

**STUDI ORBIT GEODESIK LUBANG HITAM SCHWARZSCHILD
DALAM KOORDINAT ISOTROPIK**

SKRIPSI

Oleh:
NURALFIN ANRIPA
NIM. 14640035



**JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**STUDI ORBIT GEODESIK LUBANG HITAM SCHWARZSCHILD
DALAM KOORDINAT ISOTROPIK**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:

**Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

Oleh:

**NURALFIN ANRIPA
NIM. 14640035**

**JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

HALAMAN PERSETUJUAN

**STUDI ORBIT GEODESIK LUBANG HITAM SCHWARZSCHILD
DALAM KOORDINAT ISOTROPIK**

SKRIPSI

Oleh:

Nuralfin Anripa

NIM. 14640035

Telah diperiksa dan disetujui untuk Diuji,
Pada tanggal : 8 April 2020

Pembimbing I

Drs. Abdul Basid, M.Si
NIP.19650504 199003 1 003

Pembimbing II

Ahmad Abtokhi, M.Pd
NIP.19761003 200312 1 004

Menyetujui,
Ketua Jurusan



Drs. Abdul Basid, M.Si
NIP.19650504 199003 1 003





HALAMAN PENGESAHAN

**STUDI ORBIT GEODESIK LUBANG HITAM SCHWARZSCHILD
DALAM KOORDINAT ISOTROPIK**

SKRIPSI

Oleh:
Nuralfin Anripa
NIM. 14640035

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 22 April 2020

Penguji Utama	:	<u>Erna Hastuti, M.Si</u> NIP. 19811119 200801 2 009	
Ketua Penguji	:	<u>Muhammad Taufiqi, M.Si</u>	
Sekretaris Penguji	:	<u>Drs. Abdul Basid, M.Si</u> NIP: 19650504 199003 1 003	
Anggota Penguji	:	<u>Ahmad Abtokhi, M.Pd</u> NIP. 19761003 200312 1 004	

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Fisika



Abdul Basid, M.Si
NIP. 19650504 199003 1 003

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Nuralfin Anripa
NIM : 14640035
Jurusan : Fisika
Fakultas : Sains Dan Teknologi
Judul Penelitian : Studi Orbit Geodesik Lubang Hitam Schwarzschild dalam Koordinat Isotropik

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan maka saya bersedia untuk menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 22 April 2020
Yang Membuat Pernyataan



Nuralfin Anripa
NIM. 14640035

MOTTO

“Jika kamu tidak tahan terhadap penatnya belajar, maka kamu akan menahan bahayanya kebodohan” (Imam Syafi’i)

“خير النَّاسِ انْفَعُهُم لِلنَّاسِ”

“Sebaik-baik manusia adalah ia yang bermanfaat bagi manusia lainnya”



HALAMAN PERSEMBAHAN

Dengan mengucap syukur sedalam-dalamnya kepada Allah SWT.
penulis persembahkan karya tulis ini teruntuk kedua orangtua tercinta,

“Bapak Ali Masnir dan Ibu Intan”

Terimakasih atas do’a, restu, dan dukungan yang tiada hentinya.



KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim, dengan mengucapkan syukur alhamdulillah rabbil ‘alamiin penulis panjatkan kehadiran Allah SWT, atas segala limpahan rahmat, taufiq serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul “Studi Orbit Geodesik Lubang Hitam Schwarzschild dalam Koordinat Isotropik”. Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Baginda Nabi Muhammad SAW, yang telah menuntun umatnya dari zaman jahiliyyah menuju zaman yang terang benderang dengan segala ilmu yang sangat luar biasa yang terus menerus akan selalu mengalami perkembangan.

Penulis menyadari bahwa terselesaikannya penulisan skripsi ini tak lepas dari bantuan berbagai pihak, untuk itu pada kesempatan kali ini penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Drs. Abdul Basid, M.Si., selaku Ketua Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Erna Hastuti, M.Si., selaku sebagai dosen penguji 1 Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
5. Muhammad Taufiqi, M.Si., selaku sebagai dosen penguji 2 Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
6. Erika Rani, M.Si., selaku sebagai dosen Fisika Teori yang telah membantu dalam proses pembelajaran dan penyelesaian skripsi ini.
7. Arista Romadani, M.Sc., selaku sebagai dosen Fisika Teori yang telah membantu dalam proses pembelajaran dan penyelesaian skripsi ini.
8. Keluarga khususnya orangtua yang selama ini selalu memberikan dukungan, doa serta semangat agar penulis senantiasa diberikan kemudahan dalam setiap langkahnya

9. Sahabat-sahabat fisika 2014 terkhususnya Athiyah, Dayat, Indana, Arum, Rizza dan teman-teman lainnya yang telah membantu dan memberikan dukungan serta semangat dalam proses penulisan hingga selesai.
10. Semua pihak yang membantu secara langsung maupun tidak langsung yang tidak bisa disebutkan satu persatu demi kesuksesan penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak luput dari berbagai kesalahan dan kekurangan, untuk itu penulis mohon maaf yang setulus-tulusnya. Semoga Allah ridhoi langkah kita. Amin

Malang, 22 April 2020

Penulis

DAFTAR ISI

COVER	i
HALAMAN JUDUL	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTTO	vi
HALAMAN PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR LAMPIRAN	xii
ABSTRAK	xiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	5
BAB II TEORI RELATIVITAS UMUM DAN INTEGRASINYA DALAM ISLAM	6
2.1 Pandangan Islam tentang Teori Relativitas Umum	6
2.2 Dasar-dasar Teori Relativitas Umum	7
2.3 Persamaan Geodesik	10
2.4 Persamaan Medan Einstein	11
BAB III LUBANG HITAM SCHWARZSCHILD	19
3.1 Solusi Schwarzschild	19
3.2 Lubang Hitam Schwarzschild	32
3.3 Persamaan Geodesik Lubang Hitam Schwarzschild	34
3.4 Lubang Hitam dalam Koordinat Lainnya	36
3.4.1 Lubang Hitam Reissner Nordstrom	36
3.4.2 Lubang Hitam Kerr-Newman	37
3.4.3 Lubang Hitam Kerr	37
3.5 Koordinat Isotropik	38
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	40
4.1 Metrik Schwarzschild pada Koordinat Isotropik	40
4.2 Penggambaran Orbit Geodesik dari Lubang Hitam Schwarzschild pada Koordinat Isotropik	44
BAB V PENUTUP	53
5.1 Kesimpulan	53
5.2 Saran	53
DAFTAR PUSTAKA	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Lintasan Lengkung dalam Orbit Geodesik	11
Gambar 3.1	Lubang Hitam Schwarzschild Bermassa M Beradius r	33
Gambar 3.2	Lintasan Lengkung dalam Orbit Geodesik	34
Gambar 3.3	Lintasan Pembelokan Cahaya.....	36
Gambar 3.4	Hamburan Isotropik	36
Gambar 4.1	Pemetaan Koordinat dari Koordinat Radial Isotropik r' terhadap Koordinat Radial Schwarzschild r , dengan Massa Gravitasi m	43
Gambar 4.2	Pemetaan Koordinat Inversi dari Koordinat Radial Schwarzschild r terhadap Koordinat Radial Isotropik $r' \pm$, dengan Massa Gravitasi m	44
Gambar 4.3	Perilaku \dot{r} dalam Geometri Schwarzschild menggunakan Koordinat Isotropik untuk $m = 1$ dan $\epsilon = 1$. Perhatikan Bahwa Kecepatan Koordinat Negatif Sepanjang Jalan dari Horizon (cakrawala) (sekarang pada $m / 2$) hingga Tak Terbatas Spasial	51
Gambar 4.4	Perilaku \ddot{r} dalam Geometri Schwarzschild menggunakan Koordinat Isotropik untuk $m = 1$ dan $\epsilon = 1$. Perhatikan Bahwa Kurva Melintasi Sumbu r Baik $r = \frac{5+2\sqrt{5}}{2} \approx 4.736067977$; Ada Akar Ketiga Nonfisik di $r = \frac{5-2\sqrt{5}}{2} \approx 0.263932023$	51
Gambar 4.5	Perilaku \dot{r} untuk Null Geodesik dalam Geometri Schwarzschild menggunakan Koordinat Isotropik untuk $m = 1$ dan $\epsilon \rightarrow \infty$. Perhatikan Bahwa Kecepatan Koordinat Negatif Sepanjang Jalan dari Horizon (cakrawala) (sekarang pada $m/2$) hingga Tak Terbatas Spasial.....	52
Gambar 4.5	Perilaku \ddot{r} untuk Null Geodesik dalam Geometri Schwarzschild menggunakan Koordinat Isotropik untuk $m = 1$ dan $\epsilon \rightarrow \infty$. Perhatikan Horizon (cakrawala) Sekarang pada $m / 2$; Ada nol Ekstra di $m / 4$. Perhatikan Percepatan Koordinat Positif Sepanjang Jalan dari Cakrawala ke Tak Terhingga Spasial	52

DAFTAR LAMPIRAN

- Lampiran 1 Analisis Tensor
- Lampiran 2 Turunan Kovarian
- Lampiran 3 Pembuktian Persamaan
- Lampiran 4 Pembuktian Persamaan 2



ABSTRAK

Anripa, Nuralfin. 2020. **Studi Orbit Geodesik Lubang Hitam Schwarzschild dalam Koordinat Isotropik**. Skripsi. Jurusan Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Drs. Abdul Basid, M.Si. (II) Ahmad Abthoki, M.Pd.

Kata Kunci: Geodesik, Lubang Hitam Schwarzschild, Isotropik.

