PENERAPAN METODE SEMI ANALITIK PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFUSI MENGGUNAKAN METODE GARIS

SKRIPSI

OLEH
SELY AYU RAHMASARI
NIM. 16610062

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

PENERAPAN METODE SEMI ANALITIK PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFUSI MENGGUNAKAN METODE GARIS

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Sely Ayu Rahmasari
NIM. 16610062

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

PENERAPAN METODE SEMI ANALITIK PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFUSI MENGGUNAKAN METODE GARIS

SKRIPSI

Oleh
Sely Ayu Rahamsari
NIM. 16610062

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal April 2020

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Mohammad Jamhuri, M.Si	Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIP.19810502 200501 1 004	NIDT.19900511 20160801 1 057

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PENERAPAN METODE SEMI ANALITIK PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFUSI MENGGUNAKAN METODE GARIS

SKRIPSI

Oleh
Sely Ayu Rahamsari
NIM. 16610062

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana (S.Mat)
Tanggal 15 April 2020

Penguji Utama	: Dr. Hairur Rahman, M.Si	………………
Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	………………
Sekretaris Penguji	: Mohammad Jamhuri, M.Si	………………
Anggota Penguji	: Muhammad Khudzaifah, M.Si	………………

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Sely Ayu Rahmsari
NIM	: 16610062
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Penerapan Metode Semi Analitik Pada Penyelesaian Persamaan Difusi Menggunakan Metode Garis

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 09 Mei 2020
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
TGL. 20
245A3AHF337061987
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Sely Ayu Rahmasari
NIM. 16610060

MOTTO

"Sertakan Tuhanmu Dalam Setiap Langkahmu"

(Sely, 2020)

PERSEMBAHAN

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Ayahanda Mujiono dan Ibunda Sutinggen tercinta, yang senantiasa dengan ikhlas dan istiqomah mendoakan, memberi nasihat, semangat, dan kasih sayang yang tak ternilai, saudara kembar tersayang Sela Ayu Rahmasari, kakak tersayang Moch. Rifqi Aji Pratama dan Mahdi Winata. Serta saudara (Lilik dan Elsa) dan teman Ngiler Nlayap yang selalu menjadi kebanggan bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibraim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terimakasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak dan Ibu serta kakak tercinta (Sukma Intan dan Nansy Dwi Kumalasari) yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2016 khususnya Ngiler (Iqbalia Ilham PP, Alfu Alfinnikmah, Talitha Nariswari F, Arina Fitri R, Lailatul Maziyah WM, Mega Putri S, Istiqomah Putri S, Rutbah, Misbah F, dan Hadi), serta teman terapan (Helliatus Sa'adah, Rina Setyawati, dan Soimahtul Maghfiroh).
9. Sahabat bermain SMA Nglayap (Momon, Demot, Handy, Mamat, Fariki, Kepi, Fariki, Dodit, Endro, Enggar, Colit, Ojun, Evan, Ryan dan Samid) terimakasih perjalanan yang tak terlupakan serta canda tawa yang kita lewati bersama.
10. Teman KKM Desa Dengkol terima kasih atas dukungan dan motivasi yang tak terlupakan serta kenang-kenangan indah bersama dalam menggapai impian dan selalu menemani, membantu, dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi panulis dan bagi pembaca. *Aamiin.*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 15 April 2020

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Rahmasari, Sely Ayu, 2020. **Penerapan Metode Semi Analitik pada Penyelesaian Persamaan Difusi Menggunakan Metode Garis.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si, (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Kata Kunci: Metode Garis, Persamaan Difusi, Solusi Semi Analitik.

Penelitian ini membahas tentang penyelesaian persamaan difusi yang merupakan persamaan diferensial parsial linier menggunakan metode garis. Persamaan diferensial parsial linier dapat diselesaikan secara analitik maupun numerik. Metode garis merupakan salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial linier. Langkah pertama metode garis adalah mendiskritkan turunan terhadap x menggunakan metode beda hingga pusat orde-2 sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial biasa, kemudian diubah menjadi bentuk persamaan matriks. Langkah kedua, yaitu menyelesaikan sistem persamaan diferensial biasa yang telah diperoleh secara analitik. Kemudian menghitung galat dihasilkan dengan mengurangkan hasil dari solusi eksak dan solusi hampirannya. Perhitungan galat pada persamaan difusi menggunakan metode garis menghasilkan galat yang sangat kecil atau mendekati nol. Disimpulkan bahwa metode garis baik untuk menyelesaikan persamaan difusi.

ABSTRACS

Rahmasari, Sely Ayu. 2020. **Application of Semi-Analytical Method for Solving Diffusion Equation Using The Method of Lines**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si, (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Keyword: The Method of Lines, Diffusion Equation, Semi-Analytical Solution.

This study discusses the solution of the diffusion equation which is a linear partial differential equation using the method of lines. Linear partial differential equations can be solved analytically or numerically. The method of lines is a numerical method that can be used to solve linear partial differential equations. The first step of the method of lines is to the discrete derivative of x using the 2nd order center finite difference method so that a system of ordinary differential equations is obtained then converted to the form of a matrix equation. The second step is to solve the system of ordinary differential equations that have been obtained analytically. Then calculate the resulting error by subtracting the results from the exact solution and analytical solution. Error calculation in the diffusion equation using the method of lines produces very small or near zero errors. It was concluded that the method of lines is good for solving diffusion equations.

المخلص

سيلي أيو رحماساري، 2020. **تطبيق الطريقة شبه التحليلي في حل معادلة الانتشار باستخدام طريقة الخط**. بحث جامعي. ثعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم في مالانج. المشرف: (1) محمد جمهوري، الماجستير ، (2) محمد خضيفة، الماجستير

الكلمات الرئيسية: طريقة الخط، معادلة الانتشار، الحل شبه التحليلي.

بحثت الباحثة من هذا البحث عن حل معادلة الانتشار التي هي معادلة تفاضلية جزئية خطية باستخدام طريقة الخط. يمكن حل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية تحليليا أو عد د يا. طريقة الخط هي إحدى الطرق العددية التي يمكن استخدامها لحل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية. الخطوة الأولى في طريقة الخط هي وصف المشتق x باستخدام طريقة الاختلاف إلى مركز الترتيب –الثنية ليتم الحصول على نظام المعادلة التفاضلية العادية، ثم تحويلها إلى شكل معادلة المصفوفة. الخطوة الثانية هي حل نظام المعادلة التفاضلية العادية التي تم الحصول عليها تحليليًا. ثم حساب الخطأ الناتج بطرح نتائج الحل التحليلية والحل تقر يبية، حساب الخطأ في معادلة الانتشار باستخدام طريقة الخط ينتج خطأ صغير جدًا أو قريب من الصفر. وخلصت الباحثة بأن طريقة الخط جيدة لحل معادلة الانتشار.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Terdapat beberapa permasalahan yang ditemukan dalam kehidupan sehari-hari yang dapat dimodelkan menggunakan persamaan matematika. Bentuk persamaan yang biasa digunakan adalah persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial parsial merupakan persamaan yang memuat turunan parsial paling sedikit satu atau lebih variabel terikat terhadap dua atau lebih variabel bebas (Zill, 2009).

Persamaan difusi adalah persamaan diferensial parsial yang mempresentasikan berpindahnya suatu zat dalam pelarut dari bagian berkonsentrasi tinggi ke bagian berkonsentrasi rendah tanpa dipengaruhi oleh kecepatan gerak mediumnya. Perbedaan konsentrasi yang ada pada dua larutan disebut gradien konsentrasi. Bentuk dari persamaan difusi adalah:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dimana t adalah variabel waktu, x adalah variabel ruang, dan k adalah konstanta. Persamaan difusi termasuk persamaan diferensial parsial karena mengandung turunan parsial, yaitu turunan dengan dua variabel bebas x dan t (Duran, 2010).

Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan difusi. Salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan difusi adalah metode garis (*Method of Lines*). Metode ini sangat efisien dalam perhitungan karena menghasilkan solusi akurat dengan waktu yang ditempuh juga sedikit. Selain itu, metode garis juga mudah dalam menentukan kestabilannya dengan memisahkan antara variabel ruang dan waktu Tahapan awal dari metode garis adalah mengubah bentuk persamaan diferensial parsial ke dalam bentuk persamaan diferensial biasa (Sadiku, 1997).

Pada penelitian ini menggunakan metode semi-analitik yang memberikan solusi seri. Metode semi analitik merupakan metode yang tidak sepenuhnya analitik ataupun numerik. Dalam penelitian ini persamaan difusi akan didiskritkan menggunakan metode numerik, kemudian mencari solusi analitiknya (Dian, 2019).

Islam mengajarkan bahwa setiap masalah ada beberapa penyelesaian yang dapat diambil jalan keluarnya atau solusinya. Ketika suatu masalah itu sulit untuk diselesaikan maka pasti ada jalan keluarnya atau penyelesaian yang lain. Sebagaimana dalam Firman-Nya pada Qur’an Surah Al-Insyirah, ayat 5-6:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Artinya: “Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (5) Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (6)”. (QS. Al-Insyirah (94):5-6).

