

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN LINIER *KLEIN-GORDON*  
MENGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS  
TIDAK LANGSUNG**

**SKRIPSI**

**OLEH  
TALITHA NARISWARI FARENDRA  
NIM. 16610067**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2020**

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN LINIER *KLEIN-GORDON*  
MENGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS  
TIDAK LANGSUNG**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)**

**Oleh  
Talitha Nariswari Farendra  
NIM. 16610067**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2020**

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN LINIER *KLEIN-GORDON*  
MENGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS  
TIDAK LANGSUNG**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Talitha Nariswari Farendra**  
**NIM. 16610067**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal April 2020

Pembimbing I,



Mohammad Jamhuri, M.Si  
NIP.19810502 200501 1 004

Pembimbing II,



M. Nafie Jauhari, M.Si  
NIDT.19870218201608011056

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN LINIER *KLEIN-GORDON*  
MENGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS  
TIDAK LANGSUNG**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Talitha Nariswari Farendra**  
NIM. 16610067

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)

Tanggal April 2020

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M. Si  
Ketua Penguji : Juhari, M.Si  
Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M. Si  
Anggota Penguji : M. Nafie Jauhari, M.Si



Handwritten signatures of the examiners: Dr. Usman Pagalay, Juhari, Mohammad Jamhuri, and M. Nafie Jauhari.

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M. Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Talitha Nariswari Farendra

NIM : 16610067

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Solusi Numerik Persamaan Linier *Klein-Gordon*  
Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis Tidak  
Langsung.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 April 2020

Yang membuat pernyataan,



Talitha Nariswari Farendra

NIM. 16610067

## MOTO

*“Kebodohan adalah penyakit, dan bertanya adalah obatnya”*

(Rasulullah SAW)



## PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Skripsi ini dipersembahkan untuk:

Orang tua penulis yaitu Bapak Anendra Kusuma dan Ibu Farida Hasan yang selalu menyebutkan penulis dalam doanya, yang selalu memberikan semangat serta kasih sayang tak ternilai.



## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.
2. M. Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen penguji I yang telah banyak memberikan arahan dan saran kepada penulis.
4. Juhari, S.Pd, M.Si, selaku dosen penguji II yang telah banyak memberikan arahan dan saran kepada penulis.
5. Semua pihak yang secara langsung maupun tidak langsung ikut membantu menyelesaikan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*  
*Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

Malang, April 2020

Penulis



## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN PENULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR.....</b>	<b>viii</b>
<b>DAFTAR ISI.....</b>	<b>x</b>
<b>DAFTAR TABEL .....</b>	<b>xii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR.....</b>	<b>xiii</b>
<b>ABSTRAK .....</b>	<b>xiv</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>xv</b>
<b>ملخص.....</b>	<b>xvi</b>
 <b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Tujuan Penelitian .....	3
1.4 Manfaat Penelitian .....	3
1.5 Batasan Masalah .....	4
1.6 Metode Penelitian .....	4
1.7 Sistematika Penulisan .....	5
 <b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Persamaan <i>Klein-Gordon</i> .....	7
2.2 Solusi Analitik dari Persamaan Linier <i>Klein-Gordon</i> .....	8
2.3 Jaringan Fungsi Radial Basis .....	15
2.4 Turunan Hampiran dengan Jaringan Fungsi Radial Basis.....	21
2.4.1 Metode Langsung .....	21
2.4.2 Metode Tidak Langsung.....	22

2.5	Metode Beda Hingga .....	25
2.6	Basis.....	28
2.7	Galat.....	30
2.8	Kajian Penelitian Sebelumnya .....	31
2.9	Kajian Keagamaan.....	34

### **BAB III PEMBAHASAN**

3.1	Solusi Numerik Persamaan Linier <i>Klein-Gordon</i> Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis Tidak Langsung.....	37
3.1.1	Diskritisasi.....	37
3.1.2	Aproksimasi Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis Tidak Langsung.....	39
3.1.3	Menghitung Solusi $u^{(1)}$ .....	42
3.1.4	Menghitung Solusi $u^{(2)}, u^{(3)}, \dots, u^{(n-1)}$ .....	44
3.2	Analisis Galat.....	47
3.2.1	Simulasi .....	47
3.2.2	Perhitungan Galat.....	60
3.3	Kajian Keagamaan.....	66

### **BAB IV PENUTUP**

4.1	Kesimpulan .....	68
4.2	Saran .....	69

### **DAFTAR PUSTAKA**

### **LAMPIRAN**

### **RIWAYAT HIDUP**

**DAFTAR TABEL**

Tabel 2.1 Perbandingan Solusi Numerik RBF Langsung terhadap Solusi Eksak.	32
Tabel 3.1 Hasil Perhitungan $u^{(1)}$ Menggunakan <i>python</i> .....	55
Tabel 3.2 Hasil Perhitungan $u^{(2)}$ Menggunakan <i>python</i> .....	59
Tabel 3.3 Perbandingan Solusi Numerik RBF Tidak Langsung terhadap Solusi Eksak .....	62



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1 Arsitektur Jaringan Fungsi Radial Basis .....	18
Gambar 2.2 Grafik Solusi Numerik Metode Langsung .....	31
Gambar 2.3 Grafik Solusi Numerik Metode Langsung dan Solusi Eksak saat $t =$ 1.....	33
Gambar 2.4 Grafik Solusi Numerik Metode Langsung dan Solusi Eksak saat $t =$ 3.....	33
Gambar 2.5 Grafik Galat Solusi Numerik Metode Langsung.....	33
Gambar 3.1 Grafik Solusi Numerik Metode Tidak Langsung.....	60
Gambar 3.2 Grafik Solusi Analitik .....	60
Gambar 3.3 Grafik Solusi Numerik Metode Tidak Langsung.....	61
Gambar 3.4 Grafik Solusi Numerik Metode Tidak Langsung dan Solusi Eksak saat $t = 1$ .....	63
Gambar 3.5 Grafik Solusi Numerik Metode Tidak Langsung dan Solusi Eksak saat $t = 3$ .....	64
Gambar 3.6 Grafik Solusi Numerik Metode Langsung, Metode Tidak Langsung dan Solusi Eksak saat $t = 1$ .....	64
Gambar 3.7 Grafik Solusi Numerik Metode Langsung, Metode Tidak Langsung dan Solusi Eksak saat $t = 3$ .....	64
Gambar 3.8 Grafik Galat Solusi Numerik Metode Tidak Langsung .....	65

## ABSTRAK

Farendra, Talitha Nariswari. 2020. **Solusi Numerik Persamaan Linier *Klein-Gordon* Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis Tidak Langsung**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing : (I) Mohammad Jamhuri, M.Si., (II) M. Nafie Jauhari, M.Si.

**Kata kunci** : jaringan fungsi radial basis, linier, persamaan *Klein-Gordon*, solusi numerik

Solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* dalam penelitian ini dikerjakan dengan menggunakan metode jaringan fungsi radial basis, yang mana setiap fungsi dan turunannya diaproksimasi secara tidak langsung menggunakan fungsi basis *multiquadrics*. Aproksimasi secara tidak langsung ini dilakukan dengan mengintegrasikan fungsi basis secara parsial sesuai dengan order dari persamaan tersebut dan dimulai dari fungsi turunan tertinggi sampai dengan fungsi asal itu sendiri. Selanjutnya analisis galat dapat dilakukan jika persamaan tersebut sudah dikhususkan dengan parameter tertentu, sehingga perlu dilakukan simulasi. Simulasi dilakukan menggunakan bantuan program *python*. Solusi dari metode tidak langsung yang diperoleh kemudian dibandingkan dengan solusi menggunakan metode langsung. Dan didapatkan kesimpulan bahwa solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* dengan menggunakan metode jaringan fungsi radial basis secara tidak langsung menghasilkan solusi yang lebih baik daripada menggunakan metode langsung. Hal itu dapat dilihat dari galat yang diperoleh pada metode tidak langsung lebih kecil daripada metode langsung, sehingga solusinya lebih mendekati solusi eksak.

## ABSTRACT

Farendra, Talitha Nariswari. 2020. **Numerical Solution of The Linier *Klein-Gordon* Equation Using The Indirect Radial Basis Function Network.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisor: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si., (II) M. Nafie Jauhari, M.Si.

**Keywords:** radial basis function network, linear, *Klein-Gordon* equation, numerical solution

In this study, the numerical solution of the linear *Klein-Gordon* equation performed by using radial basis function network. Each function and its derivative is indirectly approximated using the multiquadrics base function. The indirect approximation is done by partially integrating the base function according to the order of the equation and starting from the highest derivative function to the original function itself. Furthermore, error analysis can be done if the equation has been specified with certain parameters, so it needs to be simulated. The simulation was performed by using python. The obtaining solution of indirect method will be compared with the direct solution method. And it can be concluded that the numerical solution of the linear *Klein-Gordon* equation using the indirect radial basis function network offers a better solution compared to the use of the direct radial basis function network. It can be noticed from the error of indirect method is smaller than the direct method. Accordingly, the solution is resembling the exact solution.

## ملخص

فندرا، تلتا نيسورى. ٢٠٢٠. الحلول العددية لمعادلات الختية *Klein-Gordon* باستخدام دالة شبكات الشعاعية الأساسية غير المباشرة. بحث جامعي. شعبة الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الحكومية الإسلامية مالانج. المشرف: (1) محمد جم هوري ، ماجستير ، (2) محمد نافع جوهرى، ماجستير

الكلمة الرئيسية : دالة شبكة شعاعي الأساسي، ختية، معادلة *Klein-Gordon* ، الحل العددي

في هذه الدراسة ، الحل العددي لمعادلة الختية *Klein-Gordon* التي تم إجراؤها باستخدام دالة شبكة شعاعي الأساسي. يتم تقريب كل دالة ومشتقتها بشكل غير مباشر باستخدام دالة الأساس متعدد الوسائط. يتم التقريب غير المباشر من خلال الدمج الجزئي للدالة الأساسية وفقاً لترتيب المعادلة والبدء من أعلى دالة مشتقة إلى الدالة الأصلية نفسها. علاوة على ذلك ، يمكن إجراء تحليل الخطأ إذا تم تحديد المعادلة مع معلمات معينة ، لذلك يجب محاكاة. تم تنفيذ المحاكاة باستخدام الثعبان. سيتم مقارنة حل الحصول على الطريقة غير المباشرة مع طريقة الحل المباشر. ويمكن الاستنتاج أن الحل العددي لمعادلة الختية *Klein-Gordon* باستخدام شبكة الدوال الأساسية الشعاعية غير المباشرة يوفر حلاً أفضل مقارنة باستخدام شبكة الدوال ذات الأساس الشعاعي المباشر. ويمكن ملاحظة أن خطأ الطريقة غير المباشرة أصغر من الطريقة المباشرة. وبالتالي ، فإن الحل يشبه الحل الدقيق.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Permasalahan-permasalahan dalam sains seringkali ditransformasikan ke dalam persamaan-persamaan matematika melalui proses pemodelan matematika, sehingga permasalahan menjadi lebih sederhana. Salah satu persamaan yang terbentuk adalah persamaan *Klein-Gordon*. Persamaan *Klein-Gordon* dinyatakan sebagai persamaan diferensial parsial orde dua dengan variabel bebas  $u$  dan variabel-variabel tak bebas  $x$  dan  $t$  (Deghan & Sokhri, 2009). Persamaan tersebut memiliki aplikasi luas dalam banyak bidang ilmiah, seperti mekanika kuantum dan penyebaran fluks (Sarboland, 2015).

Untuk mendapatkan solusi terbaik dari persamaan *Klein-Gordon*, para ilmuwan telah mengembangkan beberapa metode, baik secara analitik maupun secara numerik. Namun tidak semua permasalahan dalam matematika dapat dengan mudah dicari solusi analitiknya, oleh karena itu dibuatlah metode alternatif yaitu metode numerik yang penyelesaiannya lebih mudah dan lebih cepat. Hal tersebut sesuai dengan janji Allah SWT dalam al-Qur'an surah al-Insyirah berikut:

*“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (QS.al-Insyirah/94:5-6).*

Dalam Tafsir Ibnu Katsir yang ditulis oleh Ar-Rifa'i (2012) diriwayatkan oleh Ibnu Abi Hatim bahwa A-id bin Syuraih berkata “Aku mendengar Anas bin Malik berkata, ‘Nabi SAW pernah duduk-duduk dekat sebuah batu. Lalu beliau bersabda, ‘Kalau ada kesulitan itu datang kemudian masuk ke dalam batu ini, kemudahan akan datang dan masuk pula ke dalam batu ini, kemudian mengeluarkan

kesulitan tadi'. Dalam kehidupan, ketika dihadapkan dengan suatu kesulitan tetapi tetap ikhtiar dan berdoa maka akan muncul kemudahan-kemudahan yang akan menggantikan kesulitan tersebut.

Salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan *Klein-Gordon* adalah jaringan fungsi radial basis. Menurut Lian (2008) jaringan fungsi radial basis merupakan salah satu alternatif aproksimator universal yang dianggap sangat efektif untuk menyelesaikan permasalahan aproksimasi. Hal ini disebabkan karena karakter jaringan ini yang memiliki struktur yang sederhana, waktu komputasi yang cepat, dan kemampuan adaptasi yang superior.

Perkembangan fungsi radial basis untuk mengaproksimasi solusi persamaan diferensial parsial telah menarik perhatian banyak peneliti, salah satunya yaitu Deghan & Sokhri (2009) yang berhasil menyelesaikan persamaan nonlinier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis dengan galat yang tergolong kecil. Jaringan fungsi radial basis itu sendiri, dalam mencari nilai pendekatan dari suatu fungsi dan turunannya meliputi metode langsung dan metode tidak langsung, seperti yang telah dibahas dalam penelitian Mai-Duy dan Tran-Cong (2003).

Pada penelitian sebelumnya yaitu Nur'aini (2018) mengkaji tentang solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis yang didekati secara langsung. Dari penelitian tersebut, penulis tertarik untuk membahas solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis yang didekati secara tidak langsung, kemudian disimulasikan menggunakan parameter yang sama seperti pada penelitian Nur'aini. Dengan

begitu, keefektifan jaringan fungsi radial basis tidak langsung dapat dibandingkan dengan metode langsung yang telah didapatkan dari penelitian tersebut.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis tidak langsung?
2. Bagaimana galat yang dihasilkan dari solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis tidak langsung?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan pada penelitian ini adalah:

1. Mendapatkan solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis tidak langsung.
2. Mendapatkan galat yang dihasilkan dari solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis tidak langsung.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai tambahan pengetahuan mengenai metode alternatif secara numerik dalam menyelesaikan persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis tidak langsung dengan meninjau nilai galat yang dihasilkan, serta dapat dijadikan literatur penunjang dan bahan perbandingan dengan metode yang lain.

### 1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini mengkaji persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis. Adapun parameter yang digunakan diambil dari jurnal Iqbal, dkk (2010), yaitu  $\alpha = -1$ ,  $\beta = -1$ ,  $\gamma = 0$  dan  $f(x, t) = 0$ . Sehingga persamaan yang diselesaikan adalah sebagai berikut:

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq t \leq 3$$

dengan kondisi awal:

$$u(x, 0) = 1 + \sin(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

dan kondisi batas:

$$u(0, t) = \cosh(t), \quad 0 \leq t \leq 3$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 1 + \cosh(t), \quad 0 \leq t \leq 3$$

dengan  $\Delta t = 0.01$  dan  $\Delta x = 0.1571$ .

Penelitian tersebut juga menghasilkan solusi eksak yaitu:

$$u(x, t) = \sin(x) + \cosh(t) \tag{1.1}$$

### 1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini mengikuti langkah-langkah yang digunakan oleh Nur'aini (2018) yaitu sebagai berikut:

1. Solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis tidak langsung dengan langkah-langkah sebagai berikut.
  - a. Mendiskritkan persamaan linier *Klein-Gordon* beserta kondisi awalnya

terhadap waktu  $t$  menggunakan metode beda pusat implisit, sehingga fungsi  $u$  hanya bergantung pada variabel  $x$ .

- b. Mengaproksimasi fungsi  $u$  pada persamaan linier *Klein-Gordon* yang telah didiskritkan beserta kondisi batasnya menggunakan jaringan fungsi radial basis tidak langsung.
  - c. Menghitung solusi  $u^{(1)}$ , dengan cara menentukan nilai koefisien  $w^{(1)}$  kemudian mensubstitusikannya pada aproksimasi fungsi  $u$ .
  - d. Menghitung solusi  $u^{(2)}, u^{(3)}, \dots, u^{(n-1)}$ .
2. Analisis galat dengan langkah-langkah sebagai berikut:
- a. Mensimulasikan solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis tidak langsung kemudian menggambarkan grafik dari semua solusi  $u$ .
  - b. Menghitung galat dengan membandingkan solusi numerik metode tidak langsung yang telah dihasilkan dari langkah (a) terhadap solusi eksak (persamaan (1.1)).

### 1.7 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

BAB I : Pendahuluan

Pada bab ini akan diuraikan mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

**BAB II : Tinjauan pustaka**

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai teori-teori yang mendasari pembahasan diantaranya; persamaan *Klein-Gordon*, solusi analitik dari persamaan linier *Klein-Gordon*, jaringan fungsi radial basis, turunan hampiran jaringan fungsi radial basis secara langsung dan tidak langsung, metode beda hingga, basis, galat, kajian penelitian sebelumnya dan kajian keagamaan.

**BAB III : Pembahasan**

Pada bab ini merupakan inti dari skripsi yang menjelaskan secara keseluruhan langkah-langkah dari metode penelitian dan menjawab permasalahan penelitian yaitu solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis tidak langsung, analisis galat serta pembahasan tentang kajian keagamaan.

**BAB IV : Penutup**

Pada bab ini disajikan mengenai kesimpulan dari rumusan masalah yang telah dijawab pada bab sebelumnya dan dilengkapi dengan saran untuk penelitian selanjutnya yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Persamaan *Klein-Gordon*

Persamaan *Klein Gordon* pertama kali diusulkan dapat menjelaskan relativitas elektron pada tahun 1926 oleh ahli fisika Oskar Klein dan Walter Gordon. Kemudian beberapa penulis lain membuat klaim serupa di tahun yang sama. Persamaan ini pertama kali dianggap sebagai persamaan gelombang kuantum oleh Schrodinger dalam penelitiannya yang membahas persamaan gelombang *de Broglie* (Easif dkk, 2013). Persamaan ini pada dasarnya adalah versi relativistik dari persamaan *Schrodinger* yang dirumuskan oleh Edwin Schrodinger pada tahun 1926. Persamaan *Klein-Gordon* memiliki aplikasi luas dalam banyak bidang ilmiah, seperti seperti penyebaran fluks, gerakan pendula yang kaku menempel pada kawat yang diregangkan, dan dislokasi dalam kristal. Mirip dengan persamaan *Schrodinger*, persamaan *Klein-Gordon* dianggap sebagai salah satu persamaan penting dalam fisika matematika (Sarboland, 2015).

Persamaan *Klein-Gordon* dalam jurnal yang ditulis oleh Iqbal, dkk (2010) didefinisikan sebagai berikut:

$$u_{tt} + \alpha u_{xx} + \beta u + \gamma u^k = f(x,t), \quad x \in \Omega = [a,b] \subset \mathbb{R}, \quad 0 < t \leq T.$$

dengan kondisi awal:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= g_1(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x,0) &= g_2(x), & x \in \Omega, \end{aligned}$$

dan kondisi batas:

$$\begin{aligned} u(a,t) &= g_3(a,t), \quad t > 0 \\ u(b,t) &= g_4(b,t), \quad t > 0 \end{aligned}$$

di mana  $\alpha$ ,  $\beta$  dan  $\gamma$  adalah suatu konstanta yang diketahui. Ketika  $k = 2$  maka persamaan tersebut menjadi nonlinier kuadratik dan ketika  $k = 3$  maka persamaan tersebut menjadi nonlinier kubik.  $f(x,t)$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  dan  $g_4$  adalah fungsi yang diketahui, dan fungsi  $u(x,t)$  merupakan fungsi yang akan dicari.

Penelitian ini nantinya akan dibandingkan dengan penelitian sebelumnya yaitu oleh Nur'aini (2018) dengan judul 'Solusi Numerik Persamaan Linear *Klein-Gordon* Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis'. *Error (SSE)* dan  $\overline{SSE}$  yang dihasilkan dari perbandingan solusi numerik dengan solusi eksak berturut-turut sebesar 63.402 dan  $19149 \times 10^{-2}$ . dengan  $\Delta t = 0.01$ .

