

**PENERAPAN METODE GARIS DAN METODE RUNGE KUTTA ORDE-4
PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFUSI**

SKRIPSI

**OLEH
IQBALIA ILHAM PRADINI PUTRI
NIM. 16610068**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**PENERAPAN METODE GARIS DAN METODE RUNGE KUTTA ORDE-4
PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFUSI**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Iqbalia Ilham Pradini Putri
NIM. 16610068**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**PENERAPAN METODE GARIS DAN METODE RUNGE KUTTA ORDE-4
PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFUSI**

SKRIPSI

Oleh
Iqbalia Ilham Pradini Putri
NIM. 16610068

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 28 Maret 2020

Pembimbing I,



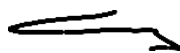
Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP.19810502 200501 1 004

Pembimbing II,



Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIP.19900511 20160801 1 057

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

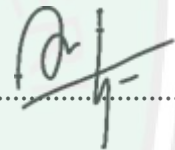
**PENERAPAN METODE GARIS DAN METODE RUNGE KUTTA ORDE-4
PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFUSI**

SKRIPSI

Oleh
Iqbalia Ilham Pradini Putri
NIM. 16610068

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 8 Mei 2020

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Si

.....


Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

.....

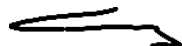

Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si

.....


Anggota Penguji : Muhammad Khudzaifah, M.Si

.....


Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Iqbalia Ilham Pradini Putri

NIM : 16610068

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : penerapan metode garis dan metode runge kutta orde-4 pada penyelesaian persamaan difusi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencamtumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Maret 2020

Yang membuat pernyataan,



Iqbalia Ilham Pradini P

NIM. 16610068

MOTO

“gantungkan cita-citamu setinggi langit! Bermimpilah setinggi langit. Jika engkau jatuh, engkau akan jatuh di antara bintang – bintang”

(Ir. Soekarno)



PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt penulis persembahkan Skripsi ini
kepada:

Orang tua penulis Bapak Eko Novianto dan Ibu Siti Ainiyah yang selalu
menyebutkan penulis dalam doanya, yang selalu memberikan semangat serta
kasih sayang tak ternilai,serta untuk adik penulis,Raihan Naffi Bahirroh yang
selalu menjadi kebanggaan bagi penulis.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Bapak Mohammad Jamhuri, M.si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.
5. Bapak Muhammad Khudzaifah, M.si. selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Ibu Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd selaku dosen wali yang selalu memberikan motivasi dan arahan kepada penulis.
7. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam proses perkuliahan.
8. Bapak dan Ibu serta adik tercinta yang selalu memberikan do'a, semangat dan motivasi demi keberhasilan penulis.
9. Teman – teman Jurusan Matematika angkatan 2016, khususnya sahabat “ngiler’s” (Sely Ayu Rahmasai, Talitha Nariswari Farendra, Arina Fitri Rozani, Mega Putri Sriutari, Alfu Alfinnikmah, Lailatul Maziyah Wildan Mufaridho, Rutbah, Istiqomah Putri Salsabil, Hadi, dan Misbah Fahamsyah), serta teman-teman terapan (Rina Setyawati, Hellyatus Saadah, dan Soimahtul Maghfiroh)
10. Sahabat dan teman-teman (Anggie Devi Hariyanti, Devi Resmitasari Pratiwi, Nailly Rofidah, dan Aris Maulana Iskhaq) terima kasih untuk bantuan dan canda tawa yang telah kita lewati bersama.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

Malang, 27 Maret 2020

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR..... vi

DAFTAR ISI..... viii

DAFTAR GAMBAR.....x

DAFTAR TABEL xi

ABSTRAK xii

ABSTRACS xiii

المخلص xiv

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang1

1.2 Rumusan Masalah.....4

1.3 Tujuan Penelitian4

1.4 Manfaat Penelitian5

1.5 Batasan Masalah5

1.6 Metode Penelitian5

1.7 Sistematika Penelitian.....6

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Difusi8

2.2 Metode Beda Hingga12

2.3 Metode Runge Kutta Orde 4.....13

2.4 Metode Garis.....14

2.5 Galat.....15

2.6	Kajian Agama	16
-----	--------------------	----

BAB III PEMBAHASAN

3.1	Penerapan Metode Garis Dan Metode Runge Kutta Orde-4 Pada Penyelesaian Persamaan Difusi	18
3.1.1	Penyelesaian Penerapan Metode Garis Dan Metode Runge Kutta Orde-4 Pada Penyelesaian Persamaan Difusi	21
3.2	Galat yang Dihasilkan Penerapan Metode Garis Dan Metode Runge Kutta Orde-4 Pada Penyelesaian Persamaan Difusi	31

BAB IV PENUTUP

4.1	Kesimpulan	47
4.2	Saran	47

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Solusi Eksak Persamaan difusi	12
Gambar 3.1	Simulasi Ketiga Solusi Numerik Persamaan Difusi	27
Gambar 3.2	Simulasi Kedua Solusi Numerik Persamaan Difusi	29
Gambar 3.3	Simulasi ketiga Solusi Numerik Persamaan Difusi	30
Gambar 3.4	Simulasi Pertama Solusi Eksak Persamaan Difusi	33
Gambar 3.5	Galat pada saat $t = 0,2$ dengan $\Delta t = 0,2$	34
Gambar 3.6	Galat pada saat $t = 0,4$ dengan $\Delta t = 0,2$	35
Gambar 3.7	Hasil Galat Simulasi Pertama Solusi Persamaan Difusi	35
Gambar 3.8	Simulasi Kedua Solusi Eksak Persamaan Difusi	37
Gambar 3.9	Galat pada saat $t = 0,2$ dengan $\Delta t = 0,1$	38
Gambar 3.10	Galat pada saat $t = 0,4$ dengan $\Delta t = 0,1$	39
Gambar 3.11	Hasil Galat Simulasi Kedua Solusi Persamaan Difusi saat Δt dan Δx diperkecil	40
Gambar 3.12	Simulasi Ketiga Solusi Eksak Persamaan Difusi	41
Gambar 3.13	Galat pada saat $t = 0,2$ dengan $\Delta t = 0,01$	43
Gambar 3.14	Galat pada saat $t = 0,4$ dengan $\Delta t = 0,01$	43
Gambar 3.15	Hasil Galat Simulasi Ketiga Solusi Persamaan Difusi saat Δt dan Δx diperkecil	44

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Turunan Metode Beda Hingga	13
Tabel 3.1	Simulasi Pertama Solusi Numerik Persamaan Difusi dengan Menggunakan Metode Garis.....	27
Tabel 3.2	Simulasi Kedua Solusi Numerik Persamaan Difusi dengan Menggunakan Metode Garis.....	28
Tabel 3.3	Simulasi Ketiga Solusi Numerik Persamaan Difusi dengan Menggunakan Metode Garis.....	30
Tabel 3.4	Simulasi Pertama Solusi Eksak Persamaan Difusi dengan Menggunakan Metode Garis.....	32
Tabel 3.5	Perbandingan Gambar Solusi Numerik dan Solusi Eksak Pada Simulasi Pertama Persamaan Difusi dengan Menggunakan Metode Garis.....	33
Tabel 3.6	Hasil Galat Simulasi Pertama Persamaan Difusi dengan Menggunakan Metode Garis.....	34
Tabel 3.7	Simulasi Kedua Solusi Eksak Persamaan Difusi dengan Menggunakan Metode Garis.....	36
Tabel 3.8	Perbandingan Gambar Solusi Numerik dan Solusi Eksak Pada Simulasi Kedua Persamaan Difusi dengan Menggunakan Metode Garis.....	37
Tabel 3.9	Hasil Galat Simulasi Kedua Persamaan Difusi dengan Menggunakan Metode Garis.....	38
Tabel 3.10	Simulasi Ketiga Solusi Eksak Persamaan Difusi dengan Menggunakan Metode Garis.....	40
Tabel 3.11	Perbandingan Gambar Solusi Numerik dan Solusi Eksak Pada Simulasi Ketiga Persamaan Difusi dengan Menggunakan Metode Garis.....	42
Tabel 3.12	Hasil Galat Simulasi Ketiga Persamaan Difusi Dengan Menggunakan Metode Garis.....	42
Tabel 3.13	Perbandingan Galat Ketiga Simulasi.....	45

ABSTRAK

Putri, Iqbalia Ilham Pradini. 2020. **Penerapan Metode Garis Dan Metode Runge Kutta Orde-4 Pada Penyelesaian Persamaan Difusi**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.si (II) Muhammad Khudzaifah, M.si.

Kata Kunci:metode garis, metode Runge-Kutta, persamaan difusi

Persamaan Difusi merupakan persamaan differensial parsial yang menggambarkan peristiwa berpindahnya suatu zat dalam pelarut dari bagian berkonsentrasi tinggi ke bagian berkonsentrasi rendah. Penelitian ini membahas penerapan metode garis dan metode runge kutta orde-4 pada penyelesaian persamaan difusi. Metode garis digunakan untuk menyelesaikan solusi numerik pada persamaan difusi. Metode ini mempresentasikan bentuk persamaan differensial parsial kedalam bentuk sistem persamaan differensial biasa yang ekuivalen pada bentuk persamaan differensial parsialnya. Langkah yang dilakukan adalah pertama, menyelesaikan persamaan difusi dengan menggunakan metode garis yaitu mengganti turunan ruang dengan metode beda hingga pusat, sehingga diperoleh sistem persamaan differensial biasa, kemudian diubah bentuk menjadi matriks. Kedua, menyelesaikan sistem persamaan differensial biasa dengan menggunakan metode Runge Kutta orde empat. Menghitung galat yang dihasilkan dengan mengurangkan hasil dari solusi numerik dan solusi eksaknya. Galat yang dihasilkan pada metode ini sangat kecil atau mendekati nol, sehingga dapat disimpulkan bahwa metode garis baik untuk menyelesaikan persamaan difusi.

ABSTRACTS

Putri, Iqbalia Ilham Pradini. 2020. **Application of Method of Line and 4th Order Runge Kutta Method in Solving Diffusion Equation.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisor: (I) Mohammad Jamhuri, M.si (II) Muhammad Khudzaifah, M.si.

Keyword: Diffusion equation, method of lines, Runge-Kutta method

The diffusion equation is a partial differential equation that describes the movement of a substance in a solvent from the high concentration to the low concentration. This study discusses the application of method of line and 4th order Runge Kutta method in solving diffusion equation. The line method is used to solve numerical solutions in diffusion equations. This method represents the form of partial differential equation into the form of ordinary differential equation system which is equivalent to the form of partial differential equation. The first step is to solve the diffusion equation using the line method, which means replacing the derivative of space with a central finite-difference method, thus the ordinary differential equation system is obtained, then transformed into a matrix. Secondly, solve the ordinary differential equation system with the 4th order Runge Kutta method. Calculate the resulting error by reducing the result from the numerical solution and the exact solution. The error generated in this method is very small or close to zero, so it can be concluded that the line method is proper for solving the diffusion equation.

المخلص

فوتري، إقباليا إلهام فراديني، ٢٠٢٠. تنفيذ طريقة الخط والترتيب الرابع طريقة رونج كوتا على رتبت الرابعة بحث جامعي كوتا في حل معادلة الانتشار . شعبت الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم في مالانج. المشرف: (١) محمد جمهوري، الماجستير ، (٢) محمد خضيفة، الماجستير .