Dalam suatu riwayat dikemukakan bahwa ketika turun ayat ini (S.94:2-6) Rasulullah SAW. bersabda: “Bergembiralah kalian karena akan datang kemudahan bagi kalian. Kesusahan tidak akan mengalahkan dua kemudahan”. (Diriwayatkan oleh Ibnu Jarir yang bersumber dari al-Hasan).

Dari penjelasan ayat diatas dapat diketahui bahwa ada kemudahan yang telah dikaruniakan Allah pada hamba-Nya sebagai beberapa solusi alternatif. Begitu juga penggunaan dalam menyelesaikan suatu model matematika persamaan diferensial difusi. Jika solusi analitik dari suatu persamaan belum ditemukan penyelesaianya, maka dapat menggunakan metode numerik dengan pendekatan tertentu sehingga didapatkan suatu solusi numeriknya.

Penelitian rujukan yang digunakan adalah penelitian yang dilakukan oleh (Bakodah, 2015) yang menerapkan metode garis pada persamaan gelombang di air dangkal. Langkah pertama yang dilakukan adalah mengganti turunan parsial yang bergantung pada variabel ruang, yaitu $\frac{\partial u}{\partial x}$ dan $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dengan metode beda hingga sehingga menghasilkan sistem persamaan diferensial biasa yang bergantung pada t. Kemudian, menyelesaikan persamaan diferensial biasa dengan metode Runge-Kutta.

Berdasarkan paparan diatas, maka penelitian ini fokus pada metode semi analitik untuk menyelesaian persamaan difusi menggunakan Metode Garis. Sehingga, penelitian ini berjudul "Penerapan Metode Semi Analitik pada Penyelesaian Persamaan Difusi Menggunakan Metode Garis".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimanakah penerapan metode semi-analitik pada penyelesaian persamaan difusi menggunakan metode garis?
2. Bagaimanakah galat yang dihasilkan?

1.3 Tujuan Penelitian

Bedasarkan rumusan masalah yang disebutkan maka didapatkan tujuan pada penelitian ini yaitu:

1. Menentukan penerapan metode semi-analitik pada penyelesaian persamaan difusi menggunakan metode garis.
2. Menghitung galat yang dihasilkan.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah untuk mengemukakan penerapan metode semi analitik pada penyelesaian persamaan difusi menggunakan metode garis dan galat yang dihasilkan. Serta dapat dijadikan literatur penunjang dan bahan perbandingan dengan menggunakan metode lain.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Pada penelitian ini penulis mengambil persamaan difusi linier yang merujuk pada (Jamhuri, 2013) sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ pada } \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

   Dengan kondisi batas yang diberikan:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

   dan kondisi awal yang diberikan:

$$u(x,0) = 4\sin(2x)$$

2. Untuk turunan terhadap x akan didiskritkan dengan menggunakan metode beda hingga pusat orde 2.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan difusi dengan metode garis yaitu:

1. Menerapkan metode garis pada persamaan difusi.
   a. Mendiskritkan turunan terhadap x menggunakan metode bada pusat orde-2 sedemikian hingga diperoleh sistem persamaan diferensial biasa.

b. Menuliskan sistem persamaan diferensial biasa yang diperoleh dalam bentuk persamaan matriks.

c. Menyelesaikan sistem persamaan matriks yang telah diperoleh dengan menggunakan metode analitik.

2. Menghitung galat yang dihasilkan
3. Interpretasi hasil penyelesaian.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan mengenai gambaran umum teori yang mendasari pembahasan penelitian. Pada bab ini diuraikan tentang persamaan difusi, metode beda hingga pada persamaan difusi, penyelesaian sistem persamaan difensial biasa, metode garis, metode semi-analitik, galat dan kajian agama.

Bab III Pembahasan

Bab ini menjabarkan tentang hasil dari penelitian yaitu penerapan metode semi analitik pada penyelesaian persamaan difusi menggunakan metode garis, penyelesaian metode semi analitik pada penyelesaian persamaan difusi menggunakan metode garis, menghitung galat yang dihasilkan, dan konsep difusi menurut Al-Qur’an.

Bab IV Penutup

Bab ini terdiri dari kesimpulan mengenai penelitian ini dan saran-saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Difusi

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) merupakan persamaan yang memuat satu atau lebih turunan parsial dengan melibatkan paling sedikit dua atau lebih peubah bebas. Persamaan diferensial parsial yang dapat dimodelkan secara matematis pada bidang kimia fisik adalah persamaan difusi. Menurut Holman (1994) peristiwa yang mempresentasikan berpindahnya suatu zat dalam suatu pelarut dari bagian yang berkosentrasi tinggi menuju bagian yang berkonsentrasi rendah disebut difusi. Terdapat contoh sederhana dari difusi yaitu pada saat melakukan pemberian gula pada cairan teh tawar yang lambat laun cairan akan menjadi manis.

Persamaan difusi merupakan salah satu contoh persamaan diferensial parsial linier tipe parabolik dimana persamaan turunan orde kedua terhadap ruang dan persamaan turunan orde pertama terhadap waktu (Laili, 2004). Oleh karena itu, kita harus menentukan dua kondisi batas untuk ketergantungan pada ruang (x), dan satu kondisi awal untuk ketergantungan pada waktu (t).

Persamaan difusi satu dimensi pada domain [0,L] dapat dituliskan sebagai masalah nilai awal dan batas seperti berikut:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathrm{k}\frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0,L) \tag{2.1}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = a, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in [0,L]$$

Dimana $u(x,t)$ merupakan besar konsentrasi pada waktu t dan spasial x, koefisien difusi dinotasikan dengan k dan $f(x)$ adalah fungsi awal sebaran konsentrasi pada domain (Zain, 2018).

Dalam mencari solusi eksak pada persamaan difusi dapat menggunakan metode pemisah variabel. Metode pemisah variabel adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial. Metode ini memungkinkan penulisan ulang persamaan agar setiap variabel berada pada sisi yang berbeda. contoh penyelesaian solusi eksak pada persamaan difusi menggunakan metode pemisah variabel:

Diberikan persamaan difusi sebagai berikut:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{pada } 0 < x < \pi, t > 0 \tag{2.2}$$

Dengan kondisi batas

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \tag{2.3}$$

dan kondisi awal

$$u(x,0) = 4\sin(2x) \tag{2.4}$$

Misalkan $u(x,t) = X(x)T(t)$ dan substitusikan pemisalan tersebut pada (2.2) sehingga diperoleh

$$X(x)T'(t) = 3X''(x)T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{3T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{2.5}$$

Ruas kiri dari (2.5) hanya bergantung pada variabel t saja, sedangkan ruas kanan hanya bergantung pada variabel x saja, kondisi tersebut hanya mungkin dipenuhi jika keduanya merupakan konstanta yaitu:

$$\frac{T'(t)}{3T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \tag{2.6}$$

Misalkan $\lambda = \beta^2$, maka persamaan (2.6) dapat dituliskan menjadi dua buah ODE yaitu

$$X''(x) + \beta^2 X(x) = 0 \tag{2.7}$$

dan

$$T'(t) + 3\lambda T(t) = 0 \tag{2.8}$$

Solusi dari (2.7) adalah

$$X(x) = C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}$$

atau dalam bentuk sinusoidal

$$X(x) = Acos(\beta x) + Bsin(\beta x) \tag{2.9}$$

Kondisi $u(0,t) = 0$ memberikan $A = 0$, sehingga

$$X(x) = Bsin(\beta x)$$

Selanjutnya kondisi $u(\pi,t) = 0$ memberikan

$$\sin(\beta\pi) = 0$$

$$\beta\pi = arcsin0$$

$$\beta\pi = n\pi, \{n = 0,1,2,\ldots\}$$

$$\beta = n$$

Sehingga diperoleh

$$X_n(x) = \sin(nx) \tag{2.10}$$

Solusi dari persamaan (2.8) adalah

$$T(t) = Ce^{-3\lambda t}$$

Karena $\lambda = \beta^2 = n^2$, maka

$$T_n(t) = Ce^{-3n^2 t} \tag{2.11}$$

Dari persamaan (2.10) dan (2.11), maka diperoleh solusi

$$u_n(x,t) = C_n e^{-3n^2 t} \sin(nx)$$

Karena kombinasi linier dari solusi persamaan difusi adalah solusi, maka

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-3n^2 t} \sin(nx) \tag{2.12}$$

Selanjutnya gunakan kondisi awal (2.4)

$$u(x,0) = 4\sin(2x)$$

sehingga diperoleh

$$4\sin(2x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx)$$

dimana,

$$C_n = \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2x)\sin(nx)dx$$

$$= \begin{cases} 0, & jika\ n \neq 2 \\ 4 & jika\ n = 2 \end{cases}$$

Substitusikan kembali C_n pada (2.12) sehingga diperoleh solusi eksaknya:

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{e}^{-12\mathrm{t}} \sin(2x) \tag{2.13}$$

2.2 Metode Beda Hingga pada Persamaan Difusi

Metode beda hingga (*finite difference method*) merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan difusi. Metode ini memberikan hasil yang akurat dalam melakukan penekatan numerik. Metode beda hingga memanfaatkan deret taylor dengan cara mengaproksimasi atau melalui pendekatan turunan-turunan persamaan diferensial parsial menjadi sistem persamaan linier. Deret Taylor merupakan dasar pemikiran metode beda hingga untuk menyelesaikan persamaan difusi secara numerik. Jika suku-suku deret Taylor tidak berhingga banyaknya, maka akan dipotong sampai suku tertentu (suku orde ke-*n*).