Salah satu aplikasi dari Persamaan medan Einstein adalah Solusi Schwarzschild. Solusi ini merupakan solusi metrik yang bersifat bola dan merepresentasikan medan gravitasi di luar suatu partikel bersimetri bola dengan pusat partikel terletak pada pusat koordinat bola, yang memiliki nilai singularitas dan horizon peristiwa yang menjadikannya Lubang hitam. Lubang hitam merupakan suatu daerah dalam ruang-waktu dengan medan gravitasi yang kuat bahkan cahaya pun tidak dapat lolos. Sebuah lubang hitam terbentuk ketika sebuah bintang bermassa M runtuh dan ukurannya lebih kecil dibandingkan radius Schwarzschild $r_s = \frac{2GM}{c^2}$. Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan orbit geodesik dari Lubang Hitam Schwarzschild, yang memiliki nilai fisis sama dalam segala arah. Hal tersebut dilakukan dengan mendapatkan bentuk metrik baru untuk solusi dalam bentuk isotropik. Penelitian kemudian dilanjutkan dengan mencari nilai geodesik yang diperoleh dari Simbol Christoffel dan Tensor Ricci. Berdasarkan penelitian ini, Lubang Hitam Schwarzschild dalam Koordinat Isotropik memiliki keunggulan yang dapat digunakan untuk menelaah kasus kosmologi dalam skala luas.

ABSTRACT

Anripa, Nuralfin. 2020. **Study of the Schwarzschild Black Hole Geodesic Orbit in Isotropic Coordinates**. Thesis. Department of Physics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisors: (I) Drs. Abdul Basid, M.Si. (II) Ahmad Abthoki, M.Pd.

Key Words: Geodesics, Schwarzschild Black Hole, Isotropic.

One application of the Einstein field equation is the Schwarzschild Solution. This solution is a spherical metric solution and represents the gravitational field outside a spherical symmetrical particle with the center of the particle located at the center of the spherical coordinates, which has the value of the singularity and event horizon that makes it a black hole. A black hole is an area in space-time with a strong gravitational field that even light cannot escape. A black hole is formed when a star with an M mass collapses and is smaller than the Schwarzschild radius $r_s = \frac{2GM}{c^2}$. This study aims to obtain a geodesic orbit from the Schwarzschild Black Hole, which has the same physical value in all directions. This is done by obtaining new metric forms for solutions in isotropic forms. The study then continued by searching for the geodesic values obtained from the Christoffel Symbol and Ricci Tensor. Based on this study, the Schwarzschild Black Hole in Isotropic Coordinates has advantages that can be used to examine cosmological cases on a broad scale.

ملخص البحث

أُنريِب ، نور الفين. ٢٠٢٠. دراسة المدار الجيوديسي شوارزشيلد بلاك هول في إحداثيات الخواص. البحث الجامعي. قسم الفيزياء ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية، مالانج. الاشراف: (الاول) الدكتور إمام تازي، الماجستير والدكتور عبد الباسط، الماجستير

الكلمات الرئيسية: الجيوديسية ، شوارزشيلد بلاك هول ، متباين الخواص

أحد تطبيقات معادلة حقل أينشتاين هو حل شوارزشيلد. هذا الحل هو حل متري كروي ويمثل حقل الجاذبية خارج جسيم متمائل كروي مع مركز الجسيم الموجود في مركز الإحداثيات الكروية ، والذي له قيمة التفرد وأفق الحدث الذي يجعله ثقب أسود. الثقب الأسود هو منطقة في الفضاء مع حقل الجاذبية القوي الذي لا يمكن للضوء أن يفلت منه. يتشكل ثقب أسود عندما ويكون حجمه أصغر من نصف قطر M بنهار نجم ذو كتلة شوارزشيلد $r_s = \frac{2GM}{c^2}$. يهدف هذا البحث إلى الحصول على مدار جيوديسي من لو ، شوارزشيلد بلاك هول التي لها نفس القيمة المادية في جميع الاتجاهات. يتم ذلك عن طريق الحصول على أشكال مترية. ثم استمر البحث في إيجاد القيم الجيوديسية. تم الحصول عليها من رموز كريستوفيل وتنسور ريتشي بناءً على هذا البحث ، يتميز الإيزوتروبي إحداثيات بمزايا يمكن استخدامها لفحص الحالات الكونية على نطاق واسع

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang

Suatu bintang yang telah habis masa hidupnya akan melakukan penyusutan, tapi tidak serta merta menjadi tidak bermassa. Sampai saat ini diketahui setidaknya ada tiga jenis keadaan akhir untuk setiap bintang yaitu bintang katai putih, bintang neutron, dan lubang hitam.

Fisikawan Subrahmanyan Chandrasekhar, pemenang Nobel fisika tahun 1983 merumuskan bahwa bintang tua akan mengalami pengerutan sehingga tidak ada tekanan apapun yang dapat menahan pengerutannya apabila memiliki massa lebih besar daripada 3 kali massa matahari. Bintang tersebut akan terus mengerut melewati jejari Schwarzschild dan terbentuklah sebuah bintang lubang hitam. Lubang hitam tidak dapat terlihat akan tetapi bisa dideteksi dari materi yang tertarik atau tersedot ke arahnya (Wospakrik, 1987).

Sifat lubang hitam tersebut telah dijelaskan jauh sebelum ditemukan oleh fisikawan, sebagaimana dijelaskan firman Allah dalam Surah *At-Takwir* 15-16:

فَلَا أُفْسِمُ بِالْخُنَّسِ (١٥) الْجَوَارِ الْكُنَّسِ (١٦)

“(15) Aku bersumpah demi bintang tersembunyi; (16) Yang bergerak cepat yang menyapu”.

Dalam Surah *At-Takwir* ayat 15 sampai 16 Allah bersumpah dengan salah satu makhluk-Nya yakni bintang yang memiliki tiga karakter. Bintang yang dimaksud dalam ayat ini adalah lubang hitam yang sesuai dengan karakter dari

lubang hitam yaitu memiliki sifat tidak terlihat (tersembunyi), bergerak dan menyapu apapun disekitarnya. Lubang hitam merupakan suatu daerah dalam ruang-waktu dengan medan gravitasi yang kuat bahkan cahaya pun tidak dapat lolos. Sebuah lubang hitam terbentuk ketika sebuah bintang bermassa M runtuh dan ukurannya lebih kecil dibandingkan radius Schwarzschild $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ (Frolov dan Novikov, 1998).

Teori adanya lubang hitam pertama kali diajukan pada abad ke-18 oleh John Michell dan Pierre-Simon Laplace yang mengemukakan bahwa sebuah bintang yang cukup bermassa dan rapat akan mempunyai medan gravitasi yang kuat sehingga cahaya tidak dapat lolos dari medan ini. Setiap cahaya yang dipancarkan oleh bintang akan diseret oleh tarikan gravitasi bintang tersebut sebelum merambat jauh. Teori ini selanjutnya dikembangkan oleh seorang astronom Jerman bernama Karl Schwarzschild pada tahun 1916 yang berdasar pada teori relativitas umum Albert Einstein.

Karl Schwarzschild melakukan penelitian mengenai solusi dari persamaan Einstein yang menggambarkan evolusi geometri ruang-waktu. Schwarzschild akhirnya mendapatkan solusi metrik yang bersifat bola dan merepresentasikan medan gravitasi di luar suatu partikel bersimetri bola dengan pusat partikel terletak pada pusat koordinat bola. Solusi ini menghasilkan adanya sebuah ruang yang berisi gravitasi. Hal inilah yang menyebabkan adanya kelengkungan yang mencegah apapun lolos darinya, bahkan cahaya sekalipun. Oleh karena itu dinamakan lubang hitam (Anugraha, 2014).

Penelitian Schwarzschild kemudian dikembangkan hingga saat ini setidaknya terdapat beberapa model lubang hitam dengan karakteristik lainnya, diantaranya lubang hitam bermuatan (Reissner-Nordstrom), lubang hitam berotasi (lubang hitam Kerr), dan lubang hitam berotasi dan bermuatan (lubang hitam Kerr-Newman). Penelitian lainnya dikembangkan oleh Weyl pada tahun 1917 dengan memperkenalkan metrik baru. Weyl memberikan informasi metrik baru dengan mengubah parameter r (jari-jari Schwarzschild), yang kemudian dikenal sebagai metrik Schwarzschild dalam koordinat isotropik.

Koordinat isotropik memiliki sifat fisik yang sama di segala arah sehingga sangat perlu didalami untuk memahami karakteristik lubang hitam. Oleh karena itu, Penelitian ini dilakukan untuk mengkaji dan mendapatkan interpretasi lintasan terpendek (orbit geodesik) sebuah partikel akibat pengaruh lubang hitam Schwarzschild dalam koordinat isotropik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian di atas, dapat diketahui bahwa lubang hitam Schwarzschild memiliki pengaruh terhadap orbit geodesik sebuah partikel yang dibahas dalam koordinat isotropik. Rumusan masalah dalam penelitian ini dijabarkan sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk metrik Schwarzschild pada koordinat Isotropik?
2. Bagaimana penggambaran orbit geodesik dari lubang hitam Schwarzschild pada koordinat isotropik?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk memperoleh bentuk metrik Schwarzschild pada koordinat isotropik.
2. Untuk memperoleh penggambaran orbit geodesik lubang hitam Schwarzschild dengan koordinat isotropik.

1.4 Manfaat Penelitian

Setelah menyelesaikan dan menyusun hasil penelitian, diharapkan penelitian ini dapat memberi manfaat kepada orang-orang yang membacanya, khususnya dibidang astrofisika. Manfaat penelitian ini dijabarkan sebagai berikut:

1. Secara akademis, penelitian ini diharapkan memberikan ilmu yang bermanfaat kepada masyarakat ilmiah maupun berbagai pihak yang berkepentingan.
2. Secara praktis, penelitian ini diharapkan menjadi referensi bagi pihak-pihak yang melakukan penelitian di bidang yang sama, khususnya para peneliti di bidang fisika teori.
3. Secara teoritis, penelitian ini diharapkan akan memberi masukan dan kontribusi yang berarti berupa teori dan analisis secara matematik, khususnya pada penelitian yang berkaitan dengan lubang hitam, solusi Schwarzschild, dan koordinat isotropik.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian tentang lubang hitam Schwarzschild memiliki cakupan yang sangat luas. Untuk membatasi ruang lingkup pembahasan penelitian ini, penulis memberi batasan-batasan masalah agar isi pembahasan tidak melenceng dari rumusan masalah. Batasan masalah dalam penelitian ini dijabarkan sebagai berikut:

1. Perhitungan solusi Schwarzschild dalam koordinat isotropik agar dapat memenuhi penyimpangan geodesik hingga terbentuk lubang hitam.
2. Interpretasi fisis yang ditinjau adalah orbit geodesik yang terkait dengan lubang hitam Schwarzschild dalam koordinat isotropik.

