \in V$ sedemikian sehingga $x + x' = 0$. Dengan demikian x' tersebut dinamakan invers dari x dan ditulis sebagai $-x$ (Yamamoto, 2012).

Vektor tersebut juga didefinisikan atas operasi perkalian skalar $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$, untuk setiap $x, y, z \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ memenuhi sifat-sifat berikut:

a. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

b. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

c. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,

d. $1x = x$, dengan $1 = (1,1, \cdots ,1)$

(Muscat, 2014).

Berikut terdapat beberapa catatan terkait operasi tersebut. Pertama, maksud dari penjumlahan berbeda pada ruas kanan dan ruas dari sifat perkalian (b). Pada penjumlahan $\alpha + \beta$ pada ruas kiri bermakna penjumlahan biasa secara makna, sementara $\alpha x + \beta x$ pada sisi kanan merupakan penjumlahan pada ruang vektor V. Secara prinsip, mereka perlu dibedakan. Tetapi dua penjumlahan tersebut mengikuti aturan yang sama. Sehingga agar tidak menyulitkan dalam notasi, biasanya digunakan simbol yang sama yaitu $+$ untuk kedua operasi.

Catatan yang sama juga berlaku pada sifat perkalian (c). Kondisi sifat perkalian skalar pada (a) dan (b) merujuk pada hukum distributif (Yamamoto, 2012).

2.3 Ruang Bernorma

Anton Howard (1994) mendefinisikan ruang bernorma sebagai berikut.

Definisi 2.2. Misal X adalah ruang linier atas lapangan $\mathbb{R}$. Norma adalah fungsi bernilai riil (disimbolkan sebagai $\|.\|$) dikatakan norma pada X jika memenuhi 4 aksioma berikut:

1. $\|x\| \geq 0$ untuk semua $x \in X$
2. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ untuk semua $x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (ketaksamaan segitiga)

(Anton Howard, 1994).

Contohnya adalah sebagai berikut.

Misalkan X ruang linier atas lapangan $\mathbb{R}$ dan $x = (x_1, x_2, x_3)$ di mana $x \in X$. Definisikan,

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| + |x_3|.$$

Akan dibuktikan bahwa $\|x\| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$ adalah ruang bernorma.

1. $\|x\| \geq 0$

   Karena $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, maka $|x_1|, |x_2|, |x_3| > 0$. Dengan demikian, $\|x\| = |x_1| + |x_2| + |x_3| \geq 0$. Jadi $\|x\| \geq 0$.

2. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

Akan ditunjukkan jika $\|x\| = 0$ maka $x = 0$. Misalkan X ruang linier atas lapangan $\mathbb{R}$ dan $\|x\| = 0$ sehingga $\|x\| = |x_1| + |x_2| + |x_3| = 0$, untuk setiap $x \in X$ di mana $|x_1, x_2, x_3| \geq 0$ sehingga untuk $|x_1| + |x_2| + |x_3| = 0$ haruslah nilai $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ dengan kata lain nilai dari $x = 0$. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $\|x\| = 0$ jika $x = 0$.

$\|x\| = 0$

$\|x\| = |x_1| + |x_2| + |x_3| = |0| + |0| + |0|, \qquad \leftrightarrow x = 0$

3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

$$\begin{aligned}\|\alpha x\| &= |\alpha x_1| + |\alpha x_2| + |\alpha x_3| \\ &= |\alpha||x_1| + |\alpha||x_2| + |\alpha||x_3| \\ &= |\alpha|(|x_1| + |x_2| + |x_3|) \\ &= |\alpha|\|x\|\end{aligned}$$

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Ambil sebarang nilai $y \in X$ dengan $y = (y_1, y_2, y_3)$ sehingga

$$\begin{aligned}\|x + y\| &= |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + |x_3 + y_3| \\ &= |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + |x_3| + |y_3| \\ &= |x_1| + |x_2| + |x_3| + |y_1| + |y_2| + |y_3| \\ &= \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

sehingga diperoleh $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Karena keempat aksioma terpenuhi maka terbukti bahwa $\|x\| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$ adalah ruang bernorma.

2.4 Ruang Banach

Berdasarkan definisi, Ruang Banach adalah ruang bernorma yang lengkap (Kreyszig, 1978). Suatu ruang yang diikuti dengan suatu norma dikatakan lengkap apabila untuk setiap barisan Cauchy pada ruang tersebut konvergen.