## 2.2 Solusi Analitik dari Persamaan Linier *Klein-Gordon*

Subbab ini menjelaskan solusi analitik dari persamaan linier *Klein-Gordon* yang nantinya akan dicari solusi numeriknya. Penelitian ini menggunakan parameter yang digunakan dalam penelitian Iqbal, dkk (2010), yaitu  $\alpha = -1$ ,  $\beta = -1$ ,  $\gamma = 0$  dan  $f(x,t) = 0$  sebagai berikut:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = u(x,t), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.1)$$

dengan kondisi awal:

$$u(x,0) = 1 + \sin(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.2)$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.3)$$

dan kondisi batas:

$$u(0, t) = \cosh(t), \quad 0 \leq t \leq 3 \quad (2.4)$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 1 + \cosh(t), \quad 0 \leq t \leq 3 \quad (2.5)$$

Untuk aplikasi persamaan (2.1) dengan menggunakan sifat-sifat transformasi Laplace yaitu transformasi Laplace dari turunan-turunan, maka didapatkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_{tt}(x, t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_{tt}(x, t) dt \\ &= \left[ e^{-st} \cdot u_t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u_t (-s \cdot e^{-st}) dt \\ &= \left[ e^{-st} \cdot u_t \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} u_t \cdot e^{-st} dt \\ &= (0 - u_t) + s \left( \left[ e^{-st} \cdot u \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u (-s \cdot e^{-st}) dt \right) \\ &= -u_t + \left( s \left[ e^{-st} \cdot u \right]_0^{\infty} - s \left( \int_0^{\infty} u (-s \cdot e^{-st}) dt \right) \right) \\ &= -u_t + (0 - s \cdot u) + s^2 \int_0^{\infty} u \cdot e^{-st} dt \\ &= -u_t - su + s^2 U \\ &= s^2 U(x, t) - su(x, 0) - u_t(x, 0) \\ &= s^2 U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{-u_{xx}(x, t)\} &= -\int_0^{\infty} e^{-st} u_{xx}(x, t) dt \\ &= -\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dt \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot u(x, t) dt = -\frac{d^2}{dx^2} U(x, s) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u(x,t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} u(x,t) dt \\ &= U(x,s)\end{aligned}\quad (2.8)$$

Adapun transformasi laplace untuk persamaan (2.4) adalah

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{at} dt \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{-(s-a)} \cdot e^{-(s-a)t} \right]_0^p = \frac{1}{(s-a)} \\ \mathcal{L}\{u(0,t)\} &= \mathcal{L}\{\cosh(t)\} \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\right\} \\ &= \frac{1}{2}[\mathcal{L}(e^t) + \mathcal{L}(e^{-t})] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{s+1+s-1}{s^2-1^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2s}{s^2-1}\right] = \frac{s}{s^2-1}\end{aligned}\quad (2.9)$$

Transformasi laplace untuk persamaan (2.5) adalah

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{u\left(\frac{\pi}{2}, t\right)\right\} &= \mathcal{L}\{1 + \cosh(t)\} \\ &= \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{\cosh(t)\} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt + \frac{s}{s^2-1} \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \right]_0^p + \frac{s}{s^2-1} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2-1} \\ &= \frac{(s^2-1^2) + s^2}{s(s^2-1^2)} = \frac{2s^2-1}{s(s^2-1)}\end{aligned}\quad (2.10)$$

Dengan mengingat persamaan (2.6), (2.7), (2.8) yang disubstitusikan ke persamaan (2.1), maka diperoleh

$$\mathcal{L}\{u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t)\} = \mathcal{L}\{u(x,t)\} \quad (2.11)$$

Transformasi Laplace dari persamaan (2.11), didapatkan

$$(s^2U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0)) - \frac{d^2}{dx^2}U(x,s) = U(x,s) \quad (2.12)$$

Substitusi kondisi awal (2.2) dan (2.3) pada persamaan (2.12) sehingga menghasilkan persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} (s^2U(x,s) - s(1 + \sin(x)) - 0) - \frac{d^2}{dx^2}U(x,s) &= U(x,s) \\ -\frac{d^2}{dx^2}U(x,s) + s^2U(x,s) - U(x,s) &= s(1 + \sin(x)) \\ \frac{d^2}{dx^2}U(x,s) - s^2U(x,s) + U(x,s) &= -s(1 + \sin(x)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{d^2}{dx^2}U(x,s) + (1 - s^2)U(x,s) = -s(1 + \sin(x)) \quad (2.14)$$

yang merupakan persamaan diferensial non-homogen.

Menurut Purcell dan Valberg (1999), solusi umum untuk persamaan diferensial seperti persamaan (2.14) didefinisikan sebagai berikut

$$U(x,s) = U_h(x,s) + U_p(x,s) \quad (2.15)$$

dimana  $U_h(x,s)$  adalah solusi umum dari persamaan homogen dan  $U_p(x,s)$  adalah solusi khusus dari persamaan non homogen. Bentuk homogen dari persamaan (2.14) adalah

$$\frac{d^2}{dx^2}U(x,s) + (1 - s^2)U(x,s) = 0 \quad (2.16)$$

Persamaan (2.16) dapat ditulis dalam bentuk karakteristik sebagai berikut

$$m^2 + (1 - s^2) = 0 \quad (2.17)$$

dimana  $A = 1, B = 0$  dan  $C = (1 - s^2)$ .

Selanjutnya akar-akar  $m$  dihitung sebagai berikut

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4(1 - s^2)} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$m_{1,2} = \pm i\sqrt{1 - s^2} \quad (2.18)$$

sehingga solusi  $U_h(x, s)$  dapat dinyatakan sebagai berikut

$$U_h(x, s) = k_1 e^{-i\sqrt{1-s^2}x} + k_2 e^{i\sqrt{1-s^2}x}$$

$$U_h(x, s) = c_1 \cos(\sqrt{1 - s^2} \cdot x) + c_2 \sin(\sqrt{1 - s^2} \cdot x) \quad (2.19)$$

Sedangkan untuk  $U_p(x, s)$ , karena pada persamaan (2.14)

$f(x) = -s(1 + \sin(x))$  dengan menggunakan menggunakan metode koefisien tak

tentu maka  $U_p(x, s)$  dapat ditulis sebagai berikut

$$U_p(x, s) = A \cos(x) + B \sin(x) + C \quad (2.20)$$

Selanjutnya dihitung koefisien  $A$  dan  $B$  dengan langkah-langkah sebagai berikut

$$\frac{d}{dx} U_p(x, s) = -A \sin(x) + B \cos(x) + 1 \quad (2.21)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} U_p(x, s) = -A \cos(x) - B \sin(x) \quad (2.22)$$

Persamaan (2.20) dan (2.22) disubstitusikan pada persamaan (2.14), diperoleh

$$\begin{aligned} [-A \cos(x) - B \sin(x)] + (1-s^2)[A \cos(x) + B \sin(x) + C] &= -s(1 + \sin(x)) \\ (-1+1-s^2)A \cos(x) + (-1+1-s^2)B \sin(x) + (1-s^2)C &= -s(1 + \sin(x)) \\ -s^2 A \cos(x) - s^2 B \sin(x) + (1-s^2)C &= -s - s \cdot \sin(x) \end{aligned} \quad (2.23)$$

dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned} -s \cdot A \cos(x) &= 0 \\ A &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} -s^2 \cdot B \sin(x) &= -s \cdot \sin(x) \\ B &= \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} (1-s^2)C &= -s \\ C &= \frac{-s}{1-s^2} = \frac{s}{s^2-1} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Substitusikan hasil dari persamaan (2.24), (2.25) dan (2.26) pada persamaan (2.20), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} U_p(x, s) &= A \cos(x) + B \sin(x) + C \\ &= 0 \cdot \cos(x) + \frac{1}{s} \cdot \sin(x) + \frac{s}{s^2-1} \\ &= \frac{\sin(x)}{s} + \frac{s}{s^2-1} \\ &= \frac{\sin(x) \cdot (s^2-1) + s \cdot s}{s(s^2-1)} \\ &= \frac{s^2 \sin(x) - \sin(x) + s^2}{s^3 - s} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Substitusikan hasil dari persamaan (2.19) dan (2.27) pada persamaan (2.15), sehingga diperoleh

$$U(x, s) = c_1 \cos(\sqrt{1-s^2} \cdot x) + c_2 \sin(\sqrt{1-s^2} \cdot x) + \frac{s^2 \sin(x) - \sin(x) + s^2}{s^3 - s} \quad (2.28)$$

Transformasi Laplace dengan kondisi batas kiri yaitu persamaan (2.9) menjadi

$$\begin{aligned}
 U(0, s) &= c_1 \cos(\sqrt{1-s^2} \cdot 0) + c_2 \sin(\sqrt{1-s^2} \cdot 0) + \frac{s^2 \sin(0) - \sin(0) + s^2}{s^3 - s} \\
 \frac{s}{s^2 - 1} &= c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) + \frac{s^2}{s^3 - s} \\
 \frac{s}{s^2 - 1} &= c_1 + \frac{s}{s^2 - 1} \\
 c_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Substitusikan  $c_1$  yaitu hasil dari persamaan (2.29) pada persamaan (2.28), sehingga diperoleh

$$U(x, s) = c_2 \sin(\sqrt{1-s^2} \cdot x) + \frac{s^2 \sin(x) - \sin(x) + s^2}{s^3 - s} \tag{2.30}$$

Transformasi Laplace dengan kondisi batas kanan yaitu persamaan (2.10) pada persamaan (2.30), menjadi

$$\begin{aligned}
 U\left(\frac{\pi}{2}, s\right) &= c_2 \sin\left(\sqrt{1-s^2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{s^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + s^2}{s^3 - s} \\
 \frac{2s^2 - 1}{s(s^2 - 1)} &= c_2 \sin\left(\sqrt{1-s^2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2s^2 - 1}{s(s^2 - 1)} \\
 c_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

dengan mensubstitusikan  $c_2$  yaitu persamaan (2.31) pada persamaan (2.30), maka diperoleh

$$U(x, s) = \frac{s^2 \sin(x) - \sin(x) + s^2}{s^3 - s} \tag{2.32}$$

Terakhir, mencari invers transformasi Laplace pada persamaan (2.32) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
U(x,t) &= \mathcal{L}^{-1}\{U(x,s)\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 \sin(x) - \sin(x) + s^2}{s^3 - s}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s^2 - 1)\sin(x) + s^2}{s(s^2 - 1)}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sin(x)}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{s^2 - 1}\right\}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Invers transformasi Laplace dari  $\frac{\sin(x)}{s}$  dapat dicari dengan berdasarkan fungsi berikut

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \right]_0^p = \left[ \left( -\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot \infty} \right) - \left( -\frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot 0} \right) \right] = \frac{1}{s}$$

sehingga didapatkan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sin(x)}{s}\right\} = \sin(x) \tag{2.34}$$

Berdasarkan persamaan (2.34) dan invers dari persamaan (2.9), maka didapatkan solusi eksak dari persamaan (2.33) sebagai berikut

$$\begin{aligned}
U(x,t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sin(x)}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{s^2 - 1}\right\} \\
&= \sin(x) + \cosh(t)
\end{aligned} \tag{2.35}$$

### 2.3 Jaringan Fungsi Radial Basis

Beberapa tahun terakhir ini ada suatu teknik pemodelan jaringan yang banyak diminati untuk memecahkan berbagai masalah bidang ilmu seperti bidang kedokteran, teknik, dan fisika. Faktor yang mendukung keberhasilan teknik pemodelan jaringan tersebut salah satunya karena handal dan mudah digunakan. Dikatakan handal karena dapat membuat model suatu fungsi kompleks dengan

sangat memuaskan. Selain itu pengguna tidak memerlukan pengetahuan khusus mengenai bagaimana memilih dan mempersiapkan data, melainkan cukup dengan mengumpulkan data dan melakukan pembelajaran algoritma untuk mempelajari struktur data secara otomatis sehingga mudah digunakan. Teknik pemodelan tersebut adalah jaringan syaraf tiruan (Yani, 2005). Jaringan syaraf tiruan dirancang pertama kali oleh seorang ahli neurofisiologi Mc. Culloch dan ahli logika W. H. Pitch pada tahun 1943 sebagai algoritma pemrosesan informasi. Hal itu terinspirasi dari sistem kerja jaringan syaraf tiruan yang tidak jauh berbeda dengan jaringan syaraf biologis pada otak manusia yaitu dalam penginputan suatu informasi (Hajek, 2005).

Salah satu jenis jaringan syaraf tiruan adalah jaringan fungsi radial basis yang diperkenalkan pertama kali pada tahun 1988 dalam makalah D.S. Broomhead dan David Lowe yang berjudul '*radial basis functions, multi-variable interpolation and adaptive networks*'. Jaringan fungsi radial basis yaitu jaringan syaraf yang dibentuk menggunakan fungsi aktivasi berupa fungsi radial basis (Hajek, 2005). Jaringan yang sering disingkat menjadi jaringan RBF ini memiliki kerja seperti otak manusia yaitu menyimpan, belajar dan mengambil kembali pengetahuan yang tersimpan dalam sel saraf atau neuron (Kusumadewi, 2004).

Suatu jaringan fungsi radial basis merepresentasikan pemetaan dari *input*  $n$ -dimensi pada ruang *output* 1-dimensi  $f: R^n \rightarrow R^1$  yang terdiri dari suatu himpunan bobot  $\{w_j\}_{j=1}^m$  dan himpunan dari fungsi radial basis  $\varphi_j(x) = \varphi(\|x - c_j\|)$ , dimana  $\| \cdot \|$  merupakan vektor normal (Setiawan, 2002).

Representasi aproksimasi jaringan fungsi radial basis untuk fungsi 1-variabel  $f(x)$  sebagai berikut

$$f(x) \approx \hat{f}(x) = \sum_{j=1}^N w_j \phi(x, c_j) \quad (2.36)$$

Keterangan:

$f(x)$  : fungsi dari  $x$

$\hat{f}(x)$  : fungsi pendekatan dari  $x$

$N$  : jumlah fungsi radial basis (*neuron*) dan *center*

$w_j$  : bobot untuk fungsi radial basis ke- $j$

$\phi_j$  : fungsi radial basis ke- $j$

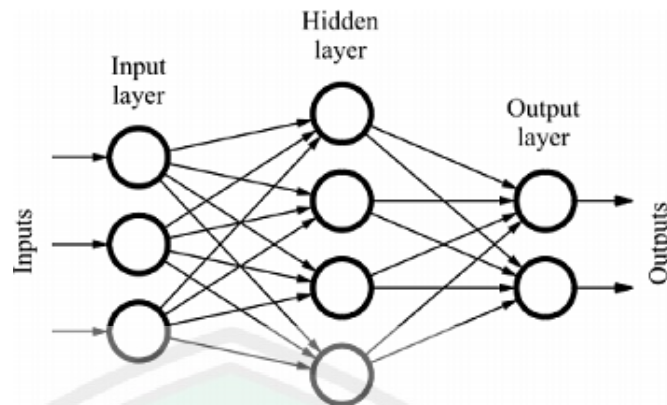
$x$  : vektor *input*

$c_j$  : titik pusat (*center*) ke- $k$

$\| \cdot \|$  : jarak *euclid* ( $r$ ) tiap titik terhadap titik pusat

$\|x - c_j\|$  :  $\sqrt{(x - c_j)^2}$

Jaringan fungsi radial basis memiliki struktur yang terdiri dari tiga bagian, yaitu lapisan masukan (*input layer*), lapisan tersembunyi (*hidden layer*) dan lapisan keluaran (*output layer*). Semua fungsi aktivasi pada lapisan tersembunyi akan diaktifkan oleh setiap masukan dari jaringan. Tiap-tiap unit pada lapisan tersembunyi merupakan representasi dari fungsi aktivasi yaitu fungsi radial basis. Setiap fungsi basis tersebut akan menghasilkan sebuah keluaran yaitu jumlah dari seluruh output fungsi basis dikalikan dengan bobot masing-masing (Setiawan, 2002).



**Gambar 2. 1** Arsitektur Jaringan Fungsi Radial Basis

Beberapa fungsi basis yang sering digunakan untuk mengaktifkan jaringan fungsi radial basis adalah sebagai berikut (May-Dui dan Tran-Cong, 2002):

- 1) Fungsi *Gaussian* 1-dimensi

$$\phi(x, c) = \exp\left(-\frac{(x-c)^2}{a^2}\right)$$

- 2) Fungsi *Multiquadrics* 1-dimensi

$$\phi(x, c) = \sqrt{(x-c)^2 + a^2} \quad (2.37)$$

- 3) Fungsi *Invers multiquadrics* 1-dimensi

$$\phi(x, c) = \frac{1}{\sqrt{(x-c)^2 + a^2}}$$

Keterangan:

$c$  : titik *center* pada  $x$

$a$  : varian dari *center*

Beberapa jenis fungsi basis dalam jaringan fungsi radial basis di atas merupakan jenis yang paling umum digunakan. Dari beberapa jenis fungsi basis tersebut, penulis menggunakan fungsi *multiquadrics* karena memiliki tingkat keakuratan lebih baik dari jenis fungsi lain. Hal ini dapat dilihat dari *error* turunan hampiran pada fungsi basis tersebut yang lebih kecil dari jenis fungsi lain. Fungsi *multiquadrics* dikembangkan pertama kali pada tahun 1971 dalam karya penelitian Roland Hardy yang berjudul '*Multiquadrics Equations of Topography and Other Surface*'. Kemudian fungsi ini dikembangkan oleh matematikawan Richard Franke pada tahun 1979 dan terus mengalami perkembangan signifikan dengan digunakannya fungsi *multiquadrics* dalam penyelesaian persamaan diferensial yang diteliti oleh Edward Kansa pada tahun 1990 (Sarra dan Kansa, 2009).

Parameter  $a$  dalam fungsi basis *multiquadrics* didapatkan dengan menghitung nilai varians dari  $c$ . Varians adalah ukuran yang menyatakan variasi atau keragaman data sehingga sering disebut dengan ragam. Varians untuk data sampel  $c$  diberi simbol  $Var(c)$  atau  $s_c^2$  dan dapat dihitung sebagaimana persamaan berikut

$$Var(c) = \frac{N \sum_{j=1}^N c_j^2 - \left( \sum_{j=1}^N c_j \right)^2}{N(N-1)} \quad (2.38)$$

dengan  $N$  adalah banyaknya titik  $c$  (Simbolon, 2013).

Aminataei dan Mazarei (2008) menyatakan bahwa pembahasan penting dalam jaringan fungsi radial basis adalah menghitung nilai bobot  $w_j$  yang belum diketahui. Langkah-langkah dalam mengaproksimasi suatu fungsi menggunakan jaringan fungsi radial basis setelah dipilih sebuah himpunan fungsi basis  $\phi$ , adalah

menghitung nilai bobot  $w_j$ . Langkah selanjutnya, jika telah didapatkan himpunan nilai-nilai bobot  $w_j$ , maka jaringan fungsi radial basis dapat dibentuk. Jaringan tersebut dibentuk oleh himpunan nilai bobot  $w_j$  dan himpunan fungsi radial basis  $\phi$ .

Himpunan nilai bobot  $w_j$  bersifat linier sehingga menghasilkan suatu kombinasi linier dari  $N$  fungsi radial basis. Fungsi  $f(x)$  membangun suatu kombinasi linier  $N$  dari fungsi basis. Kumpulan dari fungsi basis ini akan membentuk suatu vektor-vektor basis yang pada akhirnya hal tersebut dipergunakan untuk menghitung nilai bobot  $w_j$ .

