PENYELESAIAN PERSAMAAN KORTEWEG DE-VRIES MENGGUNAKAN REDUCED DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD (RDTM)

SKRIPSI

OLEH
RINA SETYAWATI
NIM. 16610090

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

PENYELESAIAN PERSAMAAN KORTEWEG DE-VRIES MENGGUNAKAN REDUCED DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD (RDTM)

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)

Oleh
Rina Setyawati
NIM. 16610090

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

PENYELESAIAN PERSAMAAN KORTEWEG DE-VRIES MENGGUNAKAN REDUCED DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD (RDTM)

SKRIPSI

Oleh
Rina Setyawati
NIM. 16610090

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal, 30 April 2020

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Mohammad Jamhuri, M. Si	Muhammad Khudzaifah, M. Si
NIP. 19810502 200501 1 004	NIDT. 19900511 20160801 1 057

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PENYELESAIAN PERSAMAAN KORTEWEG DE-VRIES MENGGUNAKAN REDUCED DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD (RDTM)

SKRIPSI

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)
Tanggal, 30 April 2020

Penguji Utama	: Dr. Usman Pagalay, M. Si	....
Ketua Penguji	: Ari Kusumastuti, M. Si., M. Pd	....
Sekretaris Penguji	: Mohammad Jamhuri, M. Si	....
Anggota Penguji	: Muhammad Khudzaifah, M. Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M. Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Rina Setyawati
NIM	: 16610090
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Penyelesaian Persamaan Korteweg de-Vries Menggunakan Reduced Differential Transform Method (RDTM)

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 April 2020

Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL 6000

Rina Setyawati

NIM. 16610090

MOTO

"Jadilah wanita yang berbeda"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Poniran dan Ibunda Mahmudah tersayang, serta kedua kakak dan adik tercinta Rini Ahya Kurniati, Trisnawati dan Lidya Nur Aini Maisharoh yang selalu mendoakan, memberikan kasih sayang, nasihat, semangat, motivasi, dan juga selalu memberikan apa yang penulis inginkan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji syukur bagi Allah SWT. yang senantiasa melimpahkan rahmat, hidayah, barokah, dan inayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini untuk memenuhi syarat kelulusan program sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam penyusunan skripsi ini penulis mendapatkan masukan, arahan, dan nasihat dari berbagai pihak. Bentuk rasa terimakasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada :

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M. Ag, selaku Rektor Universtas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M. Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M. Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M. Si, selaku dosen pembimbing I yang selalu membimbing, memberi masukan, arahan, dan nasihat kepada penulis.
5. Muhammad Khudzaifah, M. Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan masukan dan nasihat kepada penulis.

6. Orang tua dan keluarga yang selalu mendukung penulis dan memberikan segala sesuatunya untuk penulis.
7. Dosen Jurusan Matematika yang memberikan ilmunya kepada penulis.
8. Semua pihak yang selalu membantu dan mendukung demi selesainya penyusunan skripsi ini.

Semoga Allah selalu melimpahkan rahmat dan barokahnya kepada kita semua. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Amiin.*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 30 April 2020

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Setyawati, Rina. 2020. **Penyelesaian Persamaan Korteweg de-Vries Menggunakan *Reduced Differential Transform Method* (RDTM).** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing : (I) Mohammad Jamhuri, M. Si (II) Muhammad Khudzaifah, M. Si.

Kata kunci : Reduced Differential Transform Method (RDTM), Persamaan Korteweg de-Vries,

Penelitian ini membahas tentang penyelesaian persamaan korteweg de-vries yang merupakan persamaan gelombang nonlinier menggunakan metode transformasi diferensial tereduksi. Dalam penelitian ini dibahas langkah-langkah penyelesaian persamaan korteweg de-vries dengan dua nilai awal. Berdasarkan hasil dari pembahasan diketahui bahwa penyelesaian persamaan korteweg de-vries dengan menggunakan dua nilai awal menghasilkan suatu solusi.

ABSTRACT

Setyawati, Rina. 2020. **Solving The Korteweg de-Vries Equation Using Reduced Differential Transform Method (RDTM).** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors : (I) Mohammad Jamhuri, M. Si (II) Muhammad Khudzaifah, M. Si.

Kata kunci : Reduced Differential Transform Method (RDTM), The Korteweg de-Vries Equation.

This research discusses the solution of korteweg de-vries equation which is a nonlinier wave equation using reduced differential transform method (RDTM). This research discusses the steps to solve the korteweg de-vries equation with two initial values. Based on the discussion it is known that the solution of the korteweg de-vries equation with two initial values produce a solutions.

ملخص

سيتيو اتي, رينا. ٢٠٢٠. ١المعادل ةقرار Korteweg devries باستخدام Reduced Differential Transform Method. بعث جامعي.تعبة الرياضية,كلية العلوم وا لتكنولو جيا, جامعة الدولةالاسلامية مولانامالك ابراهيم ماللنج. معلمه (I) :محمدجمهوري الماجستي. (II) محمدخذيفة الماجستي.

الكلمات الرئيسية :طريقة Reduced Differential Transform Method (RDTM), معادلة Korteweg devries.

تتناول هذهالدراسةحلمعا دلة korteweg devries وهي معادلة مو جية غير خطية باستخدام طريقةالتحويل تخفيض التفاضل. في هذه الدراسة,تمت مناقشة خطوات حل معادلة korteweg devries بقيمتين اوليتين. بناءعلى نتائج من المعرو ف ا ن حل معادلة korteweg devries مع قيمتان اوليتان تتجان حلاواحدا.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu matematika merupakan ilmu yang dapat digunakan untuk memecahkan suatu masalah pada kehidupan sehari-hari. Permasalahan sering terjadi pada ilmu biologi, ekonomi, fisika, permesinan, teknik, sosial dan lain sebagainya. Permasalahan yang terjadi dapat dipecahkan oleh ilmu matematika dengan cara memodelkan permasalahan tersebut. Setelah permasalahan tersebut dimodelkan, barulah dapat dipecahkan dengan adanya suatu solusi. Solusi yang ada pada ilmu matematika merupakan solusi yang tepat dan jelas.

Masalah yang terjadi di kehidupan sehari-hari sebenarnya telah dijanjikan oleh Allah untuk diberikan suatu solusi. Seperti pada firman Allah di dalam Al-Qur'an Surat Ath-Thalaq ayat 2:

فَإِذَا بَلَغۡنَ أَجَلَهُنَّ فَأَمۡسِكُوهُنَّ بِمَعۡرُوفٍ أَوۡ فَارِقُوهُنَّ بِمَعۡرُوفٖ وَأَشۡهِدُواْ
ذَوَيۡ عَدۡلٖ مِّنكُمۡ وَأَقِيمُواْ ٱلشَّهَٰدَةَ لِلَّهِۚ ذَٰلِكُمۡ يُوعَظُ بِهِۦ مَن كَانَ يُؤۡمِنُ بِٱللَّهِ
وَٱلۡيَوۡمِ ٱلۡأٓخِرِۚ وَمَن يَتَّقِ ٱللَّهَ يَجۡعَل لَّهُۥ مَخۡرَجٗا ٢

Artinya *: Apabila mereka telah mendekati akhir iddahnya, maka rujukilah mereka dengan baik atau lepaskan mereka dengan baik dan persaksikanlah dengan dua orang saksi yang adil di antara kamu dan hendaklah kamu tegakkan kesaksian itu karena Allah. Demikianlah diberi pengajaran dengan itu orang yang beriman kepada Allah dan hari kiamat. Barangsiapa bertakwa kepada Allah niscaya Dia akan mengadakan baginya jalan keluar (2)*

Menurut Tafsir Ibnu Katsir dijelaskan bahwa apabila wanita-wanita yang menjalani masa idahnya itu hampir menyelesaikan masa idahnya, tetapi masa idahnya masih belum berakhir secara maksimal, maka pada saat itulah pihak suami adakalanya bertekad untuk kembali memegangnya dan mengembalikannya ke dalam ikatan pernikahan serta meneruskan kehidupan rumah tangganya seperti semula. Yaitu memperbaiki kembali hubungannya dengan istrinya dan menggaulinya dengan cara yang baik. Adakalanya si suami bertekad tetap menceraikannya dengan cara yang baik pula, yakni tanpa memburuk-burukkan istrinya, tanpa mencaci makinya, dan tanpa mengecamnya, bahkan menceraikannya dengan cara yang baik dan penyelesaian yang bagus. Apabila dalam rujuk bertekad untuk kembali kepadanya, maka tidak boleh seseorang melakukan nikah dan talak serta rujuk kecuali dengan memakai dua orang saksi laki-laki yang adil, seperti apa yang diperintahkan oleh Allah SWT, terkecuali karena ada uzur. Barang siapa yang bertakwa kepada Allah dalam semua apa yang diperintahkan kepadanya dan meninggalkan semua apa yang dilarang baginya, maka Allah akan menjadikan baginya jalan keluar dari urusannya dan memberinya rezeki dari arah yang tidak disangka-sangkanya. Yakni dari arah yang tidak terdetik dalam hatinya.

Berdasarkan pemaparan dari Tafsir Ibnu Katsir dapat diketahui bahwa, sesulit apapun masalah yang terjadi di kehidupan sehari-hari, manusia harus tetap bertakwa kepada Allah, menjauhi larangan Allah dan harus selalu percaya bahwa Allah selalu berencana yang terbaik untuk hambanya dan telah mempersiapkan jalan keluar dari suatu masalah yang biasa disebut dengan suatu solusi.