Contohnya adalah sebagai berikut.

Misalkan $X = \mathbb{R}^n$, definisikan

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Akan dibuktikan bahwa ruang linier yang diikuti $\|.\|$ tersebut adalah ruang bernorma.

1. $\|x\| \geq 0$

   Karena $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R^n$, maka $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n| > 0$. Berdasarkan definisi harga mutlak maka memenuhi $\|x\| \geq 0$.

2. $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$

   $(\rightarrow)$ Jika $\|x\| = 0$

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$0 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$0 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

$$0 = x$$

   $(\leftarrow)$ Jika $x = 0$

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} |0|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} 0\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0$$

3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, untuk setiap scalar $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\alpha x_1|^2 + |\alpha x_2|^2 + \cdots + |\alpha x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|\alpha||x_1|^2 + |\alpha||x_2|^2 + \cdots + |\alpha||x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\alpha|(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\alpha|\|x\|$$

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (ketaksamaan segitiga)

   Ambil sebarang nilai $y \in X$ dengan $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ sehingga

$$\|x + y\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|x_1 + y_1|^2 + |x_2 + y_2|^2 + \cdots + |x_n + y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|x_1|^2 + |y_1|^2 + |x_2|^2 + |y_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 + |y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} + (|y_1|^2 + |y_2|^2 + \cdots + |y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \|x\| + \|y\|$$

Karena keempat aksioma terpenuhi maka terbukti bahwa $\|x\| = (\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ adalah ruang bernorma.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa ruang tersebut adalah Ruang Banach dengan menunjukkan kelengkapannya.

(i.) Misalkan (f_m) merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}^n$,

di mana $f_m = \left(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}\right)$. Karena f_m barisan Cauchy berati untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $m, r \in N$, sedemikian sehingga

$$\|f_m - f_r\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(m)} - x_i^{(r)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon,$$

untuk $i = 1, 2, \dots, n$ tetap,

$$\left(x_i^{(m)} - x_i^{(r)}\right)^2 < \epsilon^2$$

$$\left|x_i^{(m)} - x_i^{(r)}\right| < \epsilon^2$$

(ii.) Karena $\left(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(r)}\right)$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}^n$ di mana $\mathbb{R}$ lengkap, maka barisan itu konvergen. Misalkan $x_i^{(r)}$ konvergen ke x_i. Dapat ditulis,

$$\|f_m, f\| = \|f_m - f_r\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(m)} - x_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon.$$

Maka terbukti barisan Cauchy f_m konvergen di $\mathbb{R}^n$. Sehingga terbukti $\mathbb{R}^n$ lengkap.

Pada pembahasan selanjutnya, lapangan yang akan digunakan adalah $\mathbb{R}^n$.

2.5 Ruang Lebesgue

Ruang Lebesgue merupakan ruang fungsi perumuman natural dari ruang vektor berdimensi hingga.

Definisi 2.3. Untuk $1 \leq p < \infty$, Ruang Lebesgue L^p berisi semua fungsi terukur f yang memenuhi $\|f\|_p < \infty$, di mana norma tersebut didefinisikan sebagai berikut.

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Limanta, 2014).

Karena termasuk bagian dari ruang bernorma, Ruang Lebesgue juga memiliki sifat kekonvergenan dan kriteria Cauchy sehingga termasuk Ruang Banach. Untuk $p = 2$ Ruang Lebesgue merupakan ruang Hilbert (Kreysig, 1978).

2.6 Ruang Morrey

Sebelum membahas tentang Ruang Morrey, akan didefinisikan terlebih dahulu istilah hampir di mana-mana.

Definisi 2.4. Sebuah sifat dikatakan hampir di mana-mana pada himpunan terukur E jika sifat tersebut berlaku pada semua anggota himpunan E kecuali pada himpunan $E_0 \subseteq E$ dengan ukuran dari E_0 adalah 0 (Royden, 2010).

Ruang Morrey merupakan perluasan atau biasa dikatakan perumuman dari Ruang Lebesgue. Ruang Morrey ini dikenalkan pertama kali oleh penemunya, yakni Charles B. Morrey, Jr. Limanta (2014) telah mendefinisikan Ruang Morrey sebagai berikut.

Definisi 2.5. Untuk $1 \le p \le q < \infty$, Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan himpunan semua fungsi yang terukur yang diikuti norma sebagai berikut.