الكلمات الرئيسية: طريقة الخط، طريقة رانج كوتا ، معادلة الانتشار

معادلة الانتشار هي معادلة تفاضلية جزئية تصف حدث انتقال مادة في مذيب من الجزء عالي التركيز إلى الجزء المنخفض التركيز. تبحث هذا البحث عن تنفيذ طريقة الخط والترتيب الرابع طريقة رونج كوتا على رتبت الرابعة بحث جامعي كوتا في حل معادلة الانتشار. يتم استخدام طريقة الخط لحل العددية لمعادلة الانتشار. تقدم هذه الطريقة شكل معادلة التفاضلية الجزئية في شكل نظام معادلة التفاضلية العادية تعادل شكل معادلة التفاضلية الجزئية. الخطوة الأولى هي اتمام معادلة الانتشار باستخدام طريقة الخط يعني استبدال المشتق بطريقة الاختلاف إلى المركز، ليتم الحصول على نظام معادلة التفاضلية العادية، ثم تحويلها إلى مصفوفة. الخطوة الثانية، حل نظام المعادلة التفاضلية العادي باستخدام طريقة رانج كوتا الرابعة. حساب الخطأ الناتج بطرح النتائج من حل عددي وحل تحليلي. الخطأ الناتج من هذه الطريقة صغيراً جداً أو قريباً من الصفر، لذلك يمكن الاستنتاج أن طريقة الخط جيدة لحل معادلة الانتشار.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Difusi adalah peristiwa berpindahnya suatu zat dalam pelarut dari bagian yang mempunyai konsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah. Biasanya difusi terjadi karena adanya gradien konsentrasi pada komponen ke arah yang menyamakan konsentrasi dan menghapuskan gradien tetapi difusi dapat pula terjadi karena adanya gradien tekanan, gradien suhu, medan gaya dan lain sebagainya. Persamaan difusi termasuk kedalam Persamaan Differensial Parsial (PDP) karena memuat turunan parsial dari fungsi dua atau lebih peubah bebas yaitu x dan t . Persamaan difusi juga termasuk kedalam persamaan differensial parsial yang parabolik (Toto dkk, 2013:88).

Bentuk Persamaan difusi pada penelitian ini memuat turunan parsial dari fungsi dua variabel peubah bebas yaitu x dan t . Parameter t menunjukkan waktu laju perambatan panas, parameter x menunjukkan massa dari suatu benda dan parameter k merupakan konstanta yang bergantung pada laju perambatan. Domain pada variabel x dibatasi $0 < x < \pi$ dan domain pada variabel t dibatasi $0 < t < 1$.

Masalah persamaan differensial parsial dapat diselesaikan dengan beberapa metode, diantaranya metode garis (*method of lines*). Metode ini menggunakan prosedur umum untuk solusi persamaan diferensial parsial (PDEs). Ide dasar dari metode garis adalah mengubah bentuk persamaan differensial parsial dengan cara menurunkan terhadap ruang sehingga akan membentuk persamaan differensial biasa (Hamdi dkk, 2009:1-5). Kemudian hasil dari metode garis

tersebut akan diselesaikan dengan menggunakan metode Runge Kutta Orde 4. Menurut Munir (2013), metode Runge-Kutta adalah alternatif lain dari metode deret taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi dengan cara mengevaluasi fungsi $f(x, y)$.

Metode garis telah banyak diterapkan pada beberapa permasalahan persamaan diferensial Parsial. Penelitian terdahulu yang membahas tentang metode garis antara lain yaitu Campo dan Marucho (2017) yang menerapkan metode garis pada masalah *Graetz-Nusselt*. Langkah pertama yang dilakukan adalah mendiskritisasi variabel x dan mengganti turunan kedua yang bergantung pada x dengan metode beda hingga. Kemudian langkah kedua menyelesaikan persamaan yang dihasilkan pada langkah pertama dengan menggunakan bentuk matrik dan sistem *adjoint* (solusi analitik). Dan pada penelitian Muyassaroh (2015) yang menerapkan metode garis pada persamaan differensial parsial *Fokker-Plank*. Langkah pertama yang dilakukan adalah mendiskritkan variabel x dan t dengan menggunakan metode beda hingga pusat. Kemudian langkah kedua menyelesaikan persamaan yang dihasilkan pada langkah pertama dengan menggunakan metode Runge Kutta Orde 4.

Pada penelitian ini akan menyempurnakan penelitian dari Muyassaroh (2015) yaitu pada pendiskritan terhadap variabel x . Domain x yang dipilih dimulai dari 0 hingga M dan pada saat mencari nilai dari v_j^{n+1} . Dari pendiskritan yang diperoleh akan diubah bentuk menjadi matriks kemudian diselesaikan dengan menggunakan metode Runge Kutta Orde 4.

Menurut pandangan islam setiap masalah ada beberapa penyelesaian yang dapat dicari jalan keluar atau solusi pemecah suatu masalah. Ketika suatu masalah itu sulit untuk diselesaikan dengan salah satu cara, maka hal tersebut pasti ada cara lain untuk mencari solusinya. Sebagaimana Firman-Nya dalam Qs. Al-Baqarah/2:286, yang berbunyi :

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا إِن نَّسِينَا أَوْ أَخْطَأْنَا رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إَصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِنْ قَبْلِنَا رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِ وَاعْفُ عَنَّا وَارْحَمْنَا أَنْتَ مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ الْكَافِرِينَ (٢٨٦)

“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. Ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (Mereka berdoa): “Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami tersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebankan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebankan kepada orang-orang yang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. Beri maaflah kami; ampunilah kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah Penolong kami, maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir”. (Q.S. 2 Al Baqarah 286).

Menurut tafsir Ibnu Katsir (Rifa’i, 2012), penjelasan tentang maksud ayat tersebut adalah Allah tidak membebani seseorang diluar kemampuannya. Hal ini merupakan kelembutan dan kebaikan Allah kepada hamba-Nya. Barangsiapa berbuat baik, dia akan mendapatkan ganjaran atas apa yang dia lakukan, tanpa dikurangi sedikitpun. Dan barangsiapa berbuat buruk, dia akan memikul dosanya sendiri, tidak dipikul oleh orang lain. Kepada Allah kami bertawakal, Allah tempat meminta pertolongan dan penyerahan diri. Tiada daya dan upaya melainkan atas pertolongan-Mu.

Banyak sekali fenomena di alam raya yang telah dijelaskan oleh Al-Quran. Menurut penulis, salah satu fenomenanya yaitu pada persamaan difusi. Dimana persamaan ini harus dipelajari agar memperleh pemahaman yang baru dalam menyelesaikan solusinya.

Sadiku (1997) menerangkan bahwa metode garis mempunyai beberapa keunggulan yaitu metode ini sangat efisien didalam perhitungan karena menghasilkan solusi yang akurat dengan waktu yang ditempuh sedikit. Selain itu metode ini juga mudah dalam menentukan kestabilan dengan memisahkan antara variabel ruang dan waktu.

Dari uraian diatas, maka penelitian ini difokuskan dalam menerapkan metode garis dan metode Runge Kutta orde 4 untuk menyelesaikan persamaan difusi. Oleh karena itu, judul yang akan diangkat oleh peneliti adalah “penerapan metode garis dan metode Runge Kutta orde-4 pada penyelesaian persamaan difusi”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah yang diambil adalah:

1. Bagaimana penerapan metode garis dan metode Runge Kutta orde-4 pada penyelesaian persamaan difusi?
2. Bagaimana galat yang dihasilkan dari penerapan metode garis dan metode Runge Kutta orde-4 pada penyelesaian persamaan difusi?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk menyelesaikan persamaan difusi dengan menggunakan metode garis dan metode Runge Kutta orde-4.
2. Untuk mengetahui galat yang dihasilkan dari penerapan metode garis dan metode Runge Kutta orde-4 pada penyelesaian persamaan difusi.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah untuk mengemukakan transformasi persamaan difusi menggunakan metode garis dan penyelesaian solusi numerik menggunakan metode runge kutta orde 4 serta galat yang dihasilkan dan dapat dijadikan literatur penunjang dan bahan perbandingan dengan menggunakan metode lain.

1.5 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah yang digunakan dalam penelitian ini adalah

1. Pada penelitian ini penulis mengambil persamaan difusi linier merujuk pada (Jamhuri, 2013) yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{pada} \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

dengan kondisi batas yang diberikan :

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

dan kondisi awal yang diberikan :

$$u(x, 0) = 4 \sin(2x)$$

2. Untuk turunan terhadap x menggunakan metode beda hingga pusat orde 2.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode kepustakaan yaitu pengumpulan referensi dengan membaca buku literatur yang berkaitan dengan masalah penelitian. Adapun langkah-langkah penelitian yang dilakukan adalah :

1. Menganalisis dan menerapkan metode garis pada persamaan difusi. Langkah-langkah yang dilakukan adalah
 - a. Mendiskritkan turunan terhadap x menggunakan metode beda hingga pusat sedemikian hingga diperoleh sistem persamaan diferensial biasa.
 - b. Menuliskan sistem persamaan diferensial biasa yang diperoleh dalam bentuk persamaan matriks.
 - c. Menyelesaikan sistem persamaan matriks yang telah diperoleh dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.
2. Menghitung galat yang dihasilkan dari penerapan metode garis dan metode Runge Kutta orde-4 pada penyelesaian persamaan difusi.
3. Interpretasi hasil penyelesaian.

1.7 Sistematika Penelitian

Sistematika penulisan yang digunakan terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

bab ini meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini berisi tentang gambaran umum teori yang mendasari pembahasan penelitian. Pada bab ini akan diuraikan tentang

persamaan difusi, metode beda hingga persamaan difusi, metode garis, metode Runge-Kutta, galat dan kajian agama.

Bab III Pembahasan

Bab ini merupakan inti dari penelitian yang menjelaskan secara keseluruhan langkah-langkah dari metode penelitian dan menjawab permasalahan penelitian yaitu transformasi persamaan difusi menggunakan metode garis dan aplikasi solusi menggunakan metode runge kutta orde-4 sebagaimana yang telah dijelaskan dalam metode penelitian.

Bab IV Penutup

Bab ini terdiri atas rangkuman hasil penelitian yang berupa kesimpulan dari rumusan masalah yang telah dijawab pada bab sebelumnya dan dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Difusi

Difusi adalah peristiwa berpindahnya suatu zat dalam pelarut dari bagian yang mempunyai konsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah. Biasanya difusi terjadi karena adanya gradien konsentrasi pada komponen ke arah yang menyamakan konsentrasi dan menghapuskan gradien. Difusi dapat pula terjadi karena adanya gradien tekanan, gradien suhu, medan gaya dan lain sebagainya (Holman, 1994). Menurut Zain dkk (2018) persamaan difusi adalah persamaan diferensial parsial linier tipe parabolik yang umumnya digunakan untuk mempresentasikan perubahan konsentrasi dari tinggi menjadi rendah dengan berjalannya waktu. Persamaan differensial parsial dapat dikatakan sebagai persamaan parabolik jika nilai diskriminan $b^2 - 4ac = 0$ (Stavrulakis, 2004).

Persamaan difusi sangat penting dalam teori konduksi panas, aliran difusi kental, dan dalam contoh lain dari teori transportasi. Ketika Persamaan difusi ditambah dengan kondisi awal dan kondisi batas yang sesuai, persamaan ini secara unik menggambarkan ketergantungan temporal dan spasial dari beberapa variabel intensif. Bentuk dari persamaan difusi adalah (Strauss, 2008):

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

Persamaan difusi satu dimensi pada domain $[0, L]$ dapat dituliskan sebagai masalah nilai awal dan nilai batas, seperti berikut ini :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, x \in (0, L), t > 0 \quad (2.2)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = a, t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), x \in [0, L],$$

Dengan $u(x, t)$ merupakan besar konsentrasi pada waktu t dan spesial x , koefisien difusi dinotasikan dengan π dan $f(x)$ adalah fungsi awal sebaran konsentrasi pada domain (Zain dkk, 2018).