Kumpulan dari fungsi basis yang membentuk vektor basis ditulis sebagai  $A$ . Himpunan nilai bobot ( $w_j$ ) ditulis sebagai  $W$ . Sedangkan fungsi-fungsi  $f(x)$  untuk  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  ditulis sebagai  $B$ . Mai-Duy & Tran-Cong (2003) menyatakan bahwa hubungan antara fungsi basis  $A$ , nilai bobot  $W$  dan solusi pendekatan  $B$  adalah

$$\begin{aligned} AW &= B \\ (A^{(-1)}A)W &= A^{(-1)}B \\ W &= A^{(-1)}B \end{aligned} \quad (2.39)$$

dimana

$$A = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1, c_1) & \phi_2(x_1, c_2) & \cdots & \phi_N(x_1, c_N) \\ \phi_1(x_2, c_1) & \phi_2(x_2, c_2) & \cdots & \phi_N(x_2, c_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_m, c_1) & \phi_2(x_m, c_2) & \cdots & \phi_N(x_m, c_N) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$W = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T \quad (2.41)$$

$$B = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T \quad (2.42)$$

## 2.4 Turunan Hampiran dengan Jaringan Fungsi Radial Basis

Terdapat dua metode untuk memperoleh turunan hampiran pada jaringan fungsi radial basis. Metode tersebut antara lain:

### 2.4.1 Metode Langsung

Aproksimasi pada metode langsung jaringan fungsi radial basis dilakukan dengan menurunkan fungsi basis terhadap variabel bebasnya (Mai-Duy dan Tran-Cong, 2002). Hasil aproksimasi dari fungsi turunan dapat diperoleh dengan mengalikan fungsi basis yang diturunkan tersebut dengan koefisien bobot  $w$ . Misalkan sebuah fungsi  $f(x)$  akan diaproksimasikan sampai fungsi turunan kedua dengan jaringan fungsi radial basis, maka fungsi  $f(x)$  adalah

$$f(x) = \sum_{j=1}^N w_j \phi(x, c_j) \quad (2.43)$$

dimana  $\phi(x, c_j)$  adalah sebarang fungsi basis. Fungsi turunan pertama dari fungsi  $f(x)$  adalah

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \sum_{j=1}^N w_j \phi(x, c_j) \right) = \sum_{j=1}^N w_j \phi_x(x, c_j) \quad (2.44)$$

dengan  $\phi_x(x, c_j)$  adalah fungsi yang diperoleh dengan menurunkan fungsi basis terhadap  $x$ .

Fungsi turunan kedua dari fungsi  $f(x)$  adalah

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \sum_{j=1}^N w_j \phi_x(x, c_j) \right) = \sum_{j=1}^N w_j \phi_{xx}(x, c_j) \quad (2.45)$$

dengan  $\phi_{xx}(x, c_j)$  adalah fungsi yang diperoleh dengan menurunkan  $\phi_x(x, c_j)$  terhadap  $x$ .

Adapun aproksimasi turunan pertama dan turunan kedua pada fungsi basis

multiquadrics 1-dimensi  $\phi(x, c_j) = \sqrt{(x - c_j)^2 + a^2}$  adalah sebagai berikut:

a) Turunan Pertama

Aproksimasi turunan pertama diperoleh dengan menurunkan satu kali fungsi basis multiquadrics 1-dimensi terhadap  $x$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df}{dx} = \sum_{j=1}^N w_j \frac{d}{dx} \phi(x, c_j) \\ &= \sum_{j=1}^N w_j \frac{d}{dx} \left( \sqrt{(x - c_j)^2 + a^2} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N w_j \frac{x - c_j}{\sqrt{(x - c_j)^2 + a^2}} \end{aligned} \quad (2.46)$$

b) Turunan Kedua

Aproksimasi turunan kedua diperoleh dengan menurunkan dua kali fungsi basis multiquadrics 1-dimensi terhadap  $x$ .

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d^2 f}{dx^2} = \sum_{j=1}^N w_j \frac{d^2}{dx^2} \phi(x, c_j) \\ &= \sum_{j=1}^N w_j \frac{d^2}{dx^2} \left( \sqrt{(x - c_j)^2 + a^2} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N w_j \frac{d}{dx} \left( \frac{x - c_j}{\sqrt{(x - c_j)^2 + a^2}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N w_j \left( \frac{1}{\sqrt{(x - c_i)^2 + a^2}} - \frac{(x - c_i)^2}{\sqrt[3]{(x - c_i)^2 + a^2}} \right) \end{aligned} \quad (2.47)$$

## 2.4.2 Metode Tidak Langsung

Aproksimasi pada metode tidak langsung dilakukan dengan mengintegalkan secara parsial fungsi basis sesuai dengan order dari persamaan

diferensial dan dimulai dari fungsi turunan tertinggi sampai dengan fungsi asal itu sendiri. Menurut Mai-Duy & Tran-Cong (2003) misalkan fungsi  $f(x)$  akan diaproksimasi sampai fungsi turunan kedua, maka fungsi turunan kedua adalah

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \sum_{j=1}^N w_j \phi(x, c_j) \quad (2.48)$$

dimana  $\phi(x, c_j)$  adalah sebarang fungsi basis,  $w$  adalah koefisien bobot yang harus dicari nilainya, dan  $c$  adalah titik *collocation* dengan  $j = 1, 2, \dots, N$ . Untuk fungsi turunan pertama diaproksimasi dengan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df(x)}{dx} = \sum_{j=1}^N w_j \int \phi(x, c_j) dx \\ &= \sum_{j=1}^N w_j [H_1(x, c_j) + k_j] \\ &= \sum_{j=1}^N w_j H_1(x, c_j) + \sum_{j=1}^N w_j k_j \\ &= \sum_{j=1}^N w_j H_1(x, c_j) + w_{N+1} \end{aligned}$$

dengan

$$\int \phi(x, c_j) dx = H_1(x, c_j) + k_j$$

dan

$$\sum_{j=1}^N w_j k_j = w_{N+1}$$

untuk mempermudah penulisan saat dibentuk matriks. Dimana  $H_1(x, c_j)$  adalah fungsi basis baru yang diperoleh dari pengintegralan fungsi  $\phi(x, c_j)$ , dan  $k_j$  adalah konstanta hasil pengintegralan. Maka aproksimasi fungsi turunan pertama adalah

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \sum_{j=1}^N w_j H_1(x, c_j) + w_{N+1} \quad (2.49)$$

Fungsi asal  $f(x)$  diaproksimasi dengan

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int f'(x) dx = \sum_{j=1}^N w_j \int [H_1(x, c_j) + w_{N+1}] dx \\
 &= \sum_{j=1}^N w_j \int H_1(x, c_j) dx + \int w_{N+1} dx \\
 &= \sum_{j=1}^N w_j [H_2(x, c_j) + k_j] + x \cdot w_{N+1} \\
 &= \sum_{j=1}^N w_j H_2(x, c_j) + \sum_{j=1}^N w_j k_j + x \cdot w_{N+1} \\
 &= \sum_{j=1}^N w_j H_2(x, c_j) + w_{N+2} + x \cdot w_{N+1}
 \end{aligned}$$

dengan

$$\int H_1(x, c_j) dx = H_2(x, c_j) + k_j$$

dan

$$\sum_{j=1}^N w_j k_j = w_{N+2}$$

dimana  $H_2(x, c_j)$  adalah fungsi basis baru yang diperoleh dari pengintegralan fungsi  $H_1(x, c_j)$ , dan  $k_j$  adalah konstanta hasil pengintegralan. Maka fungsi asal  $f(x)$  adalah

$$f(x) = \sum_{j=1}^N w_j H_2(x, c_j) + x \cdot w_{N+1} + w_{N+2} \quad (2.50)$$

Adapun integral dari fungsi basis multiquadrics sampai orde ke-2 adalah sebagai berikut:

$$H_1(x, c_j) = \frac{(x - c_j)}{2} P + \frac{a^2}{2} Q \quad (2.51)$$

$$H_2(x, c_j) = \left( -\frac{a^2}{3} + \frac{(x-c_j)^2}{6} \right) P + \left( \frac{a^2(x-c_j)}{2} \right) Q \quad (2.52)$$

dimana  $P = \sqrt{(x-c_i)^2+a^2}$  dan  $Q = \ln\left((x-c_i) + \sqrt{(x-c_i)^2+a^2}\right)$ .

## 2.5 Metode Beda Hingga

Pendekatan solusi numerik seringkali dibutuhkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Hal itu dikarenakan persamaan diferensial tersebut tidak selalu mudah diselesaikan secara analitik. Salah satu metode numerik yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial adalah metode beda hingga yaitu metode yang didasarkan pada ekspansi deret Taylor (Strauss, 2007).

Persamaan *Klein-Gordon* telah dipelajari secara luas dengan menggunakan metode tradisional seperti metode beda hingga, metode elemen hingga, atau metode kolokasi. Transformasi *backlund* dan metode hamburan terbalik juga diterapkan untuk menangani persamaan ini (Wazwaz, 2002). Namun pada penelitian ini turunan hampiran terhadap  $t$  pada persamaan *Klein-Gordon* akan dikerjakan menggunakan metode beda hingga yaitu beda pusat.

Operator metode beda hingga menurut Strauss (2007) adalah:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\Delta t} \quad (2.53)$$

untuk persamaan beda maju.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \approx \frac{u^n(x) - u^{n-1}(x)}{\Delta t} \quad (2.54)$$

untuk persamaan beda mundur.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1}(x) - u^{n-1}(x)}{2\Delta t} \quad (2.55)$$

untuk persamaan beda pusat.

Persamaan tersebut diperoleh dari ekspansi deret Taylor. Misalkan diberi fungsi  $u(x + \delta x, t)$ ,  $u(x - \delta x, t)$  dan  $u(x, t - \delta t)$ ,  $u(x, t + \delta t)$  diaproksimasikan ke dalam deret Taylor di sekitar  $u(x, t)$  sebagaimana berikut

$$u(x + \Delta x, t) = u(x, t) + u_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(x, t)\Delta x^2 + \frac{1}{6}u_{xxx}(x, t)\Delta x^3 + \dots \quad (2.56)$$

$$u(x - \Delta x, t) = u(x, t) - u_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{2}u_{xx}(x, t)\Delta x^2 - \frac{1}{6}u_{xxx}(x, t)\Delta x^3 + \dots \quad (2.57)$$

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + u_t(x, t)\Delta t + \frac{1}{2}u_{tt}(x, t)\Delta t^2 + \frac{1}{6}u_{ttt}(x, t)\Delta t^3 + \dots \quad (2.58)$$

$$u(x, t - \Delta t) = u(x, t) - u_t(x, t)\Delta t + \frac{1}{2}u_{tt}(x, t)\Delta t^2 - \frac{1}{6}u_{ttt}(x, t)\Delta t^3 + \dots \quad (2.59)$$

Turunan hampiran pertama terhadap  $x$  untuk beda pusat dapat dilakukan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor dari persamaan tersebut yang dipotong sampai orde tertentu.

Aproksimasi turunan pertama terhadap  $x$  untuk beda pusat dapat dilakukan dengan mengurangkan persamaan (2.56) dengan persamaan (2.57), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) &= 2u_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{6}u_{xxx}(x, t)\Delta x^3 + \dots \\ 2u_x(x, t)\Delta x &= u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t) + O(\Delta x)^3 \\ u_x(x, t) &= \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^3 \end{aligned} \quad (2.60)$$

Aproksimasi turunan pertama terhadap  $t$  untuk beda pusat dapat dilakukan dengan mengurangkan persamaan (2.58) dengan persamaan (2.59), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 u(x, t + \Delta t) - u(x, t - \Delta t) &= 2u_t(x, t)\Delta t + \frac{1}{6}u_{ttt}(x, t)\Delta t^3 + \dots \\
 2u_t(x, t)\Delta t &= u(x, t + \Delta t) - u(x, t - \Delta t) + O(\Delta t)^3 \quad (2.61) \\
 u_t(x, t) &= \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t - \Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t)^3
 \end{aligned}$$

Persamaan (2.60) dan (2.61) berturut-turut dapat ditulis

$$\frac{du}{dx} = \frac{u^{n+1}(x) - u^{n-1}(x)}{2\Delta x} \quad (2.62)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{u^{n+1}(x) - u^{n-1}(x)}{2\Delta t} \quad (2.63)$$

Aproksimasi turunan kedua terhadap  $x$  untuk beda pusat dapat dilakukan dengan menjumlahkan persamaan (2.56) dengan persamaan (2.57), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) &= 2u(x, t) + 2\frac{1}{2}u_{xx}(x, t)\Delta x^2 + \dots \\
 u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) &= 2u(x, t) + u_{xx}(x, t)\Delta x^2 + O(\Delta x)^4 \\
 u_{xx}(x, t)\Delta x^2 &= u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t) + O(\Delta x)^4 \quad (2.64) \\
 u_{xx}(x, t) &= \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^4
 \end{aligned}$$

Aproksimasi turunan kedua terhadap  $t$  untuk beda pusat dapat dilakukan dengan menjumlahkan persamaan (2.58) dengan persamaan (2.59), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
u(x, t + \Delta t) + u(x, t - \Delta t) &= 2u(x, t) + 2\frac{1}{2}u_{tt}(x, t)\Delta t^2 + \dots \\
u(x, t + \Delta t) + u(x, t - \Delta t) &= 2u(x, t) + u_{tt}(x, t)\Delta t^2 + O(\Delta t)^4 \\
u_{tt}(x, t)\Delta t^2 &= u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t) + O(\Delta t)^4 \\
u_{tt}(x, t) &= \frac{u(x, t + \Delta t) - 2u(x, t) + u(x, t - \Delta t)}{(\Delta t)^2} + O(\Delta t)^4
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Persamaan (2.64) dan (2.65) berturut-turut dapat ditulis

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{u^{n+1}(x) - 2u^n(x) + u^{n-1}(x)}{\Delta x^2} \tag{2.66}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{u^{n+1}(x) - 2u^n(x) + u^{n-1}(x)}{\Delta t^2} \tag{2.67}$$

## 2.6 Basis

Basis mempunyai definisi jika  $V$  adalah suatu ruang vektor sebarang dan  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  adalah suatu himpunan vektor-vektor pada  $V$ , maka  $S$  disebut basis untuk  $V$  jika dua syarat berikut berlaku:

- a)  $S$  bebas linier.
- b)  $S$  merentang  $V$  (Anton & Rorres, 2004).

Sebagai contoh, jika  $v_1, v_2, \dots, v_N$  merupakan vektor-vektor berikut

$$v_1 = (\phi(a, c_1), h(x_2, c_1), \dots, h(x_{m-1}, c_1), \phi(b, c_1))$$

$$v_2 = (\phi(a, c_2), h(x_2, c_2), \dots, h(x_{m-1}, c_2), \phi(b, c_2))$$

$$v_3 = (\phi(a, c_3), h(x_2, c_3), \dots, h(x_{m-1}, c_3), \phi(b, c_3))$$

⋮

$$v_N = (\phi(a, c_N), h(x_2, c_N), \dots, h(x_{m-1}, c_N), \phi(b, c_N))$$

dan  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  serta  $N = m$ , maka selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $S$  adalah basis di ruang  $R^N$ . Oleh karena itu, perlu ditunjukkan bahwa  $S$  merentang  $R^N$  dan  $S$  bebas linier.

Cara menunjukkan bahwa himpunan  $S$  merentang  $R^N$  adalah dengan menunjukkan bahwa suatu vektor sebarang  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3, \dots, d_m)$  yang dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linier dari vektor-vektor pada  $S$  sebagaimana berikut

$$\mathbf{d} = w_1 v_1 + w_2 v_2 + \dots + w_N v_N$$

atau

$$\begin{aligned} \mathbf{d} = & w_1 (\phi(a, c_1), h(x_2, c_1), \dots, h(x_{m-1}, c_1), \phi(b, c_1)) \\ & + w_2 (\phi(a, c_2), h(x_2, c_2), \dots, h(x_{m-1}, c_2), \phi(b, c_2)) \\ & + \dots + w_N (\phi(a, c_N), h(x_2, c_N), \dots, h(x_{m-1}, c_N), \phi(b, c_N)) \end{aligned}$$

atau dengan menyetarakan komponen-komponen yang bersesuaian sehingga diperoleh bentuk berikut

$$\begin{aligned} \phi(a, c_1) w_1 + \phi(a, c_2) w_2 + \dots + \phi(a, c_N) w_N &= d_1 \\ h(x_2, c_1) w_1 + h(x_2, c_2) w_2 + \dots + h(x_2, c_N) w_N &= d_2 \\ h(x_3, c_2) w_1 + h(x_3, c_2) w_2 + \dots + h(x_3, c_N) w_N &= d_3 \\ &\vdots \\ h(x_{m-1}, c_2) w_1 + h(x_{m-1}, c_2) w_2 + \dots + h(x_{m-1}, c_N) w_N &= d_{m-1} \\ \phi(b, c_1) w_1 + \phi(b, c_2) w_2 + \dots + \phi(b, c_N) w_N &= d_m \end{aligned} \tag{2.68}$$

Dalam bentuk matriks dapat ditulis dalam bentuk berikut

$$\begin{bmatrix} \phi(a, c_1) & \phi(a, c_2) & \dots & \phi(a, c_N) \\ h(x_2, c_1) & h(x_2, c_2) & \dots & h(x_2, c_N) \\ h(x_3, c_1) & h(x_3, c_2) & \dots & h(x_3, c_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_{m-1}, c_1) & (x_{m-1}, c_2) & \dots & (x_{m-1}, c_N) \\ \phi(b, c_1) & \phi(b, c_2) & \dots & \phi(b, c_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

jadi untuk menunjukkan  $S$  merentang  $R^N$  harus ditunjukkan bahwa sistem (2.69) memiliki satu solusi untuk setiap pilihan dari  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_m)$ .

Cara untuk membuktikan bahwa  $S$  bebas linier adalah dengan menunjukkan bahwa satu-satunya solusi dari

$$w_1 v_1 + w_2 v_2 + \dots + w_N v_N = 0 \quad (2.70)$$

adalah  $w_1 = w_2 = \dots = w_N = 0$ . Jika persamaan (2.70) dinyatakan dalam bentuk komponen-komponennya maka hanya akan ditunjukkan bahwa sistem homogen

$$\begin{aligned} \phi(a, c_1) w_1 + \phi(a, c_2) w_2 + \dots + \phi(a, c_N) w_N &= 0 \\ h(x_2, c_1) w_1 + h(x_2, c_2) w_2 + \dots + h(x_2, c_N) w_N &= 0 \\ h(x_3, c_2) w_1 + h(x_3, c_2) w_2 + \dots + h(x_3, c_N) w_N &= 0 \\ \vdots & \\ h(x_{m-1}, c_2) w_1 + h(x_{m-1}, c_2) w_2 + \dots + h(x_{m-1}, c_N) w_N &= 0 \\ \phi(b, c_1) w_1 + \phi(b, c_2) w_2 + \dots + \phi(b, c_N) w_N &= 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

hanya akan memiliki solusi trivial.

Jadi, dibuktikan bahwa  $S$  bebas linier dan merentang  $R^N$  untuk  $m = N$ .

Dengan demikian  $S$  adalah basis untuk  $R^N$ .

## 2.7 Galat

Galat atau *error* dapat merepresentasikan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi eksaknya. Semakin kecil galat maka semakin teliti solusi numerik yang didapatkan. Sekecil apapun galat yang diperoleh sangatlah berarti untuk mengetahui keefektifan suatu metode numerik untuk menyelesaikan suatu persamaan.

Mai-Duy & Tran-Cong (2002) menyebutkan bahwa untuk menentukan *error* adalah dengan menghitung selisih kuadrat (*sum square error*) antara fungsi aproksimasi jaringan fungsi radial basis dengan fungsi asalnya. Misalkan  $\hat{f}(x)$

adalah fungsi aproksimasi jaringan fungsi radial basis dan  $f(x)$  adalah fungsi aslinya, *error* mutlak didefinisikan sebagai berikut:

$$|e| = |f(x) - \hat{f}(x)| \quad (2.72)$$

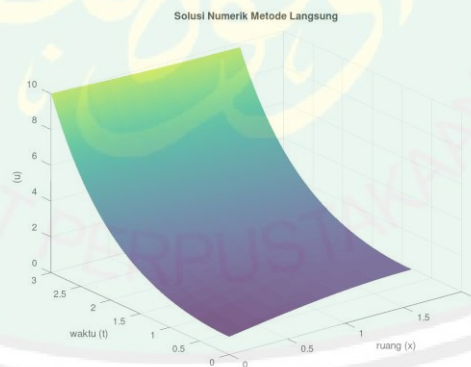
$$SSE = \sum_{j=1}^N (f(x) - \hat{f}(x))^2 \quad (2.73)$$

untuk sejumlah titik  $m$  dapat dihitung *error* rata-rata menggunakan

$$SSE = \frac{\sum_{j=1}^N (f(x) - \hat{f}(x))^2}{m} \quad (2.74)$$

## 2.8 Kajian Penelitian Sebelumnya

Nur'aini (2018) telah menyelesaikan solusi numerik dari persamaan (2.1) menggunakan jaringan fungsi radial basis secara langsung. Berikut adalah solusi numerik jaringan fungsi radial basis secara langsung menggunakan MATLAB dari keseluruhan solusi  $u$  pada  $0 \leq t \leq 3$ .