Pada umumnya, berbagai masalah yang ada di lingkungan sehari-hari dapat dimodelkan secara matematis dengan menggunakan persamaan diferensial. Untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial dapat dilakukan dengan dua metode yakni, metode analitik dan metode numerik. Metode analitik adalah metode penyelesaian model matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku (lazim) sehingga dapat ditemukan suatu solusi eksak. Persamaan diferensial dengan bentuk ataupun orde berbeda umumnya tidak dapat diselesaikan dengan satu metode analitik, sehingga solusinya dapat dicari dengan metode numerik. Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitung. Solusi yang dihasilkan oleh metode numerik merupakan solusi hampiran atau mendekati solusi sebenarnya.

Penelitian kali ini, penulis mengkaji persamaan diferensial parsial nonlinier homogen satu dimensi. Persamaan yang digunakan yaitu persamaan *Korteweg de Vries* (KdV) dengan menggunakan dua kondisi awal. Persamaan KdV merupakan model matematika gelombang pada permukaan air dangkal. Persamaan KdV dapat diterapkan pada beberapa masalah fisik seperti, masalah gelombang air dangkal dengan kekuatan pemulihan non-linier lemah, gelombang internal yang panjang di lautan bertingkat kepadatan, gelombang akustik ion dalam plasma dan lain sebagainya. Dibutuhkan suatu solusi untuk menyelesaikan persamaan KdV. Terdapat lebih dari satu metode untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Salah satunya yakni metode iterasi variasi.

Metode yang akan digunakan untuk mengkaji persamaan diferensial parsial kali ini yaitu metode analitik *Reduced Differential Transformation Method* (RDTM). Metode ini digunakan untuk mendapatkan suatu solusi yang tepat dan efektif pada persamaan *Korteweg de Vries* (KdV). *Reduced Differential Transformation Method* (RDTM) atau metode transformasi diferensial tereduksi, pertama kali dikemukakan oleh Keskin (2009) yang telah diterapkan untuk memecahkan berbagai masalah. Metode ini merupakan metode yang sangat sederhana dan efektif tanpa melakukan linearisasi, pertubasi dan lain sebagainya. Metode ini melakukan transformasi terhadap persamaan dan nilai awal yang diberikan. Kemudian solusi yang dihasilkan berbentuk suatu deret.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan di atas, maka rumusan masalah yang diambil adalah bagaimana penyelesaian persamaan *Korteweg de Vries* (KdV) menggunakan metode transformasi diferensial tereduksi ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian yang diambil yakni mengetahui penyelesaian persamaan *Korteweg de Vries* (KdV) menggunakan metode transformasi diferensial tereduksi.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yaitu untuk menambah pengetahuan pada kasus penyelesaian persamaan *Korteweg de Vries* (KdV) menggunakan metode transformasi diferensial tereduksi.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi oleh satu persamaan diferensial parsial nonlinier. Persamaan yang digunakan yakni persamaan *Korteweg de Vries* (KdV) yang diambil dari penelitian Dinda (2019) yaitu :

$$u_t - 3(u^2)_x + u_{xxx} = 0$$

dengan nilai awal :

$$u(x,0) = 6x \qquad \text{dan} \qquad u(x,0) = -2\,\text{sech}^2(x)$$

Dimana fungsi $u(x,t)$ merupakan fungsi yang dicari.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan untuk menyelesaikan Persamaan *Korteweg de Vries* (KdV) adalah:

1. Mentransformasi persamaan *Korteweg de Vries* (KdV) menggunakan bentuk transformasi dari metode transformasi diferensial tereduksi.
2. Mentransformasi nilai awal $u(x,0)$ menjadi $U_0(x)$ menggunakan definisi dari metode transformasi diferensial tereduksi.
3. Menentukan nilai $U_k(x)$ menggunakan persamaan yang sudah di transformasikan dengan mensubstitusi nilai $k = 0,1,2,3,\ldots$
4. Menentukan nilai dari $u(x,t)$ menggunakan $\sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)\, t^k$

1.7 Sistematika Penulisan

Berikut merupakan sistematika penulisan yang digunakan oleh penulis pada penelitian kali ini:

Bab I Pendahuluan

Bab I memaparkan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab II memaparkan kajian pustaka yang dijadikan landasan teori untuk mendukung topik yaitu deret Taylor, metode transformasi diferensial tereduksi, persamaan KdV dan kajian keagamaan.

Bab III Pembahasan

Bab III memaparkan tentang hasil dari penyelesaikan persamaan *Korteweg de Vries* dengan dua nilai awal menggunakan metode RDTM disertai dengan bukti dan pembahasan secara rinci dan runtun.

Bab IV Penutup

Bab ini menyajikan kesimpulan hasil penelitian serta saran yang berkaitan dengan penelitian yang penulis lakukan.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Deret Taylor Satu Variabel

Definisi 2.1 Jika $u(x,t)$ adalah fungsi yang diturunkan terhadap waktu (t) dan ruang (x) dalam suatu domain, maka :

$$U_k(x) = \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t)\right]_{t=0} \tag{2.1}$$

Dimana t-dimensi spektrum fungsi $U_k(x)$ adalah fungsi transformasi.

Definisi 2.2 Invers transformasi diferensial dari $U_k(x)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)\, t^k \tag{2.2}$$

Dari persamaan (2.2) dan persamaan (2.3) didapatkan :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t)\right]_{t=0} t^k \\ &= u(x,0) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial t}u(x,0)t + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,0)t^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial t^3}u(x,0)t^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!}\frac{\partial^4}{\partial t^4}u(x,0)t^4 + \frac{1}{5!}\frac{\partial^5}{\partial t^5}u(x,0)t^5 + \cdots \end{aligned} \tag{2.3}$$

Berdasarkan definisi 2.1 dan definisi 2.2 dapat ditemukan konsep dari metode transformasi diferensial tereduksi adalah penurunan dari ekspansi deret pangkat (N. Taghizadeh, 2017).

2.2 Metode Transformasi Diferensial Tereduksi

Salah satu metode semi analitik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial parsial adalah *reduced differential transform method* (RDTM) atau metode transformasi diferensial tereduksi. Metode transformasi diferensial tereduksi pertama kali di perkenalkan oleh ilmuwan matematika dari Turki yang bernama Keskin pada tahun 2009. Metode transformasi diferensial tereduksi disajikan untuk mengatasi kekurangan perhitungan pada *differential transform method* (DTM) (Keskin, 2010). Bentuk RDTM telah dikembangkan dari DTM untuk kasus persamaan diferensial nonlinier (Abazari, 2013). Keuntungan utama dari metode ini adalah pembuktian yang diberikan berupa aproksimasi analitik, dalam setiap kasus terdapat solusi yang tepat dengan hasil yang konvergen dan cepat, dan perhitungannya dihitung secara elegan (Keskin dkk, 2011).

Fungsi dari dua variable $u(x,t)$ direpresentasikan sebagai produk dari 2 fungsi variable tunggal $u(x,t) = f(x)g(t)$. Berdasarkan sifat-sifat transformasi diferensial satu dimensi, fungsi $u(x,t)$ dapat direpresentasikan sebagai berikut :

$$u(x,t) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} F(i)x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} G(j)t^j\right)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} F(i)x^i\, G(j)t^j\right)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} F(i)\, G(j)x^i t^j\right)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} U_{(j),(i)}\, t^j x^i\right)$$

$$= (U_{0,0}, U_{0,1}x, U_{0,2}x^2, \dots)(U_{1,0}t, U_{1,1}tx, U_{1,2}tx^2, \dots)(U_{2,0}t^2, U_{2,1}t^2x, \dots)$$

$$= \left(t^0 \sum_{m=0}^{\infty} U_{0,i}\, x^i\right), \left(t^1 \sum_{m=0}^{\infty} U_{1,i}\, x^i\right), \dots, \dots, \left(t^k \sum_{m=0}^{\infty} U_{k,i}\, x^i\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)\, t^k \qquad (2.4)$$

Dimana $U_k(x)$ disebut fungsi spektrum t-dimensi dari $u(x,t)$.

Definisi dasar dari RDTM yaitu Definisi 2.1 dan Definisi 2.2 yang tertulis di persamaan (2.1) dan persamaan (2.2). Untuk mengilustrasikan konsep dasar RDTM, perhatikan persamaan diferensial parsial nonlinier yang disajikan dalam bentuk berikut :

$$Lu(x,t) + Ru(x,t) + Nu(x,t) = g(x,t) \qquad (2.5)$$

dengan nilai awal

$$u(x,0) = f(x) \qquad (2.6)$$

dimana $L = \frac{\partial}{\partial t}$, R adalah operator linier yang memiliki turunan parsial, $Nu(x,\boldsymbol{t})$ adalah bentuk operator nonlinier dan $g(x,t)$ adalah bentuk nonhomogen. Menurut RDTM, disusunlah rumus iterasi :

$$(k+1)U_{k+1}(x) = G_k(x) - RU_k(x) - NU_k(x) \qquad (2.7)$$

dimana $U_k(x), RU_k(x)$, $NU_k(x)$ dan $G_k(x)$ adalah transformasi dari fungsi $Lu(x,t)$, $Ru(x,t)$, $Nu(x,t)$ dan $g(x,t)$.

Dengan nilai awal :

$$U_0(x) = f(x). \qquad (2.8)$$

Substitusi (2.8) ke (2.7) yang dilakukan menggunakan perhitungan berulang, akan mendapatkan nilai dari $U_k(x)$.