Rumus turunan numerik yang diturunkan dengan menggunakan bantuan deret Taylor dibagi menjadi tiga hampiran yaitu hampiran beda mundur, hampiran beda maju dan hampiran beda pusat. Misalkan diberikan nilai-nilai x di $x_0 - h, x_0$ dan $x_0 + h$, serta nilai fungsi untuk nilai – nilai x tersebut. Titik-titik yang diperoleh adalah (x_{-1}, f_{-1}), (x_0, f_0) dan (x_1, f_1) yang dalam hal ini $x_{-1} = x_0 - h$ dan $x_1 = x_0 + h$ dengan h adalah jarak. Terdapat tiga pendekatan dalam menghitung nilai $f'(x_0)$, dan $f''(x_0)$ yaitu (Noviyani dkk, 2019):

Tabel 2.1 Turunan Numerik Beda Hingga

Beda Hingga		**Rumus**
Beda Maju	Turunan Pertama	$f'(x_0) = \dfrac{f_1 - f_0}{h}$
	Turunan Kedua	$f''(x_0) = \dfrac{f_2 - 2f_1 + f_1}{h^2}$
Beda Mundur	Turunan Pertama	$f'(x_0) = \dfrac{f_0 - f_{-1}}{h}$
	Turunan Kedua	$f''(x_0) = \dfrac{f_0 - 2f_{-1} + f_{-2}}{h^2}$
Beda Pusat	Turunan Pertama	$f'(x_0) = \dfrac{f_1 - f_{-1}}{2h}$
	Turunan Kedua	$f''(x_0) = \dfrac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$

Pada penelitian ini diberikan persamaan difusi sebagai berikut:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \text{ pada } 0 < x < \pi, t > 0 \qquad (2.14)$$

Dengan kondisi batas yang diberikan:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

dan kondisi awal yang diberikan:

$$u(x,0) = 4\sin(2x)$$

Langkah awal yaitu mengganti turunan ruang pada persamaan difusi dengan menggunakan metode beda hingga pusat. Transformasi beda pusat untuk turunan kedua variabel ruang (orde 2) sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2}$$

2.3 Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Biasa

Suatu sistem PDB orde satu dengan n persamaan yang disajikan sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_m$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_m$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_m}{dt} = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m$$

Dapat ditulis dalam bentuk seperti berikut:

$$\frac{dX}{dt} = AX \tag{2.15}$$

Dimana:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Sistem persamaan (2.15) melibatkan $X = X(t)$ sebagai fungsi terhadap variabel waktu (t), yang memiliki turunan pertama kontinyu. Notasi $\frac{dX}{dt}$ menyatakan turunan pertama dari fungsi terhadap variabel t, notasi tersebut sering juga dilambangkan sebagai $\frac{dX(t)}{dt}$. Pada sistem persamaan diferensial (2.15) terdapat parameter real A, yang nilainya bervariasi. Persamaan (2.15) menyatakan bahwa untuk setiap nilai t hubungan

$$X'(t) = AX(t)$$

Untuk mencari solusi persamaan (2.15) dimisalkan $X = ve^{\lambda t}$ maka $\frac{dX}{dt} = \lambda ve^{\lambda t}$ lalu disubstitusikan bentuk ini kedalam persamaan (2.15) sehingga diperoleh

$$\lambda ve^{\lambda t} = \mathrm{A}ve^{\lambda t}$$

Kemudian dapat disederhanakan menjadi

$$Av = \lambda v$$

Dengan menyatakan semua suku ke ruas kiri diperoleh

$$(A - \lambda I)v = 0$$

dimana I adalah matriks identitas dan 0 adalah vektor nol. Karena v merupakan suatu vektor yang bukan nol, maka bilangan λ adalah suatu nilai eigen untuk matriks A jika dan hanya jika $(A - \lambda I)$ tidak dapat diinverskan. Sehingga

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{2.16}$$

Persamaan (2.16) disebut persamaan karakteristik untuk sistem persamaan (2.15). Akar-akar dari persamaan karakteristik tersebut disebut dengan nilai eigen dari A. Kemudian dinotasikan nilai eigen dengan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Untuk setiap nilai eigen λ_i, terdapat korespodensi suatu solusi tak nol $v^{(i)}$, $v^{(i)}$ disebut vektor eigen, untuk $i = 1,2, \dots, n$.

Untuk setiap pasangan nilai eigen dan vektor eigen (λ_i, v^i) maka ada suatu vektor solusi yang bersesuaian $X^i(t) = v^i e^{\lambda_i t}$ dari sistem persamaan (2.15). Jika nilai eigennya adalah $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dan semuanya berbeda, maka akan ada n solusi yaitu:

$$M(t) = \left(x^1(t), x^2(t), \dots, x^i(t)\right) = (v^1 e^{\lambda_1 t}, v^2 e^{\lambda_2 t}, \dots, v^n e^{\lambda_n t})$$

$M(t)$ disebut matriks solusi. Diasumsikan $x^i(t)$ adalah solusi dari persamaan (2.15) dan C_i adalah bilangan skalar untuk $i = 1,2, \dots, n$. Menggunakan sifat dari diferensial dan matriks perkalian, sehingga kombinasi linier $C_1 x^1(t) + \cdots + C_n x^i(t)$ adalah solusi.

Dimisalkan $x^i(t) = v^n e^{\lambda_n t}$, maka solusi umum dari matriks A adalah kombinasi linier dari

$$X(t) = C_1 v^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 v^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n v^{(n)} e^{\lambda_n t} \qquad (2.17)$$

dimana konstanta $C_1, C_2, \dots, C_n$ dapat diperoleh dengan memberikan sebuah nilai awal pada persamaan (2.15) (Conte&Boor, 1993).

2.4 Metode Garis

Metode garis pertama kali dikenalkan oleh matematikawan asal Jerman bernama Erich Rothe pada tahun 1930. Metode ini banyak diaplikasikan pada beberapa masalah di bidang fisika teori. Metode Garis merupakan salah satu metode numerik yang dapat menyelesaikan persamaan difusi (Pregla, 2008:15).

Pencarian solusi dalam persamaan difusi pada dasarnya terdiri dari dua langkah besar. Pertama mengganti variabel turunan ruang dengan pendekatan beda hingga. Kemudian setelah diperoleh sistem persamaan diferensial biasa maka langkah kedua adalah menyelesaikan persamaan diferensial biasa dengan metode penyelesaian pada persamaan diferensial biasa, seperti Metode Euler, Metode Runga-Kutta dan lainnya (Hamdi dkk, 2009).

Beberapa peneliti menerapkan metode garis untuk menyelesaiakan persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial (Sadiku & Obiozor, 1997). Diberikan persamaan difusi berikut yang akan diselesaikan dengan metode garis, yaitu:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{2.18}$$

Dimana t adalah variabel waktu, x adalah variabel ruang, dan k adalah koefisien difusi. Tahapan pertama yaitu mengganti turunan variabel ruang dengan pendekatan beda hingga, yaitu:

$$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{(\Delta \mathrm{x})^2} \tag{2.19}$$

dimana i adalah indeks yang menunjukkan posisi sepanjang garis x dan Δx adalah interval x sepanjang garis, yang diasumsikan konstan. Jadi nilai akhir sebelah kiri dari x adalah $i = 0$, dan nilai akhir sebelah kanan dari x adalah $i = M$ atau dapat dikatakan bahwa garis x memiliki M titik. Sehingga pendekatan dengan metode garis pada persamaan (2.18) adalah

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = k\frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{(\Delta \mathrm{x})^2}, \quad 0 \le i \le M \tag{2.20}$$

Pada persamaan (2.20) ditulis sebagai bentuk persamaan diferensial biasa karena hanya terdapat satu variabel bebas, yaitu t. Persamaan (2.20) mempresentasikan sistem yang terdiri dari M PDB yang terbentuk. Dengan kondisi batas yang diberikan:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

dan kondisi awal yang diberikan:

$$u(x,0) = f(x)$$

Jadi solusi dari sistem PDB adalah

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_{M-1}(t), u_M(t)$$

yang merupakan mendekatan terhadap $u(x,t)$ pada titik $i = 1,2,\dots,M$

Setelah selesai memperoleh sistem persamaan diferensial biasa, kemudian menyelesaiakan persamaan yang dihasilkan pada langkah pertama dengan invers tranformasi menggunakan bentuk matriks dan nilai eigen. Dengan mensubtitusikan kondisi batas maka akan diperoleh hasil numeriknya. Maka diperoleh hasil bahwa solusi numerik dengan metode garis bisa didekati solusi eksaknya.