BAB II TEORI RELATIVITAS UMUM DAN INTEGRASINYA DALAM ISLAM

2.1 Pandangan Islam tentang Teori Relativitas Umum

Teori Relativitas Umum berhasil menelaah fenomena alam, seperti adanya lubang hitam. Lubang hitam merupakan bintang yang tidak memancarkan cahayanya lagi, serta memiliki sifat dapat bergerak dan menelan segala sesuatu disekitarnya. Sifat yang dimiliki lubang hitam tersebut sesuai dengan yang telah disampaikan dalam Al-Qur'an bahwa, ada suatu bintang tidak terlihat yang bergerak, menghisap dan menyapu. Ayat tersebut dijelaskan pada surat At-Takwir 15-16 yang berbunyi:

فَلَا أُفْسِسُ بِالْخُنَّسِ (١٥) الْجَوَّارِ الْكُنَّسِ (١٦)

“(15) Aku bersumpah demi bintang tersembunyi; (16) Yang bergerak cepat yang menyapu”. (Q.S At-Takwir [81]: 15-16).

Dalam Surah At-Takwir ayat 15 sampai 16 Allah bersumpah dengan salah satu makhluk-Nya yakni bintang yang bernama atau memiliki tiga karakter. Pertama, *khunnas* (الْخُنَّسِ) yang artinya tersembunyi dan tidak terlihat. Karenanya, setan disebut juga *khannaas* (الخناس) karena ia tidak terlihat oleh bani Adam. Hal ini sama dengan yang disebutkan ilmuwan tentang salah satu karakter lubang hitam yaitu tidak terlihat. Kedua, *aljawaar* (الْجَوَّارِ) yang artinya bergerak sangat cepat. Hal ini juga sesuai dengan salah satu karakter lubang hitam yang lainnya yaitu bergerak. Ketiga, *al kunnas* (الْكُنَّسِ) yang menyapu dan menelan setiap yang ditemuinya (Thayyarah, 2013).

Kunnas berasal dari *kanasa* mengikuti wazan fa'aala yang artinya menyapu dan merupakan bentuk jamak dari *kaanais* yang artinya menyapu. *Kunnas* adalah *shigat mutaha jumuk* (bentuk jamak paling tinggi) yang berasal dari bentuk tunggal *kaanis*. Para ulama tafsir klasik menjelaskan bahwa *khunnas al jawaril kunnas* berarti bintang yang cahayanya tidak muncul pada siang hari dan muncul pada malam hari. Akan tetapi, penafsiran ini bukan menunjukkan makna sesungguhnya. Penafsiran yang paling sesuai dengan realitas semesta adalah lubang hitam (Thayyarah, 2013).

2.2 Dasar-dasar Teori Relativitas Umum

Konsep gravitasi pertama kali dijelaskan oleh Isaac Newton, dengan menjabarkan besarnya gaya gravitasi antara dua benda yang saling tarik menarik diberikan oleh:

$$\vec{F} = -(Gm_1m_2)(\vec{r}/r^3) \quad (2.1)$$

m_1 dan m_2 adalah massa benda pertama dan kedua, r jarak antara dua benda, dan G adalah konstanta gravitasi. Hukum ini telah menjadi teori gravitasi yang menonjol selama lebih dari 200 tahun sampai Albert Einstein mengusulkan teori gravitasi.

Hukum gravitasi yang dirumuskan oleh newton telah berhasil menjelaskan perilaku benda-benda langit yang dipengaruhi oleh interaksi gravitasi antar benda-benda tersebut dengan ketelitian tinggi. Akan tetapi, hukum newton tentang gravitasi ini tidak konsisten dengan Teori Relativitas Khusus. Dalam hukum

newton, jika sebuah benda digerakkan maka akan merubah gaya gravitasinya terhadap benda lain dengan seketika atau terjadi aksi spontan. Dengan kata lain, pengaruh gaya gravitasi haruslah merambat dengan kelajuan tak hingga, sesuatu yang bertentangan dengan Teori Relativitas Khusus.

Einstein mengusulkan sebuah gagasan revolusioner bahwa tiga dimensi ruang dan waktu terjalin dalam empat dimensi yang disebut Ruang-waktu. Konsep gravitasi yang diusulkan Einstein yaitu gravitasi bukan suatu gaya, tetapi kelengkungan dalam ruang-waktu yang disebabkan oleh penyebaran massa dan energi yang dibuat oleh benda masif.

Asas Kesetaraan dan Kovariansi digunakan untuk membangun Teori Relativitas Umum. Salah satu implikasi mendasar dari asas kesetaraan adalah kesamaan antara massa inersial dengan massa gravitasi. Sifat ini memungkinkan untuk menghilangkan pengaruh medan gravitasi yang timbul menggunakan kerangka acuan dipercepat. Hal ini merupakan akibat dari medan gravitasi yaitu semua benda yang berada di dalam jangkauannya akan mengalami percepatan yang sama dan tidak tergantung pada ukuran atau massa. Ditinjau suatu objek bermassa (m) yang jatuh di dalam medan gravitasi dengan percepatan gravitasinya sebesar g , dengan menggunakan koordinat (x, t) yang berdasarkan hukum Newton, persamaan gerak objek tersebut adalah (Wospakrik, 1987):

$$m_I \frac{d^2x}{dt^2} = m_G g. \quad (2.2)$$

Melalui persamaan transformasi:

$$x' = x - \frac{1}{2}gt^2 \text{ dan } t' = t, \quad (2.3)$$

pada koordinat (x', t') , maka persamaan (2.2) menjadi

$$m_I \frac{d^2 x'}{dt'^2} + m_I g = m_G g. \quad (2.4)$$

Karena massa inersial m_I sama dengan massa gravitasi m_G maka,

$$m_I \frac{d^2 x}{dt^2} = 0. \quad (2.5)$$

Berdasarkan persamaan (2.5) dipilih kerangka acuan inersial (x', t') untuk menghilangkan pengaruh gravitasi pada kerangka (x, t) . Dalam pengertian, kerangka (x, t) merupakan kerangka dipercepat dengan percepatan sebesar g terhadap kerangka inersial (x', t') pada daerah tanpa medan gravitasi. Sehingga dari pernyataan tersebut menunjukkan bahwa kerangka acuan inersial dalam daerah tanpa medan gravitasi memiliki hukum gerak yang sama dengan kerangka jatuh bebas di dalam medan gravitasi (non-inersial).

Medan gravitasi dalam kerangka inersial tidak persis sama dengan medan gravitasi dalam kerangka non-inersial. Pada tempat yang jauh dari sumber, medan gravitasi dalam kerangka non-inersial menjadi hilang, sedangkan medan gravitasi dalam kerangka inersial memiliki nilai tertentu. Sebaliknya medan gravitasi dalam kerangka inersial akan hilang ketika percepatan kerangkanya dihilangkan, sedangkan medan gravitasi dalam kerangka non-inersial tidak dapat dihilangkan oleh pemilihan kerangka acuan manapun. Sehingga, pada kerangka inersial maupun non-inersial berlaku hukum alam yang mengikuti asas kovariansi Teori Relativitas Khusus. Asas kovariansi umum yang dimaksud berbunyi, "*Hukum alam harus memiliki bentuk yang tetap terhadap sebarang pemilihan transformasi koordinat*".

2.3 Persamaan Geodesik

Ditinjau dalam suatu ruang terdapat dua titik x^μ dan $x^\mu + dx^\mu$. Jarak antara kedua titik tersebut adalah

$$s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right)^{1/2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{F} dt \quad (2.6)$$

Syarat stasioner bagi jarak kedua titik itu agar s_{12} bernilai ekstrem akan dipenuhi jika

$$\delta s_{12} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{F} dt = 0 \quad (2.7)$$

dengan δs_{12} adalah variasi dari s_{12} . Bentuk (2.7) merupakan integral aksi fungsi Lagrange \sqrt{F} dan persamaan lintasan t . Dengan menggunakan persamaan Euler-Lagrange berikut (Lawden, 1982)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \sqrt{F}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \sqrt{F}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2.8)$$

maka

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial \sqrt{F}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{1}{2\sqrt{F}} \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2\sqrt{F}} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \sqrt{F}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2F} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} \frac{dF}{dt} \right] = 0 \quad (2.9)$$

dianggap t pada persamaan (2.9) sama dengan t dalam jarak s_{12} persamaan (2.6) sepanjang kurva lintasan. Pada persamaan (2.9) dikarenakan s parameter sembarang, maka bias diambil $s = t$.

$$\frac{dF}{ds} = 0, \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}, F = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \quad (2.10)$$

sehingga diperoleh

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} = 2g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \quad (2.11)$$

dan

$$\frac{\partial F}{\partial x^\mu} = \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}. \quad (2.12)$$