Kemudian, transformasi invers dari nilai himpunan $\{U_k(x)\}_{k=0}^{n}$ memberikan solusi aproksimasi bentuk ke-n sebagai berikut :

$$\tilde{u}_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} U_k(x)t^k \tag{2.9}$$

Sehingga, solusi eksak yang didapatkan yaitu :

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} \tilde{u}_n(x,t) \tag{2.10}$$

Operasi dasar matematika pada RDTM dicantumkan pada tabel berikut (N. Taghizadeh, 2017) :

Tabel 2.1 Reduced Differential Transformation

Bentuk fungsi	**Bentuk transformasi**
$u(x,t)$	$U_k(x) = \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t)\right]_{t=0}$
$w(x,t) = u(x,t) \pm v(x,t)$	$W_k(x) = U_k \pm V_k(x)$
$w(x,t) = au(x,t)$	$W_k(x) = aU_k(x)$(a adalah konstanta)
$w(x,t) = x^m t^n$	$W_k(x) = x^m\delta(k-n), \quad \delta(k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k\neq 0 \end{cases}$
$w(x,t) = x^m t^n u(x,t)$	$W_k(x) = x^m U_{k-n}(x)$
$w(x,t) = u(x,t)v(x,t)$	$W_k(x) = \sum_{r=0}^{k} U_r(x)V_{k-r}(x)$
$w(x,t) = \frac{\partial^r}{\partial t^r}u(x,t)$	$W_k(x) = (k+1)\ldots(k+r)U_{k+r}(x)$ $= \frac{(k+r)!}{k!}U_{k+r}(x)$
$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,t)$	$W_k(x) = \frac{\partial}{\partial x}U_k(x)$

Berikut merupakan persamaan hiperbolik satu dimensi dengan koefisien variabel yang akan diselesaikan menggunakan metode transformasi diferensial tereduksi (N. Taghizadeh, 2017) :

$$u_t(x,t) - \frac{x^2}{2} u_{xx}(x,t) = 0 \tag{2.11}$$

dengan nilai awal :

$$u(x,0) = x^2 \tag{2.12}$$

Dengan menggunakan tabel 2.1, transformasi diferensial dari persamaan (2.11) yaitu :

$$(k+1)U_{(k+1)}(x) = \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k(x) \tag{2.13}$$

Nilai awal pada persamaan (2.12) di transformasi menjadi :

$$U_0(x) = x^2 \tag{2.14}$$

Kemudian mensubstitusi persamaan (2.14) ke persamaan (2.13) dan dengan menggunakan perhitungan berulang, akan didapatkan nilai sebagai berikut :

Ketika $k = 0$, maka didapatkan $U_1(x) = \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U_0(x)$. Sehingga diperoleh nilai sebagai berikut

$$U_1(x) = \frac{x^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} U_0(x)\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}(2)$$

$$= x^2$$

Ketika $k = 1$, maka didapatkan $2U_2(x) = \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_1(x)$. Sehingga diperoleh nilai sebagai berikut

$$2U_2(x) = \frac{x^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_1(x)\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}(2)$$

$$= x^2$$

$$U_2(x) = \frac{1}{2!}x^2$$

Ketika $k = 2$, maka didapatkan $3U_3(x) = \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_2(x)$. Sehingga diperoleh nilai sebagai berikut

$$3U_3(x) = \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_2(x)$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{2!}x^2\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}(1)$$

$$U_3(x) = \frac{1}{3!}x^2$$

Begitupun untuk k iterasi selanjutnya.

Kemudian, menentukan nilai dari $u(x,t)$ dan diperoleh :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k\,(x)t^k$$

$$= U_0(x)t^0 + U_1(x)t^1 + U_2(x)t^2 + U_3(x)t^3 + \cdots$$

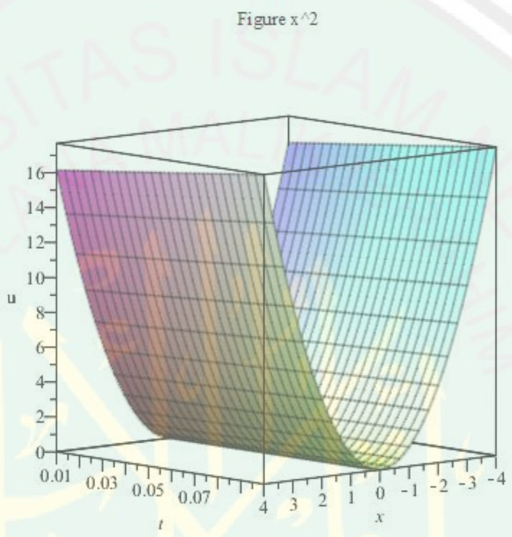
$$= x^2 + x^2 t + \frac{1}{2!} x^2 t^2 + \frac{1}{3!} x^2 t^3 + \cdots$$

$$= \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots\right) x^2$$

Sehingga solusi eksak yang didapatkan yaitu :

$$u(x,t) = e^t x^2 \tag{2.15}$$

Berikut adalah simulasi dari solusi eksak pada persamaan (2.15)



Gambar 2.1 Simulasi persamaan (2.15) dengan $-4 < x < 4$ dan $0.01 < t < 0.1$

Berdasarkan gambar 2.1, ketika $x = 0$ dan $u(x,0) = x^2$ maka tinggi gelombang berada di 0. Keadaan gelombang untuk solusi $u(x,t) = e^t x^2$ yakni gelombang akan menurun seiring berjalannya x dan t. Puncak terendah gelombang berada di 0.

2.3 Persamaan KdV

Gelombang nonlinier pertama kali diperkenalkan oleh J.S. Russell. J.S. Russell mengamati gelombang yang sedang bergerak di kanal sempit. J.S. Russell memperhatikan bahwa gerakan gelombang di sekitar perahu yang melaju dan tiba-tiba berhenti, dimana air yang semula ikut bergerak bersama perahu tidak ikut terhenti melainkan terkumpul di sekitar haluan. Gelombang tersebut menjauh meninggalkan perahu dalam bentuk satu gelombang tunggal dengan kecepatan yang tinggi dan tanpa mengalami perubahan bentuk. Akhirnya J.S. Russell mempelajari gejala gelombang tersebut, dan mendapatkan sifat bahwa cepat rambat gelombang tunggal sebanding dengan amplitudo. Namun, J.S. Russell sendiri tidak dapat memberikan model analitik yang dapat menerangkan gejala gelombang tersebut. Barulah pada tahum 1895 muncul model analitik yang dapat menerangkan gelombang J.S. Russell ini yang diusulkan oleh Korteweg dan de Vries (Hidayati, 2006)

Solusi persamaan KdV lebih dikenal sebagai gelombang soliton. Solusi persamaan gelombang soliton ini dapat diselesaikan dengan menggunakan metode aljabar, metode hamburan balik, metode Hirota, serta metode transformasi Backlund (Hidayati, 1999). Soliton ini telah diamati dalam berbagai fisis, seperti pada air dangkal. Persamaan yang mendeskripsikan penjalaran gelombang soliton pada permukaan air diturunkan oleh Korteweg de Vries pada tahun 1895. Persamaan ini dinamakan soliton *Korteweg de Vries*, dapat ditulis sebagai berikut (Suryanto, 2004) :

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + U(x,t)\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x^3} = 0 \qquad (2.16)$$

2.4 Kajian Al-Qur’an

Al-Qur’an berperan sebagai pedoman dan pembimbing manusia. Ayat-ayat di dalam Al-Qur’an menggambarkan alam raya dan seluruh isinya. Al-Qur’an menganjurkan manusia untuk mengamati alam raya melalui eksperimen dan menggunakan akal untuk memahami suatu fenomena. Pada fenomena gelombang air dangkal atau dapat disebut persamaan KdV, di dalam Al-Qur’an dikaji dalam surat Yunus ayat 22 yang berbunyi:

هُوَ ٱلَّذِي يُسَيِّرُكُمۡ فِي ٱلۡبَرِّ وَٱلۡبَحۡرِۖ حَتَّىٰٓ إِذَا كُنتُمۡ فِي ٱلۡفُلۡكِ وَجَرَيۡنَ بِهِم بِرِيحٖ طَيِّبَةٖ وَفَرِحُواْ بِهَا جَآءَتۡهَا رِيحٌ عَاصِفٞ وَجَآءَهُمُ ٱلۡمَوۡجُ مِن كُلِّ مَكَانٖ وَظَنُّوٓاْ أَنَّهُمۡ أُحِيطَ بِهِمۡ دَعَوُاْ ٱللَّهَ مُخۡلِصِينَ لَهُ ٱلدِّينَ لَئِنۡ أَنجَيۡتَنَا مِنۡ هَٰذِهِۦ لَنَكُونَنَّ مِنَ ٱلشَّٰكِرِينَ ٢٢

Artinya: Dialah Tuhan yang menjadikan kamu dapat berjalan di daratan, (berlayar) di lautan. Sehingga apabila kamu berada di dalam bahtera, dan meluncurlah bahtera itu membawa orang-orang yang ada di dalamnya dengan tiupan angin yang baik, dan mereka bergembira karenanya, datanglah angin badai, dan (apabila) gelombang dari segenap penjuru menimpanya, dan mereka yakin bahwa mereka telah terkepung (bahaya), maka mereka berdoa kepada Allah dengan mengikhlaskan ketaatan kepada-Nya semata-mata. (Mereka berkata): "Sesungguhnya jika Engkau menyelamatkan kami dari bahaya ini, pastilah kami akan termasuk orang-orang yang bersyukur".