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} \coloneqq \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r>0}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p$ ini juga menjelaskan sifat-sifat fungsi dengan lebih baik dari Ruang Lebesgue.

Pada penelitian yang dilakukan oleh Limanta (2014), telah dibuktikan bahwa Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p$ adalah Ruang Banach. Berikut adalah bukti bahwa Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p$ adalah Ruang Banach.

Teorema 2.6. $\|f\|_{\mathcal{M}_q^p}$ memenuhi 4 aksioma norma:

1. $\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{\substack{a\in R^n \\ r>0}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$

   Sesuai dengan definisi harga mutlak maka $|f(x)| > 0$. Dengan demikian berakibat $\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} > 0$.

2. Jika $\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} = 0$

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r>0}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$0 \le \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r>0}} R^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$0 \le \sup_{r>0} R^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{B(0,r)} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$0=\left(\int_{B(0,r)}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$0=\int_{B(0,r)}|f(x)|^p\,dx$$

$$0=f(x)$$

Jika $f(x)=0$

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p}=\sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n\\ r>0}}|B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{B(a,r)}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n\\ r>0}}R^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\left(\int_{B(a,r)}|0|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=0$$

3. Untuk setiap skalar $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\|\alpha f\|_{\mathcal{M}_q^p}=\sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n\\ r>0}}|B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{B(a,r)}|\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n\\ r>0}}|B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(|\alpha|^p\int_{B(a,r)}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n\\ r>0}}|B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}|\alpha|\left(\int_{B(a,r)}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=|\alpha|\sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n\\ r>0}}|B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{B(a,r)}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=|\alpha|\|f\|_{\mathcal{M}_q^p}$$

4. Untuk setiap $f, g \in \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f+g\|_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r>0}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)+g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r>0}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B(a,r)} |g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]$$

$$\leq \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r>0}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r>0}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|f\|_{\mathcal{M}_q^p} + \|g\|_{\mathcal{M}_q^p}$$

Jadi, $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang bernorma. Telah diketahui bahwa definisi Ruang Banach adalah ruang bernorma yang lengkap. Langkah selanjutnya akan dibuktikan kelengkapan dari $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$. Namun sebelum masuk ke pembuktian, akan ditunjukan terlebih dahulu suatu teorema yang akan digunakan dalam membuktikan kelengkapan dari $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$.

Lemma Fatou 2.7. Misalkan $\{f_n\}$ adalah barisan dari himpunan terkur tak negative di E. Jika $\{f_n\} \to f$ hampir di setiap E, kemudian $\int_E f \leq \lim\inf \int_E f_n$.

Bukti. Fungsi f adalah nonnegatif dan terukur karena merupakan batas titik dari urutan fungsi tersebut. Untuk memverifikasi ketidaksetaraan dari fungsi tersebut, perlu dan cukup untuk menunjukkan bahwa jika h adalah fungsi terukur dari dukungan hingga yang terbatas yang mana $0 \leq h \leq f$ pada E, maka

$$\int_E h \leq \liminf \int_E f_n.$$

Misalkan h adalah sebuah fungsi. Pilih $M \geq 0$ untuk setiap $|h| \leq M$ pada E. Definisikan $E_0 = \{x \in E | h(x) \neq 0\}$. Kemudian $m(E_0) < \infty$. Misalkan n adalah bilangan asli. Definisikan fungsi f_n pada E dengan

$$h_n = \min\{h, f_n\} \text{ pada } E.$$

Dapat dilihat bahwa fungsi h_n dapat diukur

$$0 \leq h_n \leq M \text{ pada } E \text{ dan } h_n \equiv 0 \text{ pada } E \sim E_0.$$

Selanjutnya, untuk setiap x pada E, karena $h\{x\} \leq f\{x\}$ dan $\{f_n(x)\} \rightarrow f(x), \{h_n(x)\} \rightarrow h(x)$. Kami menyimpulkan dari teorema konvergensi terbatas diterapkan pada urutan pembatasan hn yang seragam untuk himpunan ukuran hingga Eo, dan lenyapnya setiap h_n pada $E \sim E_0$, yang mana

$$\lim_{n\to\infty} \int_E h_n = \lim_{n\to\infty} \int_{E_0} h_n = \int_{E_0} h = \int_E h,$$

Namun, untuk setiap $n, h_n \leq fn$ pada E dan karena itu, dengan definisi integral f_n atas E, $\int_E h_n \leq \int_E f_n$. Jadi,

$$\int_E h = \lim_{n\to\infty} \int_E h_n \leq \liminf \int_E f_n.$$

Ketidaksamaan dalam Fatou's Lemma mungkin ketat (Royden, 2010).