2.5 Metode Semi Analitik

Metode semi analitik merupakan metode yang tidak sepenuhnya analitik ataupun numerik. Metode ini memberikan solusi semi analitik untuk persamaan linier dan dapat digunakan untuk mendapatkan solusi seri eksplisit untuk persamaan non-linear. Dalam penelitian ini persamaan difusi akan didiskritkan menggunakan metode numerik, kemudian mencari solusi analitiknya (Venkat, 2003).

2.6 Galat

Penyelesaian suatu persamaan matematik secara numerik hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak dari penyelesaian analitik. Dalam penyelesaian numerik tersebut terdapat kesalahan terhadap nilai eksak, sehingga terdapat selisih antar keduanya yang disebut galat (*error*). Terdapat tiga macam galat yaitu galat bawaan, galat pembulatan (*round-off error*) dan galat pemotongan (*truncation error*) (Triatmodjo, 2002).

Dalam penelitian ini, hubungan antara nilai eksak, nilai perkiraan, dan galat dapat diberikan dalam bentuk berikut

$$y = \tilde{y} + \varepsilon \quad (2.21)$$

Dengan y adalah nilai eksak, $\tilde{y}$ nilai perkiraan, dan ε menyatakan galat terhadap nilai eksak. Persamaan (2.21) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\varepsilon = y - \tilde{y} \quad (2.22)$$

Dari persamaan (2.22) dapat dikatakan bahwa galat adalah selisih antara nilai eksak dan nilai perkiraan. Karena selisih tidak bernilai negatif, maka persamaan (2.22) dapat ditulis menjadi (Munir, 2006):

$$\varepsilon = |y - \tilde{y}|$$

2.6 Kajian Agama

قَالُوا حَرِّقُوهُ وَانصُرُوا آلِهَتَكُمْ إِن كُنتُمْ فَاعِلِينَ

Mereka berkata: "Bakarlah dia dan bantulah tuhan-tuhan kamu, jika kamu benar-benar hendak bertindak".(Q.S Al Anbiyaa':68)

Dalam tafsir (Ibnu Katsir, 2012) dijelaskan bahwa setiap orang yang tidak dapat melawan hujah dengan hujah, maka dia akan menggunakan kekuatan. Dan itu pula yang dilakukan oleh kaum Ibrahim tatkala mereka tidak dapat menjawab, "Mereka berkata, '*Bakarlah dia dan bantulah Tuhan-Tuhan kami, jika kamu benar-benar hendak bertindak.*'". Kemudian mereka mengumpulkan kayu bakar banyak sekali. Lalu, mereka menyalakan api. Api itu memiliki bara yang besar dan nyala yang tinggi. Belum pernah ada nyala api sebesar itu. Kemudian, mereka menyimpan Ibrahim dengan penampang ketapel, atas petunjuk seseorang. Allah menyuruh bumi menelan orang ini setelah mereka melemparkan Ibrahim ke dalam api, dia berkata, “*Cukuplah bagiku Allah. Dialah sebaik-baik pelindung*.”

Namun, kalimat lain telah dinyatakan duluan, sehigga membatalkan seluruh pernyataan apapun, dan menggagalkan segala macam makar tipu daya. Kalimat itu adalah kalimat tertinggi yang tidak mungkin pernah bisa dibantah dan ditolak.

قُلْنَا يَا نَارُ كُونِي بَرْداً وَسَلَاماً عَلَىٰ إِبْرَاهِيمَ

Kami berfirman: "Hai api menjadi dinginlah, dan menjadi keselamatanlah bagi Ibrahim". (Q.S Al Anbiyaa': 69)

Maka, api itu pun berubah menjadi dingin dan keselamatan bagi Ibrahim. Kata ‘*kunni*’ (sama dengan *kun*, jadilah) inilah kata yang ucapkan Allah sehingga seluruh alam semesta ini terbentuk, seluruh makhluk tercipta, seluruh hukum dan sistem dibuat.

Menurut tafsir (Quthb, 2008) menjelaskan bahwa sesungguhnya orang-orang yang membandingkan antara perbuatan-perbuatan Allah dengan perbuatan-perbuatan manusia, mereka yang berkata “Kenapa ini bisa terjadi? Bagaimana mungkin ini bisa terjadi?”. Sedangkan, orang-orang yang mengetahui perbedaan antara dua tabiat itu, perbedaan antara dua materi itu, maka mereka tidak akan pernah mempertanyakannya dan tidak pula berusaha mencari-cari penyebabnya, baik secara ilmiah maupun tidak ilmiah.

Perkara ini bukanlah dalam jangkauan ilmu sama sekali, bukan dalam lapangan sebab dan solusi yang ada dalam pertimbangan manusia dan standarnya. Setiap teori yang ingin menggambarkan mukjizat-mukjizat seperti ini dengan tidak menyadarkannya kepada kekuatan yang mutlak dari Allah, maka teori itu telah batal dan runtuh sejak kondisi awalnya. Karena seluruh perbuatan Allah tidak tunduk kepada standar-standar dan perbuatan manusia yang sedikit dan terbatas.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan membahas mengenai langkah-langkah penyelesaian persamaan difusi menggunakan metode garis (*Method of Lines*). Dimana metode tersebut akan diselesaikan pada subab 3.1 yang menjelaskan penerapan metode metode semi analitik pada penyelesaian persamaan difusi menggunakan metode garis, subab 3.3.1 menjelaskan penyelesaian metode semi analitik pada persamaan difusi menggunakan metode garis, subab 3.2 menghitung galat yang dihasilkan, dan subab 3.3 menjelaskan mengenai konsep difusi menurut Al-Qur'an.

3.1 Penerapan Metode Semi Analitik Pada Penyelesaian Persamaan Difusi Menggunakan Metode Garis

Bentuk persamaan difusi yang akan diselesaikan adalah:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

Dimana k adalah konstanta dengan kondisi awal yang diberikan yaitu $u(x,0) = f(x)$ untuk $x \in (0,\pi)$ dan kondisi batas $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. Daerah solusi dibatasi pada $0 \leq x \leq \pi$ dan $t > 0$.

Langkah 1

Mendiskritkan turunan terhadap ruang (x) pada persamaan (3.1) menggunakan metode beda hingga pusat orde 2. Sehingga diperoleh bentuk seperti berikut:

$$\frac{\partial u_i(t)}{\partial t} = k\frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{(\Delta x)^2} \tag{3.2}$$

Karena hanya tersisa satu variabel bebas yaitu t. Maka bentuk persamaan diferensial parsial diatas berubah menjadi persamaan diferensial biasa seperti berikut:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = k\frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{(\Delta x)^2}$$

Daerah solusi terdiri dari x_i dengan $i = 0,1,2,3,\ldots,M$ dan $M = \frac{\pi-0}{\Delta x}$ sehingga akan diperoleh sistem persamaan diferensial biasa sebagai berikut:

$$\frac{du_1(t)}{dt} = k\frac{u_0(t) - 2u_1(t) + u_2(t)}{(\Delta x)^2} \tag{3.3}$$

$$\frac{du_2(t)}{dt} = k\frac{u_1(t) - 2u_2(t) + u_3(t)}{(\Delta x)^2} \tag{3.4}$$

$$\frac{du_3(t)}{dt} = k\frac{u_2(t) - 2u_3(t) + u_4(t)}{(\Delta x)^2} \tag{3.5}$$

$$\vdots$$

$$\frac{du_M(t)}{dt} = k\frac{u_{M-1}(t) - 2u_M(t) + u_{M+1}(t)}{(\Delta x)^2} \tag{3.6}$$

Langkah 2

Sistem persamaan diferensial biasa (3.3), (3.4), (3.5) dan (3.6) diubah kedalam bentuk matriks, sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix} = \frac{k}{(\Delta x)^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix} + \frac{k}{(\Delta x)^2}\begin{pmatrix} u_0(t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ u_{M+1}(t) \end{pmatrix}$$

Dari kondisi batas yang telah diberikan maka akan diperoleh nilai $u_0 = 0$ dan $u_{M+1} = 0$, sehingga diperoleh :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix} = \frac{k}{(\Delta x)^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix} + \frac{3}{(\Delta x)^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix} = \frac{k}{(\Delta x)^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix}$$

Atau dapat ditulis

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2k}{(\Delta x)^2} & \frac{k}{(\Delta x)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{k}{(\Delta x)^2} & \frac{-2k}{(\Delta x)^2} & \frac{k}{(\Delta x)^2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{k}{(\Delta x)^2} & \frac{-2k}{(\Delta x)^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-2k}{(\Delta x)^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix}$$

Dari bentuk matriks yang telah didapatkan, dimisalkan $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix} = U$ dan

$$\begin{pmatrix} \frac{-2k}{(\Delta x)^2} & \frac{k}{(\Delta x)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{k}{(\Delta x)^2} & \frac{-2k}{(\Delta x)^2} & \frac{k}{(\Delta x)^2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{k}{(\Delta x)^2} & \frac{-2k}{(\Delta x)^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-2k}{(\Delta x)^2} \end{pmatrix} = A$$