Menurut Tafsir Ibnu Katsir, Allah selalu menjaga dan memelihari seluruh umat-Nya. Ketika umat-Nya berseru kepada Allah, umat-Nya tidak menyertakan suatu berhala atau suatu sekutu Allah (tidak menyekutukan Allah), mereka selalu meng-Esa kan Allah dan selalu berdoa serta berdzikir hanya untuk Allah. Secara implisit, pada ayat ini dijelaskan tentang terjadinya gelombang laut atau persamaan KdV yang dibangkitkan oleh angin yang kemudian disebut dengan gelombang angin. Gelombang yang disebabkan oleh gerakan angin dari arah manapun akan mempengaruhi arus air laut (Triatmodjo, 1999). Sesungguhnya gelombang, air dan angin diciptakan hanya untuk bertasbih kepada-Nya. Maka sebagai makhluk yang berakal, manusia harus selalu bersyukur atas apa yang diciptakan-Nya dan selalu mendekatkan diri kepada-Nya. Sesungguhnya Allah menciptakan alam raya ini hanya untuk bertasbih kepada-Nya.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Penyelesaian Persamaan KdV menggunakan Reduced Differential Transform Method

Persamaan KdV yang akan digunakan pada penelitian kali ini adalah :

$$u_t - 3(u^2)_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.1}$$

dengan nilai awal :

$$u(x,0) = f(x) \tag{3.2}$$

Berikut ini adalah langkah-langkah penyelesaian persamaan KdV menggunakan RDTM dengan nilai awal $u(x,0) = f(x)$ pada persamaan (3.2)

1. Mentransformasi persamaan (3.1) menggunakan definisi-definisi transformasi diferensial tereduksi. Berdasarkan transformasi diferensial tereduksi u_t memiliki bentuk transformasi $(k+1)U_{k+1}(x)$.

   Adapun bukti u_t memiliki transformasi $(k+1)U_{k+1}(x)$ adalah sebagai berikut :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x,t)\right]_{t=0} t^k$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\right)\right]_{t=0} t^k$$

$$u_t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\frac{\partial^1}{\partial t^1} u(x,t)\right)\right]_{t=0} t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(k-1)\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\frac{\partial^1}{\partial t^1} u(x,t)\right)\right]_{t=0} t^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} (k)! \left[\frac{\partial^{k+1}}{\partial t^{k+1}} u(x,t) \right]_{t=0} t^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)[U_{k+1}] t^k$$

$$= (k+1) U_{(k+1)}(x)$$

Maka, terbukti bahwa u_t memiliki trasnformasi $(k+1)U_{k+1}(x)$.

Kemudian akan dibuktikan bahwa transformasi dari (u^2) adalah $\sum_{r=0}^{k} U_r(x) U_{k-r}(x)$:

$$\big(u(x,t)\big)\big(u(x,t)\big) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)\, t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)\, t^k\right)$$

$$(u^2) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)\, t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)\, t^k\right)$$

$$= (U_0(x) + U_1(x)t + U_2(x)t^2 + \cdots)(U_0(x) + U_1(x)t$$

$$+ U_2(x)t^2 + \cdots)$$

$$= \Big(\big(U_0(x)U_0(x)\big) + \big(U_0(x)U_1(x)t\big) + \big(U_0(x)U_2(x)t^2\big)\Big)$$

$$+ \Big(\big(U_1(x)tU_0(x)\big) + \big(U_1(x)tU_1(x)t\big) + \big(U_1(x)tU_2(x)t^2\big)\Big)$$

$$+ \Big(\big(U_2(x)t^2U_0(x)\big) + \big(U_2(x)t^2U_1(x)t\,\big)$$

$$+ \big(U_2(x)t^2U_2(x)t^2\big)\Big) + \cdots$$

$$= \big(U_0(x)U_0(x)\big) + \big(U_0(x)U_1(x)t + U_1(x)tU_0(x)\big)$$

$$+ \big(U_0(x)U_2(x)t^2 + U_1(x)tU_1(x)t + U_2(x)t^2U_0(x)\big) + \cdots$$

$$= \big(U_0(x)U_0(x)\big) + \big(U_0(x)U_1(x) + U_1(x)U_0(x)\big)t$$

$$+ \big(U_0(x)U_2(x) + U_1(x)U_1(x) + U_2(x)U_0(x)\big)t^2 + \cdots$$

$$= \left(U_0(x)U_0(x)\right) + \left(U_0(x)U_1(x) + U_1(x)U_{k-r}(x)\right)t^k$$

$$+ \left(U_0(x)U_2(x) + U_r(x)U_{k-r}(x) + \cdots\right)t^k + \cdots$$

$$= \sum_{r=0}^{k} U_r(x)U_{k-r}(x)t^k$$

Maka terbukti bahwa fungsi transformasi dari (u^2) adalah $\sum_{r=0}^{k} U_r(x)U_{k-r}(x)$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa transformasi dari u_{xxx} adalah $\frac{\partial^3}{\partial x^3}U_k(x)$:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t)\right]_{t=0} t^k$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x,t)\right)\right]_{t=0} t^k$$

$$u_{xxx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t)\right)\right]_{t=0} t^k$$

$$= \frac{\partial^3}{\partial x^3}U_k(x)$$

Maka terbukti bahwa fungsi transformasi dari u_{xxx} adalah $\frac{\partial^3}{\partial x^3}U_k(x)$.

Tabel 3.1 Transformasi Persamaan KdV

Fungsi Awal	**Fungsi transformasi**
u_t	$(k+1)U_{k+1}(x)$
(u^2)	$\sum_{r=0}^{k} U_r(x)U_{k-r}(x)$
u_{xxx}	$\frac{\partial^3}{\partial x^3}U_k(x)$

Sehingga didapatkan bentuk transformasi untuk persamaan (3.1) adalah:

$$(k+1)U_{k+1}(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\sum_{r=0}^{k} U_r(x)U_{k-r}(x) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}U_k(x) \qquad (3.3)$$

2. Mentransformasi persamaan (3.2) menggunakan definisi 2.1 pada persamaan (2.1) sehingga didapatkan $U_0(x) = f(x)$

$$U_k(x) = \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t)\right]_{t=0}$$

$$U_0(x) = \frac{1}{0!}\left[\frac{\partial^0}{\partial t^0}f(x)\right]_{t=0}$$

$$= f(x) \qquad (3.4)$$

3. Menentukan nilai $U_k(x)$ menggunakan persamaan yang sudah ditransformasi ke dalam bentuk RDTM dengan mensubtitusi nilai $k = 0,1,2$ ...

a. Untuk $k = 0$ persamaan (3.3) menjadi :

$$U_1(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\left(U_0(x)\right)^2 - \frac{\partial^3}{\partial x^3}U_0(x) \tag{3.5}$$

Kemudian mensubstitusi persamaan (3.4) ke persamaan (3.5) sehingga diperoleh nilai $U_1(x)$ sebagai berikut :

$$U_1(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x)\right)^2 - \frac{\partial^3}{\partial x^3}f(x)$$

$$= 6f(x)\left(f'(x)\right) - \left(f'''(x)\right) \tag{3.6}$$

b. Untuk $k = 1$ persamaan (3.3) menjadi :

$$2U_2(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\left(2\left(U_0(x)U_1(x)\right)\right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(U_1(x)\right) \tag{3.7}$$

Kemudian mensubstitusi persamaan (3.4) dan (3.6) ke persamaan (3.7) sehingga diperoleh nilai $U_2(x)$ sebagai berikut :

$$2U_2(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\left(2\left(\left(f(x)\right)\left(6f(x)\left(f'(x)\right) - \left(f'''(x)\right)\right)\right)\right)$$

$$-\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(6f(x)\left(f'(x)\right) - \left(f'''(x)\right)\right)$$

$$U_2(x) = 18\left(f''(x)\right)f(x)^2 + 36f(x)\left(f'(x)\right)^2 - 9\left(f''(x)\right)^2$$

$$- 6f(x)(f^{(4)}(x) - 15\left(f'(x)\right)\left(f'''(x)\right)$$

$$+\frac{1}{2}f^{(6)}f(x) \tag{3.8}$$

Nilai $U_2(x)$ merupakan hasil simplify dari program Maple.

c. Untuk $k = 2$ persamaan (3.3) menjadi :

$$3U_3(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\left(U_1^2(x) + 2\big(U_0(x)U_2(x)\big)\right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(U_2(x)\right) \quad (3.9)$$

Kemudian mensubstitusi persamaan (3.4), (3.6) dan (3.8) ke persamaan (3.9) sehingga diperoleh nilai $U_3(x)$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
3U_3(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\Bigg(&\Big(6f(x)\big(f'(x)\big) - \big(f'''(x)\big)\Big)^2 \\
&+ 2\Bigg(\big(f(x)\big)\,(18\big(f''(x)\big)f(x)^2 + 36f(x)\big(f'(x)\big)^2 \\
&- 9\big(f''(x)\big)^2 \\
&- 6f(x)\left(f^{(4)}(x) - 15\big(f'(x)\big)\big(f'''(x)\big) + \frac{1}{2}f^{(6)}f(x)\right)\Bigg)\Bigg) \\
&- \frac{\partial^3}{\partial x^3}\Bigg(18\big(f''(x)\big)f(x)^2 + 36f(x)\big(f'(x)\big)^2 - 9\big(f''(x)\big)^2 \\
&- 6f(x)\left(f^{(4)}(x) - 15\big(f'(x)\big)\big(f'''(x)\big) + \frac{1}{2}f^{(6)}f(x)\right)\Bigg)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
U_3(x) = {} & 324\big(f'(x)\big)\big(f''(x)\big)f(x)^2 + 36f(x)^3\big(f'''(x)\big) \\
& + 216f(x)(f'(x))^3 - 18f(x)^2\left(f^{(5)}(x)\right) \\
& - 198\big(f'(x)\big)\big(f''(x)\big)^2 \\
& - 198f(x)\big(f''(x)\big)\big(f'''(x)\big) \\
& - 126\big(f'(x)\big)f(x)\left(f^{(4)}(x)\right) \\
& - 162\big(f'(x)\big)^2\big(f'''(x)\big) \\
& + 27\Bigg(f''(x)\left(f^{(5)}(x)\right) + 3f(x)\left(f^{(7)}(x)\right) \\
& + 42\left(f'''(x)\right)\left(f^{(4)}(x)\right) + 12\big(f'(x)\big)\left(f^{(6)}(x)\right) \\
& - \frac{1}{6}f^{(9)}(x)\Bigg)
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Nilai $U_3(x)$ merupakan hasil simplify dari program Maple.