Dalam mencari solusi eksak pada persamaan difusi dapat menggunakan metode pemisah variabel. Metode pemisah variabel adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial parsial. Metode ini memungkinkan penulisan ulang persamaan agar setiap variabel berada pada di sisi yang berbeda. Contoh penyelesaian solusi eksak pada persamaan difusi menggunakan metode pemisah variabel (Jamhur, 2013) :

Diberikan persamaan difusi

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{pada} \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \quad (2.3)$$

Dengan kondisi batas

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad (2.4)$$

Dan kondisi awal

$$u(x, 0) = 4 \sin(2x) \quad (2.5)$$

Misalkan $u(x, t) = X(x)T(t)$ dan substitusikan pemisalan tersebut pada (2.3) sehingga diperoleh

$$X(x)T'(t) = 3X''(x)T(t)$$

$$\frac{T'(t)}{3T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (2.6)$$

Ruas kiri dari (2.5) hanya bergantung pada variabel t saja, sedangkan ruas kanan hanya bergantung pada variabel x saja, kondisi tersebut hanya mungkin dipenuhi jika keduanya merupakan konstanta yaitu:

$$\frac{T'(t)}{3T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (2.7)$$

Misalkan $\lambda = \beta^2$, maka persamaan (2.7) dapat dituliskan menjadi dua buah PDB yaitu

$$X''(x) + \beta^2 X(x) = 0 \quad (2.8)$$

dan

$$T'(t) + 3\lambda T(t) = 0 \quad (2.9)$$

Solusi dari (2.8) adalah

$$X(x) = C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}$$

Atau dalam bentuk sinusoidal

$$X(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) \quad (2.10)$$

Kondisi $u(0, t) = 0$ memberikan $A = 0$, sehingga

$$X(x) = B \sin(\beta x)$$

Selanjutnya kondisi $u(\pi, t) = 0$ memberikan

$$\sin(\beta\pi) = 0$$

$$\beta\pi = \arcsin 0$$

$$\beta\pi = n\pi, \{n = 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\beta = n$$

Sehingga diperoleh

$$X_n(x) = \sin(nx) \quad (2.11)$$

Solusi dari persamaan (2.9) adalah

$$T(t) = Ce^{-3\lambda t}$$

Karena $\lambda = \beta^2 = n^2$, maka

$$T_n(t) = Ce^{-3n^2 t} \quad (2.12)$$

Dari persamaan (2.10) dan (2.11), maka diperoleh solusi

$$u_n(x, t) = C_n e^{-3n^2 t} \sin(nx)$$

Karena kombinasi linier dari solusi persamaan difusi adalah solusi, maka

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-3n^2 t} \sin(nx) \quad (2.13)$$

Selanjutnya gunakan kondisi awal (2.5)

$$u(x, 0) = 4 \sin(2x)$$

Sehingga diperoleh

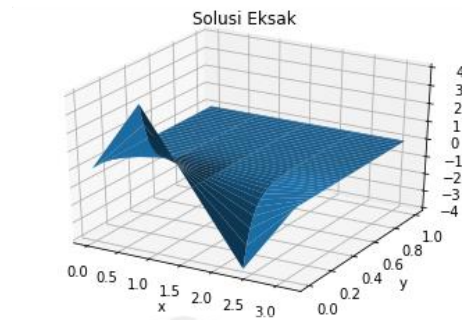
$$4 \sin(2x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx)$$

dimana,

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(2x) \sin(nx) dx \\ &= \begin{cases} 0, & n \text{ lainnya} \\ 4, & n = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Substitusikan kembali C_n pada (2.13) sehingga diperoleh

$$u(x, t) = 4 e^{-12t} \sin(2x)$$



Gambar 2.1 Solusi Eksak Persamaan difusi

Pada gambar 2.1 diperoleh dengan menggunakan 5 buah titik untuk $0 < x < \pi$ dan 10 buah titik untuk $0 < t < 1$.

2.2 Metode Beda Hingga

Salah satu metode numerik untuk menyelesaikan persamaan difusi adalah metode Beda Hingga. Metode ini merupakan metode yang sangat mudah dan sederhana untuk menghampiri persamaan-persamaan diferensial linier. Metode ini secara langsung menghampiri turunan sesuai dengan orde turunan dari ekspansi deret Taylor (Zain dkk, 2018:1).

Dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik adalah deret Taylor. Jika suku-suku deret Taylor tidak berhingga banyaknya, maka deret Taylor dipotong sampai suku tertentu (suku orde ke- n). Rumus turunan numerik yang diturunkan dengan menggunakan bantuan deret Taylor dibagi menjadi tiga hampiran yaitu hampiran beda mundur, hampiran beda maju dan hampiran beda pusat. Misalkan diberikan nilai-nilai x di $x_0 - h$, x_0 dan $x_0 + h$, serta nilai fungsi untuk nilai-nilai x tersebut. Titik-titik yang diperoleh adalah (x_{-1}, f_{-1}) , (x_0, f_0) dan (x_1, f_1) yang dalam hal ini $x_{-1} = x_0 - h$ dan $x_1 = x_0 + h$ dengan h adalah jarak. Salah satu hampiran yaitu hampiran beda pusat (Noviyani dkk, 2019):

Tabel 2.1 Turunan Metode Beda Hingga

Beda Hingga		Rumus
Beda Pusat	Turunan Pertama	$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$
	Turunan Kedua	$f''(x_0) = \frac{f_0 - 2f_1 + f_{-1}}{h^2}$

2.3 Metode Runge Kutta Orde 4

Menurut Munir (2013), metode Runge-Kutta adalah alternatif lain dari metode deret taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi dengan cara mengevaluasi fungsi $f(x, y)$. Menurut Chapra & Canale (2010), bentuk umum dari metode runge kutta adalah

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

Dimana $\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n$, mana a adalah konstanta dan k adalah

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h)$$

$$\vdots$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$$

Metode Runge Kutta orde satu adalah

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1)h$$

Dengan $k_1 = f(x_i, y_i)$

Metode Runge Kutta orde dua adalah

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2)h$$

Dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

Metode Runge Kutta orde tiga adalah

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

Dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h)$$

Metode Runge Kutta orde empat adalah

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

Dengan

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h)$$

2.4 Metode Garis

Metode garis banyak diaplikasikan pada beberapa masalah dibidang fisika teori (Pregla, 2008:15). Menurut Sadiku dan Obiozor (1997), Metode garis (MOL)

adalah teknik numerik didirikan dengan baik untuk analisis jalur transmisi, struktur *waveguide*, dan masalah hamburan. Metode garis dianggap sebagai metode beda hingga khusus tetapi lebih efektif sehubungan dengan akurasi dan waktu komputasi daripada metode beda hingga biasa.

Ide dasar dari metode garis adalah mengganti turunan ruang pada persamaan diferensial parsial dengan pendekatan aljabar. Setelah langkah ini dilakukan, maka turunan ruang tidak lagi dinyatakan secara eksplisit dalam variabel bebas ruang. Pada turunan ruang Setelah langkah ini dilakukan, hanya akan ada variabel nilai awal saja artinya dengan adanya satu variabel bebas yang tersisa maka diperoleh sistem diferensial biasa (PDB) yang mendekati persamaan diferensial parsial yang asli. Kemudian, merumuskan pendekatan sistem persamaan diferensial biasa. Setelah itu maka bisa diterapkan beberapa pendekatan untuk nilai awal guna menghitung solusi numeriknya (Hamdi, dkk, 2009:5).

Pada penelitian ini bentuk pada sistem persamaan differensial biasa yang telah ditentukan, akan diubah bentuknya menjadi bentuk matriks. Kemudian untuk menghitung solusi numeriknya akan dihitung dengan menggunakan metode Runge Kutta Orde 4. Sehingga didapatkan solusi dari persamaan tersebut.

2.5 Galat

Penyelesaian secara numerik suatu persamaan matematika hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai sejati yang sesuai dengan kenyataan. Solusi numerik jelas tidak sama dengan solusi sejati (*exact*), sehingga terdapat selisih antara keduanya yang disebut galat (*error*). Ada beberapa jenis

galat, diantaranya galat relatif, galat absolut, galat pasti, galat tidak pasti dan lain-lain. Salah satunya adalah galat absolut.

Galat absolut adalah kesalahan perbedaan (selisih) antara nilai eksak dan nilai perkiraan (pendekatan pada nilai sebenarnya). Dituliskan (Urifah, 2008:57-58):

$$x = \bar{x} - e$$

Dimana x adalah nilai sebenarnya, $\bar{x}$ adalah pendekatan pada nilai sebenarnya dan e adalah galat. Disini e adalah galat absolut yaitu:

$$e = \bar{x} - x$$

2.6 Kajian Agama

قَالُوا حَرِّقُوهُ وَانصُرُوا آلِهَتَكُمْ إِن كُنْتُمْ فَاعِلِينَ (٦٨) قُلْنَا يَا نَارُ كُونِي بَرْدًا وَسَلَامًا عَلَىٰ إِبْرَاهِيمَ (٦٩)

Mereka berkata: “Bakarlah dia dan bantulah tuhan-tuhan kamu, jika kamu benar-benar hendak bertindak”. Kami berfirman: “Hai api menjadi dinginlah, dan menjadi keselamatanlah bagi Ibrahim”. (Q.S. 21 Al Anbiyaa’ 68-69).

Dalam tafsir Al-Misbah (Shihab,2002) dijelaskan bahwa peristiwa yang dialami oleh Nabi Ibrahim itu merupakan suatu keluarbiasaan yakni diluar hukum-hukum alam yang kita kenal, karena itu kita tidak dapat mengetahui hakikat peristiwa tersebut. setiap saat kita melihat air mengalir menuju tempat yang rendah, matahari terbit dari sebelah timur, si sakit sembuh karena meminum obat tertentu dan sebagainya, hal yang lazim yang kita lihat dan diketahui, maka memunculkan rumus-rumus dari apa yang dinamakan “hukum-hukum alam”. Tetapi jangan

menduga bahwa “sebab” itulah yang mewujudkan akibat, karena para ilmuwan sendiri tidak tau secara pasti faktor apa yang mengantarkan kesana.

Dalam tafsir Fi Zhilalil Qur'an (Quthb,2004) dijelaskan bahwa Allah yang berfirman kepada api, “Jadilah pembakar dan panas”. Allah juga yang berfirman kepadanya,”Jadilah dingin dan kesamatan”. Itu merupakan kata yang sama, walaupun menciptakan sesuatu yang berbeda, bagaimana bentuknya, baik yang dikenal oleh manusia maupun tidak. Perkara ini bukanlah dalam jangkauan ilmu sama sekali. Setiap teori yang ingin menggambarkan mukjizat-mukjizat seperti ini dengan tidak menyandarkannya kepada kekuatan yang mutlak dari Allah, maka teori telah batal dan runtuh. Kewajiban kita hanyalah mengimani bahwa hal itu telah terjadi, karena Penciptanya memiliki kekuatan seperti itu. Perubahan api menjadi dingin dan keselamatan Nabi Ibrahim tersebut hanyalah salah satu contoh kekuasaan Allah yang terjadi dalam berbagai bentuk.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Penerapan Metode Garis Dan Metode Runge Kutta Orde-4 Pada Penyelesaian Persamaan Difusi

Metode garis (MOL) adalah prosedur umum untuk solusi persamaan diferensial parsial (PDP). Ide dasar dari metode garis adalah mengubah bentuk persamaan differensial parsial menjadi sistem persamaan differensial biasa (Hamdi dkk, 2009:1-5). Ada 2 tahapan utama dari metode garis yaitu tahapan pertama mengganti turunan ruang dengan menggunakan metode beda hingga (pusat) sehingga diperoleh sistem persamaan differensial. Kemudian tahapan kedua dengan menyelesaikan sistem persamaan differensial biasa yang diperoleh dengan menggunakan metode penyelesaian persamaan differensial biasa seperti metode Runge Kutta.

Berikut persamaan difusi :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \quad (3.1)$$

Dimana k adalah konstanta dengan kondisi awal yang diberikan yaitu $u(x, 0) = f(x)$ untuk $x \in (0, \pi)$ dan kondisi batas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Daerah solusi dibatasi pada $0 \leq x \leq \pi$.