, sehingga didapatkan bentuk sebagai berikut:

$$\frac{dU}{dt} = AU \tag{3.7}$$

Langkah 3

Untuk mencari solusi persamaan (3.7) dimisalkan $U = ve^{\lambda t}$ maka $\frac{dU}{dt} = \lambda ve^{\lambda t}$ lalu disubstitusikan bentuk ini kedalam persamaan (3.7) sehingga diperoleh

$$\lambda ve^{\lambda t} = \mathrm{A}ve^{\lambda t}$$

Kemudian dapat disederhanakan menjadi

$$Av = \lambda v$$

Dengan menyatakan semua suku ke ruas kiri diperoleh

$$(A - \lambda I)v = 0$$

dimana I adalah matriks identitas dan 0 adalah vektor nol. Karena v merupakan suatu vektor yang bukan nol, maka bilangan λ adalah suatu nilai eigen untuk matriks A jika dan hanya jika $(A - \lambda I)$ tidak dapat di inverskan. Sehingga

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{3.8}$$

$$Det\begin{bmatrix} \frac{-2k}{(\Delta x)^2}-\lambda & \frac{k}{(\Delta x)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{k}{(\Delta x)^2} & \frac{-2k}{(\Delta x)^2}-\lambda & \frac{k}{(\Delta x)^2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{k}{(\Delta x)^2} & \frac{-2k}{(\Delta x)^2}-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-2k}{(\Delta x)^2}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Maka didapatkan nilai eigen yaitu $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_M$. Untuk mencari vektor eigen diperoleh dengan cara mensubstitusikan λ atau nilai eigen yang diperoleh kedalam persamaan berikut

$$(A-\lambda I)v = 0 \text{ atau}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{-2k}{(\Delta x)^2}-\lambda & \frac{k}{(\Delta x)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{k}{(\Delta x)^2} & \frac{-2k}{(\Delta x)^2}-\lambda & \frac{k}{(\Delta x)^2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{k}{(\Delta x)^2} & \frac{-2k}{(\Delta x)^2}-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-2k}{(\Delta x)^2}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ \vdots \\ v^{(M)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh vektor eigen yaitu v^j dimana $j = 1,2, \ldots, M$. Untuk setiap pasangan nilai eigen dan vektor eigen (λ_j, v^j) maka ada suatu vektor solusi yang bersesuaian $X_M(t) = v^j e^{\lambda_j t}$ dari sistem persamaan (3.7). Jika nilai eigennya adalah $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M$ dan semuanya berbeda, maka akan ada M solusi yaitu:

$$M(t) = \left(u^1(t), u^2(t), \ldots, u^j(t)\right) = (v^1 e^{\lambda_1 t}, v^2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, v^M e^{\lambda_M t})$$

$M(t)$ disebut matriks solusi. Diasumsikan $u^j(t)$ adalah solusi dari persamaan (3.7) dan C_j adalah bilangan skalar untuk $j = 1,2, \ldots, M$. Menggunakan sifat dari diferensial dan matriks perkalian, sehingga kombinasi linier $C_1 u^1(t) + \cdots + C_M u^j\ (t)$ adalah solusi.

Dimisalkan $u^j(t) = v^M e^{\lambda_M t}$, maka solusi umum dari matriks A adalah kombinasi linier dari

$$U(t) = C_1 v^{(1)} e^{\lambda_1 t} + C_2 v^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_M v^{(M)} e^{\lambda_M t} \tag{3.9}$$

dimana konstanta $C_1, C_2, \ldots, C_M$ dapat diperoleh dengan memberikan sebuah nilai awal pada persamaan (3.7). Jadi dapat disimpulkan bahwa terdapat M solusi dari persamaan (3.9).

3.1.1 Penyelesaian Metode Semi Analitik Pada Penyelesaian Persamaan Difusi Menggunakan Metode Garis

Contoh simulasi pertama

Bentuk persamaan difusi yang akan diselesaikan adalah:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 3\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.10}$$

Dimana $k = 3$ dengan kondisi awal yang diberikan yaitu $u(x,0) = 4\sin 2x$ untuk $x \in (0,\pi)$ dan kondisi batas $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. Daerah solusi dibatasi pada $0 \leq x \leq \pi$ dan $t > 0$.

Langkah 1

Mendiskritkan turunan terhadap ruang (x) pada persamaan (3.10) menggunakan metode beda hingga pusat orde 2, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial u_i(t)}{\partial t} = 3\,\frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{(\Delta x)^2} \tag{3.11}$$

Karena hanya tersisa satu variabel bebas yaitu t. Maka bentuk persamaan diferensial parsial diatas berubah menjadi persamaan diferensial biasa seperti berikut:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = 3\frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{(\Delta x)^2}$$

Jika dipilih $\Delta x = \frac{\pi}{5}$ maka daerah solusi terdiri dari x_i dengan $i = 0,1,2,3,4$ sehingga akan diperoleh sistem persamaan diferensial biasa sebagai berikut:

$$\frac{du_1(t)}{dt} = 3\frac{u_0(t) - 2u_1(t) + u_2(t)}{(\Delta x)^2} \tag{3.12}$$

$$\frac{du_2(t)}{dt} = 3\frac{u_1(t) - 2u_2(t) + u_3(t)}{(\Delta x)^2} \tag{3.13}$$

$$\frac{du_3(t)}{dt} = 3\frac{u_2(t) - 2u_3(t) + u_4(t)}{(\Delta x)^2} \tag{3.14}$$

Langkah 2

Sistem persamaan diferensial biasa (3.12), (3.13) dan (3.14) diubah kedalam bentuk matriks, sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \frac{3}{(\Delta x)^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} + \frac{3}{(\Delta x)^2}\begin{pmatrix} u_0(t) \\ 0 \\ u_4(t) \end{pmatrix}$$

Dari kondisi batas yang telah diberikan maka akan diperoleh nilai $u_0 = 0$ dan $u_{M+1} = 0$, sehingga diperoleh :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \frac{3}{(\Delta x)^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} + \frac{3}{(\Delta x)^2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Maka,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \frac{3}{(\Delta x)^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$$

Nilai dari Δx, dimasukkan kedalam persamaan sehingga menjadi

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \frac{3}{0,783974483}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$$

Atau dapat ditulis

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9,7268336297 & 4,86341681483 & 0 \\ 4,86341681483 & -9,7268336297 & 4,86341681483 \\ 0 & 4,86341681483 & -9,7268336297 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$$

Dari bentuk matriks yang telah didapatkan, dimisalkan $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = U$ dan

$\begin{pmatrix} -9,7268336297 & 4,86341681483 & 0 \\ 4,86341681483 & -9,7268336297 & 4,86341681483 \\ 0 & 4,86341681483 & -9,7268336297 \end{pmatrix} = A$, sehingga didapatkan

bentuk sebagai berikut :

$$\frac{dU}{dt} = AU \tag{3.15}$$

Langkah 3

Menyelesaikan sistem PDB yang telah diperoleh dengan mencari nilai eigen dan vektor eigen terlebih dahulu. Misalkan λ dan v adalah nilai eigen dan vektor eigen dari matriks A, maka berlaku

$$Av = \lambda v \text{ atau } (A - \lambda I)v = 0$$

dengan I matriks identitas.

λ diperoleh dengan menggunakan persamaan karakteristik yaitu:

$$Det(A - I\lambda) = 0 \tag{3.16}$$

$$\text{Det}\begin{bmatrix} -9{,}7267881386 - \lambda & 4{,}8633940693 & 0 \\ 4{,}8633940693 & -9{,}7267881386 - \lambda & 4{,}8633940693 \\ 0 & 4{,}8633940693 & -9{,}7267881386 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan bantuan python didapatkan nilai eigen sebagai berikut:

$\lambda_1 = -16{,}6047$

$\lambda_2 = -9{,}7268$

$\lambda_3 = -2{,}8489$

Untuk mecari vektor eigen diperoleh dengan cara mensubstitusikan λ atau nilai eigen yang diperoleh kedalam persamaan berikut

$$(A - \lambda I)v = 0 \text{ atau}$$

$$\begin{bmatrix} -9{,}7268336297 & 4{,}86341681483 & 0 \\ 4{,}86341681483 & -9{,}7268336297 & 4{,}86341681483 \\ 0 & 4{,}86341681483 & -9{,}7268336297 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dan menggunakan bantuan python didapatkan vektor eigennya:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}7071 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0{,}7071 \\ 0 \\ -0{,}7071 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}7071 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Maka solusi umum dari persamaan (3.14) adalah

$$U(t) = C_1 e^{-16{,}6047t}\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}7071 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} + C_2 e^{-9{,}7268t}\begin{bmatrix} 0{,}7071 \\ 0 \\ -0{,}7071 \end{bmatrix} + C_3 e^{-2{,}8489t}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}7071 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Dimana nilai dari $U(t)$ pada persamaan (3.17) adalah