Teorema 2.8. $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ adalah Ruang Banach.

Ambil sebarang barisan Cauchy (f_n) di $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$, yaitu $\lim_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\|_{\mathcal{M}_q^p} = 0$.

Kita dapat menemukan subbarisan dari (f_n) yang konvergen hampir di mana-mana, katakan (f_{n_i}), di mana $n_1 < n_2 \ldots$ dan juga memenuhi $\left\|f_m - f_{n_k}\right\|_{\mathcal{M}_q^p} < 2^{-k}$ untuk setiap $m \geq n_k$.

Definisikan untuk setiap $k \in \mathbb{N}$,

$$g_k = |f_{n_1}| + \sum_{i=1}^{k-1} |f_{n+1} - f_{n_i}|$$

Jelas bahwa

$$\|g_k\|_{\mathcal{M}_q^p} = \left\|f_{n_i}\right\|_{\mathcal{M}_q^p} + \sum_{i=1}^{k-1} \left\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right\|_{\mathcal{M}_q^p} < \left\|f_{n_i}\right\|_{\mathcal{M}_q^p} + 1 < \infty$$

Misalkan $g = \lim_{k\to\infty} g_k = |f_{n_1}| + \sum_{i=1}^{k-1} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$. Berdasarkan Lemma Fatou kita mempunyai $\|g\|_{\mathcal{M}_q^p} < \left\|f_{n_1}\right\|_{\mathcal{M}_q^p} + 1$. Secara umum, $g(x) < \infty$ hampir di mana - mana, sehingga deret

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} \left(f_{n_i+1}(x) - f_{n_i}(x)\right)$$

konvergen mutlak hampir semua x. Definisikan jumlah pada deret diatas sebagai $f(x)$ untuk x di mana deret tersebut konvergen dan $f(x) = 0$ untuk x lainnya.

Karena

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n_i+1} - f_{n_i}) = f_{n_k},$$

kita mempunyai

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x)$$

hampir di mana-mana.

Kita cukup membuktikan bahwa f adalah limit dari f_n, yaitu $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{M}_q^p} = 0$. Ambil $\epsilon > 0$ sebarang, karenanya terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $m, n > N$ kita mempunyai $\|f_n - f_m\|_{\mathcal{M}_q^p} < \frac{\epsilon}{2}$. Juga, karena (f_{n_k}) konvergen ke f, kita dapat pilih k sedemikian sehingga $n_k > N$ dan $\|f_n - f\|_{\mathcal{M}_q^p} < \frac{\epsilon}{2}$.

Karenanya,

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_{\mathcal{M}_q^p} &= \left\|f_n - f_{n_k} + f_{n_k} - f\right\|_{\mathcal{M}_q^p} \\ &\leq \left\|f_n - f_{n_k}\right\|_{\mathcal{M}_q^p} + \left\|f_{n_k} - f\right\|_{\mathcal{M}_q^p} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

Untuk setiap $n > N$, membuktikan bahwa $f_n \to f$. Jadi, $\mathcal{M}_q^p$ adalah Ruang Banach.

2.7 Ruang Morrey Kecil

Ruang Morrey kecil ini diperkenalkan oleh Sawano (2018). Ruang ini merupakan perluasan dari Ruang Morrey dengan batas interval (0,1).

Definisi 2.9. Misalkan $1 \leq p \leq q < \infty$. Ruang Morrey kecil $m_q^p = m_q^p(\mathbb{R}^n)$ mendefinisikan himpunan semua fungsi terukur f sedemikian sehingga

$$\|f\|_{m_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Di mana $|B(a,R)|$ menotasikan ukuran Lebesgue dari bola buka $B(a,R)$ *di* $\mathbb{R}^n$, yang berpusat di a dengan radius R.

2.8 Ruang Morrey Kecil Lemah

Selain definisi Ruang Morrey kecil Sawano (2018) juga memperkenalkan definisi tipe lemah dari Ruang Morrey kecil, yaitu:

Definisi 2.10. (Sawano, 2018)**:** Misalkan $1 \leq p < q < \infty$. Ruang Morrey kecil lemah $wm_q^p(\mathbb{R}^n) = wm_q^p$ merupakan himpunan dari fungsi-fungsi terukur, dengan $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $f \in wm_q^p$ berlaku,

$$\|f\|_{wm_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1) \\ \lambda>0}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \lambda \left(\int_{B(a,r)} \left|\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Berdasarkan definisi tersebut, Ruang Morrey kecil termuat di Ruang Morrey kecil lemah. Sedangkan hubungan antara kedua ruang tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

Teorema 2.11. *Jika* $1 \leq p < q < \infty$, *maka* $m_q^p \subseteq wm_q^p$.