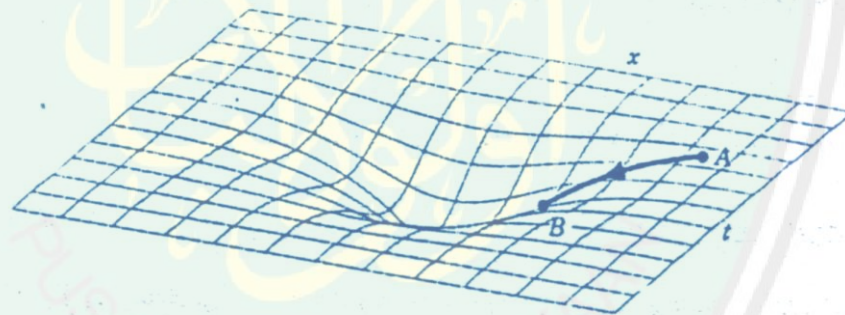
Persamaan (2.12) menjadi

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = 2g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} + 2 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\eta} \frac{dx^\eta}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (2.13)$$

selanjutnya dihitung menggunakan Simbol Christoffel jenis pertama kemudian mengalikannya dengan $g^{\mu\eta}$, sehingga persamaan (2.13) menjadi

$$\frac{d^2 x^\nu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (2.14)$$

Persamaan (2.14) disebut sebagai persamaan geodesik. Persamaan ini merupakan persamaan gerak dalam ruang lengkung, yang dapat digunakan untuk menjabarkan gerak jatuh bebas suatu partikel dalam ruang bermetrik. Lintasan partikel dari titik A ke B dalam ruang lengkung dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Lintasan Lengkung dalam Orbit Geodesik (Anugraha, 2014)

2.4 Persamaan Medan Einstein

Hukum Gravitasi Newton memiliki bentuk yang hampir sama dengan hukum Coulomb dalam listrik. Persamaan potensial listrik dalam hukum Coulomb dinyatakan,

$$\nabla^2 \phi = -4\pi k \rho(\vec{r}), \quad (2.15)$$

ϕ merupakan skalar potensial listrik, k merupakan tetapan dan $\rho(\vec{r})$ merupakan rapat muatan sumber. Persamaan potensial listrik (2.15) berhubungan dengan persamaan potensial medan gravitasi Newton berbentuk,

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G \rho(\vec{r}), \quad (2.16)$$

G adalah konstanta gravitasi Newton ($6,67 \times 10^{-11} m^3 s^{-2} kg^{-1}$), $\rho(\vec{r})$ kerapatan massa sumber medan gravitasi, dan ϕ pada persamaan (2.16) adalah potensial gravitasi.

Untuk memperoleh persamaan yang merepresentasikan suatu medan gravitasi dapat dilakukan dengan identitas bianchi yang terdapat dalam geometri Riemann sehingga mendapatkan tensor Einstein. Persamaan (2.16) potensial gravitasinya (ϕ) diubah dan diperluas menjadi kelengkungan ruang-waktu yang tertuang dalam Tensor Einstein ($G_{\mu\nu}$), yaitu

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2.17)$$

dimana Tensor Einstein ($G_{\mu\nu}$) terdiri dari Tensor kelengkungan ($R_{\mu\nu}$), Tensor Gravitasi ($g_{\mu\nu}$) dan Skalar kelengkungan (R).

Selanjutnya rapat massa $\rho(\vec{r})$ pada persamaan (2.16) digeneralisasi menjadi tensor energi-momentum $T_{\mu\nu}$. Berdasarkan persamaan (2.16) potensial medan gravitasi berbanding lurus dengan rapat massa sumber medan, sehingga kelengkungan ruang-waktu berbanding lurus pula dengan tensor energi-momentum yang dinyatakan dalam rumus:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.18)$$

Persamaan (2.18) merupakan hukum gravitasi Einstein dengan κ berupa suatu tetapan positif yang memiliki hubungan dengan G . persamaan tersebut memiliki dua bentuk variasi,

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}R = -\kappa T_{\nu}^{\mu}, \quad (2.19)$$

dan

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -\kappa T^{\mu\nu}, \quad (2.20)$$

Kedua persamaan (2.19) dan (2.20) merupakan bentuk persamaan tensor campuran dan kontravarian. Jika persamaan (2.19) dikontraksikan maka diperoleh:

$$R = \kappa T. \quad (2.21)$$

Selanjutnya persamaan (2.21) disubstitusikan ke persamaan (2.18), sehingga hukum gravitasi Einstein menjadi:

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T - T_{\mu\nu} \right). \quad (2.22)$$

Teori Relativitas umum memenuhi syarat dasar dalam pengembangan ilmu fisika yaitu asas korespondensi. Teori ini memiliki sifat kovarian yang dijabarkan dalam persamaan (2.22) setelah direduksi akan kembali menjadi hukum gravitasi Newton dengan medan gravitasi lemah. Jika ruang waktu yang digunakan memiliki medan gravitasi maka dapat digunakan geometri Riemann. Sedangkan jika ruang waktunya tidak dipengaruhi medan gravitasi maka digunakan geometri euklid. Ruang Euklid merupakan ruang datar yang apabila ditambahkan waktu maka akan menjadi ruang-waktu minkowski yang dirumuskan sebagai:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.23)$$

Sehingga jika medan gravitasi lemah, metrik ruang-waktu yang dapat digunakan metrik (2.23). Tensor metrik $g_{\mu\nu}$ dalam medan gravitasi lemah dapat didekati dengan bentuk:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.24)$$

dengan $\eta_{\mu\nu}$ adalah tensor metrik Minkowski dan $h_{\mu\nu}$ kecil ($\ll 1$).

Anggap suatu partikel yang bergerak ditinjau dalam medan gravitasi lemah, dengan tensor metrik diberikan oleh persamaan (2.24). Partikel tersebut dalam ruang-waktu menempuh lintasan geodesik. Sebagaimana telah dijabarkan pada persamaan (2.14), persamaan geodesik lintasan tersebut dirumuskan sebagai:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (2.25)$$

Dengan hubungan:

$$ds^2 = -d\tau^2 \quad (2.26)$$

persamaan (2.25) menjadi:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.27)$$

dengan mengisikan $\alpha = \beta = 0$ diperoleh:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad (2.28)$$

Terlihat persamaan (2.28) memenuhi syarat stasioner seperti yang telah dijabarkan pada persamaan (2.15). Karena medan tersebut memiliki sifat stasioner, seluruh turunan $g_{\mu\nu}$ lenyap, sehingga:

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu h_{00} \quad (2.29)$$

Dari persamaan (2.29) dapat diuraikan menjadi dua persamaan berikut:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00} \quad (2.30)$$

dan

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \quad (2.31)$$

Persamaan (2.31) menyatakan bahwa $dt/d\tau$ bernilai konstan. Dengan membagi kedua ruas persamaan (2.30) dengan $(dt/d\tau)^2$, diperoleh percepatan gerak benda:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00} \quad (2.32)$$

Di sisi lain, jika ϕ adalah potensial gravitasi Newton pada jarak r dari titik massa M yang besarnya:

$$\phi = -\frac{GM}{r} \quad (2.33)$$

Maka jika persamaan (2.32) dihubungkan dengan hasil newtonian $\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\nabla \phi$, diperoleh hasil:

$$h_{00} = -2\phi + \text{tetapan} \quad (2.34)$$

Pada tempat yang jauh dari sumber medan gravitasi, h_{00} lenyap dikarenakan sistem koordinatnya berubah menjadi sistem koordinat Minkowski. Begitu juga ϕ pada persamaan (2.33) sehingga tetapan pada persamaan (2.34) di atas bernilai nol. Akhirnya diperoleh:

$$g_{00} = -(1 + 2\phi) \quad (2.35)$$

sedangkan pasangan kontravariannya adalah:

$$g^{00} = -(1 + 2\phi)^{-1} \quad (2.36)$$

Selanjutnya hukum gravitasi Einstein dapat direduksi menjadi hukum gravitasi Newton pada kasus normal dimana intensitas medan gravitasi bernilai lemah serta sebaran materi bersifat statik. Pereduksian tersebut akan menghasilkan hubungan antara κ (gravitasi Einstein) dan G (gravitasi Newton).

Ditinjau bentuk tensor Riemann-Christoffel dalam medan lemah. Tensor metrik diberikan oleh persamaan (2.24). Nilai lambang Christoffel jenis kedua adalah:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right) = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial h_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial h_{\nu\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right) \quad (2.37)$$

jika nilai perkalian $h_{\mu\nu}$ diabaikan, maka nilai tensor Ricci untuk $\mu = \nu = 0$ bernilai:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \partial_0 \Gamma_{0\nu}^{\nu} - \partial_{\nu} \Gamma_{00}^{\nu} \\ &= \partial_0 \left(\frac{1}{2} \eta^{\nu\beta} \left(\frac{\partial h_{\beta 0}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial h_{\nu\beta}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{0\nu}}{\partial x^{\beta}} \right) \right) - \partial_{\nu} \left(\frac{1}{2} \eta^{\nu\beta} \left(\frac{\partial h_{\beta 0}}{\partial x^0} + \frac{\partial h_{0\beta}}{\partial x^0} - \frac{\partial h_{00}}{\partial x^{\beta}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\nu\beta} (\partial_0 \partial_0 h_{\nu\beta} + \partial_{\nu} \partial_{\beta} h_{00} - \partial_0 \partial_{\beta} h_{0\nu} - \partial_0 \partial_{\nu} h_{0\beta}) \end{aligned} \quad (2.38)$$

jika sebaran materi bersifat statik maka $h_{\mu\nu}$ bukan merupakan fungsi t melainkan:

$$\partial_0 h_{\mu\nu} = 0 \quad (2.39)$$

sehingga persamaan (2.38) menjadi:

$$R_{00} = \frac{1}{2} \eta^{\nu\beta} \partial_{\nu} \partial_{\beta} h_{00} = \frac{1}{2} (\eta^{11} \partial_1 \partial_1 + \eta^{22} \partial_2 \partial_2 + \eta^{33} \partial_3 \partial_3) h_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} \quad (2.40)$$

dimana:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.41)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.7) dan (2.34), persamaan (2.40) menjadi:

$$R_{00} = -\nabla^2 \phi = -4\pi G\rho \quad (2.42)$$

Tensor energi-momentum fluida sempurna dirumuskan sebagai:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)V_\mu V_\nu + g_{\mu\nu}p \quad (2.43)$$