$u_1(t) = C_1 e^{-16{,}6047t} 0{,}5 + C_2 e^{-9{,}7268t} 0{,}7071 + C_3 e^{-2{,}8489t} 0{,}5$

$u_2(t) = C_1 e^{-16,6047t} - 0,7071 + C_2 e^{-9,7268t} 0 + C_3 e^{-2,8489t} 0,7071$

$u_3(t) = C_1 e^{-16,6047t} 0,5 + C_2 e^{-9,7268t} - 0,7071 + C_3 e^{-2,8489t} 0,5$

Berikutnya mencari nilai dari C_1, C_2 dan C_3 diatas, yang dapat diperoleh dengan memasukkan nilai pada kondisi awalnya terlebih dahulu

$$u_i = f(ih) = 4 \sin 2(ih) \quad , i = 1,2,3$$

$$i = 1 \rightarrow u_1 = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$$

$$i = 2 \rightarrow u_2 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$i = 3 \rightarrow u_3 = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 4 \sin 2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -4$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5C_1 + 0,7071C_2 + 0,5C_3 \\ -0,7071C_1 + 0,7071C_3 \\ 0,5C_1 - 0,7071C_2 + 0,5C_3 \end{bmatrix}$$

Atau bisa ditulis seperti berikut

$$0,5C_1 + 0,7071C_2 + 0,5C_3 = 4$$

$$-0,7071C_1 + 0,7071C_3 = 0$$

$$0,5C_1 - 0,7071C_2 + 0,5C_3 = -4$$

Dari persamaan diatas, dapat ditulis dalam bentuk matriks vC = d

Dimana,

$$v = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,7071 & 0,5 \\ -0,7071 & 0 & 0,7071 \\ 0,5 & -0,7071 & 0,5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Solusi dari persamaannya adalah

$vC = d$

$C = v^{-1} d$

$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 5,6569 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi diperoleh nilai dari $C_1 = 0, C_2 = 5,6569$ dan $C_3 = 0.$ Maka solusi khusus dari sistem PDB pada persamaan (3.15) adalah

$$U(t) = 5,6569\ e^{-9,7268t} \begin{bmatrix} 0,7071 \\ 0 \\ -0,7071 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

dimana nilai $U(t)$ dari persamaan (3.18) yaitu

$u_1(t) = 5,6569\ e^{-9,7268t}\ 0,7071$

$u_2(t) = 5,6569\ e^{-9,7268t} 0$

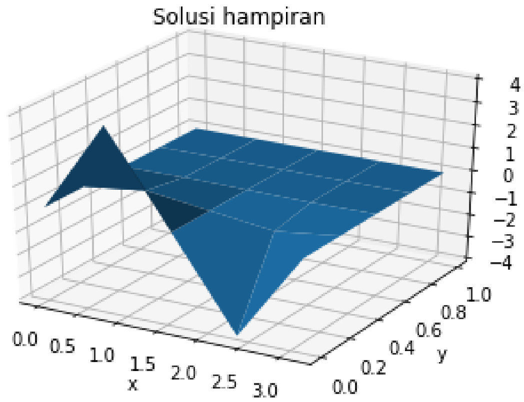
$u_3(t) = 5,6569\ e^{-9,7268t} - 0,7071$

Pada saat $t = 0$ diperoleh nilai $u_1^0 = 4,0000000$, $u_1^1 = 0,3515462$ dan $u_3^0 = -4,0000000$ langkah diatas kemudian diulang sampai iterasi ke 5 yaitu ketika $n = 5$ dan $i = 5.$ Untuk mempermudah perhitungan digunakan bantuan program python. Hasil perhitungan metode semi analitik pada metode garis digambarkan dalam tabel berikut:

Tabel 3.1 Simulasi Pertama Metode Semi Analitik

Iterasi	t \ x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
		0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
1	0	0	4,0000000	0	-4,0000000	0
2	0,25	0	0,3515462	0	-0,3515462	0
3	0,5	0	0,0308962	0	-0,0308962	0
4	0,75	0	0,0027154	0	-0,0027154	0
5	1	0	0,0002386	0	-0,0002386	0

Selanjutnya adalah menggambarkan simulasi pertama metode semi analitik dari tabel 3.1 dalam plot 3 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut



Gambar 3.1 Grafik Simulasi Pertama Metoede Semi-Analitik

Pada Gambar 3.1 merupakan hasil dari simulasi pertama metode semi analitik dalam bentuk grafik 3 dimensi $u(x,t)$ dengan kondisi batas pada interval t dan x masing-masing adalah $0 < x < \pi$ dan $t > 0$ pada saat $\Delta t = 0{,}25$ dan $\Delta x = \frac{\pi}{5}$. Gambar 3.1 menginterpretasikan bahwa nilai dari $u(x,t)$ semakin turun, hal ini menunjukkan semakin besar nilai x maka nilai $u(x,t)$ mendekati nol.

Contoh simulasi kedua

Bentuk persamaan difusi yang akan diselesaikan sama seperti pada simulasi pertama yaitu:

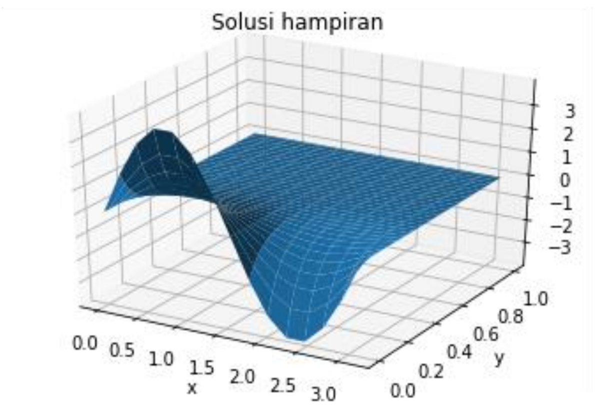
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.19}$$

Dimana $k = 3$ dengan kondisi awal yang diberikan yaitu $u(x,0) = 4\sin 2x$ untuk $x \in (0,\pi)$ dan kondisi batas $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. Daerah solusi dibatasi pada $0 \leq x \leq \pi$ dan $t > 0$. Jika dipilih $\Delta t = 0{,}01$ dan $\Delta x = \frac{\pi}{15}$ dengan Langkah dan perhitungan yang sama dan untuk mempermudah perhitungan digunakan bantuan program python, sehingga didapatkan hasil tabel seperti berikut.

Tabel 3.2 Simulasi Kedua Metode Semi Analitik

Iterasi	x \ t	x_0	x_1	x_2	...	x_{14}	x_{15}
		0	$\frac{\pi}{14}$	$\frac{\pi}{7}$	...	$\frac{13\pi}{14}$	π
1	0	0	1,7355350	3,1273259	...	-1,7355350	0
2	0,01	0	1,5423642	2,7792442	...	-1,5423642	0
3	0,02	0	1,3706940	2,4699052	...	-1,3706940	0
4	0,03	0	1,2181312	2,1949965	...	-1,2181312	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
101	1	0	0	0	...	0	0

Selanjutnya adalah menggambarkan simulasi kedua metode semi analitik dari tabel 3.2 dalam plot 3 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut



Gambar 3.2 Grafik Simulasi Kedua Metode Semi Analitik

Pada Gambar 3.2 merupakan hasil dari simulasi kedua metode semi analitik dalam bentuk grafik 3 dimensi $u(x,t)$ dengan kondisi batas pada interval t dan x masing-masing adalah $0 < x < \pi$ dan $t > 0$ pada saat $\Delta t = 0{,}01$ dan $\Delta x = \frac{\pi}{15}$. Gambar 3.2 menginterpretasikan bahwa nilai dari $u(x,t)$ semakin turun, hal ini menunjukkan semakin besar nilai x maka nilai $u(x,t)$ mendekati nol dan bentuk gambar terlihat lebih jelas daripada saat simulasi pertama

3.2 Menghitung Galat Dari Persamaan Difusi Menggunakan Metode Garis

Solusi eksak (analitik) pada persamaan difusi adalah

$$U(x,t) = 4e^{-12t}\sin(2x) \tag{3.20}$$

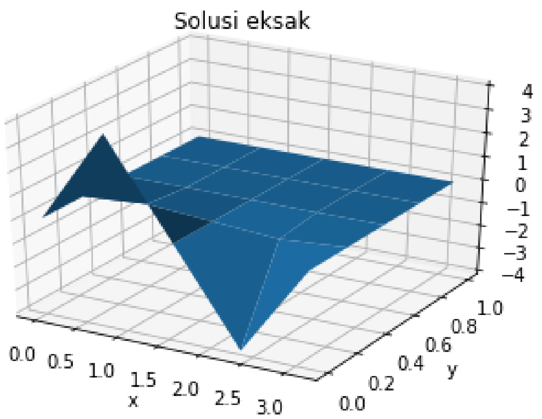
Untuk mempermudah perhitungan digunakan bantuan program python. Hasil perhitungan solusi eksak pada metode garis digambarkan dalam tabel berikut:

Contoh simulasi pertama

Tabel 3.3 Simulasi Pertama Solusi Eksak

Iterasi	x \ t	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
		0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
1	0	0	4,0000000	0	-4,0000000	0
2	0,25	0	0,1991483	0	-0,1991483	0
3	0,5	0	0,0099150	0	-0,0099150	0
4	0,75	0	0,0004936	0	-0,0004936	0
5	1	0	0,0000246	0	-0,0000246	0

Selanjutnya adalah menggambarkan simulasi pertama solusi eksak dari tabel 3.3 dalam plot 3 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut



Gambar 3.3 Grafik Simulasi Pertama Solusi Eksak

Pada Gambar 3.3 merupakan hasil dari simulasi pertama solusi eksak dalam bentuk grafik 3 dimensi $u(x,t)$ dengan kondisi batas pada interval t dan x masing-masing adalah $0 < x < \pi$ dan $t > 0$ pada saat $\Delta t = 0{,}25$ dan $\Delta x = \frac{\pi}{5}$. Gambar 3.3 menginterpretasikan bahwa nilai dari $u(x,t)$ semakin turun, hal ini menunjukkan semakin besar nilai x maka nilai $u(x,t)$ mendekati nol.