Tahapan pertama yang harus dilakukan pada metode garis adalah mengganti turunan ruang pada persamaan difusi (3.1) dengan menggunakan metode beda hingga pusat orde 2. Sehingga diperoleh bentuk berikut :

$$\frac{\partial u_i(t)}{\partial t} = k \frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{(\Delta x)^2} \quad (3.2)$$

Karena hanya tersisa satu variabel bebas yaitu t . Sehingga bentuk persamaan differensial parsial diatas berubah menjadi persamaan differensial biasa.

$$\frac{du_i(t)}{dt} = k \frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{(\Delta x)^2}$$

Domain terdiri dari x_i dengan $i = 0, 1, 2, 3, \dots, M$, dan $M = \frac{\pi-0}{\Delta x}$, sehingga

akan diperoleh sistem persamaan diferensial biasa sebagai berikut :

$$\frac{du_1(t)}{dt} = k \frac{u_0(t) - 2u_1(t) + u_2(t)}{(\Delta x)^2} \quad (3.3)$$

$$\frac{du_2(t)}{dt} = k \frac{u_1(t) - 2u_2(t) + u_3(t)}{(\Delta x)^2} \quad (3.4)$$

$$\frac{du_3(t)}{dt} = k \frac{u_2(t) - 2u_3(t) + u_4(t)}{(\Delta x)^2} \quad (3.5)$$

$\vdots$

$$\frac{du_M(t)}{dt} = k \frac{u_{M-1}(t) - 2u_M(t) + u_{M+1}(t)}{(\Delta x)^2} \quad (3.6)$$

Sistem persamaan diferensial biasa (3.3), (3.4) dan (3.5) dan (3.6) diubah kedalam bentuk matrik, sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix} = \frac{k}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix} + \frac{k}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} u_0(t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ u_{M+1}(t) \end{pmatrix}$$

Dari kondisi batas yang telah diberikan maka akan diperoleh nilai $u_0 = 0$ dan $u_{M+1} = 0$, sehingga diperoleh :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix} = \frac{k}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix} + \frac{k}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2k}{\Delta x^2} & \frac{k}{\Delta x^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{k}{\Delta x^2} & \frac{-2k}{\Delta x^2} & \frac{k}{\Delta x^2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{k}{\Delta x^2} & \frac{-2k}{\Delta x^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-2k}{\Delta x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix}$$

Dari bentuk matriks yang telah didapatkan, dimisalkan $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_M(t) \end{pmatrix} = U$ dan

$$\begin{pmatrix} \frac{-2k}{\Delta x^2} & \frac{k}{\Delta x^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{k}{\Delta x^2} & \frac{-2k}{\Delta x^2} & \frac{k}{\Delta x^2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{k}{\Delta x^2} & \frac{-2k}{\Delta x^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-2k}{\Delta x^2} \end{pmatrix} = A, \text{ sehingga didapatkan bentuk sebagai berikut :}$$

$$\frac{dU}{dt} = AU \quad (3.7)$$

Tahapan kedua dari metode garis adalah menyelesaikan PDB dengan menggunakan metode runge kutta orde 4. Daerah solusi dibatasi oleh $0 < t < 1$,

sehingga domain terdiri dari $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ dan dimana $N = \frac{1-0}{\Delta t}$. Bentuk umum

metode runge kutta orde 4 yaitu :

$$U^{m+1} = U^m + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

Dengan

$$k_1 = f(t_n, U^m)$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, U^m + \frac{1}{2}k_1h)$$

$$k_3 = f(t_n + \frac{1}{2}h, U^m + \frac{1}{2}k_2h)$$

$$k_4 = f(t_n + h, U^m + k_3h)$$

3.1.1 Penyelesaian Penerapan Metode Garis Dan Metode Runge Kutta Orde-4 Pada Penyelesaian Persamaan Difusi

Contoh Simulasi Pertama

Adapun persamaan difusi yang digunakanyaitu

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.8)$$

Dengan kondisi awal yang diberikan yaitu $u(x, 0) = 4 \sin 2x$ untuk $x \in (0, \pi)$ dan kondisi batas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Daerah solusi dibatasi pada $0 \leq x \leq \pi$.

Tahapan pertama yang harus dilakukan pada metode garis adalah mengganti turunan ruang pada persamaan difusi (3.8) dengan menggunakan metode beda hingga pusat orde 2. Sehingga diperoleh bentuk berikut :

$$\frac{\partial u_i(t)}{\partial t} = 3 \frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{(\Delta x)^2} \quad (3.9)$$

Karena hanya tersisa satu variabel bebas yaitu t . Sehingga bentuk persamaan differensial parsial diatas berubah menjadi persamaan differensial biasa.

$$\frac{du_i(t)}{dt} = 3 \frac{u_{i-1}(t) - 2u_i(t) + u_{i+1}(t)}{(\Delta x)^2} \quad (3.10)$$

Jika dipilih $\Delta x = \frac{\pi}{5}$ maka domain terdiri dari x_i dengan $i = 0,1,2,3,4$,

sehingga akan diperoleh sistem persamaan diferensial biasa sebagai berikut :

$$\frac{du_1(t)}{dt} = 3 \frac{u_0(t) - 2u_1(t) + u_2(t)}{(\Delta x)^2} \quad (3.11)$$

$$\frac{du_2(t)}{dt} = 3 \frac{u_1(t) - 2u_2(t) + u_3(t)}{(\Delta x)^2} \quad (3.12)$$

$$\frac{du_3(t)}{dt} = 3 \frac{u_2(t) - 2u_3(t) + u_4(t)}{(\Delta x)^2} \quad (3.13)$$

Sistem persamaan diferensial biasa (3.11), (3.12) dan (3.13) diubah kedalam bentuk matrik, sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \frac{3}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} + \frac{3}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} u_0(t) \\ 0 \\ u_4(t) \end{pmatrix}$$

Dari kondisi batas yang telah diberikan maka akan diperoleh nilai $u_0 = 0$ dan $u_4 = 0$, sehingga diperoleh :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \frac{3}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} + \frac{3}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \frac{3}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$$

Nilai dari Δx , dimasukkan kedalam persamaan sehingga menjadi

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \frac{3}{0,783974483} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9,7268336297 & 4,86341681483 & 0 \\ 4,86341681483 & -9,7268336297 & 4,86341681483 \\ 0 & 4,86341681483 & -9,7268336297 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$$

Dari bentuk matriks yang telah didapatkan, dimisalkan $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = U$ dan

$$\begin{pmatrix} -9,7268336297 & 4,86341681483 & 0 \\ 4,86341681483 & -9,7268336297 & 4,86341681483 \\ 0 & 4,86341681483 & -9,7268336297 \end{pmatrix} = A, \text{ sehingga didapatkan}$$

bentuk sebagai berikut :

$$\frac{dU}{dt} = AU \quad (3.14)$$

Tahapan kedua dari metode garis adalah menyelesaikan PDB dengan menggunakan metode runge kutta orde 4. Dipilih $\Delta t = 0,1$ dan daerah solusi dibatasi oleh $0 < t < 1$. Bentuk umum metode runge kutta orde 4 yaitu :

$$U^{m+1} = U^m + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

Dengan

$$k_1 = f(t_n, U^m)$$

$$k_2 = f(t_n + \frac{1}{2}h, U^m + \frac{1}{2}k_1h)$$

$$k_3 = f(t_n + \frac{1}{2}h, U^m + \frac{1}{2}k_2h)$$

$$k_4 = f(t_n + h, U^m + k_3h)$$

Untuk $U = 0$, didapatkan dari kondisi awal, sehingga di peroleh:

$$U^0 = \begin{pmatrix} 4 \sin 2x_1 \\ 4 \sin 2x_2 \\ 4 \sin 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \sin \left(\frac{2\pi}{4} \right) \\ 4 \sin \left(\frac{2\pi}{2} \right) \\ 4 \sin \left(\frac{6\pi}{4} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,0000 \\ 0 \\ -4,0000 \end{pmatrix}$$

Untuk $U = 1$, dihitung menggunakan runge kutta orde 4, sehingga diperoleh:

$$U^1 = U^0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

Langkah awal yang harus dilakukan oleh metode runge kutta adalah mencari masing-masing nilai k

Untuk nilai k_1

$$k_1 = f(t_1, U^0)$$

$$k_1 = AU^0$$

$$k_1 = \begin{pmatrix} -9,7268 & 4,8634 & 0 \\ 4,8634 & -9,7268 & 4,8634 \\ 0 & 4,8634 & -9,7268 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4,0000 \\ 0 \\ -4,0000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -38,9073 \\ 0 \\ 38,9073 \end{pmatrix}$$

Untuk nilai k_2

$$k_2 = f\left(t_1 + \frac{1}{2}h, U^0 + \frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$k_2 = f\left(0,2 + \frac{1}{2}(0,2), \begin{pmatrix} 4,0000 \\ 0 \\ -4,0000 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -38,9073 \\ 0 \\ 38,9073 \end{pmatrix} (0,2)\right)$$

$$k_2 = f\left(0,3; \begin{pmatrix} 0,1093 \\ 0 \\ -0,1093 \end{pmatrix}\right)$$

$$k_2 = AU$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -9,72683 & 4,8634 & 0 \\ 4,8634 & -9,7268 & 4,8634 \\ 0 & 4,8634 & -9,7268 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,1093 \\ 0 \\ -0,1093 \end{pmatrix}$$

$$k_2 = \begin{pmatrix} -1,0628 \\ 0 \\ 1,0628 \end{pmatrix}$$

Untuk k_3

$$k_3 = f\left(t_1 + \frac{1}{2}h, U^0 + \frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$k_3 = f\left(0,2 + \frac{1}{2}(0,2), \begin{pmatrix} 4,0000 \\ 0 \\ -4,0000 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1,0628 \\ 0 \\ 1,0628 \end{pmatrix} 0,2\right)$$

$$k_3 = f\left(0,3; \begin{pmatrix} 3,89377 \\ 0 \\ -3,8937 \end{pmatrix}\right)$$

$$k_3 = AU$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -9,7268 & 4,8634 & 0 \\ 4,8634 & -9,7268 & 4,8634 \\ 0 & 4,8634 & -9,7268 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,89377 \\ 0 \\ -3,8937 \end{pmatrix}$$

$$k_3 = \begin{pmatrix} -37,8735 \\ 0 \\ 37,8735 \end{pmatrix}$$

Untuk k_4

$$k_4 = f(t_1 + h, U^0 + k_3h)$$

$$k_4 = f\left(0,2 + 0,2; \begin{pmatrix} 4,0000 \\ 0 \\ -4,0000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -37,8735 \\ 0 \\ 37,8735 \end{pmatrix} (0,2)\right)$$

$$k_4 = f\left(0,4; \begin{pmatrix} -3,5747 \\ 0 \\ 3,5747 \end{pmatrix}\right)$$

$$k_4 = AU$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} -9,7268 & 4,8634 & 0 \\ 4,8634 & -9,7268 & 4,8634 \\ 0 & 4,8634 & -9,7268 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3,5747 \\ 0 \\ 3,5747 \end{pmatrix}$$

$$k_4 = \begin{pmatrix} 34,7706 \\ 0 \\ -34,7706 \end{pmatrix}$$

Setelah diperoleh semua nilai k, selanjutnya disubstitusikan ke rumus awal:

$$U^0 = U^0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$U^1 = \begin{pmatrix} 4,0000 \\ 0 \\ -4,0000 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \left(\begin{pmatrix} -38,9078 \\ -0 \\ 38,9073 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,0628 \\ 0 \\ 1,0628 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -37,8735 \\ 0 \\ 37,8735 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 34,7706 \\ 0 \\ -34,7706 \end{pmatrix} \right)$$

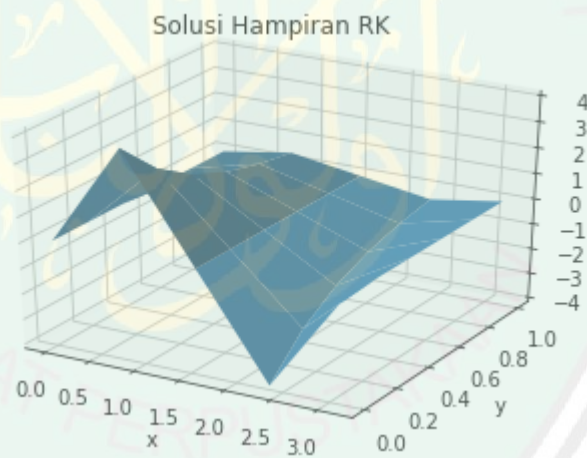
$$U^1 = \begin{pmatrix} 2,5633 \\ 0 \\ -2,5633 \end{pmatrix}$$

Jadi diperoleh nilai $u_1^1 = 2,5633$, $u_2^1 = 0$ dan $u_3^1 = -2,5633$. Langkah diatas kemudian diulang sampai iterasi ke 6 yaitu ketika $t = 1$ atau $n = 6$. Untuk mempermudah perhitungan digunakan bantuan program python, sehingga didapatkan hasil tabel seperti berikut.