Bukti. Untuk sebarang $\lambda > 0$ dan $f \in m_q^p$, maka berlaku $|f(x)| \geq \lambda \chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)$. Sehingga,

$$\|f\|_{m_q^p} \geq |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\geq |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} \left|\lambda \chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

berlaku untuk setiap bola buka dengan pusat di a dengan jari-jari $r < 1$. Dengan mengambil supremum atas $a \in \mathbb{R}^n, r \in (0,1)$, dan $\lambda > 0$, akan diperoleh

$\|f\|_{wm_q^p} \leq \|f\|_{m_q^p} < \infty$. Dengan demikian berakibat $f \in wm_q^p$. Sehingga didapat kesimpulan bahwa $m_q^p \subseteq wm_q^p$

(Mu'tazili, 2019).

2.9 Kajian Agama

Pada pembahasan sebelumnya telah dibahas mengenai pendeskripsian suatu ruang secara kiasan, yakni dengan menggunakan objek alam semesta beserta langit dan bumi. Dan pada sub bab ini, akan dijelaskan secara singkat penciptaan alam semesta. Contohnya di dalam al-Quran surat al-A'raf ayat 54, yang berbunyi :

إِنَّ رَبَّكُمُ اللَّهُ الَّذِي خَلَقَ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضَ فِي سِتَّةِ أَيَّامٍ ثُمَّ اسْتَوَىٰ عَلَى الْعَرْشِ يُغْشِي
اللَّيْلَ النَّهَارَ يَطْلُبُهُ حَثِيثًا وَالشَّمْسَ وَالْقَمَرَ وَالنُّجُومَ مُسَخَّرَاتٍ بِأَمْرِهِ ۗ أَلَا لَهُ الْخَلْقُ وَالْأَمْرُ ۗ تَبَارَكَ اللَّهُ
رَبُّ الْعَالَمِينَ

"Sesungguhnya Tuhan kamu ialah Allah yang telah menciptakan langit dan bumi dalam enam masa, lalu Dia bersemayam di atas 'Arsy. Dia menutupkan malam kepada siang yang mengikutinya dengan cepat, dan (diciptakan-Nya pula) matahari, bulan dan bintang-bintang (masing-masing) tunduk kepada perintah-Nya. Ingatlah, menciptakan dan memerintah hanyalah hak Allah. Maha Suci Allah, Tuhan semesta alam."

Sama hal nya dengan ayat pada pembahasan sebelumnya, ayat ini juga menjelaskan bahwa Allah telah sedemikian rupa merangkai alam semesta dengan menciptakan langit dan bumi. Setelah itu diikuti dengan waktu yang tertera yakni dalam enam masa. Masih belum dapat dipastikan apakah enam masa itu enam hari, enam tahun, ataupun enam periode, karena banyak perbedaan pendapat diantara ulama-ulama besar mengenai hal tersebut.

Terlepas dari penjelasan diatas, yang ditekankan adalah cara Allah mendeskripsikan alam semesta dengan menyebutkan ruang dimensi lain yang ada di dalamnya, yakni langit dan bumi. Hal ini selaras dengan penelitian yang akan penulis kaji , yakni membuktikan Ruang Morrey kecil pada Ruang Banach. Di mana pada suatu ruang yng frekuensinya lebih besar, terdapat ruang didalamnya dengan frekuensi yang lebih kecil.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Hasil dan Pembahasan

3.1.1 Ruang Morrey Kecil dalam Ruang Banach

Melalui beberapa penjelasan pada bab sebelumnya, penulis akan membuktikan Ruang Morrey kecil pada Ruang Banach yang terrangkum pada teorema berikut.

Teorema 3.1. $m_q^p(\mathbb{R}^n)$ adalah Ruang Banach.

Bukti. Ruang Banach merupakan ruang norma yang lengkap. $\|f\|_{m_q^p}$ memenuhi aksioma norma :

1. $\|f\|_{m_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$

   Sesuai dengan definisi harga mutlak maka $|f(x)| > 0$. Dengan demikian berakibat $\|f\|_{m_q^p} > 0$.