Untuk k iterasi selanjutnya, langkah-langkah penyelesaian yang digunakan seperti pada poin a, b, dan c.

4. Langkah terakhir adalah menentukan nilai dari $u(x,t)$ menggunakan $\sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)\, t^k$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)\, t^k \\
&= U_0t^0 + U_1t^1 + U_2t^2 + U_3t^3 + \cdots \ldots \ldots
\end{aligned}
$$

$$= f(x) + [6f(x)(f'(x)) - (f'''(x))]t$$

$$+ \Big[18(f''(x))f(x)^2 + 36f(x)(f'(x))^2 - 9(f''(x))^2$$

$$- 6f(x)(f^{(4)}(x) - 15(f'(x))(f'''(x)) + \frac{1}{2}f^{(6)}f(x)\Big]t^2$$

$$+ \Big[324(f'(x))(f''(x))f(x)^2 + 36f(x)^3(f'''(x))$$

$$+ 216f(x)(f'(x))^3 - 18f(x)^2\left(f^{(5)}(x)\right)$$

$$- 198(f'(x))(f''(x))^2 - 198f(x)(f''(x))(f'''(x))$$

$$- 126(f'(x))f(x)\left(f^{(4)}(x)\right) - 162(f'(x))^2(f'''(x))$$

$$+ 27\left(f''(x)\left(f^{(5)}(x)\right) + 3f(x)\left(f^{(7)}(x)\right)\right.$$

$$+ 42\,(f'''(x))\left(f^{(4)}(x)\right) + 12(f'(x))\left(f^{(6)}(x)\right)$$

$$\left.- \frac{1}{6}f^{(9)}(x)\right)\Big]t^3 + \cdots \ldots \ldots$$

3.2 Penyelesaian Persamaan KdV menggunakan Reduced Differential Transform Method dengan Nilai Awal Pertama

Persamaan KdV yang akan digunakan pada penelitian kali ini adalah :

$$u_t - 3(u^2)_x + u_{xxx} = 0 \qquad (3.11)$$

dengan nilai awal :

$$u(x,0) = 6x \qquad (3.12)$$

Berikut ini adalah langkah-langkah penyelesaian persamaan KdV menggunakan RDTM dengan nilai awal pertama $u(x,0) = 6x$

1. Mentransformasi persamaan (3.11) menggunakan definisi-definisi transformasi diferensial tereduksi.

Tabel 3.2 Transformasi Persamaan KdV

Fungsi Awal	Fungsi transformasi
u_t	$(k+1)U_{k+1}(x)$
(u^2)	$\sum_{r=0}^{k} U_r(x)U_{k-r}(x)$
u_{xxx}	$\frac{\partial^3}{\partial x^3}U_k(x)$

Sehingga didapatkan bentuk transformasi untuk persamaan (3.11) adalah :

$$(k+1)U_{k+1}(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\sum_{r=0}^{k} U_r(x)U_{k-r}(x) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}U_k(x) \tag{3.13}$$

2. Mentransformasi persamaan (3.12) menggunakan definisi 2.1 pada persamaan (2.1) sehingga didapatkan :

$$U_0(x) = 6x \tag{3.14}$$

3. Menentukan nilai $U_k(x)$ menggunakan persamaan yang sudah ditransformasi ke dalam bentuk RDTM dengan mensubtitusi nilai $k = 0,1,2 \ldots$

   a. Untuk $k = 0$ persamaan (3.13) menjadi :

$$U_1(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\left(U_0(x)\right)^2 - \frac{\partial^3}{\partial x^3}U_0(x) \tag{3.15}$$

Kemudian mensubstitusi persamaan (3.14) ke persamaan (3.15) sehingga diperoleh nilai $U_1(x)$ sebagai berikut :

$$U_1(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}(6x)^2 - \frac{\partial^3}{\partial x^3}(6x)$$

$$= 3\frac{\partial}{\partial x}(36x^2) - 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(108x^2) - 0$$

$$= 216x \quad (3.16)$$

b. Untuk $k = 1$ persamaan (3.13) menjadi :

$$2U_2(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\left(2\big(U_0(x)U_1(x)\big)\right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}(U_1(x)) \quad (3.17)$$

Kemudian mensubstitusi persamaan (3.14) dan persamaan (3.16) ke persamaan (3.17) sehingga diperoleh nilai $U_2(x)$ sebagai berikut :

$$2U_2(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\big(2(6x)(216x)\big) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}(216x)$$

$$= 3\frac{\partial}{\partial x}(2592x^2) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}(216x)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(7776x^2) - 0$$

$$= 15552x$$

$$U_2(x) = 7776x \quad (3.18)$$

c. Untuk $k = 2$ persamaan (3.13) menjadi :

$$3U_3(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\left(U_1^2(x) + 2\big(U_0(x)U_2(x)\big)\right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}(U_2(x)) \quad (3.19)$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (3.14), persamaan (3.16) dan persamaan (3.18) ke persamaan (3.19) sehingga diperoleh nilai $U_3(x)$ sebagai berikut :

$$3U_3(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\left((216x)^2 + 2(6x)(7776x)\right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}(7776x)$$

$$= 3\frac{\partial}{\partial x}(46656x^2 + 93312x^2) - 0$$

$$= 3\frac{\partial}{\partial x}(139968x^2) - 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(419904x^2) - 0$$

$$= 839808x$$

$$U_3(x) = 279936x \tag{3.20}$$

d. Untuk $k = 3$ persamaan (3.13) menjadi :

$$4U_4(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(2\left(U_0(x)U_3(x)\right) + 2\left(U_1(x)U_2(x)\right)\right)\right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}(U_3(x)) \tag{3.21}$$

Kemudian mensubstitusi persamaan (3.14), persamaan (3.16), persamaan (3.18) dan persamaan (3.20) ke persamaan (3.21) sehingga diperoleh nilai $U_4(x)$ sebagai berikut :

$$4U_4(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(2(6x)(279936x)\right) + 2(216x)(7776x)\right)\right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}(279936x)$$

$$= 3\frac{\partial}{\partial x}(3359232x^2 + 3359232x^2) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}(279936x)$$

$$= 3\frac{\partial}{\partial x}(6718464x^2) - 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(20155392x^2) - 0$$

$$= 40310784x$$

$$U_4(x) = 10077696x \quad (3.22)$$

Untuk k iterasi selanjutnya, langkah-langkah penyelesaian yang digunakan seperti pada poin a, b, c, dan d.

4. Langkah terakhir adalah menentukan nilai dari $u(x,t)$ menggunakan $\sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)\, t^k$.

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)\, t^k$$

$$= U_0(x)t^0 + U_1(x)t^1 + U_2(x)t^2 + U_3(x)t^3 + U_4(x)t^4 + \cdots$$

$$= 6x + 216xt + 7776xt^2 + 279936xt^3 + 10077696xt^4 + \cdots$$

$$= 6x + 6^3xt + 6^5xt^2 + 6^7xt^3 + 6^9xt^4 + \cdots \quad (3.23)$$

Kemudian didapatkan pola untuk $u(x,t)$ adalah :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} 6^{2k+1}xt^k$$

Dari persamaan (3.23) didapatkan rasio sebesar :

$$r = \frac{6^3xt}{6x} = \frac{6^5xt^2}{6^3xt} = \frac{6^7xt^3}{6^5xt^2} = \frac{6^9xt^4}{6^7xt^3} = 6^2\mathrm{t} = 36\mathrm{t}$$

Maka, dengan menggunakan rumus dari jumlah deret geometri tak hingga (S_∞)

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

persamaan (3.23) menjadi seperti berikut :

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{6x}{1-36t}$$

Sehingga, persamaan (3.23) memiliki solusi

$$u(x,t) = \frac{6x}{1-36t}, \qquad |36t| < 1 \tag{3.24}$$

Selanjutnya, untuk mengetahui apakah persamaan (3.24) merupakan solusi eksak untuk persamaan (3.11) pada nilai awal (3.12), maka dilakukan pengecekan. Pengecekan dilakukan dengan cara mensubstitusi persamaan (3.24) ke persamaan (3.11) sehingga diperoleh :

$$u_t - 3(u^2)_x + u_{xxx} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{6x}{1-36t}\right) - 3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{6x}{1-36t}\right)^2 + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{6x}{1-36t}\right) = 0$$

$$\frac{216x}{(1-36t)^2} - 3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{36x^2}{(1-36t)^2}\right) + 0 = 0$$

$$\frac{216x}{(1-36t)^2} - 3\left(\frac{72x}{(1-36t)^2}\right) = 0$$

$$\frac{216x}{(1-36t)^2} - \frac{216x}{(1-36t)^2} = 0$$

$$0 = 0$$

Pengecekan selanjutnya yakni pengecekan kesesuaian persamaan (3.24) dengan nilai awal (3.12) dengan cara mensubstitusikan $t = 0$ pada persamaan (3.12) dan pada persamaan (3.24) sehingga diperoleh :