Tabel 3.1 Simulasi Pertama Solusi Numerik Persamaan Difusi dengan Menggunakan Metode Garis

iterasi	$x \backslash t$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
		0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
1	0,0	0	4,0000	0	-4,0000	0
2	0,2	0	2,5633	0	-2,5633	0
3	0,4	0	1,6426	0	-1,6426	0
4	0,6	0	1,0526	0	-1,0526	0
5	0,8	0	0,6745	0	-0,6745	0
6	1,0	0	0,4322	0	-0,4322	0

Selanjutnya adalah menggambarkan solusi numerik simulasi pertama dari tabel 3.1 dalam plot 3 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut



Gambar 3.1 Simulasi Ketiga Solusi Numerik Persamaan Difusi

Pada gambar 3.1 merupakan hasil dari simulasi pertama solusi numerik dalam bentuk grafik 3 dimensi $u(x, t)$ dengan kondisi batas pada interval t dan x masing-masing adalah $0 < t < 1$ dan $0 < x < \pi$ pada saat $\Delta t = 0,2$ dan $\Delta x = \frac{\pi}{5}$.

Gambar 3.1 menginterpretasikan bahwa nilai dari $u(x, t)$ menunjukkan semakin besarnya nilai x maka nilai $u(x, t)$ semakin mendekati nol.

Contoh simulasi kedua

Adapun persamaan difusi yang digunakan sama seperti pada simulasi kedua yaitum

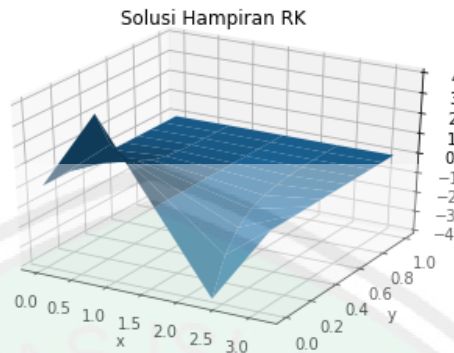
$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.15)$$

Dengan kondisi awal yang diberikan yaitu $u(x, 0) = 4 \sin 2x$ untuk $x \in (0, \pi)$ dan kondisi batas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Daerah solusi dibatasi pada $0 \leq x \leq \pi$ dan $0 < t < 1$. Jika dipilih $\Delta x = \frac{\pi}{5}$ dan $\Delta t = 0,1$ dengan langkah dan perhitungan yang sama dan untuk mempermudah perhitungan digunakan bantuan program python, sehingga didapatkan hasil tabel seperti berikut.

Tabel 3.2 Simulasi Kedua Solusi Numerik Persamaan Difusi dengan Menggunakan Metode Garis

iterasi	$x \backslash t$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
		0	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
1	0	0	4,0000	0	-4,0000	0
2	0,1	0	2,1856	0	-2,1856	0
3	0,2	0	1,1942	0	-1,1942	0
4	0,3	0	0,6525	0	-0,6525	0
5	0,4	0	0,3566	0	-0,3566	0
6	0,5	0	0,1948	0	-0,1948	0
7	0,6	0	0,1065	0	-0,1065	0
8	0,7	0	0,0582	0	-0,0582	0
9	0,8	0	0,0318	0	-0,0318	0
10	0,9	0	0,0174	0	-0,0174	0
11	1	0	0,0095	0	-0,0095	0

Selanjutnya adalah menggambarkan solusi numerik simulasi kedua dari tabel 3.2 dalam plot 3 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut



Gambar 3.2 Simulasi Kedua Solusi Numerik Persamaan Difusi

Pada gambar 3.2 merupakan hasil dari simulasi kedua solusi numerik dalam bentuk grafik 3 dimensi $u(x, t)$ dengan kondisi batas pada interval t dan x masing-masing adalah $0 < t < 1$ dan $0 < x < \pi$ pada saat $\Delta t = 0,1$ dan $\Delta x = \frac{\pi}{5}$. Gambar 3.2 menginterpretasikan bahwa nilai dari $u(x, t)$ menunjukkan semakin besarnya nilai x maka nilai $u(x, t)$ semakin mendekati nol.

Contoh simulasi ketiga

Adapun persamaan difusi yang digunakan sama seperti pada simulasi ketiga yaitum

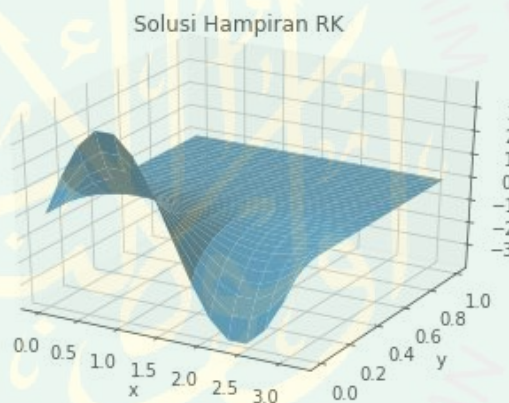
$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.15)$$

Dengan kondisi awal yang diberikan yaitu $u(x, 0) = 4 \sin 2x$ untuk $x \in (0, \pi)$ dan kondisi batas $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Daerah solusi dibatasi pada $0 \leq x \leq \pi$ dan $0 < t < 1$. Jika dipilih $\Delta x = \frac{\pi}{15}$ dan $\Delta t = 0,01$ dengan langkah dan perhitungan yang sama dan untuk mempermudah perhitungan digunakan bantuan program python, sehingga didapatkan hasil tabel seperti berikut.

Tabel 3.3 Simulasi Ketiga Solusi Numerik Persamaan Difusi dengan Menggunakan Metode Garis

iterasi	$x \backslash t$	x_0	x_1	x_2	...	x_{14}	x_{15}
		0	$\frac{\pi}{14}$	$\frac{\pi}{7}$	...	$\frac{13\pi}{14}$	π
1	0	0	1,7355	3,1273	...	-1,7355	0
2	0,1	0	1,5765	2,8407	...	-1,5765	0
3	0,2	0	1,4320	2,5804	...	-1,4320	0
4	0,3	0	1,3008	2,3440	...	1,3008	0
...	...					...	
101	1	0	0,0001	0	...	-0,0001	0

Selanjutnya adalah menggambarkan solusi numerik simulasi ketiga dari tabel 3.3 dalam plot 3 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut

**Gambar 3.3** Simulasi ketiga Solusi Numerik Persamaan Difusi

Pada gambar 3.3 merupakan hasil dari simulasi ketiga solusi numerik dalam bentuk grafik 3 dimensi $u(x, t)$ dengan kondisi batas pada interval t dan x masing-masing adalah $0 < t < 1$ dan $0 < x < \pi$ pada saat $\Delta t = 0,01$ dan $\Delta x = \frac{\pi}{15}$. Gambar 3.3 menginterpretasikan bahwa nilai dari $u(x, t)$ menunjukkan semakin besarnya nilai x maka nilai $u(x, t)$ semakin mendekati nol dan bentuk gambar terlihat lebih jelas daripada saat simulasi pertama dan simulasi kedua.

3.2 Galat yang Dihasilkan Penerapan Metode Garis Dan Metode Runge Kutta Orde-4 Pada Penyelesaian Persamaan Difusi

Solusi eksak (analitik) pada persamaan difusi adalah

$$U(x, t) = 4e^{-12t} \sin(2x)$$

Pada kajian pustaka sudah dijelaskan bahwa penyelesaian secara numerik hanya menghasilkan nilai yang mendekati pada solusi analitiknya. Sehingga penyelesaian secara numerik pasti menghasilkan *error* (galat). Dengan memasukkan nilai x dan t maka akan diperoleh nilai eksaknya dimana satuan dari penelitian ini berupa derajat.

Contoh simulasi pertama

Dengan memasukkan nilai x dan t maka akan diperoleh perhitungan berikut:

Ketika $t = 0$ maka

$$\begin{aligned} u_1^0 \rightarrow u(0,7854; 0) &= 4e^{-12(0)} \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) \\ &= 4,0000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2^0 \rightarrow u(1,5708; 0) &= 4e^{-12(0)} \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3^0 \rightarrow u(2,3562; 0) &= 4e^{-12(0)} \sin\left(\frac{6\pi}{4}\right) \\ &= -4,0000 \end{aligned}$$

Jadi pada saat $t = 0$ diperoleh solusi eksak untuk $u_1^0 = 4,0000$, $u_2^0 = 0$ dan $u_3^0 = -4,0000$.

Ketika $t = 0,2$ maka

$$u_1^1 \rightarrow u(0,7854; 0,1) = 4e^{-12(0,2)} \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) \\ = 0,3629$$

$$u_2^1 \rightarrow u(1,5708; 0,1) = 4e^{-12(0,2)} \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) \\ = 0$$

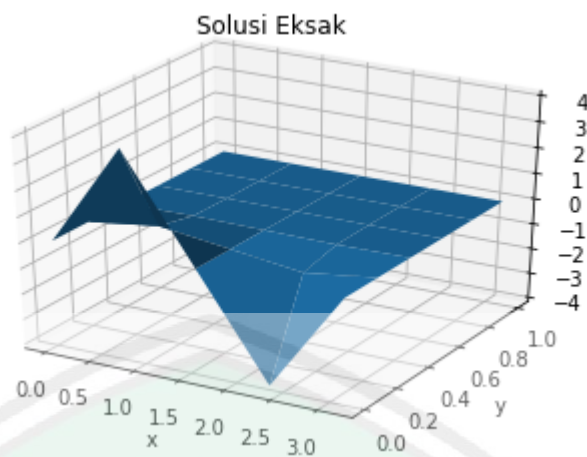
$$u_3^1 \rightarrow u(2,3562; 0,1) = 4e^{-12(0,2)} \sin\left(\frac{6\pi}{4}\right) \\ = -0,3629$$

Jadi pada saat $t = 0,1$ diperoleh solusi eksak untuk $u_1^1 = 0,3629$, $u_2^1 = 0$ dan $u_3^1 = -0,3629$. Langkah diatas kemudian diulang sampai iterasi ke 6 yaitu pada saat $t = 1$ atau $n = 6$. Untuk mempermudah perhitungan digunakan bantuan program python, sehingga didapatkan hasil tabel seperti berikut.

Tabel 3.4 Simulasi Pertama Solusi Eksak Persamaan Difusi Dengan Menggunakan Metode Garis

iterasi	$x \backslash t$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
		0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
1	0,0	0	4,0000	0	-4,0000	0
2	0,2	0	0,3629	0	-0,3629	0
3	0,4	0	0,0329	0	-0,0329	0
4	0,6	0	0,0030	0	-0,0030	0
5	0,8	0	0,0003	0	-0,0003	0
6	1,0	0	0	0	-0	0

Selanjutnya adalah menggambarkan solusi dari tabel 3.4 dalam plot 3 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut



Gambar 3.4 Simulasi Pertama Solusi Eksak Persamaan Difusi

Pada gambar 3.4 merupakan hasil dari simulasi kedua solusi analitik dalam bentuk grafik 3 dimensi $u(x, t)$ dengan kondisi batas pada interval t dan x masing-masing adalah $0 < t < 1$ dan $0 < x < \pi$ pada saat $\Delta t = 0,2$ dan $\Delta x = \frac{\pi}{5}$. Gambar 3.4 menginterpretasikan bahwa nilai dari $u(x, t)$ menunjukkan semakin besarnya nilai x maka nilai $u(x, t)$ semakin mendekati nol.