2. Jika $\|f\|_{m_q^p} = 0$

$$\|f\|_{m_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$0 \le \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} R^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$0 \le \sup_{R\in(0,1)} R^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{B(0,R)} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$0 = \left(\int_{B(0,R)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$0 = \int_{B(0,R)} |f(x)|^p \, dx$$

$$0 = f(x)$$

Jika $f(x) = 0$

$$\|f\|_{m_q^p} = \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ R \in (0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ R \in (0,1)}} R^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{B(a,R)} |0|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= 0$$

3. Untuk setiap skalar $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha f\|_{m_q^p} = \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ R \in (0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |\alpha f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ R \in (0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(|\alpha|^p \int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ R \in (0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |\alpha| \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha| \sup_{\substack{a \in \mathbb{R}^n \\ R \in (0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha| \|f\|_{m_q^p}$$

4. Untuk setiap $f, g \in m_q^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f+g\|_{m_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)+g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B(a,R)} |g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]$$

$$\leq \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|f\|_{m_q^p} + \|g\|_{m_q^p}$$

5. Ambil sebarang barisan Cauchy (f_n) di $m_q^p(\mathbb{R}^n)$, yaitu $\lim_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\|_{m_q^p} = 0$. Kita dapat menemukan subbarisan dari (f_n) yang konvergen hampir di mana-mana, katakan (f_{n_i}), di mana $n_1 < n_2 \ \ldots$ dan juga memenuhi $\left\|f_m - f_{n_k}\right\|_{m_q^p} < 2^{-k}$ untuk setiap $m \geq n_k$.

Definisikan untuk setiap $k \in \mathbb{N}$,

$$g_k = |f_{n_1}| + \sum_{i=1}^{k-1} |f_{n+1} - f_{n_i}|$$

Jelas bahwa

$$\|g_k\|_{m_q^p} = \|f_{n_i}\|_{m_q^p} + \sum_{i=1}^{k-1}\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_{m_q^p} < \|f_{n_i}\|_{m_q^p} + 1 < \infty$$

Misalkan $g = \lim_{k\to\infty} g_k = |f_{n_1}| + \sum_{i=1}^{k-1}|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$. Berdasarkan Lemma Fatou kita mempunyai $\|g\|_{m_q^p} < \|f_{n_1}\|_{m_q^p} + 1$. Secara umum, $g(x) < \infty$ hampir di mana-mana, sehingga deret

$$f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{k-1}\left(f_{n_i+1}(x) - f_{n_i}(x)\right)$$

konvergen mutlaq hampir semua x. Definisikan jumlah pada deret diatas sebagai $f(x)$ untuk x di mana deret tersebut konvergen dan $f(x) = 0$ untuk x lainnya. Karena

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1}(f_{n_i+1} - f_{n_i}) = f_{n_k},$$

kita mempunyai

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x) \text{ hampir di mana-mana.}$$

Kita cukup membuktikan bahwa f adalah limit dari f_n, yaitu $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{m_q^p} = 0$. Ambil $\epsilon > 0$ sebarang, karenanya terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $m, n > N$ kita mempunyai $\|f_n - f_m\|_{m_q^p} < \frac{\epsilon}{2}$. Juga, karena (f_{n_k}) konvergen ke f, kita dapat pilih k sedemikian sehingga $n_k > N$ dan $\|f_n - f\|_{m_q^p} < \frac{\epsilon}{2}$. Karenanya,

$$\|f_n - f\|_{m_q^p} = \|f_n - f_{n_k} + f_{n_k} - f\|_{m_q^p}$$

$$\leq \|f_n - f_{n_k}\|_{m_q^p} + \|f_{n_k} - f\|_{m_q^p}$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Untuk setiap $n > N$, membuktikan bahwa $f_n \to f$. Jadi, m_q^p adalah Ruang Banach.

3.1.2 Ruang Morrey Kecil Lemah

Setelah membuktikan Ruang Morrey kecil pada Ruang Banach, selanjutnya penulis akan membuktikan Ruang Morrey kecil lemah pada Ruang Banach. Namun sebelum membuktikan fakta tersebut, didefinisikan terlebih dahulu fungsi karakteristik sebagai berikut.

Definisi 3.2

Teorema 3.3. $wm_q^p(\mathbb{R}^n)$ adalah Ruang Banach.