**Gambar 2.2** Grafik Solusi Numerik Metode Langsung

Tabel 2.1 menunjukkan solusi numerik persamaan (2.1) menggunakan jaringan fungsi radial basis (RBF) secara langsung serta galat yang dihasilkan pada saat  $t = 1$ ,  $t = 2$  dan  $t = 3$  dengan  $\Delta t = 0.01$  dan  $\Delta x = 0.1571$ . Kolom ke-5

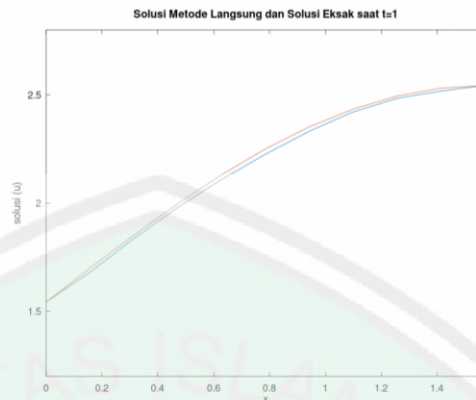
menunjukkan galat yang dihasilkan dari solusi numerik jaringan fungsi radial basis yang didekati secara langsung dengan menghitung  $|u_{eksak} - u_{RBF(langsung)}|$ .

**Tabel 2.1** Perbandingan Solusi Numerik RBF Langsung terhadap Solusi Eksak

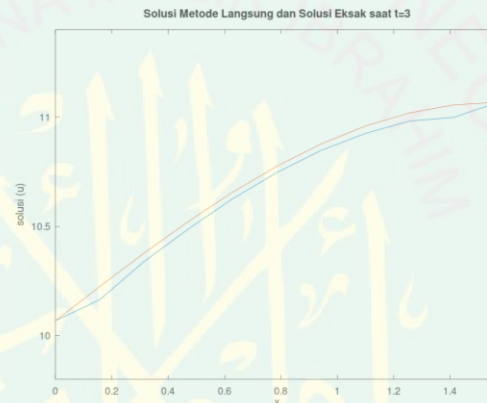
$t$	$x$	$u$ eksak	$u$ RBF langsung	Galat RBF langsung
1	0	1.54308063	1.5431	$1.3323 \times 10^{-15}$
	0.1571	1.6995151	1.6807	0.018775
	0.3142	1.85209763	1.8368	0.015333
	0.4712	1.99707113	1.9797	0.017330
	0.6283	2.13086589	2.1091	0.021768
	0.7854	2.25018742	2.2258	0.024425
	0.9425	2.35209763	2.3320	0.020074
	1.0996	2.43408716	2.4210	0.013076
	1.2566	2.49413715	2.4836	0.010536
	1.4137	2.53076898	2.5172	0.013559
	1.5708	2.54308063	2.5431	$4.4409 \times 10^{-16}$
2	0	3.76219569	3.7622	$4.3076 \times 10^{-16}$
	0.1571	3.91863016	3.8857	0.032886
	0.3142	4.01721269	4.0417	0.029533
	0.4712	4.21618619	4.1816	0.034585
	0.6283	4.34998094	4.3134	0.036630
	0.7854	4.46930247	4.4319	0.037424
	0.9425	4.57121269	4.5347	0.036560
	1.0996	4.65320222	4.6201	0.033144
	1.2566	4.71325221	4.6868	0.026498
	1.4137	4.74988403	4.7218	0.028132
	1.5708	4.76219569	4.7622	$4.3076 \times 10^{-16}$
3	0	10.067662	10.0677	$1.7764 \times 10^{-15}$
	0.1571	10.2240964	10.1640	0.060125
	0.3142	10.3766789	10.3383	0.038342
	0.4712	10.5216525	10.4871	0.034530
	0.6283	10.6554472	10.6258	0.029683
	0.7854	10.7747687	10.7456	0.029150
	0.9425	10.8766789	10.8472	0.029442
	1.0996	10.9586682	10.9148	0.033893
	1.2566	11.0187185	10.9815	0.037205
	1.4137	11.0553503	10.9984	0.056902
	1.5708	11.067662	11.0677	$1.7764 \times 10^{-15}$

Berikut adalah grafik perbandingan solusi numerik menggunakan jaringan fungsi radial basis secara langsung terhadap solusi eksak pada saat  $t = 1$  dan  $t = 3$  menggunakan MATLAB, dengan grafik berwarna biru merupakan grafik solusi

numerik jaringan fungsi radial basis langsung sedangkan grafik berwarna merah merupakan grafik solusi eksak.

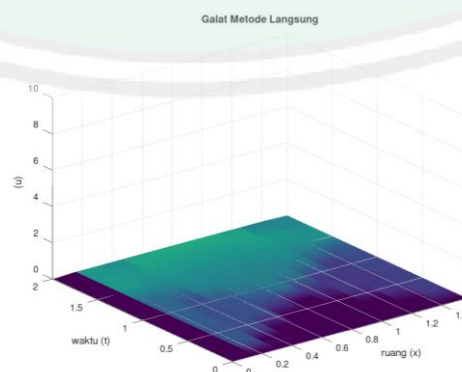


**Gambar 2.3** Grafik Solusi Numerik Metode Langsung dan Solusi Eksak saat  $t = 1$



**Gambar 2.4** Grafik Solusi Numerik Metode Langsung dan Solusi Eksak saat  $t = 3$

Berikut adalah grafik galat dari solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis secara langsung yang menghasilkan nilai  $SSE$  sebesar 1.9658 dan  $\overline{SSE}$  sebesar  $5.9372 \times 10^{-4}$ .



**Gambar 2.5** Grafik Galat Solusi Numerik Metode Langsung

## 2.9 Kajian Keagamaan

Allah SWT berfirman:

*“yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Allah tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Allah telah menciptakan segala sesuatu, dan Allah menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya” (Q.S al-Furqan/25:2).*

Menurut tafsir Ibn Katsir (2004), pada akhir ayat di atas dijelaskan bahwa segala sesuatu selain Allah adalah makhluk (yang diciptakan) dan yang marbut (yang berada di bawah kekuasaan-Nya). Allah-lah pencipta segala sesuatu, Rabb, Raja dan Ilahnya. Sedangkan segala sesuatu berada di bawah kekuasaan, aturan, tatanan, dan takdir-Nya.

Dijelaskan pula dalam Tafsir Al-Maraghi (1993) bahwa Allah mengadakan segala sesuatu sesuai dengan tuntutan kehendak-Nya yang didasarkan atas hikmah yang sempurna, serta mempersiapkannya untuk menerima apa yang dikehendaki-Nya, berupa keistimewaan dan perbuatan yang sesuai dengannya. Sehingga Allah mempersiapkan manusia untuk dapat memahami dan memikirkan urusan dunia dan akhirat dan memanfaatkan apa yang terdapat di permukaan serta di dalam perut bumi.

*“(1) demi kuda perang yang berlari kencang dengan terengah-engah, (2) dan kuda yang mencetuskan api dengan pukulan (kuku kakinya), (3) dan kuda yang menyerang dengan tiba-tiba di waktu pagi” (Q.S al-‘Adiyat/100:1-3)* .

Pada ayat-ayat tersebut, Allah bukan membicarakan tentang kuda, melainkan mengartikan masalah penciptaan atas suatu hal. Ketika ilmu pengetahuan modern belum berkembang, benda yang paling mudah dikenali sebagai sesuatu yang melesat cepat (dhabhan) adalah kuda, sehingga ‘adiyat sering ditafsirkan kuda, meskipun orang Arab tidak pernah menyebutkan hewan itu

dengan istilah ‘adiyat. Akan tetapi, saat ini sesuatu yang diketahui orang sebagai benda yang bergerak cepat adalah partikel. Sehingga kata kuda pada ayat di atas ditafsirkan sebagai manifestasi dari suatu partikel (Purwanto, 2008).

Semua benda yang ada di alam ini terdiri atas partikel-partikel elementer yang menyusunnya. Sudiarta (2019) menjelaskan bahwa sebuah partikel pada sebuah potensial dalam mekanika klasik dideskripsikan dengan posisi dan kecepatannya. Jika mengetahui potensial yang mempengaruhi partikel, posisi awal dan kecepatan awal, maka secara klasik posisi dan kecepatan pada waktu selanjutnya dapat diperoleh melalui solusi persamaan gerak partikel.

Prinsip ketidakpastian Heisenberg dan sifat dualitas partikel-gelombang mengindikasikan bahwa posisi dan kecepatan partikel tidak dapat mendeskripsikan partikel. Karena partikel juga bersifat gelombang, maka partikel atau sistem harus dideskripsikan menggunakan suatu fungsi gelombang. Dan semua informasi mengenai sistem diberikan oleh fungsi gelombang, termasuk sifat-sifat fisis sistem dapat diperoleh dari fungsi gelombangnya. Seperti pada gelombang bunyi ataupun gelombang elektromagnetik, perubahan atau evolusi dari fungsi gelombang diberikan oleh suatu persamaan gelombang. Untuk sistem yang tidak relativistik evolusi sistem diberikan oleh persamaan Schrodinger. Untuk sistem yang relativistik diberikan oleh persamaan Dirac dan Klein-Gordon (Sudiarta, 2019).

Nainggolan (2012) dalam penelitiannya menyatakan bahwa persamaan *Klein-Gordon* juga dapat menjelaskan pergerakan elektron saat mengelilingi atom dalam lintasan (*orbit*) tertentu. Istilah atom dalam al-Qur’an didapatkan dari pemahaman tentang “dzarrah” yaitu butir yang sangat kecil yang tidak lain adalah atom. Di antaranya disebutkan dalam QS. Saba’ ayat 3 berikut ini:

*“Tiada yang tersembunyi pada-Nya sebesar dzarrah pun yang ada di langit dan yang ada di bumi, dan tidak (pula) yang lebih kecil dari pada itu dan yang lebih besar melainkan di dalam kitab yang terang.”(QS. Saba’/34:3)*

Dijelaskan dalam tafsir Al-Misbah oleh Quraish Shihab bahwa kata "dzarrah" dalam bahasa Arab menunjuk pada suatu benda amat kecil, seukuran anak semut atau debu halus. Frase "mitsqâlu dzarrah" pada ayat ini berarti 'seberat atom'. Ini mengisyaratkan adanya suatu senyawa yang berat jenisnya lebih ringan dari atom. Sains modern membuktikan bahwa atom memiliki dua unsur: proton dan neutron. Isyarat ilmiah al-Qur'ân ini baru dapat diketahui pada abad 20.



## BAB III

### PEMBAHASAN

#### 3.1 Solusi Numerik Persamaan Linier *Klein-Gordon* Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis Tidak Langsung

Pada subbab ini mengkaji tentang solusi numerik dari persamaan linier *Klein-Gordon* dalam jurnal yang ditulis oleh Iqbal, dkk (2010):

$$u(x,t)_{tt} + \alpha u(x,t)_{xx} + \beta u(x,t) + \gamma u(x,t) = f(x,t) \quad (3.1)$$

dimana  $x \in \Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $0 < t \leq T$ , dan dengan kondisi awal:

$$u(x,0) = g_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.2)$$

$$u_t(x,0) = g_2(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.3)$$

dan kondisi batas:

$$u(a,t) = g_3(t), \quad t > 0 \quad (3.4)$$

$$u(b,t) = g_4(t), \quad t > 0 \quad (3.5)$$

di mana  $\alpha, \beta$  dan  $\gamma$  adalah konstanta yang diketahui.  $f(x, t)$ ,  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$ ,  $g_3(t)$  dan  $g_4(t)$  adalah fungsi yang diketahui, dan  $u(x, t)$  adalah fungsi yang akan dicari.

##### 3.1.1 Diskritisasi

Perlu diperhatikan bahwa pada bab sebelumnya menggunakan indeks  $n = 1$  sehingga  $j = 1, 2, \dots, N$ . Namun pada bab ini menggunakan indeks yang dimulai dari  $n = 0$  untuk mempermudah simulasi menggunakan program *python*, sehingga pada penulisan selanjutnya akan ditulis dengan indeks  $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

Proses diskritisasi dilakukan pada persamaan linier *Klein-Gordon* beserta kondisi awalnya. Diskritisasi yang pertama yaitu diskritisasi pada persamaan (3.1)

terhadap waktu  $t$  menggunakan metode beda pusat implisit orde dua terlebih dahulu kemudian dilanjutkan diskritisasi terhadap  $x$ .

$$\frac{u^{(n+1)}(x) - 2u^{(n)}(x) + u^{(n-1)}(x)}{\Delta t^2} + \alpha u_{xx}^{(n+1)}(x) + (\beta + \gamma)u^{(n+1)} = f(x, t^{(n+1)})$$

dengan pangkat bertanda kurung menjelaskan indeks dari variabel yang diikuti.

Diskritisasi terhadap waktu tersebut menjadikan  $u$  suatu fungsi yang hanya bergantung pada variabel  $x$ , sehingga pada penulisan selanjutnya  $u(x)$  hanya akan ditulis dengan  $u$  untuk memudahkan penulisan.

Kedua ruas yaitu ruas kanan dan ruas kiri dikalikan dengan  $\Delta t^2$  untuk mengelompokkan variabel  $u^{(n+1)}(x)$ .

$$\begin{aligned} \frac{u^{(n+1)} - 2u^{(n)} + u^{(n-1)}}{\Delta t^2} \Delta t^2 + \alpha \Delta t^2 u_{xx}^{(n+1)} + (\beta + \gamma) \Delta t^2 u^{(n+1)} \\ = \Delta t^2 f(x, t^{(n+1)}) \end{aligned}$$

Semua suku dengan indeks  $(n + 1)$  dikumpulkan pada satu ruas yaitu ruas kiri dan suku dengan indeks yang lain di ruas kanan.

$$u^{(n+1)} + \alpha \Delta t^2 u_{xx}^{(n+1)} + (\beta + \gamma) \Delta t^2 u^{(n+1)} = 2u^{(n)} - u^{(n-1)} + \Delta t^2 f(x, t^{(n+1)})$$

Koefisien dari  $u^{(n+1)}$  dikumpulkan menjadi satu untuk penyederhanaan penyelesaian.

$$\alpha \Delta t^2 u_{xx}^{(n+1)} + (1 + (\beta + \gamma) \Delta t^2) u^{(n+1)} = 2u^{(n)} - u^{(n-1)} + \Delta t^2 f(x, t^{(n+1)}) \quad (3.6)$$

dengan  $u^{(n+1)}$  adalah solusi  $u$  pada waktu ke- $(n + 1)$  yang akan dicari.

Diskritisasi selanjutnya yaitu pada kedua kondisi awal yaitu persamaan (3.2) dan (3.3) untuk memperoleh nilai  $u^{(0)}$  dan  $u^{(-1)}$ . Kondisi awal yang pertama yaitu persamaan (3.2) merupakan nilai  $u$  pada saat  $t = 0$ . Oleh karena itu nilai  $u$  dengan index  $n = 0$  tersebut menjadi

$$u^{(0)} = g_1(x) \quad (3.7)$$

Diskritisasi kondisi awal yang kedua yaitu persamaan (3.3) dilakukan dengan menggunakan metode beda pusat implisit orde satu, sehingga menjadi

$$\begin{aligned} \frac{u^{(1)} - u^{(-1)}}{2\Delta t} &= g_2(x) \\ u^{(-1)} &= u^{(1)} - 2(\Delta t)g_2(x) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Bentuk diskrit dari persamaan (3.1) pada saat  $n = 0$  diperoleh dengan mensubstitusikan  $n = 0$  pada persamaan (3.6) untuk memperoleh nilai  $u^{(1)}$ , yaitu

$$\alpha\Delta t^2 u_{xx}^{(1)} + (1 + (\beta + \gamma)\Delta t^2)u^{(1)} = 2u^{(0)} - u^{(-1)} + \Delta t^2 f(x, t^{(1)}) \quad (3.9)$$

Kemudian substitusikan persamaan (3.7) dan (3.8) ke dalam persamaan (3.9), sehingga menjadi

$$\alpha\Delta t^2 u_{xx}^{(1)} + (1 + \Delta t^2(\beta + \gamma))u^{(1)} = 2g_1(x) - u^{(1)} + 2\Delta t g_2(x) + \Delta t^2 f(x, t^{(1)})$$

Semua suku dengan indeks  $n = 1$  dikumpulkan pada satu ruas yaitu ruas kiri dan suku dengan indeks lain di ruas kanan, sehingga menjadi

$$\alpha\Delta t^2 u_{xx}^{(1)} + (2 + \Delta t^2(\beta + \gamma))u^{(1)} = 2g_1(x) + 2\Delta t g_2(x) + \Delta t^2 f(x, t^{(1)}) \quad (3.10)$$

### 3.1.2 Aproksimasi Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis Tidak Langsung

Langkah selanjutnya adalah mengaproksimasi fungsi yang masih mengandung variabel  $x$ . Fungsi turunan kedua yaitu persamaan (2.48) diubah indeksnya menjadi

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \sum_{j=0}^{N-1} w_j \phi(x, c_j) \quad (3.11)$$

Fungsi turunan pertama yaitu persamaan (2.49) diubah indeksnya

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \sum_{j=0}^{N-1} w_j H_1(x, c_j) + w_N \quad (3.12)$$

dan fungsi asal  $f(x)$  yaitu persamaan (2.50) diubah indeksnya menjadi

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N-1} w_j H_2(x, c_j) + x \cdot w_N + w_{N+1} \quad (3.13)$$

dimana  $H_1(x, c_j)$  atau persamaan (2.51) adalah fungsi basis baru yang diperoleh dari pengintegralan fungsi  $\phi(x, c_j)$ , sedangkan  $H_2(x, c_j)$  atau persamaan (2.52) adalah fungsi basis baru yang diperoleh dari pengintegralan fungsi  $H_1(x, c_j)$ .