Kemudian gambar dan tabel dari simulasi Pertama solusi numerik dan solusi eksak, sehingga :

Tabel 3.5 Perbandingan Gambar Solusi Numerik dan Solusi Eksak Pada Simulasi Pertama Persamaan Difusi Dengan Menggunakan Metode Garis

Solusi numerik	Solusi Analitik
Solusi Hampiran RK	Solusi Eksak

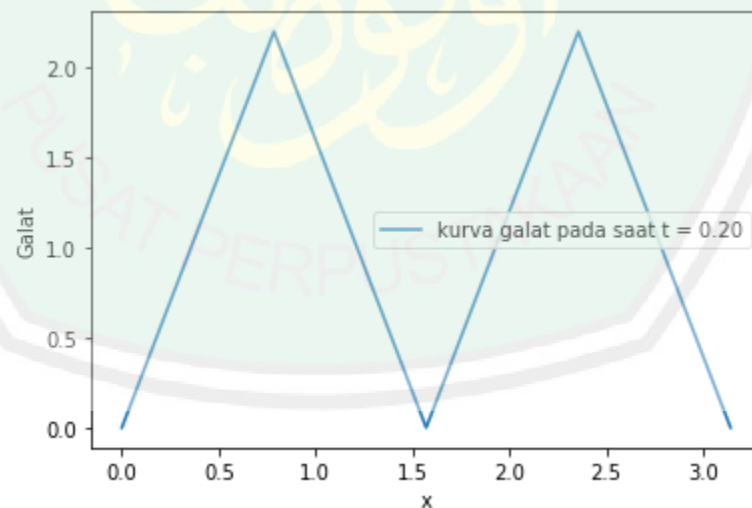
Pada tabel 3.5 menunjukkan penyelesaian secara numerik menghasilkan nilai yang mendekati pada solusi analitiknya. Sehingga penyelesaian secara

numerik pasti menghasilkan *error*. Untuk mengetahui besarnya *error*, dapat dilakukan dengan menghitung selisih antara solusi numerik dan solusi eksaknya. Sehingga besarnya *error* digambarkan pada tabel berikut :

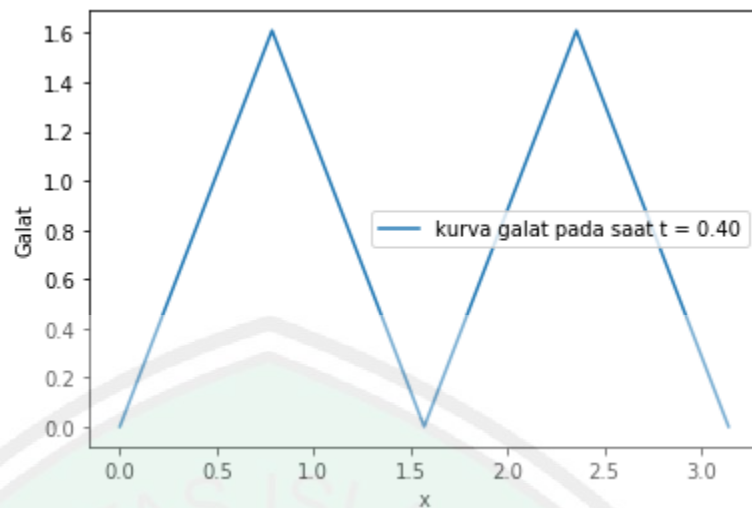
Tabel 3.6 Hasil Galat Simulasi Pertama Persamaan Difusi Dengan Menggunakan Metode Garis

iterasi	x t		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
			0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
1	0	N	0	4,0000	0	-4,0000	0
		E	0	4,0000	0	-4,0000	0
		G	0	0	0	0	0
...	...	...					
5	1	N	0	0,4322	0	-0,4322	0
		E	0	0	0	-0	0
		G	0	0,4322	0	-0,4322	0

Selanjutnya adalah menggambarkan galat dari tabel 3.6 dalam plot 2 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut



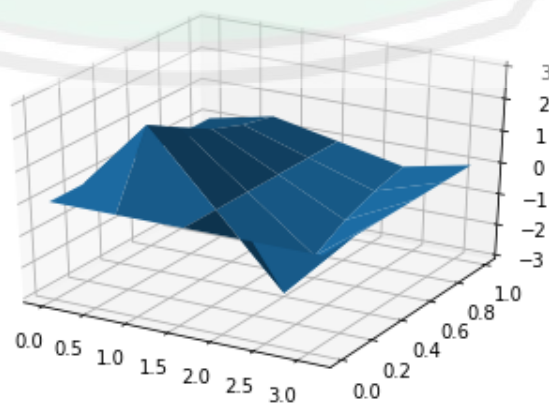
Gambar 3.5 galat pada saat $t = 0,2$ dengan $\Delta t = 0,2$



Gambar 3.6 galat pada saat $t = 0,4$ dengan $\Delta t = 0,2$

Pada gambar 3.5 menunjukkan galat pada saat $t = 0,2$ dengan $\Delta t = 0,2$ yang menghasilkan nilai galat pada puncak tertinggi sebesar lebih dari 2,0 dan gambar 3.6 menunjukkan galat pada saat $t = 0,4$ dengan $\Delta t = 0,2$ yang menghasilkan nilai galat pada puncak tertinggi sebesar 1,6. Nilai galat pada gambar tersebut telah dimutlak kan sebelumnya. Kedua gambar tersebut menginterpretasikan bahwa galat yang dihasilkan semakin kecil seiring berjalannya waktu sehingga solusi yang dihasilkan semakin mendekati solusi analitiknya.

Kemudian menggambarkan galat dari tabel 3.6 dalam plot 3 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut



Gambar 3.7 Hasil Galat Simulasi Pertama Solusi Persamaan Difusi

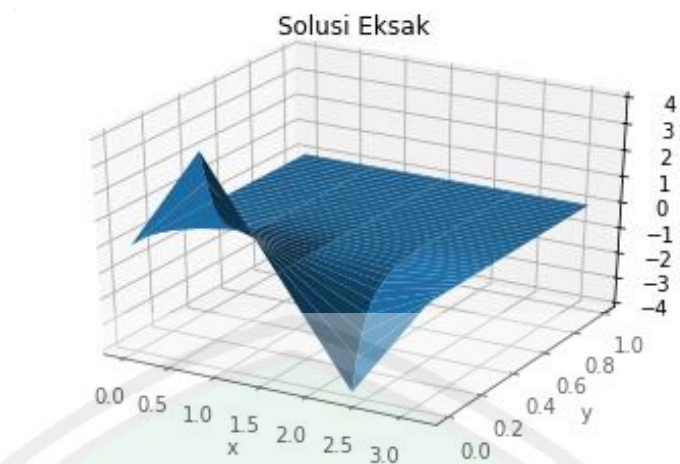
Pada gambar 3.7 merupakan hasil dari galat simulasi ketiga dalam bentuk grafik 3 dimensi $u(x, t)$ dengan kondisi batas pada interval t dan x masing-masing adalah $0 < t < 1$ dan $0 < x < \pi$ pada saat $\Delta t = 0,2$ dan $\Delta x = \frac{\pi}{5}$. Gambar 3.7 menginterpretasikan bahwa nilai dari hasil pengurangan solusi numerik dan solusi analitik menunjukkan besar *error* yang sedikit lebih besar daripada simulasi kedua dan simulasi ketiga. Karena telah dipilih Δt dan Δx yang cukup besar.

Contoh simulasi kedua

Tabel 3.7 Simulasi Kedua Solusi Eksak Persamaan Difusi Dengan Menggunakan Metode Garis

iterasi	$x \backslash t$	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
		0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
1	0	0	4,0000	0	-4,0000	0
2	0,1	0	1,2048	0	-1,2048	0
3	0,2	0	0,3629	0	-0,3629	0
4	0,3	0	0,1093	0	-0,1093	0
5	0,4	0	0,0329	0	-0,0329	0
6	0,5	0	0,0099	0	-0,0099	0
7	0,6	0	0,0030	0	-0,0030	0
8	0,7	0	0,0009	0	-0,0009	0
9	0,8	0	0,0003	0	-0,0003	0
10	0,9	0	0,0001	0	-0,0001	0
11	1	0	0	0	-0	0

Selanjutnya adalah menggambarkan solusi dari tabel 3.7 dalam plot 3 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut

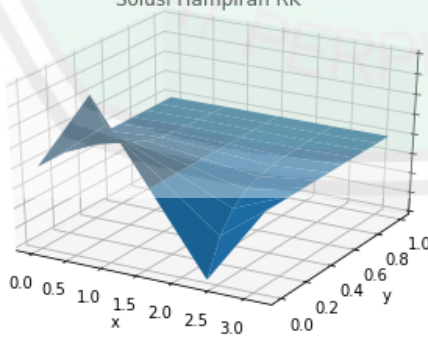
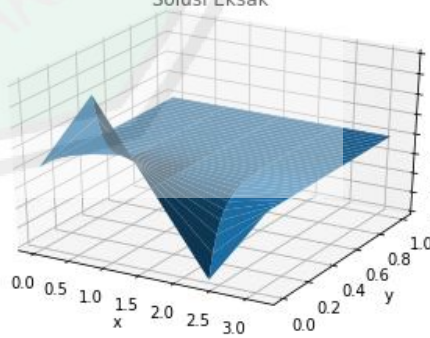


Gambar 3.8 Simulasi Kedua Solusi Eksak Persamaan Difusi

Pada gambar 3.8 merupakan hasil dari solusi analitik simulasi kedua dalam bentuk grafik 3 dimensi $u(x, t)$ dengan kondisi batas pada interval t dan x masing-masing adalah $0 < t < 1$ dan $0 < x < \pi$ pada saat $\Delta t = 0,1$ dan $\Delta x = \frac{\pi}{5}$. Gambar 3.8 menginterpretasikan bahwa nilai dari $u(x, t)$ menunjukkan semakin besarnya nilai x maka nilai $u(x, t)$ semakin mendekati nol.

Kemudian gambar perbandingan dari simulasi kedua solusi numerik dan solusi eksak, sehingga :

Tabel 3.8 Perbandingan Gambar Solusi Numerik dan Solusi Eksak Pada Simulasi Kedua Persamaan Difusi Dengan Menggunakan Metode Garis

Solusi numerik	Solusi Analitik
Solusi Hampiran RK 	Solusi Eksak 

Pada tabel 3.8 menunjukkan penyelesaian secara numerik menghasilkan nilai yang mendekati pada solusi analitiknya. Sehingga penyelesaian secara numerik pasti menghasilkan *error*. Untuk mengetahui besarnya *error*, dapat

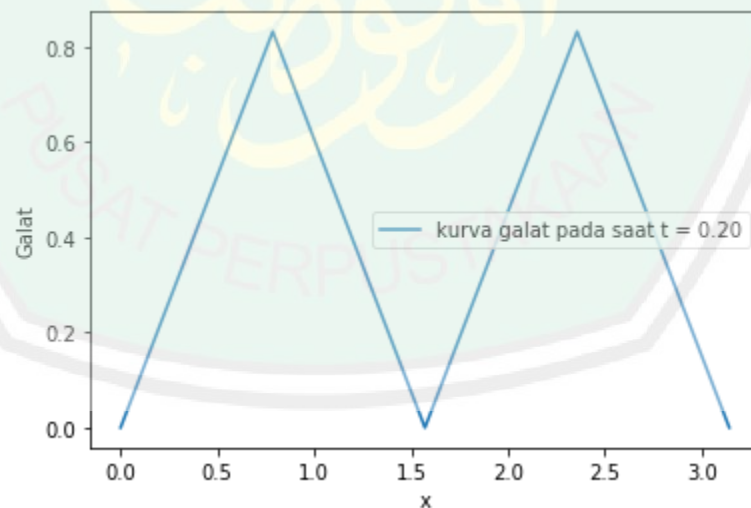
dilakukan dengan menghitung selisih antara solusi numerik dan solusi eksaknya. Sehingga besarnya *error* digambarkan pada tabel berikut

Tabel 3.9 Hasil Galat Simulasi Kedua Persamaan Difusi Dengan Menggunakan Metode Garis

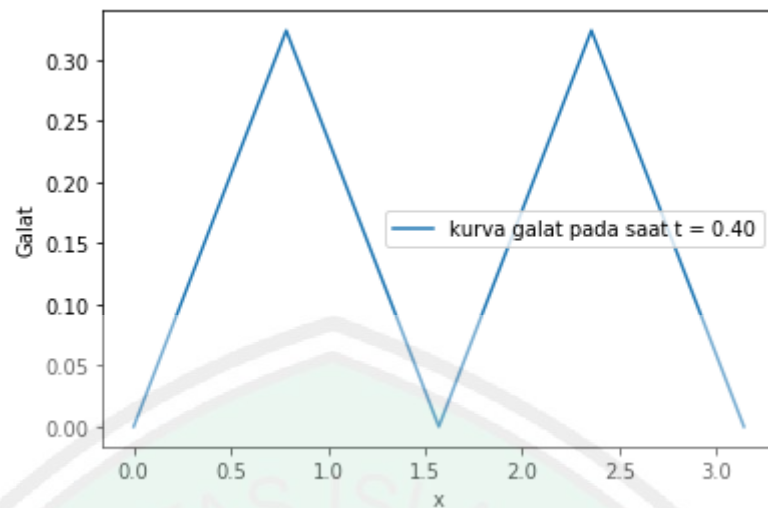
iterasi	$x \backslash t$		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
			0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
1	0	N	0	4,0000	0	-4,0000	0
		E	0	4,0000	0	-4,0000	0
		G	0	0	0	0	0
...	...	...					
11	1	N	0	0,0095	0	-0,0095	0
		E	0	0	0	-0	0
		G	0	0,0095	0	-0,0095	0