$$u(x,t) = \frac{6x}{1-36t}$$

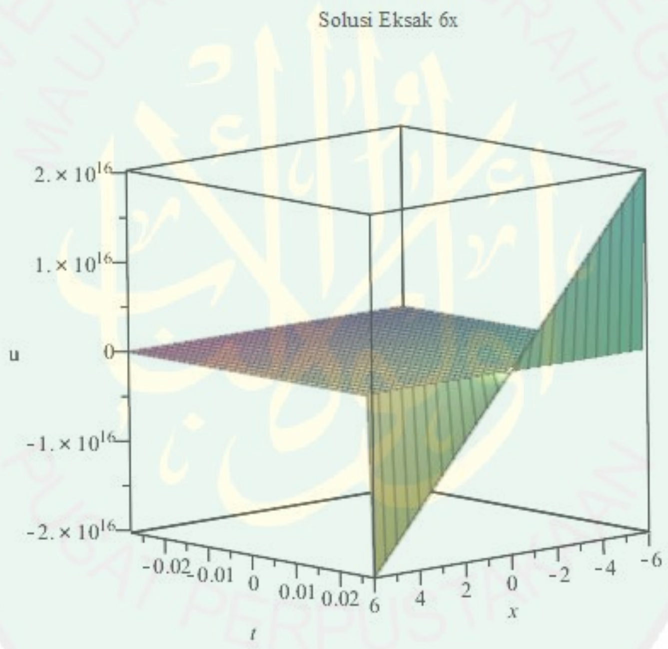
$$u(x,0) = \frac{6x}{1-36(0)}$$

$$u(x,0) = \frac{6x}{1}$$

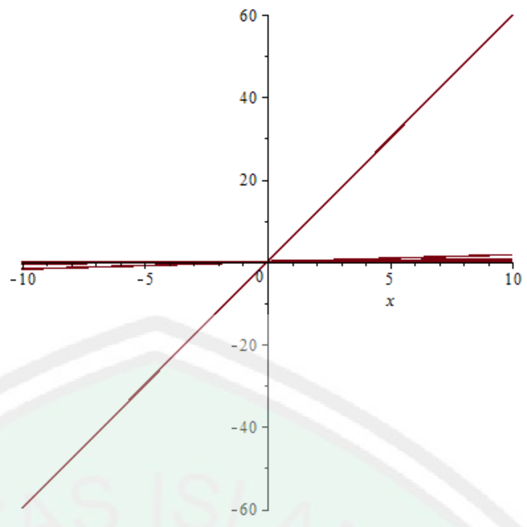
$$u(x,0) = 6x$$

Sehingga persamaan (3.24) merupakan solusi eksak untuk persamaan (3.11) dengan nilai awal pertama pada persamaan (3.12).

Berikut adalah simulasi dari solusi eksak persamaan Korteweg de-Vries dengan nilai awal pertama menggunakan metode transformasi diferensial tereduksi.



Gambar 3.1 Simulasi persamaan (3.24) dengan $-6 < x < 6$ dan $-\frac{1}{36} < t < \frac{1}{36}$



Gambar 3.2 Simulasi pergerakan persamaan (3.24)

Berdasarkan gambar 3.1, ketika $x = 0$ dan $u(x, 0) = 6x$ maka tinggi gelombang berada di 0. Keadaan gelombang untuk solusi $u(x,t) = \frac{6x}{1-36t}$ yakni gelombang akan bergerak naik seiring berjalannya x dan t. Puncak tertinggi gelombang yaitu berada di 2×10^{16}. Gambar 3.2 menunjukkan bahwa t pada solusi $u(x,t) = \frac{6x}{1-36t}$ berjalan dari 0 sampai 20. Garis-garis pada gambar 3.2 berputar seperti jarum jam seiring bertambahnya t.

3.3 Penyelesaian Persamaan KdV menggunakan Reduced Differential Transform Method dengan Nilai Awal Kedua

Persamaan KdV yang akan digunakan pada penelitian kali ini adalah :

$$u_t - 3(u^2)_x + u_{xxx} = 0 \tag{3.25}$$

dengan nilai awal :

$$u(x, 0) = -2\,\mathrm{sech}^2(x), \tag{3.26}$$

Berikut ini adalah langkah-langkah penyelesaian persamaan KdV menggunakan RDTM dengan nilai awal kedua $u(x, 0) = -2\,\mathrm{sech}^2(x)$.

1. Mentransformasi persamaan (3.25) menggunakan definisi-definisi transformasi diferensial tereduksi.

Tabel 3.3 Transformasi Persamaan KdV

Fungsi Awal	Fungsi Transformasi
u_t	$(k+1)U_{k+1}(x)$
(u^2)	$\sum_{r=0}^{k} U_r(x)U_{k-r}(x)$
u_{xxx}	$\frac{\partial^3}{\partial x^3}U_k(x)$

Sehingga didapatkan bentuk transformasi untuk persamaan (3.25) adalah :

$$(k+1)U_{k+1}(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\sum_{r=0}^{k} U_r(x)U_{k-r}(x) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}U_k(x) \quad (3.27)$$

2. Mentransformasi persamaan (3.26) menggunakan definisi 2.1 pada persamaan (2.1) sehingga didapatkan :

$$U_0(x) = -2\,\mathrm{sech}^2(x) \quad (3.28)$$

3. Menentukan nilai $U_k(x)$ menggunakan persamaan yang sudah ditransformasi ke dalam bentuk RDTM dengan mensubtitusi nilai $k = 0,1,2 \ldots$

   a. Untuk $k = 0$ persamaan (3.27) menjadi :

$$U_1(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\left(U_0(x)\right)^2 - \frac{\partial^3}{\partial x^3}U_0(x) \quad (3.29)$$

Kemudian mensubstitusi persamaan (3.28) ke persamaan (3.29) sehingga diperoleh nilai $U_1(x)$ sebagai berikut :

$$U_1(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\left(-2\,\mathrm{sech}^2(x)\right)^2 - \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(-2\,\mathrm{sech}^2(x)\right)$$

$$= 3\frac{\partial}{\partial x}\left(4\,\mathrm{sech}^2(x)\right) - (16\,\mathrm{sech}(x)^2\tanh(x)^3$$

$$- 32\,\mathrm{sech}(x)^2\tanh(x)\left(1-\tanh(x)^2\right)$$

$$= -48\,\mathrm{sech}(x)^4\tanh(x) - (16\,\mathrm{sech}(x)^2\tanh(x)^3$$

$$- 32\,\mathrm{sech}(x)^2\tanh(x)\left(1-\tanh(x)^2\right)$$

$$= -\frac{16\sinh(x)}{\cosh(x)^3} \tag{3.30}$$

Nilai $U_1(x)$ merupakan hasil simplify dari program Maple.

b. Untuk $k = 1$ persamaan (3.27) menjadi :

$$2U_2(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\left(2\left(U_0(x)U_1(x)\right)\right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(U_1(x)\right) \tag{3.31}$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (3.28) dan persamaan (3.30) ke persamaan (3.31) sehingga diperoleh nilai $U_2(x)$ sebagai berikut :

$$2U_2(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\left(2\left(-2\,\mathrm{sech}^2(x)\right)\left(-\frac{16\sinh(x)}{\cosh(x)^3}\right)\right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(-\frac{16\sinh(x)}{\cosh(x)^3}\right)$$

$$= 3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{64\sinh(x)}{\cosh(x)^5}\right) - \left(\frac{64(2\cosh(x)^4 - 15\cosh(x)^2 + 15)}{\cosh(x)^6}\right)$$

$$= \left(-\frac{192(4\cosh(x)^2 - 5)}{\cosh(x)^6}\right)$$

$$- \left(\frac{64(2\cosh(x)^4 - 15\cosh(x)^2 + 15)}{\cosh(x)^6}\right)$$

$$U_2(x) = -\frac{32(2\cosh(x)^2 - 3)}{\cosh(x)^4} \tag{3.32}$$

Nilai $U_2(x)$ merupakan hasil simplify dari program Maple.

c. Untuk $k = 2$ persamaan (3.27) menjadi :

$$3U_3(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\left(U_1^2(x) + 2\big(U_0(x)U_2(x)\big)\right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}(U_2(x)) \tag{3.33}$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (3.28), persamaan (3.30), dan persamaan (3.32) ke persamaan (3.33) sehingga diperoleh nilai $U_3(x)$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned} 3U_3(x) = {} & \\ & 3\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(-\frac{16\sinh(x)}{\cosh(x)^3}\right)^2 \right. \\ & \left. + 2\left((-2\operatorname{sech}^2(x))\left(-\frac{32(2\cosh(x)^2 - 3)}{\cosh(x)^4}\right)\right)\right) \\ & - \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(-\frac{32(2\cosh(x)^2 - 3)}{\cosh(x)^4}\right) \\ & = 3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{128(4\cosh(x)^2 - 5)}{\cosh(x)^6}\right) \\ & - \left(\frac{256\sinh(x)\,(2\cosh(x)^4 - 30\cosh(x)^2 + 45)}{\cosh(x)^7}\right) \\ & = \left(-\frac{768\sinh(x)\,(8\cosh(x)^2 - 15)}{\cosh(x)^7}\right) \\ & - \left(\frac{256\sinh(x)\,(2\cosh(x)^4 - 30\cosh(x)^2 + 45)}{\cosh(x)^7}\right) \end{aligned}$$

$$U_3(x) = -\frac{512}{3}\frac{\sinh(x)\,(\cosh(x)^2 - 3)}{\cosh(x)^5} \tag{3.34}$$