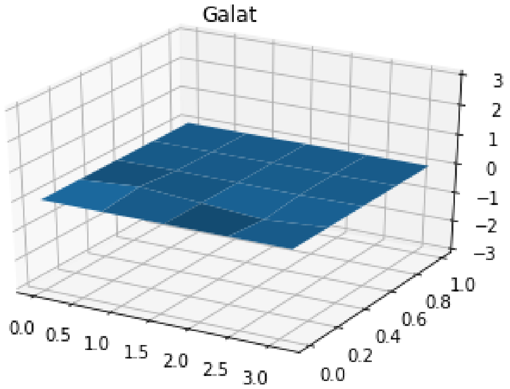
Pada kajian pustaka sudah dijelaskan bahwa penyelesaian secara numerik hanya menghasilkan nilai yang mendekati pada solusi analitiknya. Sehingga pernyelesaian secara numerik pasti menghasilkan *error* (galat). Dengan memasukkan nilai x dan t maka akan diperoleh nilai eksaknya, sebagaimana perhitungan pada tabel berikut:

Tabel 3.4 Perbandingan Simulasi Pertama Hasil Galat

Iterasi	x \ t		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
			0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
1	0	SA	0	$4{,}0000000$	0	$-4{,}0000000$	0
		E	0	$4{,}0000000$	0	$-4{,}0000000$	0
		G	0	0	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	1	SA	0	$0{,}0002386$	0	$-0{,}0002386$	0
		E	0	$0{,}0000246$	0	$-0{,}0000246$	0
		G	0	$0{,}0002141$	0	$-0{,}0002141$	0

Keterangan: SA = Semi-Analitik, E = Eksak, dan G = Galat.

Selanjutnya adalah menggambarkan galat dari tabel 3.4 dalam plot 3 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut



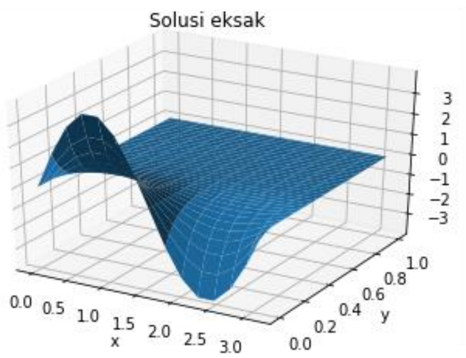
Gambar 3.4 Grafik Simulasi Pertama Hasil Galat

Contoh simulasi kedua

Tabel 3.5 Simulasi Kedua Solusi Eksak

Iterasi	x / t	x_0	x_1	x_2	...	x_{14}	x_{15}
		0	$\frac{\pi}{14}$	$\frac{\pi}{7}$	...	$\frac{13\pi}{14}$	π
1	0	0	1,7355350	3,1273259	...	-1,7355350	0
2	0,01	0	1,5392814	2,7736893	...	-1,5392814	0
3	0,02	0	1,3652202	2,4600417	...	-1,3652202	0
4	0,03	0	1,2108416	2,1818612	...	-1,2108416	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
101	1	0	0	0	...	0	0

Selanjutnya adalah menggambarkan simulai kedua solusi eksak dari tabel 3.5 dalam plot 3 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut



Gambar 3.5 Simulasi Kedua Solusi Eksak

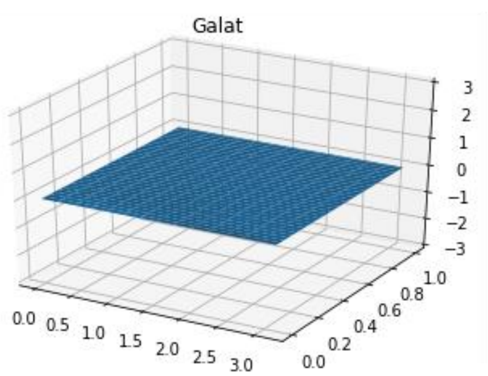
Pada gambar 3.5 merupakan hasil dari simulasi kedua solusi eksak dalam bentuk grafik 3 dimensi $u(x,t)$ dengan kondisi batas pada interval t dan x masing-masing adalah $t > 0$ dan $0 < x < \pi$ pada saat $\Delta t = 0{,}01$ dan $\Delta x = \frac{\pi}{15}$. Gambar 3.5 menginterpretasikan bahwa nilai dari $u(x,t)$ semakin turun, hal ini menunjukkan semakin besarnya nilai x maka nilai $u(x,t)$ semakin mendekati nol dan bentuk gambar terlihat lebih jelas daripada saat simulasi pertama.

Tabel 3.6 Perbandingan Simulasi Kedua Hasil Galat

Iterasi	t \ x		x_0	x_1	x_2	...	x_{14}	x_{15}
			0	$\frac{\pi}{14}$	$\frac{\pi}{7}$	...	$\frac{13\pi}{14}$	π
1	0	SA	0	1,7355350	3,1273259	...	−1,7355350	0
		E	0	1,7355350	3,1273259	...	−1,7355350	0
		G	0	0	0	...	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
101	1	SA	0	0,0000147	0,0000264	...	−0,0000147	0
		E	0	0,0000120	0,0000217	...	−0,0000120	0
		G	0	0,0000027	0,0000047	...	−0,0000027	0

Keterangan: SA = Semi-Analitik, E = Eksak, dan G = Galat.

Selanjutnya adalah menggambarkan simulasi kedua hasil galat dari tabel 3.6 dalam plot 3 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut



Gambar 3.6 Simulasi Kedua Hasil Galat

Gambar 3.6 menginterpretasikan bahwa nilai dari hasil pengurangan solusi numerik dan solusi analitik menunjukkan besar *error* yang semakin kecil daripada simulasi pertama. Karena telah dipilih Δt dan Δx yang semakin kecil.

Berdasarkan hasil solusi dari kedua simulasi diatas, dapat dilihat bahwa semakin kecil Δt dan Δx yang dipilih maka akan semakin kecil pula galat (*error*) yang dihasilkan. Limit yang dihasilkan dengan nilai Δt dan Δx yang sangat kecil adalah sebesar nol, artinya solusi dari persamaan tersebut mempunyai nilai galat kecil. Disimpulkan bahwa penyelesaian persamaan difusi dengan menggunakan metode garis menghasilkan solusi yang mendekati solusi analitiknya. Metode ini menghasilkan galat yang kecil sehingga metode garis ini dikatakan sebagai metode yang baik untuk menyelesaikan solusi numerik pada persamaan difusi.

3.3 Konsep Difusi Menurut Al-Qur’an

Difusi merupakan peristiwa yang mempresentasikan berpindahnya suatu zat dalam suatu pelarut dari bagian yang berkosentrasi tinggi menuju bagian yang berkonsentrasi rendah. Salah satu sifat air adalah mengalir dari tempat yang tinggi ke tempat yang rendah yang merupakan contoh dari penerapan difusi. Allah berfirman dalam surah Ar-Ra’d ayat 17 yang menjelaskan mengalirnya air, yaitu:

أَنْزَلَ مِنَ السَّمَاءِ مَاءً فَسَالَتْ أَوْدِيَةٌ بِقَدَرِهَا فَاحْتَمَلَ السَّيْلُ زَبَدًا رَابِيًا ۚ وَمِمَّا يُوقِدُونَ عَلَيْهِ فِي
النَّارِ ابْتِغَاءَ حِلْيَةٍ أَوْ مَتَاعٍ زَبَدٌ مِثْلُهُ ۚ كَذَٰلِكَ يَضْرِبُ اللَّهُ الْحَقَّ وَالْبَاطِلَ ۚ فَأَمَّا الزَّبَدُ فَيَذْهَبُ جُفَاءً
وَأَمَّا مَا يَنْفَعُ النَّاسَ فَيَمْكُثُ فِي الْأَرْضِ ۚ كَذَٰلِكَ يَضْرِبُ اللَّهُ الْأَمْثَالَ

“Allah telah menurunkan air (hujan) dari langit, maka mengalirlah air di lembah-lembah menurut ukurannya, maka arus itu membawa buih yang mengambang. Dan dari apa (logam) yang mereka lebur dalam api untuk membuat perhiasan atau alat-alat, ada (pula) buihnya seperti buih arus itu. Demikianlah Allah membuat perumpamaan (bagi) yang benar dan yang bathil. Adapun buih itu, akan hilang sebagai sesuatu yang tak ada harganya; adapun yang memberi manfaat kepada manusia, maka ia tetap di bumi. Demikianlah Allah membuat perumpamaan-perumpamaan.” (QS. Ar-Ra’d: 17).