Terdapat dua fungsi yang mengandung variabel  $x$  pada persamaan (3.10), yaitu  $u$  dan  $u_{xx}$ . Dengan mengikuti persamaan (3.11) dan persamaan (3.13), maka persamaan (3.10) menjadi

$$\alpha \Delta t^2 \sum_{j=0}^{N-1} w_j^{(1)} \phi(x, c_j) + \left(2 + (\beta + \gamma) \Delta t^2\right) \sum_{j=0}^{N-1} w_j^{(1)} H_2(x, c_j) + x \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} = 2g_1(x) + 2(\Delta t)g_2(x) + \Delta t^2 f(x, t^{(1)})$$

dapat disederhanakan menjadi

$$\sum_{j=0}^{N-1} w_j^{(1)} \left[ \alpha \Delta t^2 \phi(x, c_j) + \left(2 + (\beta + \gamma) \Delta t^2\right) H_2(x, c_j) \right] + x \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} = 2g_1(x) + 2(\Delta t)g_2(x) + \Delta t^2 f(x, t^{(1)}) \quad (3.14)$$

Persamaan (3.14) disederhanakan dengan permisalan seperti berikut

$$\alpha \Delta t^2 \phi(x, c_j) + \left(2 + (\beta + \gamma) \Delta t^2\right) H_2(x, c_j) = L(x, c_j)$$

dan

$$2g_1(x) + 2(\Delta t)g_2(x) + \Delta t^2 f(x, t^{(1)}) = B(x, t^{(1)})$$

sehingga persamaan (3.14) menjadi

$$\sum_{j=0}^{N-1} w_j^{(1)} L(x, c_j) + x \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} = B(x, t^{(1)}), \quad a \leq x \leq b \quad (3.15)$$

Aproksimasi selanjutnya dilakukan pada kedua kondisi batas yang diberikan. Aproksimasi kondisi batas kiri yaitu persamaan (3.4) menjadi

$$\sum_{j=0}^{N-1} w_j^{(1)} H_2(a, c_j) + a \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} = g_3(t^{(1)}) \quad (3.16)$$

Aproksimasi kondisi batas kanan yaitu persamaan (3.5) menjadi

$$\sum_{j=0}^{N-1} w_j^{(1)} H_2(b, c_j) + b \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} = g_4(t^{(1)}) \quad (3.17)$$

$H_2(a, c_j)$ ,  $L(x, c_j)$ , dan  $H_2(b, c_j)$  adalah fungsi real dan  $w_j^{(1)}$  adalah suatu

koefisien konstan sehingga perkaliannya bersifat komutatif. Oleh karena itu persamaan (3.16), (3.15), dan (3.17) berturut-turut jika dijabarkan menjadi suatu persamaan linier menjadi

$$H_2(a, c_0)w_0^{(1)} + H_2(a, c_1)w_1^{(1)} + \dots + H_2(a, c_{N-1})w_{N-1}^{(1)} + a \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} = g_3(t^{(1)}) \quad (3.18)$$

$$L(x, c_0)w_0^{(1)} + L(x, c_1)w_1^{(1)} + \dots + L(x, c_{N-1})w_{N-1}^{(1)} + x \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} = B(x, t^{(1)}) \quad (3.19)$$

$$H_2(b, c_0)w_0^{(1)} + H_2(b, c_1)w_1^{(1)} + \dots + H_2(b, c_{N-1})w_{N-1}^{(1)} + b \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} = g_4(t^{(1)}) \quad (3.20)$$

Persamaan (3.19) memiliki variabel  $x$  berbentuk diskrit yaitu  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{m-2})$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} L(x_1, c_0)w_0^{(1)} + L(x_1, c_1)w_1^{(1)} + \dots + L(x_1, c_{N-1})w_{N-1}^{(1)} + x_1 \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} &= B(x_1, t^{(1)}) \\ L(x_2, c_0)w_0^{(1)} + L(x_2, c_1)w_1^{(1)} + \dots + L(x_2, c_{N-1})w_{N-1}^{(1)} + x_2 \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} &= B(x_2, t^{(1)}) \\ &\vdots \\ L(x_{m-2}, c_0)w_0^{(1)} + L(x_{m-2}, c_1)w_1^{(1)} + \dots + L(x_{m-2}, c_{N-1})w_{N-1}^{(1)} + x_{m-2} \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} &= B(x_{m-2}, t^{(1)}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Persamaan (3.18), (3.21), dan (3.20) berturut-turut ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
 H_2(a, c_0)w_0^{(1)} + H_2(a, c_1)w_1^{(1)} + \cdots + H_2(a, c_{N-1})w_{N-1}^{(1)} + a \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} &= g_3(t^{(1)}) \\
 L(x_1, c_0)w_0^{(1)} + L(x_1, c_1)w_1^{(1)} + \cdots + L(x_1, c_{N-1})w_{N-1}^{(1)} + x_1 \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} &= B(x_1, t^{(1)}) \\
 L(x_2, c_0)w_0^{(1)} + L(x_2, c_1)w_1^{(1)} + \cdots + L(x_2, c_{N-1})w_{N-1}^{(1)} + x_2 \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} &= B(x_2, t^{(1)}) \\
 \vdots &\vdots \\
 L(x_{m-2}, c_0)w_0^{(1)} + L(x_{m-2}, c_1)w_1^{(1)} + \cdots + L(x_{m-2}, c_{N-1})w_{N-1}^{(1)} + x_{m-2} \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} &= B(x_{m-2}, t^{(1)}) \\
 H_2(b, c_0)w_0^{(1)} + H_2(b, c_1)w_1^{(1)} + \cdots + H_2(b, c_{N-1})w_{N-1}^{(1)} + b \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} &= g_4(t^{(1)})
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

### 3.1.3 Menghitung Solusi $u^{(1)}$

Solusi dari persamaan (3.10) pada saat  $n = 0$  yaitu  $u^{(1)}$  dapat diperoleh dengan mencari nilai koefisien  $w_j^{(1)}$  terlebih dahulu menggunakan persamaan yang telah diperoleh dari hasil aproksimasi. Sistem persamaan linier (3.22) dapat ditulis dalam bentuk matriks untuk mempermudah perhitungan, sehingga menjadi

$$\begin{bmatrix}
 H_2(a, c_0) & H_2(a, c_1) & \cdots & H_2(a, c_{N-1}) & a & 1 \\
 L(x_1, c_0) & L(x_1, c_1) & \cdots & L(x_1, c_{N-1}) & x_1 & 1 \\
 L(x_2, c_0) & L(x_2, c_1) & \cdots & L(x_2, c_{N-1}) & x_2 & 1 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 L(x_{m-2}, c_0) & L(x_{m-2}, c_1) & \cdots & L(x_{m-2}, c_{N-1}) & x_{m-2} & 1 \\
 H_2(b, c_0) & H_2(b, c_1) & \cdots & H_2(b, c_{N-1}) & b & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 w_0^{(1)} \\
 w_1^{(1)} \\
 \vdots \\
 w_{N-1}^{(1)} \\
 w_N^{(1)} \\
 w_{N+1}^{(1)}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 g_3(t^{(1)}) \\
 B(x_1, t^{(1)}) \\
 B(x_2, t^{(1)}) \\
 \vdots \\
 B(x_{m-2}, t^{(1)}) \\
 g_4(t^{(1)})
 \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

Sistem persamaan (3.23) dimisalkan sebagaimana berikut untuk menyederhanakan penulisan

$$A = \begin{bmatrix} H_2(a, c_0) & H_2(a, c_1) & \cdots & H_2(a, c_{N-1}) & a & 1 \\ L(x_1, c_0) & L(x_1, c_1) & \cdots & L(x_1, c_{N-1}) & x_1 & 1 \\ L(x_2, c_0) & L(x_2, c_1) & \cdots & L(x_2, c_{N-1}) & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L(x_{m-2}, c_0) & L(x_{m-2}, c_1) & \cdots & L(x_{m-2}, c_{N-1}) & x_{m-2} & 1 \\ H_2(b, c_0) & H_2(b, c_1) & \cdots & H_2(b, c_{N-1}) & b & 1 \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} w_0^{(1)} \\ w_1^{(1)} \\ \vdots \\ w_{N-1}^{(1)} \\ w_N^{(1)} \\ w_{N+1}^{(1)} \end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} g_3(t^{(1)}) \\ B(x_1, t^{(1)}) \\ B(x_2, t^{(1)}) \\ \vdots \\ B(x_{m-2}, t^{(1)}) \\ g_4(t^{(1)}) \end{bmatrix}$$

Vektor  $W$  yang berisi nilai  $w_j^{(1)}$  dengan indeks  $j = 0, 1, \dots, N + 1$  dapat ditentukan nilainya dengan mengalikan *invers* dari matriks  $A$  dengan vektor  $B$ .

$$W = A^{-1} \cdot B$$

Nilai koefisien  $w_j^{(1)}$  yang telah diperoleh kemudian digunakan untuk menentukan solusi  $u^{(1)}$  dengan mengikuti persamaan (3.13) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u_0^{(1)} &= H_2(x_0, c_0)w_0^{(1)} + H_2(x_0, c_1)w_1^{(1)} + \cdots + H_2(x_0, c_{N-1})w_{N-1}^{(1)} + x_0 \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} \\ u_1^{(1)} &= H_2(x_1, c_0)w_0^{(1)} + H_2(x_1, c_1)w_1^{(1)} + \cdots + H_2(x_1, c_{N-1})w_{N-1}^{(1)} + x_1 \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} \\ &\vdots \\ u_{m-1}^{(1)} &= H_2(x_{m-1}, c_0)w_0^{(1)} + H_2(x_{m-1}, c_1)w_1^{(1)} + \cdots + H_2(x_{m-1}, c_{N-1})w_{N-1}^{(1)} + x_{m-1} \cdot w_N^{(1)} + w_{N+1}^{(1)} \end{aligned}$$

dimana  $u_0^{(1)}$  merupakan solusi  $u^{(1)}$  yang dicari dengan  $x_0$ , dan seterusnya. Dan solusi  $u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots, u_{m-1}^{(1)}$  yang telah diperoleh di atas merupakan nilai  $u$  pada saat  $t^{(1)}$ .

### 3.1.4 Menghitung Solusi $u^{(2)}, u^{(3)}, \dots, u^{(n-1)}$

Perhitungan solusi  $u^{(2)}, u^{(3)}, \dots, u^{(n-1)}$  sedikit berbeda dengan langkah untuk menghitung  $u^{(1)}$ . Perhitungan solusi  $u^{(1)}$  membutuhkan nilai awal dalam perhitungannya, sedangkan solusi  $u^{(2)}, u^{(3)}, \dots, u^{(n-1)}$  tidak memerlukan nilai awal melainkan nilai  $u$  sebelumnya. Solusi  $u^{(2)}$  didapatkan dengan mensubstitusikan nilai  $n = 1$  pada persamaan (3.6) menjadi

$$\alpha \Delta t^2 u_{xx}^{(2)} + (1 + (\beta + \gamma) \Delta t^2) u^{(2)} = 2u^{(1)} - u^{(0)} + \Delta t^2 f(x, t^{(2)}) \quad (3.24)$$

Persamaan (3.24) dengan mengikuti persamaan (3.11) dan persamaan (3.13) menjadi

$$\alpha \Delta t^2 \sum_{j=0}^{N-1} w_j^{(2)} \phi(x, c_j) + (1 + (\beta + \gamma) \Delta t^2) \sum_{j=0}^{N-1} w_j^{(2)} H_2(x, c_j) + x \cdot w_N^{(2)} + w_{N+1}^{(2)} = 2u^{(1)} - u^{(0)} + \Delta t^2 f(x, t^{(2)})$$

dapat disederhanakan menjadi

$$\sum_{j=0}^{N-1} w_j^{(2)} \left[ \alpha \Delta t^2 \phi(x, c_j) + (1 + (\beta + \gamma) \Delta t^2) H_2(x, c_j) \right] + x \cdot w_N^{(2)} + w_{N+1}^{(2)} = 2u^{(1)} - u^{(0)} + \Delta t^2 f(x, t^{(2)}) \quad (3.25)$$

Persamaan (3.25) disederhanakan dengan permisalan seperti berikut

$$\alpha \Delta t^2 \phi(x, c_j) + (1 + (\beta + \gamma) \Delta t^2) H_2(x, c_j) = P(x, c_j)$$

dan

$$2u^{(1)} - u^{(0)} + \Delta t^2 f(x, t^{(2)}) = Q(x, t^{(2)})$$

sehingga persamaan (3.25) menjadi

$$\sum_{j=0}^{N-1} w_j^{(2)} P(x, c_j) + x \cdot w_N^{(2)} + w_{N+1}^{(2)} = Q(x, t^{(2)}), \quad a \leq x \leq b \quad (3.26)$$

Persamaan (3.26) dapat dijabarkan menjadi persamaan linier sebagai berikut

$$P(x, c_0)w_0^{(2)} + P(x, c_1)w_1^{(2)} + \cdots + P(x, c_{N-1})w_{N-1}^{(2)} + x \cdot w_N^{(2)} + w_{N+1}^{(2)} = Q(x, t^{(2)}) \quad (3.27)$$

Persamaan (3.27) memiliki variabel  $x$  berbentuk diskrit yaitu  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{m-2})$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} P(x_1, c_0)w_0^{(2)} + P(x_1, c_1)w_1^{(2)} + \cdots + P(x_1, c_{N-1})w_{N-1}^{(2)} + x_1 \cdot w_N^{(2)} + w_{N+1}^{(2)} &= Q(x_1, t^{(2)}) \\ P(x_2, c_0)w_0^{(2)} + P(x_2, c_1)w_1^{(2)} + \cdots + P(x_2, c_{N-1})w_{N-1}^{(2)} + x_2 \cdot w_N^{(2)} + w_{N+1}^{(2)} &= Q(x_2, t^{(2)}) \\ &\vdots \\ P(x_{m-2}, c_0)w_0^{(2)} + P(x_{m-2}, c_1)w_1^{(2)} + \cdots + P(x_{m-2}, c_{N-1})w_{N-1}^{(2)} + x_{m-2} \cdot w_N^{(2)} + w_{N+1}^{(2)} &= Q(x_{m-2}, t^{(2)}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Persamaan (3.18), (3.28), dan (3.20) berturut-turut jika dibentuk menjadi suatu persamaan linier yang tetap menyertakan kondisi batas namun pada saat  $t^{(2)}$  menjadi

$$\begin{aligned} H_2(a, c_0)w_0^{(2)} + H_2(a, c_1)w_1^{(2)} + \cdots + H_2(a, c_{N-1})w_{N-1}^{(2)} + a \cdot w_N^{(2)} + w_{N+1}^{(2)} &= g_3(t^{(2)}) \\ P(x_1, c_0)w_0^{(2)} + P(x_1, c_1)w_1^{(2)} + \cdots + P(x_1, c_{N-1})w_{N-1}^{(2)} + x_1 \cdot w_N^{(2)} + w_{N+1}^{(2)} &= Q(x_1, t^{(2)}) \\ P(x_2, c_0)w_0^{(2)} + P(x_2, c_1)w_1^{(2)} + \cdots + P(x_2, c_{N-1})w_{N-1}^{(2)} + x_2 \cdot w_N^{(2)} + w_{N+1}^{(2)} &= Q(x_2, t^{(2)}) \\ &\vdots \\ P(x_{m-2}, c_0)w_0^{(2)} + P(x_{m-2}, c_1)w_1^{(2)} + \cdots + P(x_{m-2}, c_{N-1})w_{N-1}^{(2)} + x_{m-2} \cdot w_N^{(2)} + w_{N+1}^{(2)} &= Q(x_{m-2}, t^{(2)}) \\ H_2(b, c_0)w_0^{(2)} + H_2(b, c_1)w_1^{(2)} + \cdots + H_2(b, c_{N-1})w_{N-1}^{(2)} + b \cdot w_N^{(2)} + w_{N+1}^{(2)} &= g_4(t^{(2)}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Sistem persamaan (3.29) diubah ke dalam bentuk matriks untuk mempermudah penyelesaian, menjadi

$$\begin{bmatrix} H_2(a, c_0) & H_2(a, c_1) & \cdots & H_2(a, c_{N-1}) & a & 1 \\ P(x_1, c_0) & P(x_1, c_1) & \cdots & P(x_1, c_{N-1}) & x_1 & 1 \\ P(x_2, c_0) & P(x_2, c_1) & \cdots & P(x_2, c_{N-1}) & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(x_{m-2}, c_0) & P(x_{m-2}, c_1) & \cdots & P(x_{m-2}, c_{N-1}) & x_{m-2} & 1 \\ H_2(b, c_0) & H_2(b, c_1) & \cdots & H_2(b, c_{N-1}) & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0^{(2)} \\ w_1^{(2)} \\ \vdots \\ w_{N-1}^{(2)} \\ w_N^{(2)} \\ w_{N+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_3(t^{(2)}) \\ Q(x_1, t^{(2)}) \\ Q(x_2, t^{(2)}) \\ \vdots \\ Q(x_{m-2}, t^{(2)}) \\ g_4(t^{(2)}) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Sistem persamaan (3.30) dimisalkan sebagaimana berikut untuk menyederhanakan penulisan

$$A = \begin{bmatrix} H_2(a, c_0) & H_2(a, c_1) & \cdots & H_2(a, c_{N-1}) & a & 1 \\ P(x_1, c_0) & P(x_1, c_1) & \cdots & P(x_1, c_{N-1}) & x_1 & 1 \\ P(x_2, c_0) & P(x_2, c_1) & \cdots & P(x_2, c_{N-1}) & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(x_{m-2}, c_0) & P(x_{m-2}, c_1) & \cdots & P(x_{m-2}, c_{N-1}) & x_{m-2} & 1 \\ H_2(b, c_0) & H_2(b, c_1) & \cdots & H_2(b, c_{N-1}) & b & 1 \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} w_0^{(2)} \\ w_1^{(2)} \\ \vdots \\ w_{N-1}^{(2)} \\ w_N^{(2)} \\ w_{N+1}^{(2)} \end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} g_3(t^{(2)}) \\ Q(x_1, t^{(2)}) \\ Q(x_2, t^{(2)}) \\ \vdots \\ Q(x_{m-2}, t^{(2)}) \\ g_4(t^{(2)}) \end{bmatrix}$$

Vektor  $W$  yang berisi nilai  $w_j^{(2)}$  dengan indeks  $j = 0, 1, \dots, N + 1$  dapat ditentukan nilainya dengan mengalikan *invers* dari matriks  $A$  dengan vektor  $B$ .

$$W = A^{-1} \cdot B$$

Nilai koefisien  $w_j^{(2)}$  yang telah diperoleh kemudian digunakan untuk menentukan solusi  $u^{(2)}$  dengan mengikuti persamaan (3.13) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u_0^{(2)} &= H_2(x_0, c_0)w_0^{(2)} + H_2(x_0, c_1)w_1^{(2)} + \dots + H_2(x_0, c_{N-1})w_{N-1}^{(2)} + x_0 \cdot w_N^{(2)} + w_{N+1}^{(2)} \\ u_1^{(2)} &= H_2(x_1, c_0)w_0^{(2)} + H_2(x_1, c_1)w_1^{(2)} + \dots + H_2(x_1, c_{N-1})w_{N-1}^{(2)} + x_1 \cdot w_N^{(2)} + w_{N+1}^{(2)} \\ &\vdots \\ u_{m-1}^{(2)} &= H_2(x_{m-1}, c_0)w_0^{(2)} + H_2(x_{m-1}, c_1)w_1^{(2)} + \dots + H_2(x_{m-1}, c_{N-1})w_{N-1}^{(2)} + x_{m-1} \cdot w_N^{(2)} + w_{N+1}^{(2)} \end{aligned}$$

Solusi  $u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \dots, u_{m-1}^{(2)}$  yang telah diperoleh di atas merupakan nilai  $u$  pada saat  $t^{(2)}$ , dimana  $u_0^{(2)}$  merupakan solusi  $u^{(2)}$  yang dicari dengan  $x_0$ , dan seterusnya. Sedangkan untuk mencari nilai  $u$  pada saat  $t^{(3)}, t^{(4)}, t^{(m-1)}$  dapat diperoleh dengan cara yang sama sebagaimana mencari nilai  $u$  pada saat  $t^{(2)}$ .

### 3.2 Analisis Galat

Persamaan linier *Klein-Gordon* yang dibahas pada subbab sebelumnya merupakan persamaan secara umum. Analisis galat dapat dilakukan jika persamaan tersebut sudah dikhususkan dengan parameter tertentu. Oleh karena itu, dilakukan simulasi sebagaimana pada pembahasan sebelumnya.

#### 3.2.1 Simulasi

Solusi numerik dari persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis disimulasikan menggunakan parameter yang digunakan dalam penelitian Iqbal, dkk (2010) yaitu  $\alpha = -1, \beta = -1, \gamma = 0$  dan  $f(x, t) = 0$ . Sehingga persamaan yang diselesaikan adalah sebagai berikut

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.31)$$

dengan kondisi awal:

$$u(x, 0) = 1 + \sin(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.32)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.33)$$

dan kondisi batas

$$u(0, t) = \cosh(t), \quad 0 \leq t \leq 3 \quad (3.34)$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 1 + \cosh(t), \quad 0 \leq t \leq 3 \quad (3.35)$$

dengan  $0 \leq t \leq 3, \Delta t = 0.01$  dan  $\Delta x = 0.1571$ .