Sebaran materi yang bersifat statik (sebagai contoh kumpulan debu) tidak memiliki tekanan internal p mengakibatkan persamaan (2.43) dapat tereduksi menjadi:

$$T_{\mu\nu} = \rho V_\mu V_\nu \quad (2.44)$$

selain itu, vektor kecepatan - 4 adalah:

$$V_{\mu\nu} = (-1, \vec{0}) \quad (2.45)$$

Selanjutnya untuk komponen $T_{\mu\nu}$ seluruhnya lenyap kecuali $T_{00} = \rho$. Nilai skalar T dapat diperoleh dengan menggunakan perkalian dalam antara tensor metrik kontravarian ($g^{\mu\nu}$) dengan tensor energi-momentum kovarian sebagai:

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = g^{00}T_{00} = -\frac{\rho}{1+2\phi} \quad (2.46)$$

dengan menggunakan persamaan (2.24), nilai R_{00} adalah:

$$R_{00} = \kappa \left(\frac{1}{2} g_{00}T - T_{00} \right) = \kappa \left(\frac{1}{2} - (1 + 2\phi) - \frac{\rho}{1+2\phi} - \rho \right) = -\frac{1}{2} \kappa \rho \quad (2.47)$$

dihubungkan dengan persamaan (2.44), akhirnya diperoleh:

$$\kappa = 8\pi G \quad (2.48)$$

sehingga persamaan gravitasi Einstein (2.12) menjadi:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2.49)$$

Gravitasi bukan disebabkan oleh adanya interaksi antar objek, melainkan karena adanya kelengkungan struktur ruang-waktu pada alam semesta. Sesuai dengan persamaan (2.49) kelengkungan struktur ruang waktu ($R_{\mu\nu}$) yang menyebabkan adanya gravitasi, sehingga fenomena gravitasi sangat berkaitan dengan geometri dari ruang-waktu tersebut. Jika ada suatu benda bermassa, maka ruang-waktu yang berada di sekitar benda tersebut akan melengkung dan kelengkungan dari ruang waktu tersebut bergantung dari materi atau objek fisis yang dimiliki oleh benda tersebut. Ruang waktu lengkung yang diakibatkan oleh suatu benda bermassa akan mempengaruhi benda lain disekitarnya, interaksi ini disebut gravitasi. Sehingga dapat dikatakan bahwa, gravitasi berkaitan sangat erat dengan geometri ruang-waktu di sekitar objek tersebut, yang ditentukan oleh parameter-parameter fisis di dalam objek tersebut (*geometry is merged with physics*). Melengkungnya lintasan cahaya karena medan gravitasi juga dapat diartikan bahwa sifat ruang ditentukan oleh distribusi materi dan berlaku sebaliknya.

Selanjutnya persamaan (2.49) akan diterapkan untuk mendapatkan objek statik bermassa M pada pusat koordinat. Koordinat yang digunakan yaitu koordinat empat dimensi dengan 3 dimensi koordinat ruang polar (r, θ, ϕ) dan satu dimensi koordinat waktu (t).

BAB III LUBANG HITAM SCHWARZSCHILD

3.1 Solusi Schwarzschild

Pada bab II telah dibahas bahwa geometri ruang-waktu yang terdapat di sekitar objek ditentukan oleh fungsi metrik yang berkaitan dengan objek tersebut. Untuk objek yang memiliki simetri bola, dinyatakan bahwa, metrik $g_{\mu\nu}$ merepresentasikan struktur ruang-waktu statik yang simetrik pada ruang kosong (*empty space*) di luar objek masif yang memiliki simetri bola (Hobson dkk, 2006).

Solusi Schwarzschild merupakan salah satu solusi eksak dari persamaan medan Einstein berupa solusi vakum simetri bola. Pada solusi vakum, $R_{\mu\nu}$ menunjukkan tidak adanya medan lain selain gravitasi. Bentuk umum dari elemen garis simetri bola diberikan oleh (Carmeli, 1982):

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} c^2 dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.1)$$

dengan $\nu = \nu(r)$ dan $\lambda = \lambda(r)$ merupakan fungsi yang belum terdefinisikan dari koordinat radial r . Pada metrik (3.1) digunakan fungsi eksponensial agar memenuhi bentuk yang benar dari semua syarat eksponensial, sehingga tensor metrik kovarian medan gravitasi simetri bola statis diberikan oleh:

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Tensor metrik kontravarian diberikan oleh

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} e^{-2v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

metrik (3.1) dapat dihitung menggunakan definisi simbol Christoffel jenis pertama menggunakan definisi

$$\Gamma_{j,kn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{nj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^j} \right) \quad (3.4)$$

Simbol Christoffel jenis pertama pada metrik (3.1) diuraikan sebagai berikut

(Dallarson, 2015):

$$\Gamma_{0,00} = \frac{1}{2} (\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = 0,$$

$$\Gamma_{0,01} = \Gamma_{0,10} = \frac{1}{2} (\partial_r g_{00} + \partial_0 g_{10} - \partial_0 g_{01}) = v'(r) \exp(2v),$$

$$\Gamma_{0,02} = \Gamma_{0,20} = \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{00} + \partial_0 g_{20} - \partial_0 g_{02}) = 0,$$

$$\Gamma_{0,03} = \Gamma_{0,30} = \frac{1}{2} (\partial_\varphi g_{00} + \partial_0 g_{30} - \partial_0 g_{03}) = 0,$$

$$\Gamma_{0,11} = \frac{1}{2} (\partial_r g_{01} + \partial_r g_{10} - \partial_0 g_{11}) = 0,$$

$$\Gamma_{0,12} = \Gamma_{0,21} = \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{01} + \partial_r g_{20} - \partial_0 g_{12}) = 0,$$

$$\Gamma_{0,13} = \Gamma_{0,31} = \frac{1}{2} (\partial_\varphi g_{01} + \partial_r g_{30} - \partial_0 g_{13}) = 0,$$

$$\Gamma_{0,22} = \frac{1}{2} (\partial_\theta g_{02} + \partial_\theta g_{20} - \partial_0 g_{22}) = 0$$

$$\Gamma_{0,33} = \frac{1}{2} (\partial_\varphi g_{03} + \partial_\varphi g_{30} - \partial_0 g_{33}) = 0$$

$$\Gamma_{1,00} = \frac{1}{2}(\partial_0 g_{10} + \partial_0 g_{01} - \partial_r g_{00}) = -v'(r) \exp(2v),$$

$$\Gamma_{1,01} = \Gamma_{1,10} = \frac{1}{2}(\partial_r g_{10} + \partial_0 g_{11} - \partial_r g_{01}) = 0,$$

$$\Gamma_{1,02} = \Gamma_{1,20} = \frac{1}{2}(\partial_\theta g_{10} + \partial_0 g_{21} - \partial_r g_{02}) = 0,$$

$$\Gamma_{1,03} = \Gamma_{1,30} = \frac{1}{2}(\partial_\varphi g_{10} + \partial_0 g_{31} - \partial_r g_{03}) = 0,$$

$$\Gamma_{1,11} = \frac{1}{2}(\partial_r g_{11} + \partial_r g_{11} - \partial_r g_{11}) = -\lambda'(r) \exp(2\lambda),$$

$$\Gamma_{1,12} = \Gamma_{1,21} = \frac{1}{2}(\partial_\theta g_{11} + \partial_r g_{21} - \partial_r g_{12}) = 0,$$

$$\Gamma_{1,13} = \Gamma_{1,31} = \frac{1}{2}(\partial_\varphi g_{11} + \partial_r g_{31} - \partial_r g_{13}) = 0,$$

$$\Gamma_{1,22} = \frac{1}{2}(\partial_\theta g_{12} + \partial_\theta g_{21} - \partial_r g_{22}) = r,$$

$$\Gamma_{1,23} = \Gamma_{1,32} = \frac{1}{2}(\partial_3 g_{12} + \partial_\theta g_{31} - \partial_r g_{23}) = 0,$$

$$\Gamma_{1,33} = \frac{1}{2}(\partial_\varphi g_{13} + \partial_\varphi g_{31} - \partial_r g_{33}) = r \sin^2 \theta,$$

$$\Gamma_{2,00} = \frac{1}{2}(\partial_0 g_{20} + \partial_0 g_{02} - \partial_\theta g_{00}) = 0,$$

$$\Gamma_{2,01} = \Gamma_{2,10} = \frac{1}{2}(\partial_r g_{20} + \partial_0 g_{12} - \partial_\theta g_{01}) = 0,$$

$$\Gamma_{2,02} = \Gamma_{2,20} = \frac{1}{2}(\partial_\theta g_{20} + \partial_0 g_{22} - \partial_\theta g_{02}) = 0,$$

$$\Gamma_{2,03} = \Gamma_{2,30} = \frac{1}{2}(\partial_{\theta}g_{20} + \partial_0g_{32} - \partial_{\theta}g_{03}) = 0,$$

$$\Gamma_{2,11} = \frac{1}{2}(\partial_rg_{21} + \partial_rg_{12} - \partial_{\theta}g_{11}) = 0,$$

$$\Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,21} = \frac{1}{2}(\partial_{\theta}g_{21} + \partial_rg_{22} - \partial_{\theta}g_{12}) = -r,$$

$$\Gamma_{2,13} = \Gamma_{2,31} = \frac{1}{2}(\partial_{\varphi}g_{21} + \partial_rg_{32} - \partial_{\theta}g_{13}) = 0,$$

$$\Gamma_{2,22} = \frac{1}{2}(\partial_{\theta}g_{22} + \partial_{\theta}g_{22} - \partial_{\theta}g_{22}) = 0,$$

$$\Gamma_{2,23} = \Gamma_{2,32} = \frac{1}{2}(\partial_{\varphi}g_{22} + \partial_{\theta}g_{32} - \partial_{\theta}g_{23}) = 0,$$

$$\Gamma_{2,33} = \frac{1}{2}(\partial_{\varphi}g_{23} + \partial_{\varphi}g_{32} - \partial_{\theta}g_{33}) = r^2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$\Gamma_{3,00} = \frac{1}{2}(\partial_0g_{30} + \partial_0g_{03} - \partial_{\varphi}g_{00}) = 0,$$

$$\Gamma_{3,01} = \Gamma_{3,10} = \frac{1}{2}(\partial_rg_{30} + \partial_0g_{13} - \partial_{\varphi}g_{01}) = 0,$$