Bukti. Ruang Banach merupakan ruang norma yang lengkap. $\|f\|_{wm_q^p}$ memenuhi aksioma norma :

1. $\|f\|_{wm_q^p} = \sup\limits_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1) \\ \lambda>0}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \lambda \left(\int_{B(a,r)} \left|\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$

   Sesuai dengan definisi harga mutlak maka $\left|\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p > 0$.

   Dengan demikian, tentunya $\|f\|_{wm_q^p} > 0$.

2. Jika $\|f\|_{wm_q^p} = 0$

$$\|f\|_{wm_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1) \\ \lambda>0}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \lambda \left(\int_{B(a,r)} \left|\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$0 \leq \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1) \\ \lambda>0}} R^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \lambda \left(\int_{B(a,r)} \left|\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$0 \leq \sup_{\substack{r\in(0,1) \\ \lambda>0}} R^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \lambda \left(\int_{B(0,r)} \left|\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$0 = \left(\int_{B(0,r)} \left|\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$0 = \int_{B(0,r)} \left|\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx$$

$$0 = f(x)$$

Jika $f(x) = 0$

$$\|f\|_{wm_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1) \\ \lambda>0}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \lambda \left(\int_{B(a,r)} \left|\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1) \\ \lambda>0}} R^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \lambda \left(\int_{B(a,r)} \left|\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(0)\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= 0$$

3. Untuk setiap skalar $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha f\|_{wm_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1) \\ \lambda>0}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \lambda \left(\int_{B(a,r)} \left|\alpha\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1) \\ \lambda>0}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\lambda\left(|\alpha|^p \int_{B(a,r)} \left|\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1) \\ \lambda>0}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\lambda|\alpha|\left(\int_{B(a,r)} \left|\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha| \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1) \\ \lambda>0}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\lambda\left(\int_{B(a,r)} \left|\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha|\|f\|_{wm_q^p}$$

4. Untuk setiap $f, g \in wm_q^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f+g\|_{wm_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1) \\ \lambda>0}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\lambda\left(\int_{B(a,r)} \left|\chi_{\{x:|f(x)+g(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1) \\ \lambda>0}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\lambda\left[\left(\int_{B(a,r)} \left|\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B(a,r)} \left|\chi_{\{x:|g(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$\leq \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1) \\ \lambda>0}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\lambda\left(\int_{B(a,r)} \left|\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1) \\ \lambda>0}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\lambda\left(\int_{B(a,r)} \left|\chi_{\{x:|g(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|f\|_{wm_q^p} + \|g\|_{wm_q^p}$$

5. Bukti kelengkapan wm_q^p.

   wm_q^p dikatakan lengkap jika untuk setiap barisan Cauchy di wm_q^p konvergen di wm_q^p. Berdasarkan Teorema 3.1, diketahui bahwa m_q^p merupakan Ruang Banach, artinya untuk setiap f_n yang merupakan barisan Cauchy di m_q^p konvergen di m_q^p. Sehingga

$$\|f_n - f\|_{m_q^p} < \varepsilon$$

   Kemudian, jika melihat sifat inklusi Teorema 2.9 mengakibatkan

$$\|f\|_{wm_q^p} \leq \|f\|_{m_q^p}$$

   Sehingga $f_n - f$ di m_q^p juga akan berada di wm_q^p, dan

$$\|f_n - f\|_{wm_q^p} \leq \|f_n - f\|_{m_q^p} < \varepsilon$$

$$\|f_n - f\|_{wm_q^p} < \varepsilon.$$

   Dengan demikian untuk setiap $f_n \in m_q^p$ yang merupakan barisan Cauchy, konvergen. Jadi benar bahwa wm_q^p juga merupakan Ruang Banach.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembuktian yang telah dibahas, maka penulis dapat menyimpulkan dari penelitian ini yaitu :

1. Ruang Morrey kecil $m_q^p(\mathbb{R}^n)$ adalah Ruang Banach.
2. Ruang Morrey kecil lemah $wm_q^p(\mathbb{R}^n)$ adalah Ruang Banach.

4.2 Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya, peneliti bisa mencari definisi berbagai ruang lain. Kemudian membuktikan norma dari ruang tersebut ke sifat-sifat dari Ruang Banach dengan penulisan yang lebih baik.

DAFTAR RUJUKAN

Bartle, Robert G. dan Sherbert Donald R. 1927. *Introduction to Real Analisys Fourth Edition*. Amerika : The United State of Amerika.