Langkah pertama yaitu diskritisasi persamaan (3.31) terhadap waktu menggunakan metode beda pusat implisit orde dua, diperoleh

$$\frac{u^{(n+1)} - 2u^{(n)} + u^{(n-1)}}{(0.01)^2} - u_{xx}^{(n+1)} = u^{(n+1)} \quad (3.36)$$

dengan  $u$  adalah fungsi yang hanya bergantung dengan  $x$ . Persamaan (3.36) secara sederhana dapat ditulis menjadi

$$-(0.01)^2 u_{xx}^{(n+1)} + (1 - (0.01)^2) u^{(n+1)} = 2u^{(n)} - u^{(n-1)} \quad (3.37)$$

Kondisi awal yang pertama yaitu persamaan (3.32) merupakan nilai  $u$  pada saat  $t = 0$ . Oleh karena itu nilai  $u$  dengan indeks  $n = 0$  tersebut menjadi

$$u^{(0)} = 1 + \sin(x) \quad (3.38)$$

Kondisi awal yang kedua yaitu persamaan (3.33) didiskritisasi menggunakan metode beda pusat implisit orde satu, sehingga menjadi

$$\begin{aligned} \frac{u^{(n+1)} - u^{(n-1)}}{2(\Delta t)} &= 0 \\ \frac{u^{(0+1)} - u^{(0-1)}}{2(0.01)} &= 0 \\ \frac{u^{(1)} - u^{(-1)}}{2(0.01)} &= 0 \\ u^{(-1)} &= u^{(1)} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Kondisi batas kiri  $x = 0$  yaitu persamaan (3.34) dalam bentuk diskrit adalah

$$u^{(n+1)}(0) = \cosh(t^{(n+1)}) \quad (3.40)$$

dan kondisi batas kanan  $x = \frac{\pi}{2}$  yaitu persamaan (3.35) diubah ke dalam bentuk diskrit menjadi

$$u^{(n+1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \cosh(t^{(n+1)}) \quad (3.41)$$

Solusi  $u^{(1)}$  dicari dengan membentuk persamaan (3.37) untuk  $n = 0$ , sehingga menjadi

$$-(0.01)^2 u_{xx}^{(1)} + (1 - (0.01)^2) u^{(1)} = 2u^{(0)} - u^{(-1)}$$

Substitusi persamaan (3.38) dan persamaan (3.39), menjadi

$$-(0.01)^2 u_{xx}^{(1)} + (2 - (0.01)^2) u^{(1)} = 2 + 2\sin(x) \quad (3.42)$$

Persamaan (3.40) dan (3.41) untuk  $n = 0$  berturut-turut menjadi

$$u^{(1)}(0) = \cosh(t^{(1)}) \quad (3.43)$$

dan

$$u^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \cosh(t^{(1)}) \quad (3.44)$$

Aproksimasi fungsi  $u$  yang bergantung pada  $x$  menggunakan jaringan fungsi radial basis tidak langsung dinyatakan sebagaimana persamaan (3.13). Selanjutnya untuk mengaproksimasi fungsi  $u$  pada waktu tertentu dinyatakan sebagai berikut

$$u^{(n+1)} = \sum_{j=0}^N w_j^{(n+1)} H_2(x, c_j) + x \cdot w_N^{(n+1)} + w_{N+1}^{(n+1)} \quad (3.45)$$

Persamaan (3.45) akan digunakan untuk mencari nilai  $u^{(1)}$  dengan membentuk persamaan tersebut menjadi matriks. Oleh karena itu banyaknya titik  $x$  dan  $c$  harus dikondisikan agar matriks dapat berbentuk persegi. Dengan  $m$  adalah banyaknya titik  $x$  dan  $N$  adalah banyaknya titik  $c$ , maka dibutuhkan  $N = m - 2$  titik, yaitu  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{10}) = (0, 0.1571, 0.3142, 0.4712, 0.6283, 0.7854, 0.9425, 1.0996, 1.2566, 1.4137, 1.5708)$  dan  $c = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_8) = (0, 0.1963, 0.3927, 0.589, 0.7854, 0.9817, 1.1781, 1.3744, 1.5708)$ . Persamaan (3.45) untuk  $n = 0$  menjadi

$$u^{(1)} = \sum_{j=0}^8 w_j^{(1)} H_2(x, c_j) + x \cdot w_9^{(1)} + w_{10}^{(1)} \quad (3.46)$$

Aproksimasi kondisi batas kiri yaitu persamaan (3.43) mengikuti persamaan (3.45) menghasilkan

$$\sum_{j=0}^8 w_j^{(1)} H_2(0, c_j) + 0 \cdot w_9^{(1)} + w_{10}^{(1)} = \cosh(t^{(1)}) \quad (3.47)$$

Aproksimasi kondisi batas kanan yaitu persamaan (3.44) mengikuti persamaan (3.45) menghasilkan

$$\sum_{j=0}^8 w_j^{(1)} H_2\left(\frac{\pi}{2}, c_j\right) + \frac{\pi}{2} \cdot w_9^{(1)} + w_{10}^{(1)} = 1 + \cosh(t^{(1)}) \quad (3.48)$$

Aproksimasi terhadap  $u^{(1)}$  dan  $u_{xx}^{(1)}$  pada persamaan (3.42) mengikuti persamaan (3.11) dan persamaan (3.13) menjadi

$$-(0.01)^2 \sum_{j=0}^8 w_j^{(1)} \phi(x, c_j) + (2 - (0.01)^2) \left[ \sum_{j=0}^8 w_j^{(1)} H_2(x, c_j) + x \cdot w_9^{(1)} + w_{10}^{(1)} \right] = 2 + 2 \sin(x)$$

atau dapat ditulis menjadi

$$\sum_{j=0}^8 w_1^{(1)} \left[ -(0.01)^2 \phi(x, c_j) + (2 - (0.01)^2) H_2(x, c_j) \right] + (2 - (0.01)^2) x \cdot w_9^{(1)} + (2 - (0.01)^2) w_{10}^{(1)} = 2 + 2 \sin(x)$$

Bentuk yang lebih sederhana dapat ditulis sebagai

$$\sum_{j=0}^8 w_j^{(1)} L(x, c_j) + (2 - (0.01)^2) x \cdot w_9^{(1)} + (2 - (0.01)^2) w_{10}^{(1)} = B(x) \quad (3.49)$$

dimana

$$L(x, c_j) = -(0.01)^2 \phi(x, c_j) + (2 - (0.01)^2) H_2(x, c_j)$$

dan

$$B(x) = 2 + 2 \sin(x)$$

Jika baris pertama berasal dari persamaan (3.47), baris selanjutnya berasal dari persamaan (3.49) dengan  $x = (x_1, x_2, \dots, x_9)$  dan baris terakhir berasal dari persamaan (3.48), diperoleh

$$\begin{aligned} & H_2(0, 0)w_0^{(1)} + H_2(0, 0.1963)w_1^{(1)} + \dots + H_2(0, 1.5708)w_8^{(1)} \\ & + (2 - (0.01)^2)(0)w_9^{(1)} + (2 - (0.01)^2)w_{10}^{(1)} = g_3(t^{(1)}) \\ & L(0.1571, 0)w_0^{(1)} + L(0.1571, 0.1963)w_1^{(1)} + \dots + L(0.1571, 1.5708)w_8^{(1)} \\ & + (2 - (0.01)^2)(0.1571)w_9^{(1)} + (2 - (0.01)^2)w_{10}^{(1)} = B(0.1571) \\ & L(0.3142, 0)w_0^{(1)} + L(0.3142, 0.1963)w_1^{(1)} + \dots + L(0.3142, 1.5708)w_8^{(1)} \\ & + (2 - (0.01)^2)(0.3142)w_9^{(1)} + (2 - (0.01)^2)w_{10}^{(1)} = B(0.3142) \\ & \vdots \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} & L(1.4137, 0)w_0^{(1)} + L(1.4137, 0.1963)w_1^{(1)} + \dots + L(1.4137, 1.5708)w_8^{(1)} \\ & + (2 - (0.01)^2)(1.4137)w_9^{(1)} + (2 - (0.01)^2)w_{10}^{(1)} = B(1.4137) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & H_2(1.5708, 0)w_0^{(1)} + H_2(1.5708, 0.1963)w_1^{(1)} + \dots + H_2(1.5708, 1.5708)w_8^{(1)} \\ & + (2 - (0.01)^2)(1.5708)w_9^{(1)} + (2 - (0.01)^2)w_{10}^{(1)} = g_4(t^{(1)}) \end{aligned}$$

Sistem persamaan (3.50) dibentuk matriks untuk mempermudah perhitungan sebagaimana berikut

$$\begin{bmatrix} H_2(0,0) & H_2(0,0.1963) & \cdots & H_2(0,1.5708) \\ L(0.1571,0) & L(0.1571,0.1963) & \cdots & L(0.1571,1.5708) \\ L(0.3142,0) & L(0.3142,0.1963) & \vdots & L(0.3142,1.5708) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L(1.4137,0) & L(1.4137,0.1963) & \cdots & L(1.4137,1.5708) \\ H_2(1.5708,0) & H_2(1.5708,0.1963) & \cdots & H_2(1.5708,1.5708) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (2-(0.01)^2)(0.1571) & (2-(0.01)^2) \\ (2-(0.01)^2)(0.3142) & (2-(0.01)^2) \\ \vdots & \vdots \\ (2-(0.01)^2)(1.4137) & (2-(0.01)^2) \\ 1.5708 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0^{(1)} \\ w_1^{(1)} \\ \vdots \\ w_8^{(1)} \\ w_9^{(1)} \\ w_{10}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(0.01) \\ B(0.1571) \\ B(0.3142) \\ \vdots \\ B(1.4137) \\ 1 + \cosh(0.01) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

untuk menghitung matriks tersebut diperlukan nilai varians dari  $c$  terlebih dahulu. Nilai varians tersebut dapat dicari menggunakan persamaan (2.38), sehingga diperoleh

$$a = \text{Var}(c) = \frac{9 \sum_{j=0}^8 c_j^2 - \left( \sum_{j=0}^8 c_j \right)^2}{9(9-1)} = 0.25702 \quad (3.52)$$

Sistem persamaan (3.50) dimisalkan sebagaimana berikut untuk menyederhanakan penulisan

$$A = \begin{bmatrix} H_2(0,0) & H_2(0,0.1963) & \cdots & H_2(0,1.5708) \\ L(0.1571,0) & L(0.1571,0.1963) & \cdots & L(0.1571,1.5708) \\ L(0.3142,0) & L(0.3142,0.1963) & \vdots & L(0.3142,1.5708) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L(1.4137,0) & L(1.4137,0.1963) & \cdots & L(1.4137,1.5708) \\ H_2(1.5708,0) & H_2(1.5708,0.1963) & \cdots & H_2(1.5708,1.5708) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (2-(0.01)^2)(0.1571) & (2-(0.01)^2) \\ (2-(0.01)^2)(0.3142) & (2-(0.01)^2) \\ \vdots & \vdots \\ (2-(0.01)^2)(1.4137) & (2-(0.01)^2) \\ 1.5708 & 1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} w_0^{(1)} \\ w_1^{(1)} \\ \vdots \\ w_8^{(1)} \\ w_9^{(1)} \\ w_{10}^{(1)} \end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} \cosh(0.01) \\ B(0.1571) \\ B(0.3142) \\ \vdots \\ B(1.4137) \\ 1 + \cosh(0.01) \end{bmatrix}$$

Setiap nilai yang terdapat pada persamaan (3.51) dapat dihitung dengan mensubstitusikan nilai  $x, c$ , dan  $a$  pada persamaan (2.37) untuk  $\phi(x, c_j)$  dan persamaan (2.52) untuk  $H_2(x, c_j)$ . Berikut contoh menyelesaikan beberapa nilai di dalam matriks secara manual:

$$\begin{aligned} H_2(0,0) &= \left( -\frac{0.25702^2}{3} + \frac{(0-0)^2}{6} \right) \sqrt{(0-0)^2 + 0.25702^2} + \\ &\quad \left( \frac{0.25702^2(0-0)}{2} \right) \ln \left( (0-0) + \sqrt{(0-0)^2 + 0.25702^2} \right) \\ &= -0.00566 - 0 \\ &= -0.00566 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(0.1571,0) &= -(0.01)^2 \sqrt{(0.1571-0)^2 + 0.25702^2} + (2-(0.01)^2) \\ &\quad \left( -\frac{0.25702^2}{3} + \frac{(0.1571-0)^2}{6} \right) \sqrt{(0.1571-0)^2 + 0.25702^2} + \\ &\quad \left( \frac{0.25702^2(0.1571-0)}{2} \right) \ln \left( (0.1571-0) + \sqrt{(0.1571-0)^2 + 0.25702^2} \right) \\ &= -0.00003 - 0.01888 \\ &= -0.01891 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(0.3142,0.1963) &= -(0.01)^2 \sqrt{(0.3142-0.1963)^2 + 0.25702^2} + (2-(0.01)^2) \\ &\quad \left( -\frac{0.25702^2}{3} + \frac{(0.3142-0.1963)^2}{6} \right) \sqrt{(0.3142-0.1963)^2 + 0.25702^2} + \\ &\quad \left( \frac{0.25702^2(0.3142-0.1963)}{2} \right) \ln \left( (0.3142-0.1963) + \sqrt{(0.3142-0.1963)^2 + 0.25702^2} \right) \\ &= -0.00002 - 0.01826 \\ &= -0.01829 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L(1.4137, 1.5708) &= -(0.01)^2 \sqrt{(1.4137 - 1.5708)^2 + 0.25702^2} + (2 - (0.01)^2) \\
&\quad \left( -\frac{0.25702^2}{3} + \frac{(1.4137 - 1.5708)^2}{6} \right) \sqrt{(1.4137 - 1.5708)^2 + 0.25702^2} + \\
&\quad \left( \frac{0.25702^2 (1.4137 - 1.5708)}{2} \right) \ln \left( (1.4137 - 1.5708) + \sqrt{(1.4137 - 1.5708)^2 + 0.25702^2} \right) \\
&= -0.00003 + 0.00931 \\
&= 0.00928
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_2(0.15708, 0.1963) &= \left( -\frac{0.25702^2}{3} + \frac{(0.15708 - 0.1963)^2}{6} \right) \sqrt{(0.15708 - 0.1963)^2 + 0.25702^2} + \\
&\quad \left( \frac{0.25702^2 (0.15708 - 0.1963)}{2} \right) \ln \left( (0.15708 - 0.1963) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{(0.15708 - 0.1963)^2 + 0.25702^2} \right) \\
&= 0.31614
\end{aligned}$$

Perhitungan tersebut terus berlanjut untuk setiap nilai di dalam matriks yaitu untuk  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{10}) = (0, 0.1571, 0.3142, 0.4712, 0.6283, 0.7854, 0.9425, 1.0996, 1.2566, 1.4137, 1.5708)$  dan  $c = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_8) = (0, 0.1963, 0.3927, 0.589, 0.7854, 0.9817, 1.1781, 1.3744, 1.5708)$  sehingga menjadi matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -0.00566 & 0.00833 & \dots & 0.82022 & 0 & 1 \\ -0.01891 & -0.00742 & \dots & 1.24535 & 0.31414 & 1.99999 \\ -0.01138 & -0.01829 & \dots & 0.92142 & 0.62828 & 1.99999 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.99161 & 0.0632120 & \dots & 0.00928 & 2.82729 & 1.99999 \\ 0.495901 & 0.31614 & \dots & 0.00466 & 1.5708 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian Vektor  $W$  yang berisi nilai  $w_j^{(1)}$  dengan indeks  $j = 0, 1, \dots, 10$

dapat ditentukan nilainya dengan mengalikan *invers* matriks  $A$  dengan vektor  $B$ .

$$W = A^{-1} \cdot B$$

Nilai koefisien  $w^{(1)}$  dihitung dengan bantuan program *python* sehingga diperoleh hasil  $W = [-1.3242, 0.6716, -0.0949, 0.1132, 0.0549, 0.123, 0.0328, 0.4094, -0.4464, 0.9788, 1.0583]$ .

Nilai koefisien  $w_j^{(1)}$  yang telah diperoleh kemudian digunakan untuk menentukan solusi  $u^{(1)}$  dengan mengikuti persamaan (3.13) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u_0^{(1)} &= H_2(0,0)(-1.3242) + \dots + H_2(0,1.5708)(-0.4464) + 0(0.9788) + 1.0583 \\ u_1^{(1)} &= H_2(0.1571,0)(-1.3242) + \dots + H_2(0.1571,1.5708)(-0.4464) + 0.1571(0.9788) + 1.0583 \\ &\vdots \\ u_{10}^{(1)} &= H_2(1.5708,0)(-1.3242) + \dots + H_2(1.5708,1.5708)(-0.4464) + 1.5708(0.9788) + 1.0583 \end{aligned}$$

Berikut contoh menyelesaikan solusi  $u^{(1)}$  secara manual:

$$\begin{aligned} u_0^{(1)} &= H_2(0,0)(-1.3242) + \dots + H_2(0,1.5708)(-0.4464) + 0(0.9788) + 1.0583 \\ &= (-0.00566)(-1.3242) + \dots + (0.82022)(-0.4464) + 0(0.9788) + 1.0583 \\ &= 1.00005 \\ &\vdots \\ u_{10}^{(1)} &= H_2(1.5708,0)(-1.3242) + \dots + H_2(1.5708,1.5708)(-0.4464) + (1.5708)(0.9788) + 1.0583 \\ &= (0.67924)(-1.3242) + \dots + (0.45575)(-0.4464) + (0.1571)(0.9788) + 1.0583 \\ &= 2.00005 \end{aligned}$$

Agar lebih mudah dan akurat, solusi  $u^{(1)}$  dihitung dengan bantuan program *python* sehingga diperoleh hasil berikut

**Tabel 3.1** Hasil Perhitungan  $u^{(1)}$  Menggunakan *python*

$x$ ke -	Nilai $x$	Solusi $u^{(1)}$
0	0	1.00005
1	0.1571	1.15648
2	0.3142	1.30907
3	0.4712	1.45404
4	0.6283	1.58784
5	0.7854	1.70716
6	0.9425	1.80907
7	1.0996	1.89106
8	1.2566	1.9511

9	1.4137	1.98774
10	1.5708	2.00005

Kemudian untuk solusi  $u^{(2)}$  yang akan dicari dapat dihasilkan dengan mensubstitusikan nilai  $n = 1$  pada persamaan (3.37), didapatkan

$$-(0.01)^2 u_{xx}^{(2)} + (1 - (0.01)^2) u^{(2)} = 2u^{(1)} - u^{(0)} \quad (3.53)$$

Persamaan (3.53) dengan mengikuti persamaan (3.11) dan persamaan (3.13) menjadi

$$-(0.01)^2 \sum_{j=0}^8 w_j^{(2)} \phi(x, c_j) + (1 - (0.01)^2) \left[ \sum_{j=0}^8 w_j^{(2)} H_2(x, c_j) + x \cdot w_9^{(2)} + w_{10}^{(2)} \right] = 2u^{(1)} - u^{(0)}$$

dapat disederhanakan menjadi

$$\sum_{j=0}^8 w_j^{(2)} \left[ -(0.01)^2 \phi(x, c_j) + (1 - (0.01)^2) H_2(x, c_j) \right] + (1 - (0.01)^2) x \cdot w_9^{(2)} + (1 - (0.01)^2) w_{10}^{(2)} = 2u^{(1)} - u^{(0)} \quad (3.54)$$

Persamaan (3.54) disederhanakan dengan permisalan seperti berikut

$$\sum_{j=0}^8 w_j^{(2)} P(x, c_j) + (1 - (0.01)^2) x \cdot w_9^{(2)} + (1 - (0.01)^2) w_{10}^{(2)} = Q(x) \quad (3.55)$$

dengan

$$-(0.01)^2 \phi(x, c_j) + (1 - (0.01)^2) H_2(x, c_j) = P(x, c_j)$$

dan

$$2u^{(1)} - u^{(0)} = Q(x)$$

Jika baris pertama berasal dari persamaan (3.47), baris selanjutnya berasal dari persamaan (3.55) dengan  $x = (x_1, x_2, \dots, x_9)$  dan baris terakhir berasal dari persamaan (3.48) dibentuk menjadi suatu persamaan linier yang tetap menyertakan kondisi batas namun pada saat  $t^{(2)}$  menjadi

$$H_2(0,0)w_0^{(2)} + H_2(0,0.1963)w_1^{(2)} + \dots + H_2(0,1.5708)w_8^{(2)} + (1-(0.01)^2)(0)w_9^{(2)} \\ + (1-(0.01)^2)w_{10}^{(2)} = \cosh(0.02)$$

$$P(0.1571,0)w_0^{(2)} + P(0.1571,0.1963)w_1^{(2)} + \dots + P(0.1571,1.5708)w_8^{(2)} \\ + (1-(0.01)^2)(0.1571)w_9^{(2)} + (1-(0.01)^2)w_{10}^{(2)} = Q(0.1571)$$

$$P(0.3142,0)w_0^{(2)} + P(0.3142,0.1963)w_1^{(2)} + \dots + P(0.3142,1.5708)w_8^{(2)} \\ + (1-(0.01)^2)(0.3142)w_9^{(2)} + (1-(0.01)^2)w_{10}^{(2)} = Q(0.3142)$$

$$\vdots$$

(3.56)

$$P(1.4137,0)w_0^{(2)} + P(1.4137,0.1963)w_1^{(2)} + \dots + P(1.4137,1.5708)w_8^{(2)} \\ + (1-(0.01)^2)(1.4137)w_9^{(2)} + (1-(0.01)^2)w_{10}^{(2)} = Q(1.4137)$$

$$H_2(1.5708,0)w_0^{(2)} + H_2(1.5708,0.1963)w_1^{(2)} + \dots + H_2(1.5708,1.5708)w_8^{(2)} \\ + (1-(0.01)^2)(1.5708)w_9^{(2)} + (1-(0.01)^2)w_{10}^{(2)} = 1 + \cosh(0.02)$$