Nilai $U_3(x)$ merupakan hasil simplify dari program Maple

d. Untuk $k = 3$ persamaan (3.27) menjadi :

$$4U_4(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(2\big(U_0(x)U_3(x)\big) + 2\big(U_1(x)U_2(x)\big)\right)\right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}(U_3(x)) \tag{3.35}$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (3.28), persamaan (3.30), persamaan (3.32) dan persamaan (3.34) ke persamaan (3.35) sehingga diperoleh nilai $U_4(x)$ sebagai berikut:

$$4U_4(x) =$$

$$3\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(2(-2\,\mathrm{sech}^2(x))\left(-\frac{512}{3}\frac{\sinh(x)\,(\cosh(x)^2 - 3)}{\cosh(x)^5}\right)\right)\right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{-16\sinh(x)}{\cosh(x)^3}\right)\left(-\frac{32\,(2\cosh(x)^2 - 3)}{\cosh(x)^4}\right)\right)$$
$$-\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(-\frac{512}{3}\frac{\sinh(x)\,(\cosh(x)^2 - 3)}{\cosh(x)^5}\right)$$

$$= 3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1024}{3}\frac{\sinh(x)\,(8\cosh(x)^2 - 15)}{\cosh(x)^7}\right)$$

$$-\frac{1024}{3}\frac{4\cosh(x)^6 - 126\cosh(x)^4 + 420\cosh(x)^2 - 315}{\cosh(x)^8}$$

$$= \left(-\frac{1024}{3}\frac{(32\cosh(x)^4 - 130\cosh(x)^2 + 105)}{\cosh(x)^8}\right)$$

$$-\left(\frac{1024}{3}\frac{4\cosh(x)^6 - 126\cosh(x)^4 + 420\cosh(x)^2 - 315}{\cosh(x)^8}\right)$$

$$U_4(x) = -\frac{512}{3}\frac{2\cosh(x)^4 - 15\cosh(x)^2 + 15}{\cosh(x)^6} \quad (3.36)$$

Nilai $U_4(x)$ merupakan hasil simplify dari program Maple.

e. Untuk $k = 4$ persamaan (3.27) menjadi :

$$5U_5(x) = 3\frac{\partial}{\partial x}\Big(\big(2(U_0(x))(U_4(x)) + 2(U_1(x))(U_3(x)) + (U_2(x))^2\big)\Big) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}(U_4(x)) \quad (3.37)$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (3.28), persamaan (3.30), persamaan (3.32), persamaan (3.34) dan persamaan (3.36) ke persamaan (3.37) sehingga diperoleh nilai $U_5(x)$ sebagai berikut:

$$5U_5(x) =$$

$$3\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(2(-2\,\mathrm{sech}^2(x))\left(-\frac{512}{3}\frac{2\cosh(x)^4 - 15\cosh(x)^2 + 15}{\cosh(x)^6}\right) + 2\left(\frac{-16\sinh(x)}{\cosh(x)^3}\right)\left(-\frac{512}{3}\frac{\sinh(x)\,(\cosh(x)^2 - 3)}{\cosh(x)^5}\right) + \left(-\frac{32(2\cosh(x)^2 - 3)}{\cosh(x)^4}\right)^2\right)\right) - \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(-\frac{512}{3}\frac{2\cosh(x)^4 - 15\cosh(x)^2 + 15}{\cosh(x)^6}\right)$$

$$= 3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1024}{3}\frac{32\cosh(x)^4 - 130\cosh(x)^2 + 105}{\cosh(x)^8}\right)$$

$$-\frac{8192}{3}\frac{\sinh(x)\,(\cosh(x)^6 - 63\cosh(x)^4 + 315\cosh(x)^2 - 315)}{\cosh(x)^9}$$

$$= \left(-\frac{4096\sinh(x)\,(32\cosh(x)^4 - 195\cosh(x)^2 + 210)}{\cosh(x)^9}\right)$$

$$- \left(\frac{8192}{3}\frac{\sinh(x)\,(\cosh(x)^6 - 63\cosh(x)^4 + 315\cosh(x)^2 - 315)}{\cosh(x)^9}\right)$$

$$U_5(x) = -\frac{4096}{15}\frac{\sinh(x)\,(2\cosh(x)^4 - 30\cosh(x)^2 + 45)}{\cosh(x)^7} \quad (3.38)$$

Nilai $U_5(x)$ merupakan hasil simplify dari program Maple

Untuk k iterasi selanjutnya, langkah-langkah penyelesaian yang digunakan seperti pada poin a, b, c, d dan e.

4. Langkah terakhir adalah menentukan nilai dari $u(x,t)$ menggunakan $\sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)t^k$

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)\,t^k$$

$$= U_0(x)t^0 + U_1(x)t^1 + U_2(x)t^2 + U_3(x)t^3 + U_4(x)t^4 + U_5(x)t^5 \ldots$$

$$= [-2\,\mathrm{sech}^2(x)] + \left[-\frac{16\sinh(x)}{\cosh(x)^3}\right]\mathrm{t}$$

$$+ \left[-\frac{32(2\cosh(x)^2 - 3)}{\cosh(x)^4}\right]\mathrm{t}^2$$

$$+ \left[-\frac{512}{3}\frac{\sinh(x)\,(\cosh(x)^2 - 3)}{\cosh(x)^5}\right]\mathrm{t}^3$$

$$+ \left[-\frac{512}{3}\frac{2\cosh(x)^4 - 15\cosh(x)^2 + 15}{\cosh(x)^6}\right]\mathrm{t}^4$$

$$+ \left[-\frac{4096}{15}\frac{\sinh(x)\,(2\cosh(x)^4 - 30\cosh(x)^2 + 45)}{\cosh(x)^7}\right]\mathrm{t}^5 \quad (3.39)$$

$$+ \cdots \ldots$$

Kemudian didapatkan pola untuk $u(x,t)$ sebagai berikut :

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-4)^k}{k!} \frac{d^k U_0(x)}{dx^k} t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k U_0(x)}{dx^k} (-4)^k t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k U_0(x)}{dx^k} (-4t)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} U_0^{(k)}(x)(-4t)^k \tag{3.40}$$

Dimana $U_0^{(k)}(x) = \frac{d^k U_0(x)}{dx^k}$.

Dengan memperhatikan deret Taylot berikut :

$$f(x+a) = f(x) + f'(x)(a) + \frac{1}{2!} f''(x)(a)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(x)(a)^3 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(a)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(a)^k \tag{3.41}$$

Persamaan (3.40) dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan (3.41) dengan $f(x) = U_0(x)$ dan $a = -4t$, sehingga dapat diperoleh :

$$u(x,t) = U_0(x-4t) \tag{3.42}$$

Jika diberikan $U_0(x) = -2\,\mathrm{sech}^2(x)$ maka dapat diperoleh :

$$U_0(x-4t) = -2\,\mathrm{sech}^2(x-4t)$$

Sehingga, berdasarkan persamaan (3.42) didapatkan :

$$u(x,t) = -2\,\mathrm{sech}^2(x-4t) \tag{3.43}$$

Selanjutnya, untuk mengetahui apakah persamaan (3.43) merupakan solusi eksak untuk persamaan (3.25) pada nilai awal (3.26), maka dilakukan pengecekan. Pengecekan dilakukan dengan cara mensubstitusi persamaan (3.43) ke persamaan (3.25) sehingga diperoleh :

$$u_t - 3(u^2)_x + u_{xxx}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(-2\,\mathrm{sech}^2(x-4t)) - 3\frac{\partial}{\partial x}(-2\,\mathrm{sech}^2(x-4t))^2$$
$$+ \frac{\partial^3}{\partial x^3}(-2\,\mathrm{sech}^2(x-4t))$$

$$= 16\,\mathrm{sech}(-x+4t)^2\tanh(-x+4t) - 3(16\,\mathrm{sech}(-x+4t)^4\tanh(-x+4t))$$
$$+ (-16\,\mathrm{sech}(-x+4t)^2\tanh(-x+4t)^3$$
$$- 32\,\mathrm{sech}(-x+4t)^2\tanh(-x+4t)(-1+\tanh(-x+4t)^2)$$

$$= 16\,\mathrm{sech}(-x+4t)^2\tanh(-x+4t) - 48\,\mathrm{sech}(-x+4t)^4\tanh(-x+4t)$$
$$+ (-16\,\mathrm{sech}(-x+4t)^2\tanh(-x+4t)^3$$
$$- 32\,\mathrm{sech}(-x+4t)^2\tanh(-x+4t)(-1+\tanh(-x+4t)^2)$$

$$= \left(\frac{16\sinh(-x+4t)}{\cosh(-x+4t)^3}\right) - \left(\frac{48\sinh(-x+4t)}{\cosh(-x+4t)^5}\right)$$
$$+ \left(-\frac{16\sinh(-x+4t)\,(\cosh(-x+4t)^2-3)}{\cosh(-x+4t)^5}\right)$$

$$= \left(\frac{16\sinh(-x+4t)\,(\cosh(-x+4t)^2-3)}{\cosh(-x+4t)^5}\right)$$
$$+ \left(-\frac{16\sinh(-x+4t)\,(\cosh(-x+4t)^2-3)}{\cosh(-x+4t)^5}\right)$$

$$= 0$$

Pengecekan selanjutnya yakni pengecekan kesesuaian persamaan (3.43) dengan nilai awal (3.26) dengan cara mensubstitusikan $t = 0$ pada persamaan (3.26) dan pada persamaan (3.43) sehingga diperoleh :