$$\Gamma_{3,02} = \Gamma_{3,20} = \frac{1}{2}(\partial_{\theta}g_{30} + \partial_0g_{23} - \partial_{\varphi}g_{02}) = 0,$$

$$\Gamma_{3,03} = \Gamma_{3,30} = \frac{1}{2}(\partial_{\varphi}g_{30} + \partial_0g_{33} - \partial_{\varphi}g_{03}) = 0,$$

$$\Gamma_{3,11} = \frac{1}{2}(\partial_rg_{31} + \partial_rg_{13} - \partial_{\varphi}g_{11}) = 0,$$

$$\Gamma_{3,12} = \Gamma_{3,21} = \frac{1}{2}(\partial_{\theta}g_{31} + \partial_rg_{23} - \partial_{\varphi}g_{12}) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{3,13} = \Gamma_{3,31} &= \frac{1}{2}(\partial_\varphi g_{31} + \partial_r g_{33} - \partial_\varphi g_{13}) = -r \sin^2 \theta, \\
\Gamma_{3,22} &= \frac{1}{2}(\partial_\theta g_{32} + \partial_\theta g_{23} - \partial_\varphi g_{22}) = 0, \\
\Gamma_{3,23} = \Gamma_{3,32} &= \frac{1}{2}(\partial_\varphi g_{32} + \partial_\theta g_{33} - \partial_\varphi g_{23}) = -r^2 \sin \theta \cos \theta, \\
\Gamma_{3,33} &= \frac{1}{2}(\partial_\varphi g_{33} + \partial_\varphi g_{33} - \partial_\varphi g_{33}) = 0,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Selanjutnya Metrik (3.1) dapat juga dihitung menggunakan definisi Simbol Christoffel jenis kedua menggunakan definisi:

$$\Gamma_{kn}^p = g^{pj} \Gamma_{j, kn} \tag{3.6}$$

sehingga hasil dari Simbol Christoffel jenis kedua pada metrik (3.1) diuraikan sebagai berikut:

$$\Gamma_{00}^0 = g^{0j} \Gamma_{j,00} = g^{00} \Gamma_{0,00} = 0$$

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = g^{0j} \Gamma_{j,01} = g^{00} \Gamma_{0,01} = v'(r),$$

$$\Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 = g^{0j} \Gamma_{j,02} = g^{00} \Gamma_{0,02} = 0$$

$$\Gamma_{03}^0 = \Gamma_{30}^0 = g^{0j} \Gamma_{j,03} = g^{00} \Gamma_{0,03} = 0,$$

$$\Gamma_{11}^0 = g^{0j} \Gamma_{j,11} = g^{00} \Gamma_{0,11} = 0,$$

$$\Gamma_{12}^0 = \Gamma_{21}^0 = g^{0j} \Gamma_{j,12} = g^{00} \Gamma_{0,12} = 0,$$

$$\Gamma_{13}^0 = \Gamma_{31}^0 = g^{0j} \Gamma_{j,13} = g^{00} \Gamma_{0,13} = 0,$$

$$\Gamma_{22}^0 = g^{0j} \Gamma_{j,22} = g^{00} \Gamma_{0,22} = 0,$$

$$\Gamma_{23}^0 = \Gamma_{32}^0 = g^{0j} \Gamma_{j,23} = g^{00} \Gamma_{0,23} = 0,$$

$$\Gamma_{33}^0 = g^{0j} \Gamma_{j,33} = g^{00} \Gamma_{0,33} = 0,$$

$$\Gamma_{00}^1 = g^{1j}\Gamma_{j,00} = g^{11}\Gamma_{1,00} = v'(r)\exp(2v - 2\lambda),$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = g^{1j}\Gamma_{j,01} = g^{11}\Gamma_{1,01} = 0,$$

$$\Gamma_{02}^1 = \Gamma_{20}^1 = g^{1j}\Gamma_{j,02} = g^{11}\Gamma_{1,02} = 0,$$

$$\Gamma_{03}^1 = \Gamma_{30}^1 = g^{1j}\Gamma_{j,03} = g^{11}\Gamma_{1,03} = 0,$$

$$\Gamma_{11}^1 = g^{1j}\Gamma_{j,11} = g^{11}\Gamma_{1,11} = \lambda'(r),$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = g^{1j}\Gamma_{j,12} = g^{11}\Gamma_{1,12} = 0,$$

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = g^{1j}\Gamma_{j,13} = g^{11}\Gamma_{1,13} = 0,$$

$$\Gamma_{22}^1 = g^{1j}\Gamma_{j,22} = g^{11}\Gamma_{1,22} = -r \exp(-2\lambda),$$

$$\Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = g^{1j}\Gamma_{j,23} = g^{11}\Gamma_{1,23} = 0,$$

$$\Gamma_{33}^1 = g^{1j}\Gamma_{j,33} = g^{11}\Gamma_{1,33} = -r \sin^2\theta \exp(-2\lambda),$$

$$\Gamma_{00}^2 = g^{2j}\Gamma_{j,00} = g^{22}\Gamma_{2,00} = 0,$$

$$\Gamma_{01}^2 = \Gamma_{10}^2 = g^{2j}\Gamma_{j,01} = g^{22}\Gamma_{2,01} = 0,$$

$$\Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = g^{2j}\Gamma_{j,02} = g^{22}\Gamma_{2,02} = 0,$$

$$\Gamma_{03}^2 = \Gamma_{30}^2 = g^{2j}\Gamma_{j,03} = g^{22}\Gamma_{2,03} = 0,$$

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{21}^2 = g^{2j}\Gamma_{j,12} = g^{22}\Gamma_{2,12} = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = g^{2j}\Gamma_{j,13} = g^{22}\Gamma_{2,13} = 0,$$

$$\Gamma_{22}^2 = g^{2j}\Gamma_{j,22} = g^{22}\Gamma_{2,22} = 0,$$

$$\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = g^{2j}\Gamma_{j,23} = g^{22}\Gamma_{2,23} = 0,$$

$$\Gamma_{33}^2 = g^{2j}\Gamma_{j,33} = g^{22}\Gamma_{2,33} = -\sin\theta \cos\theta,$$

$$\Gamma_{00}^3 = g^{3j}\Gamma_{j,00} = g^{33}\Gamma_{3,00} = 0,$$

$$\Gamma_{01}^3 = \Gamma_{10}^3 = g^{3j}\Gamma_{j,01} = g^{33}\Gamma_{3,01} = 0,$$

$$\Gamma_{02}^3 = \Gamma_{20}^3 = g^{3j}\Gamma_{j,02} = g^{33}\Gamma_{3,02} = 0,$$

$$\Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = g^{3j}\Gamma_{j,03} = g^{33}\Gamma_{3,03} = 0,$$

$$\Gamma_{11}^3 = g^{3j}\Gamma_{j,11} = g^{33}\Gamma_{3,11} = 0,$$

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = g^{3j}\Gamma_{j,12} = g^{33}\Gamma_{3,12} = 0,$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = g^{3j}\Gamma_{j,13} = g^{33}\Gamma_{3,13} = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma_{22}^3 = g^{3j}\Gamma_{j,22} = g^{33}\Gamma_{3,22} = 0,$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = g^{3j}\Gamma_{j,23} = g^{33}\Gamma_{3,23} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta,$$

$$\Gamma_{33}^3 = g^{3j}\Gamma_{j,33} = g^{33}\Gamma_{3,33} = 0,$$

(3.7)

Hasil (3.7) dapat disederhanakan dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$[\Gamma_{0\beta}^\alpha] = [\Gamma_{\beta 0}^\alpha] = \begin{bmatrix} \Gamma_{10}^1 & \Gamma_{20}^1 & \Gamma_{30}^1 \\ \Gamma_{10}^2 & \Gamma_{20}^2 & \Gamma_{30}^2 \\ \Gamma_{10}^3 & \Gamma_{20}^3 & \Gamma_{30}^3 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.8)$$

$$[\Gamma_{\alpha\beta}^0] = [\Gamma_{\beta\alpha}^0] = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^0 & \Gamma_{12}^0 & \Gamma_{13}^0 \\ \Gamma_{21}^0 & \Gamma_{22}^0 & \Gamma_{23}^0 \\ \Gamma_{31}^0 & \Gamma_{32}^0 & \Gamma_{33}^0 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.9)$$

($\alpha, \beta = 1, 2, 3$). Selanjutnya, dari persamaan (3.8) dan (3.9) diperoleh:

$$\Gamma_{0j}^j = \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3 = 0,$$

$$\Gamma_{1j}^j = \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 = v' + \lambda' + \frac{2}{r},$$

$$\Gamma_{2j}^j = \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3 = \cot \theta,$$

$$\Gamma_{3j}^j = \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3 = 0,$$

(3.10)

Dari persamaan (3.10) diperoleh turunan parsialnya yaitu:

$$[\partial_\beta \Gamma_{\alpha j}^j] = \begin{bmatrix} \partial_r \Gamma_{1j}^j & \partial_r \Gamma_{2j}^j & \partial_r \Gamma_{3j}^j \\ \partial_\theta \Gamma_{1j}^j & \partial_\theta \Gamma_{2j}^j & \partial_\theta \Gamma_{3j}^j \\ \partial_\varphi \Gamma_{1j}^j & \partial_\varphi \Gamma_{2j}^j & \partial_\varphi \Gamma_{3j}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_r \Gamma_{1j}^j & 0 & 0 \\ 0 & \partial_\theta \Gamma_{2j}^j & 0 \\ 0 & 0 & \partial_\varphi \Gamma_{3j}^j \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

dengan

$$\partial_\beta \Gamma_{\alpha j}^j = 0 \quad \text{untuk } \alpha \neq \beta. \quad (3.12)$$

Untuk kasus tertentu diperoleh:

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^1 = 0 \Rightarrow \partial_r \Gamma_{\alpha\beta}^1 = 0 \quad \text{untuk } \alpha \neq \beta,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{23}^2 = 0 \Rightarrow \partial_\theta \Gamma_{\alpha\beta}^2 = 0 \quad \text{untuk } \alpha \neq \beta,$$