Keterangan : N = Solusi Numerik, E = Solusi Eksak, G = Galat

Selanjutnya adalah menggambarkan galat dari tabel 3.9 dalam plot 2 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut



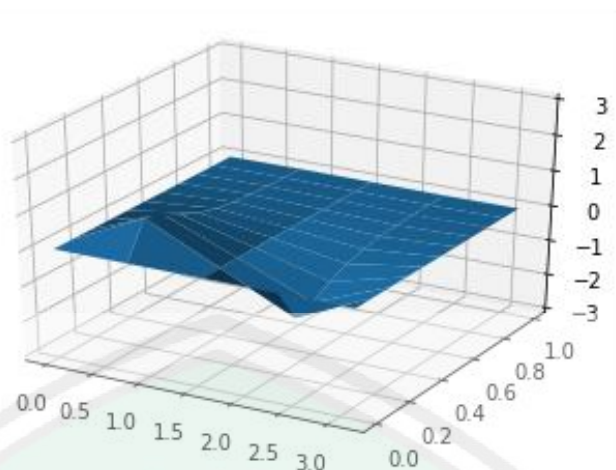
Gambar 3.9 galat pada saat $t = 0,2$ dengan $\Delta t = 0,1$



Gambar 3.10 galat pada saat $t = 0,4$ dengan $\Delta t = 0,1$

Pada gambar 3.9 menunjukkan galat pada saat $t = 0,2$ dengan $\Delta t = 0,1$ yang menghasilkan nilai galat pada puncak tertinggi sebesar lebih dari 0,8 dan gambar 3.10 menunjukkan galat pada saat $t = 0,4$ dengan $\Delta t = 0,1$ yang menghasilkan nilai galat pada puncak tertinggi sebesar lebih dari 0,3. Nilai galat pada gambar tersebut telah dimutlak kan sebelumnya dan nilai galat pada simulasi kedua ini lebih kecil daripada simulasi pertama. Kedua gambar tersebut menginterpretasikan bahwa galat yang dihasilkan semakin kecil seiring berjalannya waktu sehingga solusi yang dihasilkan semakin mendekati solusi analitiknya.

Kemudian menggambarkan galat dari tabel 3.9 dalam plot 3 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut



Gambar 3.11 Hasil Galat Simulasi Kedua Solusi Persamaan Difusi saat Δt dan Δx diperkecil

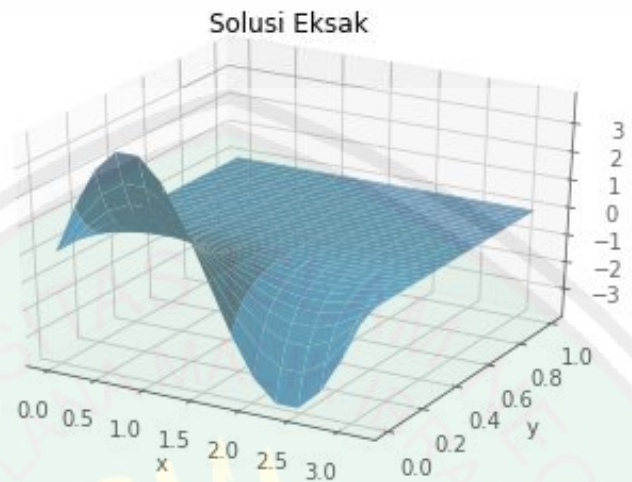
Pada gambar 3.11 merupakan hasil dari galat simulasi pertama dalam bentuk grafik 3 dimensi $u(x, t)$ dengan kondisi batas pada interval t dan x masing-masing adalah $0 < t < 1$ dan $0 < x < \pi$ pada saat $\Delta t = 0,1$ dan $\Delta x = \frac{\pi}{5}$. Gambar 3.11 menginterpretasikan bahwa nilai dari hasil pengurangan solusi numerik dan solusi analitik menunjukkan besar *error* yang kecil. Apabila semakin kecil dipilih Δt dan Δx yang dipilih semakin kecil pula *error* yang dihasilkan.

Contoh simulasi ketiga

Tabel 3.10 Simulasi Ketiga Solusi Eksak Persamaan Difusi Dengan Menggunakan Metode Garis

iterasi	x t	x_0	x_1	x_2	...	x_{14}	x_{15}
		0	$\frac{\pi}{14}$	$\frac{\pi}{7}$	...	$\frac{13\pi}{14}$	π
1	0	0	1,7355	3,1273	...	-1,7355	0
2	0,1	0	1,5393	2,7737	...	-1,5393	0
3	0,2	0	1,3652	2,4600	...	-1,3652	0
4	0,3	0	1,2108	2,1819	...	-1,2108	0
...	...	...				...	
101	1	0	0	0	...	-0	0

Selanjutnya adalah menggambarkan solusi dari tabel 3.10 dalam plot 3 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut

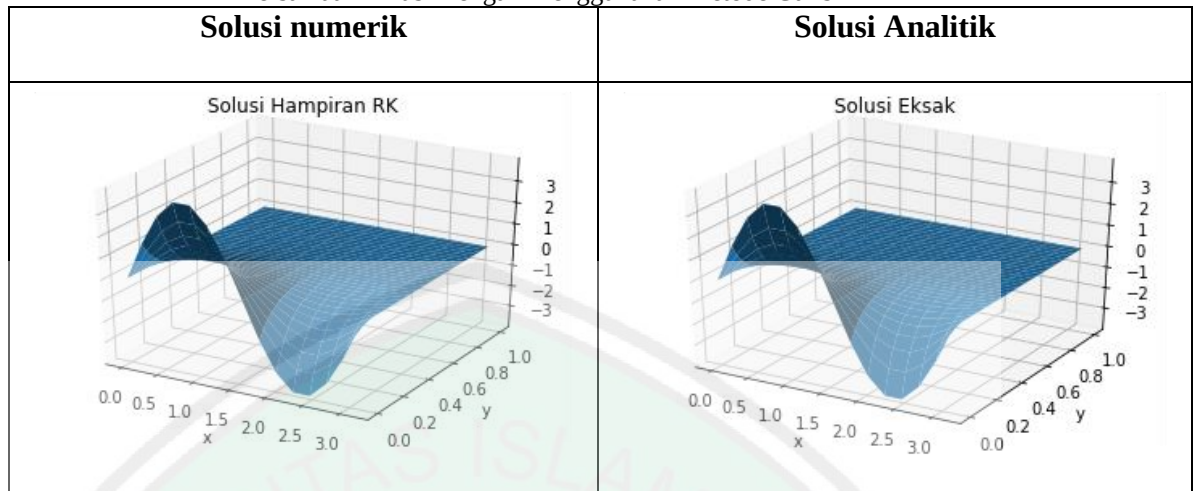


Gambar 3.12 Simulasi Ketiga Solusi Eksak Persamaan Difusi

Pada gambar 3.12 merupakan hasil dari simulasi ketiga solusi analitik dalam bentuk grafik 3 dimensi $u(x, t)$ dengan kondisi batas pada interval t dan x masing-masing adalah $0 < t < 1$ dan $0 < x < \pi$ pada saat $\Delta t = 0,01$ dan $\Delta x = \frac{\pi}{15}$. Gambar 3.12 menginterpretasikan bahwa nilai dari $u(x, t)$ menunjukkan semakin besarnya nilai x maka nilai $U(x, t)$ semakin mendekati nol dan bentuk gambar terlihat lebih jelas daripada saat simulasi pertama.

Kemudian gambar perbandingan dari simulasi ketiga solusi numerik dan solusi eksak, sehingga :

Tabel 3.11 Perbandingan Gambar Solusi Numerik dan Solusi Eksak Pada Simulasi Ketiga Persamaan Difusi Dengan Menggunakan Metode Garis



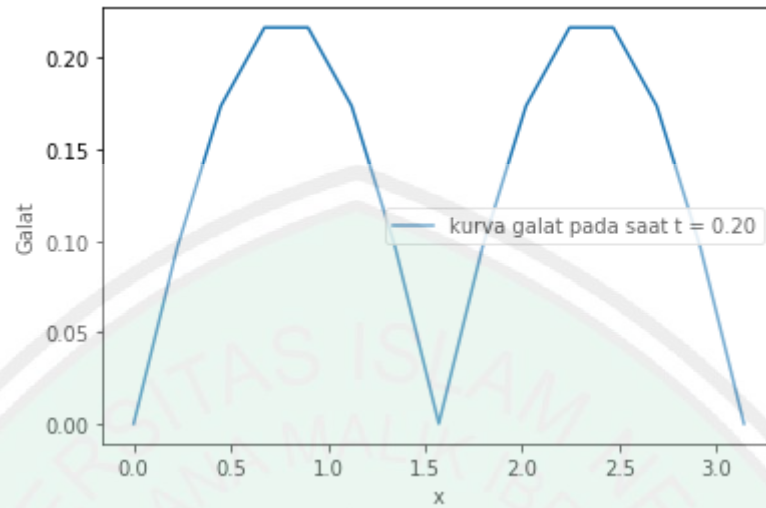
Pada tabel 3.11 menunjukkan penyelesaian secara numerik menghasilkan nilai yang mendekati pada solusi analitiknya. Sehingga penyelesaian secara numerik pasti menghasilkan *error*. Untuk mengetahui besarnya *error*, dapat dilakukan dengan menghitung selisih antara solusi numerik dan solusi eksaknya. Sehingga besarnya *error* digambarkan pada tabel berikut :

Tabel 3.12 Hasil Galat Simulasi Ketiga Persamaan Difusi Dengan Menggunakan Metode Garis

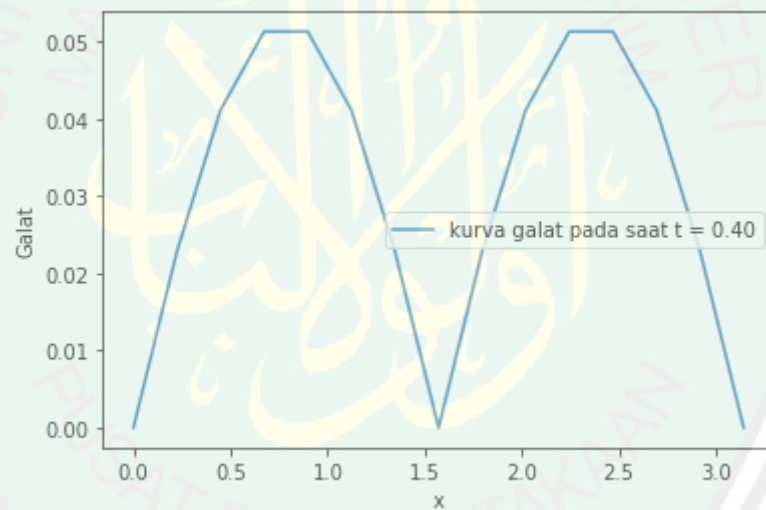
iterasi	x t		x_0	x_1	x_2	...	x_{14}	x_{15}
			0	$\frac{\pi}{14}$	$\frac{\pi}{7}$	...	$\frac{13\pi}{14}$	π
1	0	N	0	1,7355	3,1273	...	-1,7355	0
		E	0	1,7355	3,1273	...	-1,7355	0
		G	0	0	0	...	0	0
...	...	...				...		
11	1	N	0	0,0001	0	...	-0,0001	0
		E	0	0	0	...	-0	0
		G	0	0,0001	0	...	-0,0001	0

Keterangan : N = Solusi Numerik, E = Solusi Eksak, G = Galat

Selanjutnya adalah menggambarkan galat dari tabel 3.12 dalam plot 2 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut



Gambar 3.13 galat pada saat $t = 0,2$ dengan $\Delta t = 0,01$



Gambar 3.14 galat pada saat $t = 0,4$ dengan $\Delta t = 0,01$

Pada gambar 3. menunjukkan galat pada saat $t = 0,2$ dengan $\Delta t = 0,01$ yang menghasilkan nilai galat pada puncak tertinggi sebesar lebih dari 0,2 dan gambar 3.14 menunjukkan galat pada saat $t = 0,4$ dengan $\Delta t = 0,01$ yang menghasilkan nilai galat pada puncak tertinggi sebesar lebih dari 0,05. Nilai galat pada gambar tersebut telah dimutlak kan sebelumnya dan nilai galat pada simulasi ketiga lebih kecil dari pada simulasi kedua. Kedua gambar tersebut menginterpretasikan bahwa galat yang dihasilkan semakin kecil seiring berjalannya waktu sehingga solusi yang dihasilkan semakin mendekati solusi analitiknya.