Howard, Anton. 1994. *Elementary Linear Algebra*. Amerika : The United State of Amerika.

Kadets, Vladimir. 2010. A *Course in Functional Analysis and Measure Theory*. Ukraine: Karazin Kharkiv National University.

Kreyzig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York: John Wiley & Sons.

Limanta, Kevin Mandira. 2014. *Ruang Morrey Kuat dan Lemah*. Program Studi Sarjana Matematika. FMIPA. Institut Teknologi Bandung.

Massopust, P. R. 2016. *Fractal Functions, Fractal Surfaces, and Wavelets*. Germany: Centre of Mathematics Technische Universität München.

Mu'tazili, Aqfil. 2019. *Sifat Inklusi dan Beberapa Konstanta Geometri untuk Ruang Morrey Kecil.* Tesis dipublikasikan. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Muscat, Joseph. 2014. *Functional Analysis: An Introduction to Metric Spaces, Hilbert Spaces, and Banach Algebras*. New York: Springer.

Royden, H. L. dan Ftzpatrick. 2010. *Real Analysis, Fourth Edition*. London: Pearson Education, Inc.

Sawano, Yoshihiro. 2018. *A thought on generalized Morrey spaces.*

Stein, Elias M. dan Shakarchi, Rami. 2011. *Functional Analysis an Introduction to Further Topics in Analysis*. New Jersey: Princeton University Press.

RIWAYAT HIDUP

Meiditama Firmandio Sanuribas akrab dipanggil Tama, lahir di Malang pada tanggal 15 Mei 1998. Tama adalah anak pertama dari dua bersaudara atas pasangan Sario dan Holifah Ika Nurhayati, S.Pd. Tama tinggal di Jl. Simpang Sulfat Barat II, Kel. Pandanwangi, Kec. Blimbing, Kota Malang. Tama memiliki hobi olahraga. Beberapa cabang olahraga dapat ia kuasai dengan baik. Tama memiliki cita-cita yang sangat kuat, yakni menjadi TNI-AD dan juga menjadi Koki handal.

Adapun riwayat pendidikan tama yakni: SDN Kesatrian I, SMPN 6 Malang, MAN 3 Malang, dan UIN Maliki Malang. Ketika duduk dibangku kelas 4 SD, untuk pertama kalinya Tama meraih prestasi, yakni Juara 1 Kejuaraan Karate tingkat Kota Malang, lalu disusul dengan prestasi-prestasi lainnya semasa SD. Pada waktu SMP pun juga sama, Tama juga meraih beberapa prestasi dibidang karate, diantaranya Juara 1 pada Kejuaraan Karate Se- Jawa Bali di Kota Pasuruan, Juara 1 pada Kejuaraan Nasional Malang Open, dan lain-lain. Pada waktu duduk di bangku MAN, Tama juga meraih cukup banyak prestasi. Namun berbeda dengan jenjang-jenjang sebelumnya, pada waktu MAN Tama menjuarai kejuaraan di bidang futsal. Diantaranya: Juara 1 pada Olimpiade AKSIOMA se- Jawa Timur, Juara 2 pada Turnamen Malang Futsal League, Juara 2 pada Turnamen Olympico UB, dan Juara 3 pada Turnamen Specs Malang Futsalogy. Adapun prestasi yang diraih pada jenjang perkuliahan yakni sebagai peserta Lomba Karate PIONIR 2019.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Meiditama Firmandio Sanuribas
NIM	: 16610109
Fakultas/Jurusan	: Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi	: Ruang Morrey Kecil pada Ruang Banach
Pembimbing I	: Dr. Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II	: Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	04 Februari 2020	Konsultasi Bab I & Bab II	1.
2.	07 Februari 2020	Konsultasi Bab I, II, & III	2.
3.	8 Februari 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan	3.
4.	10 Februari 2020	ACC Bab I & Bab II	4.
5.	17 Februari 2020	Konsultasi Bab III	5.
6.	20 Februari 2020	Pembenahan Bab III	6.
7.	20 Februari 2020	Konsultasi Bab IV	7.
8.	28 April 2020	KonsultasiAbstrak	8.
9.	10 Februari 2020	ACC Kajian Keagamaan	9.
10.	12 April 2020	ACC Keseluruhan	10.
11.	12 April 2020	ACC Keseluruhan	11.

Malang, 02 Mei 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001