Sistem persamaan tersebut dibentuk matriks untuk mempermudah perhitungan sebagaimana berikut

$$\begin{bmatrix} H_2(0,0) & H_2(0,0.1963) & \dots & H_2(0,1.5708) \\ P(0.1571,0) & P(0.1571,0.1963) & \dots & P(0.1571,1.5708) \\ P(0.3142,0) & P(0.3142,0.1963) & \vdots & P(0.3142,1.5708) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(1.4137,0) & P(1.4137,0.1963) & \dots & P(1.4137,1.5708) \\ H_2(1.5708,0) & H_2(1.5708,0.1963) & \dots & H_2(1.5708,1.5708) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1-(0.01)^2)(0.1571) & (1-(0.01)^2) \\ (1-(0.01)^2)(0.3142) & (1-(0.01)^2) \\ \vdots & \vdots \\ (1-(0.01)^2)(1.4137) & (1-(0.01)^2) \\ 1.5708 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0^{(2)} \\ w_1^{(2)} \\ \vdots \\ w_8^{(2)} \\ w_9^{(2)} \\ w_{10}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(0.02) \\ Q(0.1571) \\ Q(0.3142) \\ \vdots \\ Q(1.4137) \\ 1 + \cosh(0.02) \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Sistem persamaan (3.57) dimisalkan sebagaimana berikut untuk menyederhanakan penulisan

$$A = \begin{bmatrix} H_2(0,0) & H_2(0,0.1963) & \cdots & H_2(0,1.5708) \\ P(0.1571,0) & P(0.1571,0.1963) & \cdots & P(0.1571,1.5708) \\ P(0.3142,0) & P(0.3142,0.1963) & \vdots & P(0.3142,1.5708) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(1.4137,0) & P(1.4137,0.1963) & \cdots & P(1.4137,1.5708) \\ H_2(1.5708,0) & H_2(1.5708,0.1963) & \cdots & H_2(1.5708,1.5708) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (1-(0.01)^2)(0.1571) & (1-(0.01)^2) \\ (1-(0.01)^2)(0.3142) & (1-(0.01)^2) \\ \vdots & \vdots \\ (1-(0.01)^2)(1.4137) & (1-(0.01)^2) \\ 1.5708 & 1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} w_0^{(2)} \\ w_1^{(2)} \\ \vdots \\ w_8^{(2)} \\ w_9^{(2)} \\ w_{10}^{(2)} \end{bmatrix}, \text{ dan } B = \begin{bmatrix} \cosh(0.02) \\ Q(0.1571) \\ Q(0.3142) \\ \vdots \\ Q(1.4137) \\ 1 + \cosh(0.02) \end{bmatrix}$$

Setiap nilai yang terdapat pada persamaan (3.57) dapat dihitung dengan mensubstitusikan nilai  $x$ ,  $c$ , dan  $a$  pada persamaan (2.37) untuk  $\phi(x, c_j)$  dan (2.52) untuk  $H_2(x, c_j)$ . Vektor  $W$  yang berisi nilai  $w_j^{(1)}$  dengan indeks  $j = 0, 1, \dots, 10$  dapat ditentukan nilainya dengan mengalikan *invers* matriks  $A$  dengan vektor  $B$ .

$$W = A^{-1} \cdot B$$

Nilai koefisien  $w^{(2)}$  dihitung dengan bantuan program *python*, diperoleh hasil  $W = [-1.3216, 0.6663, -0.0912, 0.1113, 0.0562, 0.1216, 0.0349, 0.4068, -0.4452, 0.9786, 1.0585]$ .

Nilai koefisien  $w^{(2)}$  yang telah diperoleh kemudian digunakan untuk menentukan solusi  $u^{(2)}$  dengan mengikuti persamaan (3.13) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
u_0^{(2)} &= H_2(0,0)(-1.3216) + \dots + H_2(0,1.5708)(-0.4452) + 0(0.9786) + 1.0585 \\
u_1^{(2)} &= H_2(0.1571,0)(-1.3216) + \dots + H_2(0.1571,1.5708)(-0.4452) + 0.1571(0.9786) + 1.0585 \\
&\vdots \\
u_{10}^{(2)} &= H_2(1.5708,0)(-1.3216) + \dots + H_2(1.5708,1.5708)(-0.4452) + 1.5708(0.9786) + 1.0585
\end{aligned}$$

Solusi  $u^{(2)}$  dihitung dengan bantuan program *python* sehingga diperoleh

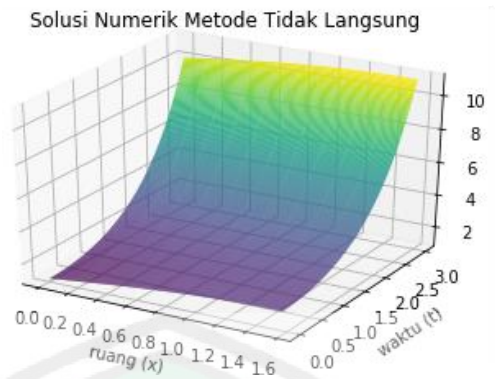
hasil berikut

**Tabel 3.2** Hasil Perhitungan  $u^{(2)}$  Menggunakan *python*

$x$ ke -	Nilai $x$	Solusi $u^{(2)}$
0	0	1.0002
1	0.1571	1.15663
2	0.3142	1.30922
3	0.4712	1.45419
4	0.6283	1.58799
5	0.7854	1.70731
6	0.9425	1.80921
7	1.0996	1.89121
8	1.2566	1.95126
9	1.4137	1.98789
10	1.5708	2.0002

Solusi  $u_0^{(2)}, u_1^{(2)}, \dots, u_{10}^{(2)}$  yang telah diperoleh tersebut merupakan nilai  $u$  pada saat  $t^{(2)}$ , dimana  $u_0^{(2)}$  merupakan solusi  $u^{(2)}$  yang dicari pada  $x_0$ , dan seterusnya. Sedangkan untuk mencari nilai  $u$  pada saat  $t^{(3)}, t^{(4)}, \dots, t^{(300)}$  dapat diperoleh dengan cara yang sama sebagaimana mencari nilai  $u$  pada saat  $t^{(2)}$ , yaitu dengan melanjutkan substitusi untuk  $n = 2, 3, \dots, 300$  pada persamaan (3.37) dimana banyaknya  $t$  pada  $0 \leq t \leq 3$  dengan  $\Delta t = 0.01$  adalah 301.

Berikut adalah grafik dari keseluruhan solusi  $u$  pada  $0 \leq t \leq 3$  dengan menggunakan program *python*.

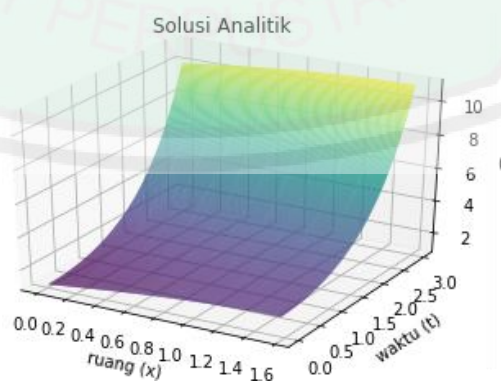


**Gambar 3.1** Grafik Solusi Numerik Metode Tidak Langsung

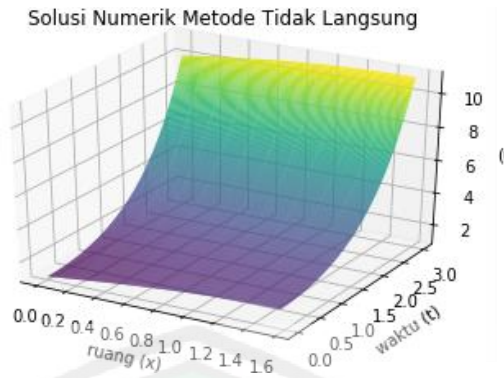
Gambar 3.1 menunjukkan hasil simulasi numerik dari persamaan (3.31) menggunakan jaringan fungsi radial basis tidak langsung dengan  $\Delta t = 0.01$  dan  $\Delta x = 0.1571$ . Grafik tersebut menggambarkan partikel berada pada ruang  $x$  dan pada waktu  $t$ , yang mana  $u$  menunjukkan jarak elektron terhadap inti atom pada saat  $t$ . Dari grafik tersebut terlihat bahwa gerakan partikel semakin bergerak naik seiring bertambahnya waktu.

### 3.2.2 Perhitungan Galat

Keseluruhan solusi  $u$  dari simulasi yang telah dilakukan pada persamaan (3.31) dengan  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\Delta x = 0.1571$  dan  $0 \leq t \leq 3$ ,  $\Delta t = 0.01$  menggunakan *python* ditampilkan pada gambar 3.2 dan Gambar 3.3 berikut.



**Gambar 3.2** Grafik Solusi Analitik



**Gambar 3.3** Grafik Solusi Numerik Metode Tidak Langsung

Setelah mendapatkan solusi numerik, hal terpenting yang perlu dilakukan adalah menganalisis hasil terutama galat yang dihasilkan. Nilai galat tersebut dapat digunakan untuk melihat keefektifan penggunaan jaringan fungsi radial basis tidak langsung dalam mendapatkan solusi numerik dari persamaan (3.31). Untuk mencari nilai galat dibutuhkan solusi analitik yang dapat dicari dengan membentuk persamaan (2.33) untuk setiap  $x$  dan  $t$ , seperti beberapa contoh berikut.

Solusi  $u$  ketika  $t = 1$  untuk  $x = 0, 1$  dan  $2$ .

$$\begin{aligned} u_0^{(100)} &\longrightarrow u(0,1) = \sin(0) + \cosh(1) \\ &= 0 + 1.54308063 \\ &= 1.54308063 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1^{(100)} &\longrightarrow u(0.1571,1) = \sin(0.1571) + \cosh(1) \\ &= 0.156434465 + 1.54308063 \\ &= 1.6995151 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2^{(100)} &\longrightarrow u(0.3142,1) = \sin(0.3142) + \cosh(1) \\ &= 0.30901699 + 1.54308063 \\ &= 1.85209763 \end{aligned}$$

Solusi  $u$  ketika  $t = 3$  untuk  $x = 0, 1$  dan  $2$ .

$$\begin{aligned} u_0^{(300)} &\longrightarrow u(0,3) = \sin(0) + \cosh(3) \\ &= 0 + 10.067662 \\ &= 10.067662 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_1^{(300)} &\longrightarrow u(0.1571, 3) = \sin(0.1571) + \cosh(3) \\
 &= 0.156434465 + 10.067662 \\
 &= 10.2240964
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2^{(300)} &\longrightarrow u(0.3142, 3) = \sin(0.3142) + \cosh(3) \\
 &= 0.30901699 + 10.067662 \\
 &= 10.3766789
 \end{aligned}$$

dan terus berlanjut untuk setiap  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\Delta x = 0.1571$  dan  $0 \leq t \leq 3$ ,  $\Delta t = 0.01$ .

Adapun galat yang dihasilkan pada saat  $t = 1$ ,  $t = 2$  dan  $t = 3$  dengan menggunakan  $\Delta t$  dan  $\Delta x$  berturut-turut 0.01 dan 0.1571 dapat dilihat pada Tabel 3.3 berikut:

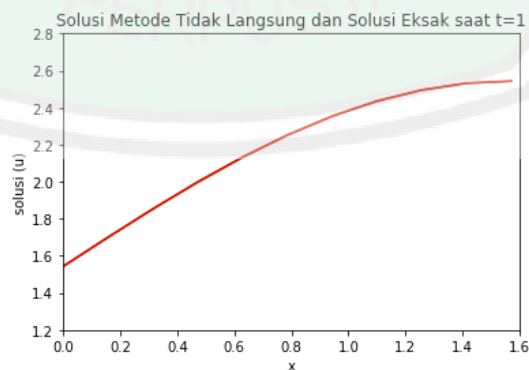
**Tabel 3.3** Perbandingan Solusi Numerik RBF Tidak Langsung terhadap Solusi Eksak

$t$	$x$	$u$ eksak	$u$ RBF tidak langsung	Galat RBF tidak langsung
1	0	1.54308063	1.54308063	$2.057 \times 10^{-12}$
	0.1571	1.6995151	1.7003357	0.000820628
	0.3142	1.85209763	1.85342579	0.001328156
	0.4712	1.99707113	1.99871726	0.001646126
	0.6283	2.13086589	2.13270791	0.001842022
	0.7854	2.25018742	2.25209739	0.001909973
	0.9425	2.35209763	2.35392408	0.001826446
	1.0996	2.43408716	2.43570731	0.001620148
	1.2566	2.49413715	2.49543055	0.001293394
	1.4137	2.53076898	2.53155364	0.000784643
2	1.5708	2.54308063	2.54308063	$1.417 \times 10^{-12}$
	0	3.76219569	3.76219569	$8.418 \times 10^{-11}$
	0.1571	3.91863016	3.92289751	0.004267354
	0.3142	4.01721269	4.0787732	0.007560512
	0.4712	4.21618619	4.22611629	0.009930104
	0.6283	4.34998094	4.36133259	0.011351652
	0.7854	4.46930247	4.48112387	0.011821394
	0.9425	4.57121269	4.5825616	0.011348914
	1.0996	4.65320222	4.6631272	0.000992499
	1.2566	4.71325221	4.72079394	0.007541736
1.4137	4.74988403	4.75411748	0.000423345	
1.5708	4.76219569	4.76219569	$2.977 \times 10^{-12}$	

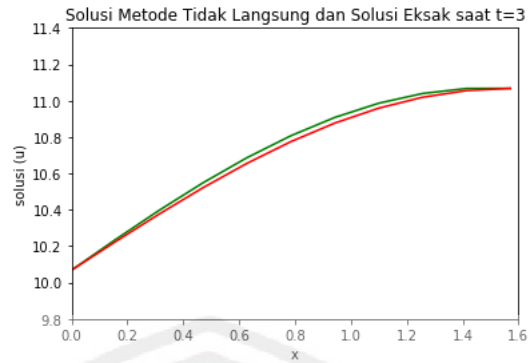
3	0	10.067662	10.067662	$1.07 \times 10^{-10}$
	0.1571	10.2240964	10.2357243	0.011627851
	0.3142	10.3766789	10.3973514	0.020672435
	0.4712	10.5216525	10.5488222	0.027169780
	0.6283	10.6554472	10.6865282	0.031081009
	0.7854	10.7747687	10.8071523	0.032383542
	0.9425	10.8766789	10.9077558	0.031076768
	1.0996	10.9586682	10.9858353	0.027166786
	1.2566	11.0187185	11.0393824	0.020663845
	1.4137	11.0553503	11.066955	0.011604636
	1.5708	11.067662	11.067662	$1.407 \times 10^{-11}$

Kolom ke-5 pada Tabel 3.3 adalah galat yang dihasilkan dari solusi numerik jaringan fungsi radial basis tidak langsung dengan menghitung  $|u_{\text{eksak}} - u_{\text{RBF(tidak langsung)}}|$ . Nilai galat tersebut jika dibandingkan dengan nilai galat dari metode langsung yaitu pada Tabel 2.1 memperlihatkan bahwa metode tidak langsung memiliki galat yang lebih kecil daripada metode langsung. Hal tersebut menunjukkan bahwa jaringan fungsi radial basis yang didekati secara tidak langsung memiliki solusi yang lebih efektif.

Berikut adalah grafik perbandingan solusi numerik menggunakan jaringan fungsi radial basis tidak langsung terhadap solusi eksak pada saat  $t = 1$  dan  $t = 3$ , dengan grafik berwarna hijau merupakan grafik solusi numerik metode tidak langsung sedangkan grafik berwarna merah merupakan grafik solusi eksak.

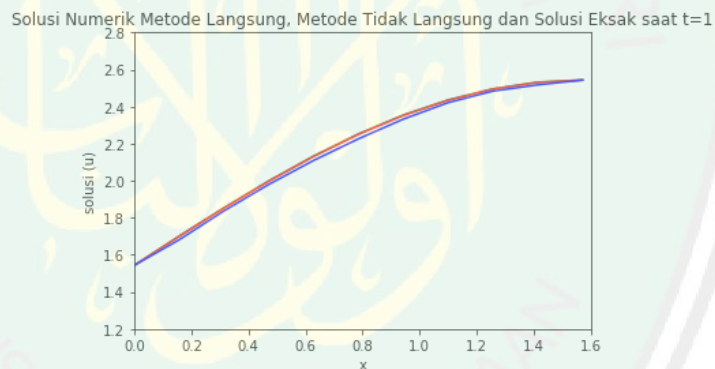


**Gambar 3.4** Grafik Solusi Numerik Metode Tidak Langsung dan Solusi Eksak saat  $t = 1$

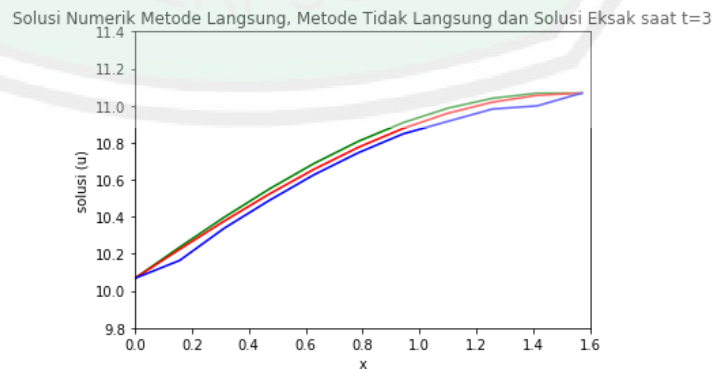


**Gambar 3.5** Grafik Solusi Numerik Metode Tidak Langsung dan Solusi Eksak saat  $t = 3$

Berikut adalah grafik perbandingan solusi numerik jaringan fungsi radial basis yang didekati secara langsung dan tidak langsung terhadap solusi eksak pada saat  $t = 1$  dan  $t = 3$ , dengan grafik berwarna biru merupakan grafik solusi numerik metode langsung, grafik berwarna hijau merupakan grafik metode tidak langsung sedangkan grafik berwarna merah merupakan grafik solusi eksak.

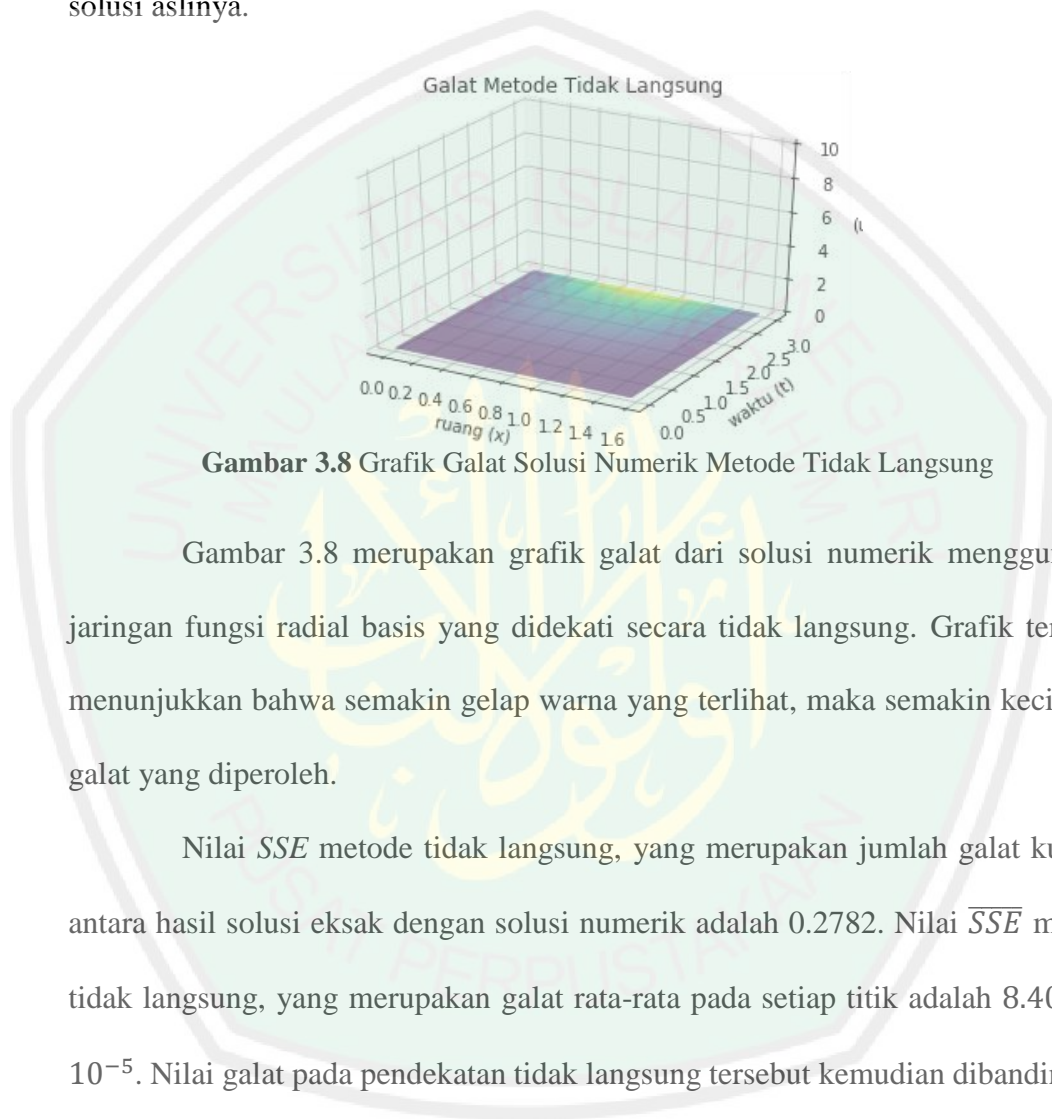


**Gambar 3.6** Grafik Solusi Numerik Metode Langsung, Metode Tidak Langsung dan Solusi Eksak saat  $t = 1$



**Gambar 3.7** Grafik Solusi Numerik Metode Langsung, Metode Tidak Langsung dan Solusi Eksak saat  $t = 3$

Jika Gambar 3.6 dan Gambar 3.7 diamati lebih cermat, maka dapat dilihat bahwa grafik solusi numerik jaringan fungsi radial basis tidak langsung lebih menyamai solusi eksak daripada grafik metode langsung. Hal itu menandakan bahwa pendekatan secara tidak langsung memiliki solusi yang lebih mendekati solusi aslinya.