$$u(x,t) = -2\,\mathrm{sech}^2(x - 4t)$$

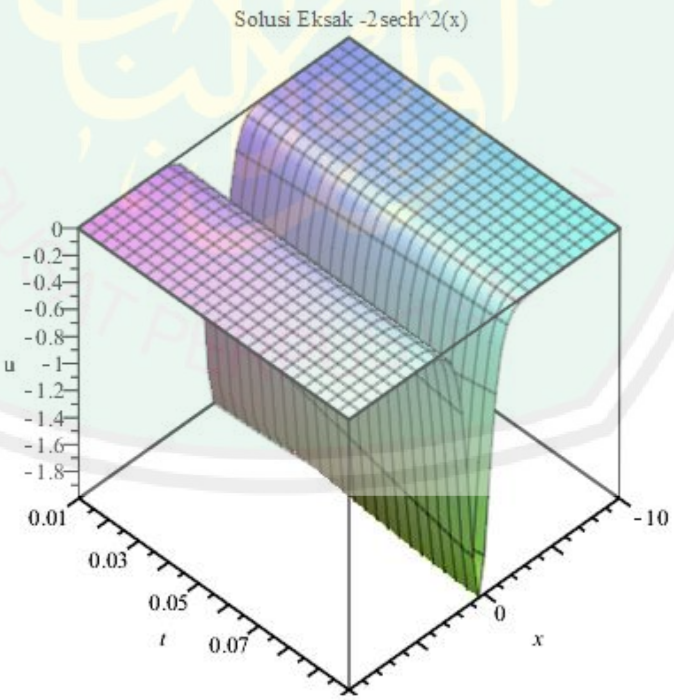
$$u(x,0) = -2\,\mathrm{sech}^2\big(x - 4(0)\big)$$

$$u(x,0) = -2\,\mathrm{sech}^2(x - 0)$$

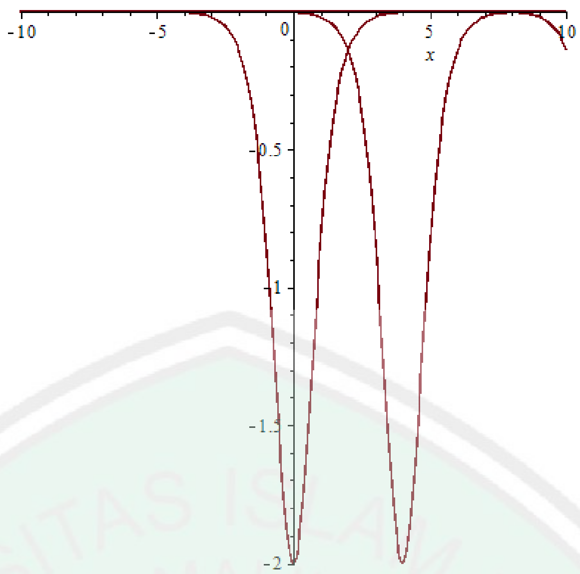
$$u(x,0) = -2\,\mathrm{sech}^2(x)$$

Sehingga persamaan (3.43) merupakan solusi eksak untuk persamaan (3.25) dengan nilai awal kedua pada persamaan (3.26).

Berikut adalah simulasi solusi eksak dari persamaan Korteweg de-Vries dengan nilai awal kedua menggunakan metode transformasi diferensial tereduksi.



Gambar 3.3 Simulasi persamaan (3.43) dengan $-10 < x < 10$ dan $0.01 < t < 0.1$



Gambar 3.4 Simulasi pergerakan persamaan (3.43)

Berdasarkan gambar 3.3, ketika $x = 0$ dan $u(x, 0) = -2\,\mathrm{sech}^2(x)$ maka tinggi gelombang berada di 0. Keadaan gelombang untuk solusi $u(x, t) = -2\,\mathrm{sech}^2(x - 4t)$ yakni gelombang akan menurun seiring berjalannya x dan t. Puncak terendah gelombang yaitu berada di -2. Gambar 3.4 menunjukkan bahwa t pada solusi $u(x, t) = -2\,\mathrm{sech}^2(x - 4t)$ berjalan dari 0 sampai 20. Garis-garis pada gambar 3.4 berjalan dari kiri ke kanan seiring bertambahnya t.

BAB IV

KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa :

1. Persamaan KdV dengan dua nilai awal dapat diselesaikan menggunakan metode transformasi diferensial tereduksi (RDTM). Langkah-langkah penyelesaian menggunakan metode transformasi diferensial tereduksi yaitu mentransformasi persamaan KdV menggunakan bentuk transformasi diferensial tereduksi, kemudian mentransformasi nilai awal menggunakan definisi dari metode transformasi diferensial tereduksi, dilanjutkan dengan menentukan nilai $U_k(x)$ menggunakan persamaan yang sudah ditransformasi dengan mensubstitusikan nilai $k = 0,1,2,3, \ldots$ dan diakhiri dengan menentukan nilai dari $u(x,t)$ menggunakan $\sum_{k=0}^{\infty} U_k\,(x)t^k$.
2. Solusi untuk penyelesaian persamaan KdV dengan nilai awal $u(x,0) = f(x)$ adalah :

$$u(x,t) = f(x) + [6f(x)(f'(x)) - (f'''(x))]t$$
$$+ \left[18(f''(x))f(x)^2 + 36f(x)(f'(x))^2 - 9(f''(x))^2\right.$$
$$\left. - 6f(x)(f^{(4)}(x) - 15(f'(x))(f'''(x)) + \frac{1}{2}f^{(6)}f(x)\right]t^2$$
$$+ \left[324(f'(x))(f''(x))f(x)^2 + 36f(x)^3(f'''(x))\right.$$
$$+ 216f(x)(f'(x))^3 - 18f(x)^2\left(f^{(5)}(x)\right)$$
$$- 198(f'(x))(f''(x))^2 - 198f(x)(f''(x))(f'''(x))$$
$$- 126(f'(x))f(x)\left(f^{(4)}(x)\right) - 162(f'(x))^2(f'''(x))$$
$$+ 27\left(f''(x)\left(f^{(5)}(x)\right) + 3f(x)\left(f^{(7)}(x)\right)\right.$$
$$+ 42\left(f'''(x)\right)\left(f^{(4)}(x)\right) + 12(f'(x))\left(f^{(6)}(x)\right)$$
$$\left.\left. - \frac{1}{6}f^{(9)}(x)\right)\right]t^3 + \cdots \ldots \ldots$$

3. Solusi untuk penyelesaian persamaan KdV dengan nilai awal pertama $u(x,0) = 6x$ adalah :

$$u(x,t) = \frac{6x}{1-36t}$$

4. Solusi untuk penyelesaian persamaan KdV dengan nilai awal kedua $u(x,0) = -2\,\mathrm{sech}^2(x)$ adalah :

$$u(x,t) = -2\,\mathrm{sech}^2(x-4t)$$

4.2 Saran

Bagi peneliti selanjutnya, penulis menyarankan untuk menggunakan metode transformasi diferensial tereduksi pada penyelesaian persamaan gelombang nonlinier yang lain, atau dapat menggunakan metode lain untuk penyelesaian persamaan KdV.

DAFTAR PUSTAKA

Abazari, Reza., Abazari, Malek., (2013). *Numerical Study of Burgers-Huxley Equations via Reduced Differential Transform Method.* Jurnal Springer, 32:1-17.

Hidayati. 1999. *Interaksi Dalam Solusi Soliton Teori Medan Affine Toda.* Percikan. Vol 19. Hal 81-90.

Hidayati. 2006. *Model Analitik Persamaan Gelombang Nonlinier J.S Russell dan Solusinya melalui Transformasi backlund.* Padang: Universitas Negeri Padang.

N. Taghizadeh. (2017). *Reduced Differential Transform Method for Solving Parabolic-like and Hyperbolic-like equations.* Jurnal Springer, Vol 74:559-567.

Suryanto, A. 2004. *Pemodelan Matematika.* Universitas Brawijaya.

Triatmodjo, B. 1999. *Teknik Pantai.* Beta offset. Yogyakarta.

Y, Keskin., Sema, Servi., dkk. (2011). *Reduced Differential Transform Method for Solving Klein Gordon Equations.* Proceedings of The World Congress on Engineering. Vol 1.

Y, Keskin., G, Oturanc. (2010). *Reduced Differential Transform Method for Solving Linear and Nonlinear Wave Equations.* Iranian Journal of Science & Technology. Vol 34. No A2.

RIWAYAT HIDUP

Rina Setyawati, lahir di Malang pada tanggal 13 Oktober 1997, biasa dipanggil Rina. Adik dari Rini Ahya Kurniati dan Trisnawati dan juga merupakan kakak dari Lidya Nur Aini Mai Sharoh merupakan anak ketiga dari 4 bersaudara pasangan dari bapak Poniran dan ibu Mahmudah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SD Negeri 02 Girimoyo Karangploso, Malang dan lulus pada tahun 2010. Setelah itu dia melanjutkan sekolah di SMP Negeri 01 Karangploso, Malang dan lulus pada tahun 2013. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMA Negeri 02 Batu dan lulus pada tahun 2016. Selanjutnya pada tahun yang sama dia melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang Jurusan Matematika Murni dan tinggal di Jl. Kauman 1 No 47 RT 04 RW 01 Girimoyo Karangploso Malang. Selama menjadi mahasiswa dia juga aktif dalam organisasi intra yakni Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) dan asisten laboratorium.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Rina Setyawati
NIM : 16610090
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Persamaan *Korteweg de-Vries* Menggunakan *Reduced Differential Transform Method* (RDTM)
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M. Si
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M. Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	30 Oktober 2019	Konsultasi Bab I, II, & III	1.
2.	01 November 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	2.
3.	05 Februari 2020	Pembenahan Bab I, II, III	3.
4.	04 Maret 2020	Pengecekan Bab III	4.
5.	12 Maret 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan	5.
6.	22 Maret 2020	Pembenahan Bab III	6.
7.	26 April 2020	Konsultasi Abstrak	7.
8.	30 April 2020	ACC Keseluruhan	8.
9.	03 Mei 2020	ACC Abstrak	9.
10.	04 Mei 2020	ACC Kajian Keagamaan	10.
11.	16 Mei 2020	ACC Keseluruhan	11.

Malang, 16 Mei 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001