Ayat tersebut menjelasakan salah satu manfaat dari air adalah untuk berwudhu. Wudhu merupakan cara untuk meghilangkan hadas kecil. Wudhu dilakukan ketika akan melaksanakan shalat dan ibadah-ibadah lain yang menjadikan wudhu sebagai syaratnya, sehingga shalat dan ibadah-ibadah lain itu menjadi tidak sah, jika tidak dalam keadaan suci (berwudhu). Berwudhu juga dapat menggugurkan dosa, sebagaimana diriwayatkan Abu Hurairah ra. bahwa Rasulullah Saw bersabda: (Kardjono, 2009)

"Apabila seorang hamba muslim atau mukmin berwudhu, tatkala ia membasuh wajahnya keluarlah dari wajahnya seluruh dosa yang dilakukan matanya bersamaan dengan air itu atau dengan tetesan terakhirnya. Apabila dia membasuh dua tangannya maka akan keluar seluruh dosa yang dilakukan dengan tangannya bersamaan dengan air itu atau tetesan air yang terakhir. Apabila dia membasuh dua kakinya maka keluarlah seluruh dosa yang telah dilangkahkan oleh kakinya bersama air atau tetesannya yang terakhir sehingga dia selesai wudhu dalam keadaan bersih dari dosa" (HR. Muslim).

Dalam berwudhu air yang meresap melalui pori-pori kulit tubuh akan membantu membersihkan bagian-bagian luar maupun dalam kulit dari kotoran, melepaskannya, dan melarutkannya. Air wudhu juga membantu untuk mencegah kanker kulit. Wudhu tidak hanya membersihkan panca indra yang sangat vital dalam kehidupan sehari-hari saja, akan tetapi kelima panca indra, yakni: perasa atau peraba (kulit), pengecap (rongga mulut), pencium (rongga hidung), penglihat (mata), dan pendengar (telinga).

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah dipaparkan pada bab 3 dapat disimpulkan bahwa:

1. Pada penyelesaian metode semi analitik persaman difusi dengan menggunakan metode garis dapat dilakukan dengan mendiskritkan turunan ruang menggunakan metode beda pusat orde-2. Sehingga diperoleh suatu sistem persamaan diferensial biasa. Kemudian menyelesaikan masing-masing persamaan diferensial biasa yang diperoleh dengan mencari solusi analitiknya yaitu menggunakan persamaan karakteristik.
2. Hasil perhitungan galat pada persamaan difusi menggunakan metode garis menghasilkan solusi semi analitik yang mendekati nilai sebenarnya. Berdasarkan simulasi yang telah dilakukan, semakin kecil Δx yang dipilih, maka galat yang dihasilkan akan semakin kecil, sehingga solusinya menjadi semakin akurat, begitu juga sebaliknya.

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk mengggunakan metode yang lain seperti Finite Volume Method (FVM) sebagai perbandingan terhadap metode garis (MOL).

DAFTAR PUSTAKA

Bajana, M.A & Bakodah, H.O. 2015. Runge-Kutta Integration of the Equal Width Wave Equation Using the Method of Lines. *Mathematical Problems in Enginnering.* Vol.5. No.1.

Boyce, W.E.. & DilPrima, R.C. 1999. *ODE Architect Companion*. New York: John Willey & Sons, Inc.

Conte, S. & C.Boor. 1993. *Dasar-Dasar Analisis Numerik Suatu Pendekatan Algoritma.* Jakarta: Erlangga.

Dian P. Dewanti, Albert Sulaiman. 2019. Penentuan Temperatur Optimal Pembakaran Boiler untuk Karbonisasi Hidrotermail Sampah Organik Melalui Model Semi-Analitik Perpindahan Panas. *Jurnal Teknologi Lingkungan*. Vol.20.No.2.

Duran, D. R. (2010). *Numerical Methods for Fluid Dynamics with Applications to Geophysics. Secon Edition*. New York: Spinger.

Edward R. Scheunerman. 2000. *Dynamical Systems*. Department of Mathematical Sciences The Johns Hopkins University.

Hamdi, S., Schiesser, W.E., dan Griffiths, G.W. 2009. *Method of Lines*. San Diego: Scholarpedia.

Holman, J.P. 1994. *Perpindahan Kalor*. Jakarta: Erlangga.

Kardjono, Moehari. 2009. *Kedasyatan Wudhu Penghapus Dosa*. Yogyakarta. Best Publisher: Galangpress.

Laili, A. K. 2014. *Keakuratan Solusi Persamaan Difusi Menggunakan Skema Crank-Nicolson.* PhD thesis, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Lam C. Y. 1994. *Applied Numerical Methods for Partial Differential Equation,* Prentice-Hall. Inc, Singapore.

Munir, Rinaldi. 2006. *Metode Numerik.* Bandung: Informatika.

Nasib, Muhammad Ar-Rifa'i. 2012. *Ringkasan Tafsir Ibnu Katsir Jilid 3 (Surah Al-Israa' s/d Surah Yaasiin)*. Jakarta: Gema Insani.

Pregla, R. 2008. Analysis of Electomagnetic Fields and Waves: The Method of Lines. *International Journal of Electrical Engineering Education*. Vol. 37. Hal 282-296.

Qutbh, Sayyid. 2004. *Tafsir Fi Zhilalil Qur'an Dibawah Naungan Al-Qur'an (Surah Thaahaa 57 – An-Naml 81)*. Jakarta: Gema Insani Press.

Sadiku, M.N.O dan Obiozor,C.N. 1997. A Simple Introduction to the Method of Lines. *International of Electrical Engineering Education*. Vol.37. Hal 282 296.

Susila, I Nyoman. 1993. *Dasar-dasar Metode Numerik*. Bandung: F.MIPA ITB.

Toto Nusantara. 2012. *Sistem Dinamik Linear*. Malang: Aditya Media Publishing.

Triatmodjo, Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.

F. Muhammad Zain, M. Garda Khadafi, & P. H. Gunawan. 2018. Analisis Konvergensi Metode Beda Hingga Dalam Menghampiri Persamaan Difusi. *E-Jurnal Matematika*. Vol.7(1). No.1-4.

Venkat, R.S & Ralph, E.W. 2004. Semianalytical Method of Lines for Solving Elliptic Partial Differential Equations. *Chemical Engineering*. Vol.59. Hal781-788.

Zill, Dennis G. dan Michael R. Cullen. 2009. *Differential Equation with Boundary Value Problem.* Seventh Edition. Belmont: Cengage Learning.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Sely Ayu Rahmasari
NIM : 16610062
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Penerapan Metode Semi Analitik pada Penyelesaian Persamaan Difusi Menggunakan Metode Garis
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	10 Januari 2020	Revisi Bab I & II (Pembimbing I)	1.
2.	29 Januari 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan (Pembimbing II)	2.
3.	5 Februari 2020	Revisi Bab II, & III (Pembimbing I)	3.
4.	5 Februari 2020	Revisi Kajian Keagamaan Bab I & II (Pembimbing II)	4.
5.	23 Februari 2020	ACC untuk diseminarkan (Pembimbing I)	5.
6.	21 Maret 2020	Konsultasi Bab III & IV (Pembimbing I)	6.
7.	23 Maret 2020	Revisi Script Program (Pembimbing I)	7.
8.	26 Maret 2020	Konsultasi Kajian Agama (Pemimbing II)	8.
9.	29 Maret 2020	Revisi Bab II & III (Pembimbing I)	9.
10.	30 Maret 2020	ACC untuk disidangkan (Pembimbing I)	10.

Malang, 9 Mei 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

RIWAYAT HIDUP

Sely Ayu Rahmasari, lahir di Malang pada tanggal 26 Maret 1998. Anak kembar bungsu dari 3 bersaudara yakni pasangan bapak Mujiono dan Ibu Sutinggen.

Perempuan yang akrab disapa Sely ini telah menempuh Pendidikan formal mulai dari TK Laboratorium UM, lalu pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Bareng 3 Malang dan lulus pada tahun 2010. Kemudian melanjutkan ke SMPN 8 Malang dan lulus pada tahun 2013 dan melanjutkan ke SMA Laboratorium UM dan lulus pada tahun 2016. Selanjutnya pada tahun 2016 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama menjadi mahasiswa telah mengikuti salah satu kompetisi yaitu Riset Kompetisi Mahasiswa (RKM) pada tahun 2019. Selain itu disela-sela kesibukannya menjadi mahasiswa, dia juga menjadi asisten laboratorium.