**Gambar 3.8** Grafik Galat Solusi Numerik Metode Tidak Langsung

Gambar 3.8 merupakan grafik galat dari solusi numerik menggunakan jaringan fungsi radial basis yang didekati secara tidak langsung. Grafik tersebut menunjukkan bahwa semakin gelap warna yang terlihat, maka semakin kecil pula galat yang diperoleh.

Nilai  $SSE$  metode tidak langsung, yang merupakan jumlah galat kuadrat antara hasil solusi eksak dengan solusi numerik adalah 0.2782. Nilai  $\overline{SSE}$  metode tidak langsung, yang merupakan galat rata-rata pada setiap titik adalah  $8.4034 \times 10^{-5}$ . Nilai galat pada pendekatan tidak langsung tersebut kemudian dibandingkan dengan nilai galat pada pendekatan secara langsung (pada subbab 2.8). Dengan demikian, pendekatan secara tidak langsung menghasilkan galat yang lebih kecil. Hal ini menunjukkan bahwa dalam menyelesaikan solusi numerik persamaan linier

*Klein-Gordon* khususnya persamaan (3.31) lebih baik menggunakan metode jaringan fungsi radial basis yang didekati secara tidak langsung.

### 3.3 Kajian Keagamaan

Allah SWT telah menyerukan kepada umatnya untuk memilih diantara beberapa pilihan agar mencapai hasil yang optimal dan terbaik. Seperti pada firman Allah SWT dalam al-Qur'an surat az-Zumar ayat 18 yang artinya:

*“yang mendengarkan perkataan lalu mengikuti apa yang paling baik di antaranya. Mereka itulah orang-orang yang telah diberi Allah petunjuk dan mereka itulah orang-orang yang mempunyai akal”.* (Q.S. az Zumar/39:18)

Dalam Tafsir Ibnu Katsir yang ditulis oleh Ar-Rifa'i (2012), Allah SWT berfirman, *“Sebab itu sampaikanlah berita itu kepada hamba-hambaKu yang mendengarkan perkataan lalu mengikuti apa yang paling baik di antaranya.”* Yaitu, mereka memahaminya dan mengamalkan apa yang terdapat di dalamnya. *“Mereka itulah orang-orang yang telah diberi Allah petunjuk.”* Maksudnya orang-orang yang memiliki karakter ini adalah orang-orang yang akan mendapatkan petunjuk dari Allah di dunia dan akhirat, *“dan mereka itulah orang-orang yang mempunyai akal.”* Yaitu, orang-orang yang memiliki akal yang selamat dan fitrah yang lurus.

Ayat tersebut menjelaskan bahwa memilih pilihan yang paling baik merupakan anjuran dari Allah SWT. Bahkan Allah SWT menyebut merekalah orang-orang yang mempunyai akal yaitu orang-orang yang mampu membedakan mana yang baik dan mana yang tidak baik, dan mendahulukan yang harus didahulukan.

Namun seperti pada penerapannya di bidang matematika, seringkali kita dihadapkan dengan beberapa pilihan yang semuanya baik, maka tetap saja kita dianjurkan untuk memilih yang terbaik dari semua pilihan. Seperti perkataan ulama bahwa orang cerdas itu bukan hanya bisa membedakan baik dan buruk saja, tetapi mampu memilih dan memprioritaskan mana yang paling baik di antara yang baik serta mampu membedakan mana yang paling buruk di antara yang buruk.

Syaikhul Islam Taimiyyah berkata, *“bukanlah orang yang cerdas (berakal) yang hanya tahu (membedakan) baik dan buruk saja, tetapi wajib mengetahui yang terbaik dari dua kebaikan dan mengetahui yang terburuk dari dua keburukan”* (Majmu' Fatawa Ibnu Taimiyyah). Hal itu diperkuat dengan perkataan seorang sahabat 'Amr bin 'Ash, *“orang yang cerdas bukanlah yang hanya bisa membedakan antara kebaikan dan kejelekan, namun orang yang cerdas adalah yang bisa mengetahui mana yang terbaik antara dua pilihan yang buruk.”* (Al Isyraf fi Manazill Asyraf)

Pada penelitian ini penulis mengaplikasikan perintah Allah pada surat az-Zumar ayat 18 di atas dengan cara membandingkan dua metode numerik yaitu metode jaringan fungsi radial basis yang didekati secara langsung dan tidak langsung. Hal tersebut dilakukan untuk mengetahui metode mana yang lebih efektif yaitu dengan melihat galat yang dihasilkan. Berdasarkan analisis galat pada subbab sebelumnya, jaringan fungsi radial basis yang didekati secara tidak langsung menghasilkan solusi yang lebih baik daripada metode langsung. Oleh karena itu, solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* sebaiknya diselesaikan menggunakan jaringan fungsi radial basis yang didekati secara tidak langsung.

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Penelitian ini menyelesaikan persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan metode numerik yaitu jaringan fungsi radial basis yang didekati secara tidak langsung. Fungsi basis yang digunakan adalah fungsi basis *multiquadrics*. Adapun kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian ini adalah:

1. Solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis tidak langsung menghasilkan suatu fungsi  $u(x, t)$  yang merupakan suatu fungsi gelombang yang menggambarkan keadaan gerak sistem suatu partikel pada posisi  $x$  dan pada waktu  $t$ . Solusi tersebut menunjukkan partikel semakin bergerak naik seiring bertambahnya waktu.
2. Solusi numerik persamaan linier *Klein-Gordon* yang diperoleh dari hasil simulasi menggunakan jaringan fungsi radial basis secara tidak langsung menghasilkan nilai  $SSE$  sebesar 0.2782 dan  $\overline{SSE}$  sebesar  $8.4034 \times 10^{-5}$ . Dan setelah dilakukan perbandingan antara solusi numerik menggunakan jaringan fungsi radial basis metode tidak langsung dengan metode langsung, diperoleh kesimpulan bahwa solusi numerik metode tidak langsung memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan metode langsung karena galat yang dihasilkan metode tidak langsung lebih kecil. Solusi numerik tersebut akan semakin mendekati solusi eksak jika  $\Delta t$  dan  $\Delta x$  yang digunakan semakin kecil.

#### 4.2 Saran

Penelitian selanjutnya disarankan untuk melakukan penelitian tentang solusi numerik persamaan nonlinier *Klein-Gordon* menggunakan jaringan fungsi radial basis tidak langsung.



## DAFTAR PUSTAKA

- Al-Maraghi, A.M. 1993. *Tafsir Al-Maraghi*. Semarang: CV. TOHA PUTRA
- Aminataei, A. & Mazarei, M.M. 2008. Numerical Solution of Poisson's Equation Using Radial Basis Function Networks on the Polar Coordinate. *Computers and Mathematics with Applications*, 56: 2887- 2895.
- Anton, H. & Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer versi Aplikasi*. Jakarta: Erlangga.
- Ar-Rifa'i, Muhammad Nasib. 2012. *Ringkasan Tafsir Ibnu Katsir Jilid 4*. Jakarta: Gema Insani.
- Dehghan, M. & Shokri, A. 2009. Numerical Solution of The Nonlinear Klein-Gordon Equation using Radial Basis Functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 230: 400-410.
- Easif, F.H., Manaa, S.A., & Mekaeeel, D. 2013. The Finite Difference Methods for -Nonlinear Klein Gordon Equation. *IOSR Journal of Engineering*, 3: 01-05.
- Hajek, M. 2005. *Neural Networks*. Modul Kuliah Tidak Diterbitkan. California: University of California.
- Iqbal S., Idrees, M., Siddiqui, A.M., & Ansari, A.R. 2010. Some Soutions of The Linear and Nonlinear Klein-Gordon Equations using The Optimal Homotopy Asymtotic Method. *Applied Mathematics and Computation*, 216: 2898-2909.
- Katsir, I. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir, Jilid 6*. Terjemahan M. Abdul Ghoffar E.M. & Abu Ihsan Al-Atsari. Bogor: Pustaka Imam As-Syafi'i.
- Kusumadewi, S. 2004. *Membangun Jaringan Syaraf Tiruan Menggunakan Matlab*. Yogyakarta: Penerbit Graha Ilmu.
- Lian, J., Lee, S.D., dan Sudhoff, S.H.Z.. 2008. *Self Organizing Radial Basis Function Network for Real Time Approximation of Continuous Time Dynamical System*. Washinton: IEEE Transactions on Nerural Network.
- Mai-Duy, N. & Tran-Cong, T. 2003. Approximation of Function and Its Derivatives Using Radial Basis Functions Networks. *Applied Mathematical Modelling*, 27: 197-220
- Nainggolan, R.D. 2012. Penerapan Persamaan Klein-Gordon untuk Menentukan Tingkat Energi dari Atom Pion. *Skripsi Tidak Diterbitkan*. Medan: Universitas Sumatra Utara.

- Nur'aini, Faraziza. 2018. Solusi Numerik Persamaan Linier *Klein-Gordon* Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis. *Skripsi* Tidak Diterbitkan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Purcell, E.J. & Valberg, D.. 1999. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2, Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.
- Purwanto, Agus. 2008. *Ayat-Ayat Semesta Sisi-Sisi Al-Quran yang Terlupakan*. Bandung: Mizan.
- Sarboland, M. & Aminataei. A. 2015. Numerical Solution of Nonlinear Klein-Gordon Equation Using Multiquadric Quasi-interpolation Scheme. *Journal of Applied Mathematics* 3, 3: 40-49.
- Sarra, S.A dan Kansa, E. 2009. *Multiquadrics Radial Basis Function Approximation Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Modul Kuliah Tidak Diterbitkan. California. University of California.
- Setiawan, I. 2002. *Jaringan Syaraf Tiruan Jenis AMN (Associative Memory Networks): CMAC, B-Spline dan RBF untuk Aplikasi Pemodelan dan Pengontrolan*. Modul Kuliah Tidak Diterbitkan. Semarang: Universitas Diponegoro.
- Shihab, M. Quraish. 2000. *Tafsir Al-Misbah*. Ciputat: Penerbit Lentera Hati.
- Simbolon, H. 2013. *Statistika*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Strauss, W.A. 2007. *Partial Differential Equations. Second Edition*. New York: John Wiley & Sons.
- Sudiarta, I Wayan. 2019. *Mekanika Kuantum*. Mataram. CV. Garuda Ilmu.
- Wazwaz, A.M. 2002. *Partial Differential Equations Methods and Applications*. Netherland Balkema Publisher.
- Yani, E. 2005. *Pengantar Jaringan Syaraf Tiruan. Materi Kuliah*, (Online), 1 (1): 1-15, (<http://www.materikuliah.com>), diakses 30 Januari 2020.

## LAMPIRAN

### LAMPIRAN Script *Python* untuk Solusi Numerik, Eksak dan Galat

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *
from matplotlib.pyplot import *
from mpl_toolkits import mplot3d
import matplotlib.pyplot as plt

def mq(xi,cj,a):
    return ( -a**2/3 + (xi-cj)**2/6 )*( (xi-cj)**2+a**2 )**1/2 + ( a**2*(xi-cj)/2
)*log( (xi-cj) + ( (xi-cj)**2+a**2 )**1/2 )
def mqx(xi,cj,a):
    return (1/2)*(xi-cj)*sqrt( ( (xi-cj)**2+a**2 ) + ( (1/2)*a**2 )*log( ( (xi-cj) +
sqrt( ( (xi-cj)**2 )+a**2 ) ) )
def mqxx(xi,cj,a):
    return ( (xi-cj)**2+a**2 )**1/2

M = 11
N = M-2
T = 301
x = linspace(0,pi/2,M)
c = linspace(0,pi/2,N)
t = linspace(0,3,T)
l = linspace(1,T-2,299)
a = var(c)
dt = 0.01
A = zeros((M,N+2))
B = zeros(M)
U = zeros((M,T))
WW = zeros((M,T))
H = zeros((M,N+2))
Q = zeros((M,N+2))
Z = zeros((M,T))

def f(x):
    for i in range(N):
        return 1+sin(x)
U[:,0]=f(x)

for i in range(1,M-1):
    for j in range(N):
        A[0,j] = mq(x[0],c[j],a)
        A[0,j+1] = x[0]
        A[0,j+2] = 1
        B[0] = cosh(t[1])
```

```

for i in range(1,M-1):
    for j in range(N):
        A[i,j] = (-dt**2)*mqxx(x[i],c[j],a)+(2-dt**2)*mq(x[i],c[j],a)
        A[i,j+1] = (2-dt**2)*x[i]
        A[i,j+2] = (2-dt**2)
        B[i] = 2+2*sin(x[i])
for i in range(1,M-1):
    for j in range(N):
        A[M-1,j] = mq(x[M-1],c[j],a)
        A[M-1,j+1] = x[M-1]
        A[M-1,j+2] = 1
        B[M-1] = 1+cosh(t[1])

WW[:,1] = dot(inv(A),B)
for i in range(0,M):
    for j in range(N):
        H[i,j] = mq(x[i],c[j],a)
        H[i,j+1] = x[i]
        H[i,j+2] = 1

U[:,1] = dot(H,WW[:,1])

for l in range(1,T-1):
    for i in range(1,M-1):
        for j in range(N):
            A[0,j] = mq(x[0],c[j],a)
            A[0,j+1] = x[0]
            A[0,j+2] = 1
            B[0] = cosh(t[l+1])
        for i in range(1,M-1):
            for j in range(N):
                A[i,j] = (-dt**2)*mqxx(x[i],c[j],a)+(1-dt**2)*mq(x[i],c[j],a)
                A[i,j+1] = (1-dt**2)*x[i]
                A[i,j+2] = (1-dt**2)
                B[i] = 2*U[i,l] - U[i,l-1]
        for i in range(1,M-1):
            for j in range(N):
                A[M-1,j] = mq(x[M-1],c[j],a)
                A[M-1,j+1] = x[M-1]
                A[M-1,j+2] = 1
                B[M-1] = 1+cosh(t[l+1])
        WW[:,l+1] = dot(inv(A),B)
    for i in range(0,M):
        for j in range(N):
            Q[i,j] = mq(x[i],c[j],a)
            Q[i,j+1] = x[i]
            Q[i,j+2] = 1
        U[:,l+1] = dot(Q,WW[:,l+1])

```

```
Ut=transpose(U)
```

```
fig=plt.figure()
ax=plt.axes(projection='3d')
X,T=meshgrid(x,t)
Ut=Ut.reshape(X.shape)
ax.plot_surface(X,T,Ut,rstride=1,cstride=1,cmap='viridis',edgecolor='none')
ax.set_title('Solusi Numerik Metode Tidak Langsung')
ax.set_xlabel('ruang (x)')
ax.set_ylabel('waktu (t)')
ax.set_zlabel('(u)')
plt.show()
```

```
XX,TT=meshgrid(x,t)
def Sol(XX,TT):
    for j in range(N):
        for i in range(M):
            return sin(XX)+cosh(TT)
Z=Sol(XX,TT)
```

```
fig=plt.figure()
ax=plt.axes(projection='3d')
Z=Z.reshape(XX.shape)
ax.plot_surface(XX,TT,Z,rstride=1,cstride=1,cmap='viridis',edgecolor='none')
ax.set_title('Solusi Analitik')
ax.set_xlabel('ruang (x)')
ax.set_ylabel('waktu (t)')
ax.set_zlabel('(u)')
plt.show()
```

```
Err =Ut-Z
```

```
fig=plt.figure()
ax=plt.axes(projection='3d')
Err=Err.reshape(XX.shape)
ax.plot_surface(XX,TT,Err,rstride=1,cstride=1,cmap='viridis',edgecolor='none')
ax.set_title('Galat Metode Tidak Langsung')
ax.set_xlabel('ruang (x)')
ax.set_ylabel('waktu (t)')
ax.set_zlabel('(u)')
ax.set_zlim(0,10)
plt.show()
```

```
e=list(map(sum,transpose(Err)))
sse=sum((Err)**2)
sse2=sse/(M*T)
```

## RIWAYAT HIDUP



Talitha Nariswari Farendra, lahir di Malang, 28 Juni 1999, biasa dipanggil Talitha atau Naris. Penulis merupakan anak tunggal dari pasangan bapak Anendra Kusuma dan ibu Farida Hasan. Bertempat tinggal di jalan Terusan Sudimoro II/08 RT 09 RW 07 Kelurahan Mojolangu, Kecamatan Lowokwaru, Kota Malang. Pendidikan penulis ditempuh di TK Muslimat NU 16 lulus pada tahun 2004, kemudian dilanjutkan di SD Muhammadiyah 4 Malang lulus pada tahun 2010. Kemudian melanjutkan sekolah menengah pertama di SMPN 18 Malang lulus pada tahun 2013 dan sekolah menengah atas di SMAN 9 Malang lulus pada tahun 2016.

Selama menjadi mahasiswa, penulis pernah mengikuti kompetisi riset mahasiswa pada tahun 2019 dengan judul “Membangun Motif Batik dari Modifikasi Himpunan Mandelbrot”. Penulis juga pernah menjadi asisten laboratorium untuk mata kuliah praktikum pengantar ilmu komputer dan praktikum analisis numerik. Penulis juga melakukan meluangkan waktu sebagai tutor di bimbel Ilhami tahun 2017 dan bimbel Intelligent dari tahun 2019 hingga sekarang.



**KEMENTERIAN AGAMA RI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI**  
**MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
**Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Talitha Nariswari Farendra  
NIM : 16610067  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika  
Judul Skripsi : Solusi Numerik Persamaan Linier *Klein-Gordon*  
Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis Tidak Langsung  
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M. Si  
Pembimbing II : M. Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	6 Januari 2020	Revisi Bab I & II (Pembimbing I)	1.
2.	23 Januari 2020	Konsultasi Bab III (Pembimbing I)	2.
3.	6 Februari 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan (Pembimbing II)	3. <del></del>
4.	9 Februari 2020	Revisi Bab III (Pembimbing I)	4.
5.	23 Februari 2020	ACC untuk diseminarkan (Pembimbing I)	5.
6.	6 Maret 2020	Konsultasi Script Program (Pembimbing I)	6.
7.	16 Maret 2020	Revisi Bab III (Pembimbing I)	7.
8.	27 Maret 2020	Revisi Kajian Keagamaan (Pembimbing II)	8. <del></del>
9.	27 Maret 2020	Revisi Bab III & Bab IV (Pembimbing I)	9.
10.	29 Maret 2020	ACC untuk disidangkan (Pembimbing I)	10.

Malang, 10 Mei 2020  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001