Kemudian menggambarkan galat dari tabel 3.12 dalam plot 3 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut



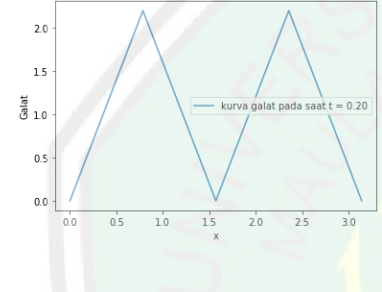
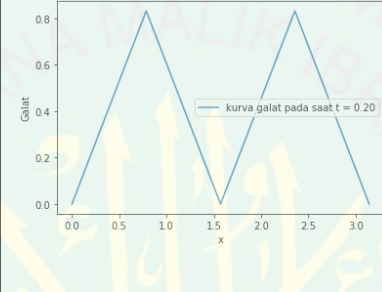
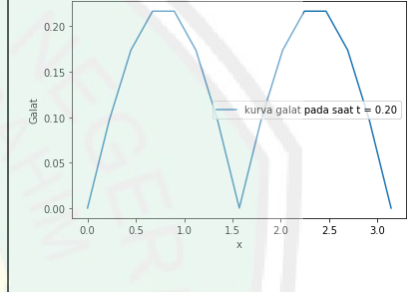
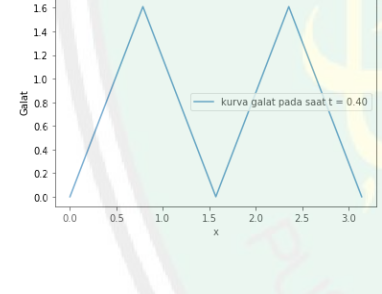
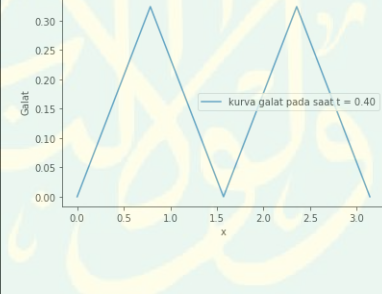
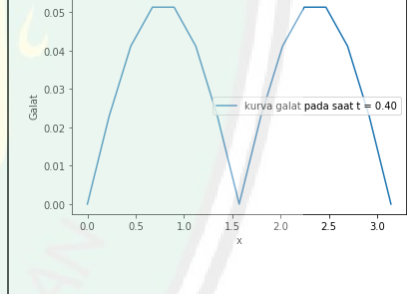
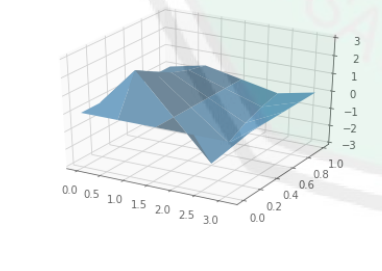
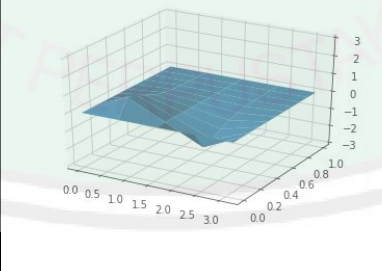
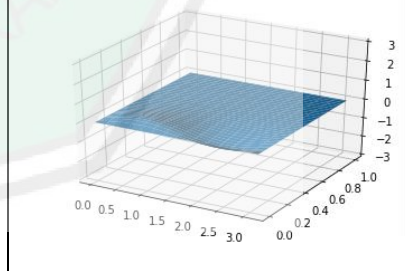
Gambar 3.15 Hasil Galat Simulasi Ketiga Solusi Persamaan Difusi saat Δt dan Δx diperkecil

Pada gambar 3.15 merupakan hasil dari galat simulasi ketiga dalam bentuk grafik 3 dimensi $u(x, t)$ dengan kondisi batas pada interval t dan x masing-masing

adalah $0 < t < 1$ dan $0 < x < \pi$ pada saat $\Delta t = 0,1$ dan $\Delta x = \frac{\pi}{5}$. Gambar 3.15 menginterpretasikan bahwa nilai dari hasil pengurangan solusi numerik dan solusi analitik menunjukkan besar *error* yang semakin kecil daripada simulasi pertama dan simulasi kedua. Karena telah dipilih Δt dan Δx yang semakin kecil.

Kemudian gambar ketiga simulasi tersebut dibandingkan, sehingga diperoleh sebagai berikut

Tabel 3.13 Perbandingan Galat Ketiga Simulasi

Simulasi Pertama	Simulasi Kedua	Simulasi Ketiga
		
		
		

Pada tabel 3.12 simulasi pertama menggunakan $\Delta t = 0,2$ dan $\Delta x = \frac{\pi}{5}$, simulasi kedua menggunakan $\Delta t = 0,1$ dan $\Delta x = \frac{\pi}{5}$ dan simulasi ketiga $\Delta t = 0,01$

dan $\Delta x = \frac{\pi}{15}$. Ketiga simulasi tersebut menunjukkan bahwa semakin kecil Δt dan Δx yang dipilih maka semakin kecil galat yang dihasilkan, sehingga solusi yang dihasilkan semakin mendekati solusi eksaknya. Limit yang dihasilkan dengan nilai Δt dan Δx yang sangat kecil adalah sebesar nol, artinya solusi dari persamaan tersebut mempunyai nilai galat kecil.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Langkah untuk menyelesaikan persamaan difusi dengan menggunakan metode garis adalah pertama, mengganti turunan ruang dengan menggunakan metode beda hingga pusat, sehingga diperoleh sistem persamaan differensial biasa. Kemudian mengganti bentuk sistem persamaan differensial biasa kedalam bentuk matriks. Kedua, menyelesaikan persamaan differensial biasa yang diperoleh dengan menggunakan metode runge kutta orde empat.
2. Hasil penyelesaian persamaan difusi dengan menggunakan metode garis adalah apabila semakin kecil Δx dan Δt yang dipilih maka semakin kecil pula *error* yang dihasilkan. Sehingga menghasilkan solusi yang mendekati solusi analitikya.

4.2 Saran

Skripsi ini merupakan kajian literatur tentang penyelesaian persamaan differensial parsial yaitu persamaan difusi secara numerik dengan menggunakan metode garis dan diselesaikan solusinya dengan menggunakan metode Runge Kutta. Jenis persamaan differensial parsial yang digunakan adalah persamaan differensial parsial linier orde dua. Untuk penelitian selanjutnya disarankan menggunakan persamaan differensial parsial linier dengan menambah simulasi agar semakin akurat dan dengan mengganti kondisi awal dan kondisi batasnya, atau

dengan menggunakan metode yang lain seperti *Finite Volume Method (FVM)* sebagai perbandingan terhadap metode garis.



DAFTAR PUSTAKA

- Campo, Antonio, dan D. Marucho, Marcelo. 2017. Approximate, SemiAnalytic Solution of the Graetz-Nusselt Problem: Method of Lines. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. Hal 1-6.
- Chapra, Steven C dan Canale, Raymond P. 2010. *Numerical Method For Engineers Sixth Edition*. New York : McGraw-Hill.
- Hamdi, S., Schiesser, W.E., dan Griffiths, G.W. 2009. *Method Of Lines*. San Diego: Scholarpedia.
- Holman, J.P. 1994. *Perpindahan Kalor*. E. Jasjfi, penerjemah. Erlangga. Jakarta.
- Munir, Rinaldi. 2013. *Metode Numerik*. Bandung: INFORMATIKA Bandung Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
- Noviyani, Dedek, Yundari, Yudhi. Solusi Persamaan Difusi Pada Larutan Gula Dengan Metode Beda Hingga. *Buletin Ilmiah Math. Stat. Dan Terapannya*. VOL. 08. No. 03. M
- Pregla, R. 2008. *Analysis of Electromagnetic Field and Wave: The Method of Lines*. British: John Wiley & Sons. Ltd.
- Rifa'i, Muhammad Nasib. 2012. *Ringkasan Tafsir Ibnu Katsir Jilid 1 (Surah Al-Faatihah s/d Surah An-Nissa')*. Jakarta: Penerbit GEMA INSANI
- Sadiku, M.N.) dan Obiozor, C.N. 1997. A Simple Introduction to the Method of Lines. *International Journal of Electrical Engineering Education*. Vol. 37, Hal 282-296.
- Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah*. Jakarta: Penerbit Lentera Hati.
- Stavroulakis, Ioannis P. Stepan A Tersian. *Partial Differential Equations*, World Scientific Publishing Co. Re. Ltd. 2004.
- Strauss, Walter A. *Partial Differential Equation An Introduction Second Edition*. Clearancc Center, Inc. 2008.
- Toto, Elisabeth Irma, dkk. 2013. Model KAC Walk Untuk Persamaan Difusi Dimensi Dua. *Beta*. Vol. 6 No. 1.
- Urifah, S.N. 2008. *Penyelesaian Numeric Sistem Persamaan Diferensial Lotka Volterra dengan Metode Runge-Kutta Fehlberg (RKF 45) dan Metode Heun*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Quthb, Sayyid. 2004. *Tafsir Fi Zhilalil-Quran*. Jakarta: Gema Insani Press.

Zain, F.Muhammad, dkk. Analisis Konvergensi Metode Beda Hingga Dalam Menghampiri Persamaan Difusi. *E-Jurnal Matematika*. Vol. 7. No. 1.



DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Iqbalia Ilham Pradini Putri, lahir di Pasuruan pada tanggal 10 Maret 1997. Anak sulung dari 2 bersaudara yakni dari pasangan bapak Eko dan Ibu Ainiyah.

Perempuan yang akrab disapa Dini ini telah menempuh pendidikan formal mulai dari TK Dharma Wanita VIII, lalu pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Gondangwetan 01 dan lulus pada tahun 2009. Kemudian melanjutkan ke SMPN 2 Pasuruan dan lulus pada tahun 2012 dan melanjutkan ke SMAN 4 Pasuruan dan lulus pada tahun 2015. Selanjutnya pada tahun yang sama menempuh kuliah di Universitas Merdeka Pasuruan selama 1 tahun. Kemudian pada tahun 2016 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama menjadi mahasiswa telah mengikuti salah satu kompetisi yaitu Riset Kompetisi Mahasiswa (RKM) pada tahun 2019. Selain itu disela-sela kesibukan menjadi mahasiswa, dia juga asisten laboratorium.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Iqbalia Ilham Pradini Putri
NIM : 16610068
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Penerapan Metode Garis Metode dan Runge Kutta Orde 4
Pada Penyelesaian Persamaan Difusi
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	10 Januari 2020	Revisi Bab I & II (Pembimbing I)	1.
2.	29 Januari 2020	Konsultasi Kajian Agama bab I & bab II (Pembimbing II)	2.
3.	5 Februari 2020	Revisi Bab III (Pembimbing I)	3.
4.	5 Februari 2020	Revisi Kajian Keagamaan Bab I & II (Pembimbing II)	4.
5.	10 Februari 2020	ACC untuk diseminarkan (Pembimbing I)	5.
6.	26 Maret 2020	Konsultasi Bab III & IV (Pembimbing I)	6.
7.	26 Maret 2019	Konsultasi Kajian Agama (Pembimbing II)	7.
8.	27 Maret 2020	ACC untuk di sidangkan (pembimbing I)	8.
9.	29 Maret 2020	Revisi Bab I, II, III & IV (Pembimbing I)	9.
10.	29 Maret 2020	ACC untuk di sidangkan (pembimbing II)	10.

Malang, 29 Maret 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