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{23}^3 = 0 \Rightarrow \partial_\varphi \Gamma_{\alpha\beta}^3 = 0 \quad \text{untuk } \alpha \neq \beta, \quad (3.13)$$

atau

$$\partial_\omega \Gamma_{\alpha\beta}^\omega = 0 \quad \text{untuk } \alpha \neq \beta. \quad (3.14)$$

Tensor Ricci pada metrik (3.8) dapat dihitung menggunakan definisi:

$$R_{kn} = \partial_n \Gamma_{kj}^j - \partial_j \Gamma_{kn}^j + \Gamma_{kj}^p \Gamma_{pn}^j - \Gamma_{kn}^p \Gamma_{pj}^j \quad (3.15)$$

tensor Ricci merupakan tensor simetris $R_{kn} = R_{nk}$ yang hanya memiliki 10 komponen independen. Rumus untuk komponen tensor Ricci pada metrik (3.8) diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \partial_0 \Gamma_{0j}^j - \partial_j \Gamma_{00}^j + \Gamma_{0j}^p \Gamma_{p0}^j - \Gamma_{00}^p \Gamma_{pj}^j, \\
R_{01} &= R_{10} = \partial_r \Gamma_{0j}^j - \partial_j \Gamma_{01}^j + \Gamma_{0j}^p \Gamma_{p1}^j - \Gamma_{01}^p \Gamma_{pj}^j, \\
R_{02} &= R_{20} = \partial_\theta \Gamma_{0j}^j - \partial_j \Gamma_{02}^j + \Gamma_{0j}^p \Gamma_{p2}^j - \Gamma_{02}^p \Gamma_{pj}^j, \\
R_{03} &= R_{30} = \partial_\varphi \Gamma_{0j}^j - \partial_j \Gamma_{03}^j + \Gamma_{0j}^p \Gamma_{p3}^j - \Gamma_{03}^p \Gamma_{pj}^j, \\
R_{11} &= \partial_r \Gamma_{1j}^j - \partial_j \Gamma_{11}^j + \Gamma_{1j}^p \Gamma_{p1}^j - \Gamma_{11}^p \Gamma_{pj}^j, \\
R_{12} &= R_{21} = \partial_\theta \Gamma_{1j}^j - \partial_j \Gamma_{12}^j + \Gamma_{1j}^p \Gamma_{p2}^j - \Gamma_{12}^p \Gamma_{pj}^j, \\
R_{13} &= R_{31} = \partial_\varphi \Gamma_{1j}^j - \partial_j \Gamma_{13}^j + \Gamma_{1j}^p \Gamma_{p3}^j - \Gamma_{13}^p \Gamma_{pj}^j, \\
R_{22} &= \partial_\theta \Gamma_{2j}^j - \partial_j \Gamma_{22}^j + \Gamma_{2j}^p \Gamma_{p2}^j - \Gamma_{22}^p \Gamma_{pj}^j, \\
R_{23} &= R_{32} = \partial_\varphi \Gamma_{2j}^j - \partial_j \Gamma_{23}^j + \Gamma_{2j}^p \Gamma_{p3}^j - \Gamma_{23}^p \Gamma_{pj}^j, \\
R_{33} &= \partial_\varphi \Gamma_{3j}^j - \partial_j \Gamma_{33}^j + \Gamma_{3j}^p \Gamma_{p3}^j - \Gamma_{33}^p \Gamma_{pj}^j,
\end{aligned}
\tag{3.16}$$

Hasil dari semua komponen tensor Ricci untuk metrik (3.8) dituliskan pada persamaan (3.16). Walaupun, proses perhitungan dapat digeneralisasi dari hasil persamaan (3.8) sampai (3.14). Jadi, untuk $\alpha = 1, 2, 3$ digunakan persamaan (3.15) untuk memperoleh

$$R_{\alpha 0} = \partial_0 \Gamma_{\alpha j}^j - \partial_j \Gamma_{\alpha 0}^j + \Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p0}^j + \Gamma_{\alpha 0}^p \Gamma_{pj}^j \tag{3.17}$$

dengan menggunakan kondisi pada metrik statis $\partial_0 \Gamma_{kn}^j = 0$, diperoleh

$$R_{\alpha 0} = -\partial_\beta \Gamma_{\alpha 0}^\beta - \Gamma_{\alpha 0}^0 \Gamma_{0j}^j - \Gamma_{\alpha 0}^\beta \Gamma_{\beta j}^j + \Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p0}^j. \tag{3.18}$$

Selanjutnya dengan menggunakan $\Gamma_{\alpha 0}^\beta = 0$ dan $\Gamma_{0j}^j = 0$ dari persamaan (3.2) dan (3.4), persamaan (3.18) menjadi:

$$R_{\alpha 0} = \Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p 0}^j = \Gamma_{\alpha 0}^0 \Gamma_{0 0}^0 + \Gamma_{\alpha \beta}^0 \Gamma_{0 0}^\beta + \Gamma_{\alpha 0}^\beta \Gamma_{\beta 0}^0 + \Gamma_{\alpha \omega}^\beta \Gamma_{\beta 0}^\omega \quad (3.19)$$

menggunakan $\Gamma_{0 0}^0 = 0$, $\Gamma_{\alpha 0}^\beta = 0$ dan $\Gamma_{\alpha \beta}^0 = 0$ dari persamaan (3.7), (3.8) dan (3.9), maka semua persamaan (3.19) disisi kanan menjadi lenyap

$$R_{\alpha 0} = R_{0 \alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (3.20)$$

Selanjutnya, untuk $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ dan $\alpha \neq \beta$, dapat digunakan persamaan (3.15) untuk menghitung

$$R_{\alpha \beta} = \partial_\beta \Gamma_{\alpha j}^j - \partial_j \Gamma_{\alpha \beta}^j + \Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p \beta}^j - \Gamma_{\alpha \beta}^p \Gamma_{p j}^j, \quad (3.21)$$

dari persamaan (3.12) dan (3.14) jika diterapkan pada persamaan (3.21) sisi kanannya menjadi lenyap untuk $\alpha \neq \beta$. Dengan menggunakan persamaan (3.10) maka diperoleh:

$$R_{\alpha \beta} = \Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p \beta}^j - \Gamma_{\alpha \beta}^0 \Gamma_{0 j}^j - \Gamma_{\alpha \beta}^1 \Gamma_{1 j}^j - \Gamma_{\alpha \beta}^2 \Gamma_{2 j}^j, \quad (3.22)$$

dengan menggunakan $\Gamma_{\alpha \beta}^0 = 0$ dan $\Gamma_{\alpha \beta}^1 = 0$ untuk $\alpha \neq \beta$ dari persamaan (3.9) dan (3.13) diperoleh

$$R_{\alpha \beta} = \Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p \beta}^j - \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \frac{\cot \theta}{r}, \quad (3.23)$$

dikarenakan $\delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \frac{\cot \theta}{r}$ tidak sama dengan nol hanya pada $(\alpha \beta) = (12)$, sehingga dihitung $\Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p \beta}^j$ menjadi:

$$\Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p \beta}^j = \Gamma_{\alpha 0}^p \Gamma_{p \beta}^0 + \Gamma_{\alpha \omega}^p \Gamma_{p \beta}^\omega \quad (3.24)$$

atau

$$\Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p \beta}^j = \Gamma_{\alpha 0}^0 \Gamma_{0 \beta}^0 + \Gamma_{\alpha \sigma}^\sigma \Gamma_{\sigma \beta}^0 + \Gamma_{\alpha \omega}^0 \Gamma_{0 \beta}^\omega + \Gamma_{\alpha \omega}^\sigma \Gamma_{\sigma \beta}^\omega \quad (3.25)$$

dari persamaan (3.7) dapat dilihat bahwa yang hanya tidak memiliki nilai nol adalah $\Gamma_{\alpha 0}^0$ atau $\Gamma_{0\beta}^0$ yaitu $\Gamma_{01}^0 = v'(r)$. Selanjutnya, untuk $\alpha \neq \beta$ pada $\Gamma_{\alpha 0}^0 \Gamma_{0\beta}^0$ adalah nol. Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (3.8) dan (3.9) diperoleh $\Gamma_{\alpha 0}^\sigma \Gamma_{\sigma\beta}^0$ dan $\Gamma_{\alpha\omega}^0 \Gamma_{0\beta}^\omega$ bernilai nol juga. Sehingga menghasilkan

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p\beta}^j &= \Gamma_{\alpha\omega}^\sigma \Gamma_{\sigma\beta}^\omega = \Gamma_{\alpha\omega}^1 \Gamma_{1\beta}^\omega + \Gamma_{\alpha\omega}^2 \Gamma_{2\beta}^\omega + \Gamma_{\alpha\omega}^3 \Gamma_{3\beta}^\omega \\ &= \Gamma_{\alpha 1}^1 \Gamma_{1\beta}^1 + \Gamma_{\alpha 2}^1 \Gamma_{2\beta}^2 + \Gamma_{\alpha 3}^1 \Gamma_{3\beta}^3 + \Gamma_{\alpha 1}^2 \Gamma_{2\beta}^1 + \Gamma_{\alpha 2}^2 \Gamma_{2\beta}^2 + \Gamma_{\alpha 3}^2 \Gamma_{2\beta}^3 \\ &\quad + \Gamma_{\alpha 1}^3 \Gamma_{3\beta}^1 + \Gamma_{\alpha 2}^3 \Gamma_{3\beta}^2 + \Gamma_{\alpha 3}^3 \Gamma_{3\beta}^3. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.26) dapat ditunjukkan hitungan secara langsung bahwa

$$\Gamma_{\alpha j}^p \Gamma_{p\beta}^j = \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \Gamma_{13}^3 \Gamma_{32}^3 = \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \frac{\cot \theta}{r} \quad (3.27)$$

Persamaan (3.27) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.23) sehingga diperoleh

$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha} \equiv 0, \quad (\alpha \neq \beta) \quad (3.28)$$

dari persamaan (3.20) dan (3.28) dapat diketahui bahwa semua komponen diagonal tertutup dari Tensor Ricci secara identik sama dengan nol

$$R_{kn} = R_{nk} \equiv 0, \quad (k \neq n) \quad (3.29)$$

sehingga hanya komponen nontrivial Tensor Ricci yang merupakan komponen diagonal. Dengan menggunakan properti statis dari metrik $\partial_0 \Gamma_{kn}^j = 0$ dan hasil dari persamaan (3.8) sampai (3.14), dapat dihitung sebagai

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\partial_r \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{1j}^j + 2\Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 \\ &= \left(-v'' + v' \lambda' - v'^2 - \frac{2}{r} v' \right) \exp(2v - 2\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \partial_r \Gamma_{1j}^j - \partial_r \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{1j}^j + (\Gamma_{10}^0)^2 + (\Gamma_{11}^1)^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 + (\Gamma_{13}^3)^2 \\
&= v'' - v' \lambda' + v'^2 - \frac{2}{r} \lambda' \\
R_{22} &= \partial_\theta \Gamma_{2j}^j - \partial_r \Gamma_{22}^1 + 2\Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{23}^3)^2 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{1j}^j \\
&= (1 + rv' - r\lambda') \exp(-2\lambda) - 1 \\
R_{33} &= -\partial_r \Gamma_{33}^1 - \partial_\theta \Gamma_{33}^2 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{1j}^j - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{2j}^j + 2\Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + 2\Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 \\
&= \sin^2 \theta [(1 + rv' - r\lambda') \exp(-2\lambda) - 1]. \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Dari persamaan (3.30) diketahui bahwa $R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta$. $\sin^2 \theta$ secara umum berbeda dari nol, substitusi dari dua komponen tensor Ricci kedalam persamaan medan gravitasi vakum $R_{kn} = 0$ memberikan persamaan diferensial yang sama untuk v and λ . Jadi, persamaan medan gravitasi vakum $R_{kn} = 0$ hanya memberikan 3 persamaan independen untuk v dan λ .

$$-v'' + v' \lambda' - v'^2 - \frac{2}{r} v' = 0,$$

$$v'' - v' \lambda' + v'^2 - \frac{2}{r} \lambda' = 0,$$

$$(1 + rv' - r\lambda') \exp(-2\lambda) = 1 \tag{3.31}$$

dengan menambahkan dua persamaan sebelumnya pada (3.21) menghasilkan

$$-\frac{2}{r}(v' + \lambda') = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}(v + \lambda) = 0 \tag{3.32}$$

Dari persamaan (3.32) dapat dilihat bahwa kuantitas $v + \lambda$ harus menjadi konstan. Di sisi lain, untuk nilai yang besar dari koordinat radial r ruang waktu mendekati datar dan untuk v maupun λ cenderung mendekati nol pada $r \rightarrow \infty$. Selanjutnya, $v + \lambda$ yang konstan harus sama dengan nol, sehingga

$$v + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -v \tag{3.33}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3.33) kedalam persamaan (3.31) diperoleh

$$(1 + 2rv') \exp(2v) = \frac{d}{dr} [r \exp(2v)] = 1 \quad (3.34)$$

dengan mengintegrasikan persamaan (3.34) diperoleh

$$r \exp(2v) = r - r_G, \quad (3.35)$$

konstanta r_G disebut jari-jari gravitasi. Jadi, diperoleh:

$$g_{00} = \exp(2v) = 1 - \frac{r_G}{r}$$

$$g_{11} = \exp(2\lambda) = \left(1 - \frac{r_G}{r}\right)^{-1} \quad (3.36)$$

Jari-jari gravitasi menggunakan batas Newtonian:

$$g_{00} \rightarrow 1 + \frac{2\phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \quad (3.37)$$

dengan membandingkan persamaan (3.37) dengan (3.36), diperoleh

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (3.38)$$

Jadi, metrik ruang-waktu Schwarzschild diberikan sebagai berikut:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.39)$$

ds = Jarak terdekat antara peristiwa yang terjadi pada ruang-waktu.

r_s = Radius Schwarzschild

G = Tetapan gravitasi (6.673×10^{-11} Newton m/s^2)

c = Kecepatan cahaya (3×10^8 m/s)

M = Massa Benda

Metrik Schwarzschild disebut juga dengan Solusi Schwarzschild. Dari Solusi Schwarzschild (3.39) disimpulkan bahwa sebaran materi bersimetri bola diluar ruang kosong dapat dideskripsikan sebagai metrik statis. Selanjutnya, Solusi

Schwarzschild harus ditulis bahwa solusi ini juga valid untuk perpindahan massa selama gerak mempertahankan syarat simetrinya, sebagai contoh pulsa simetris terpusat. Dapat dituliskan juga bahwa metrik (3.39) hanya bergantung pada massa benda keseluruhan yang bersumber dari medan gravitasi, seperti halnya pada kasus Teori Newton. Jika diletakkan $dt = 0$ metrik (3.39) dapat diperoleh ruang tiga dimensi dengan elemen garis.

3.2 Lubang Hitam Schwarzschild

Metrik Schwarzschild merepresentasikan solusi lubang hitam paling sederhana untuk persamaan medan Einstein yang terkarakterisasi oleh parameter M , yang bisa diinterpretasikan sebagai massa lubang hitam.

Apabila persamaan (3.39) dikaitkan dengan rumus kuadrat sinus δ_{kritis} maka terlihat bahwa bila jejari bintang menghampiri nilai $2m$, yaitu jejari Schwarzschild, maka harga kuadrat sinus δ_{kritis} menghampiri nol. Jadi harga sinus δ_{kritis} juga menghampiri nol. Dalam tabel fungsi trigonometri kita dapatkan sudut δ_{kritis} menghampiri sudut nol derajat. Ini berarti, hanyalah sinar cahaya yang dipancarkan tegak lurus permukaan bintang yang dapat terlepas bebas ke angkasa raya. Akibatnya, bintang tersebut hampir tak tampak oleh pengamatan kita (Wospakrik, 1987).

Selanjutnya untuk bintang yang jejarnya lebih kecil dari pada jejari Schwarzschild, terlihat dari rumus di atas bahwa kuadrat sinus δ_{kritis} bernilai negatif. Ini adalah keadaan yang tidak mungkin, karena dalam optika kuadrat sinus δ_{kritis} haruslah bernilai positif. Ketidakmungkinan ini berarti tidak ada satupun sinar

cahaya yang dipancarkan dari permukaan bintang ini dapat terlepas ke angkasa raya. Akibatnya, bintang tersebut hilang dari pengamatan kita. Dengan perkataan lain, bintang tersebut ada tetapi gelap atau hitam. Karena itu, lahirlah penamaan lubang hitam bagi jenis bintang ini, yaitu bintang yang jejарinya lebih kecil daripada jejari Schwarzschild.

Sedangkan apabila radius Schwarzschild untuk partikel bumi adalah sekitar 9 mm, karena itu tidak ada persoalan jika metrik ini diterapkan untuk bumi. Namun ada keadaan tertentu jika radius Schwarzschild cukup besar, hal ini dapat terjadi jika M bernilai cukup besar, sementara jari-jari partikel tersebut cukup kecil seperti yang terjadi pada lubang hitam (*black holes*).

Penggambaran radius Schwarzschild dalam lubang hitam dapat dilihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Lubang Hitam Schwarzschild Bermassa M Beradius r_s

(Anugraha,2014)

Jari-jari Schwarzschild tersebut membentuk horizon peristiwa yang memisahkan dua daerah:

$$\text{I. } 2m < r < \infty$$

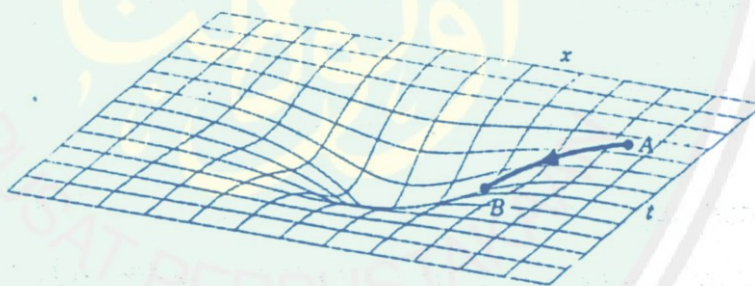
$$\text{II. } 0 < r < 2m$$

Wilayah I disebut wilayah lubang hitam sedangkan titik $r = 0$ disebut titik singularitas intrinsik.

Beberapa karakteristik penting dari solusi Schwarzschild adalah (Anugraha, 2014):

1. Partikel yang bergerak menuju titik singularitas akan merasakan tarikan gravitasi yang sangat kuat.
2. Partikel (termasuk cahaya) tidak ada yang mampu keluar dari wilayah I (batas horizon peristiwa). Partikel atau cahaya yang bergerak radial keluar tidak akan pernah menembus horizon peristiwa.
3. Cahaya atau sinyal yang dipancarkan dari dekat horizon peristiwa (wilayah II) akan mengalami pergeseran ketika diterima oleh pengamat yang jauh.

3.3 Persamaan Geodesik Lubang Hitam Schwarzschild



3.2 Lintasan Lengkung dalam Orbit Geodesik (Anugraha, 2014)

Salah satu aplikasi dari Teori Relativitas Umum adalah terbeloknya cahaya pada saat melintasi benda yang bersifat massif seperti lubang hitam. Berkas cahaya merupakan berkas yang tersusun dari sejumlah foton, dimana foton merupakan partikel tidak bermassa yang bergerak dengan laju cahaya. Untuk menganalisis lintasan foton pertama harus dicari terlebih dahulu persamaan geodesiknya dengan menggunakan metrik Schwarzschild (Matthias, 2012):

$$\frac{d}{ds} \left(e^{2f} \frac{dt}{ds} \right) = 0 \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{ds^2} + (1 - 2mr^{-1})(mr^{-2}) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - (1 - 2mr^{-1})^{-1}(mr^{-2}) \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 \\ - (1 - 2mr^{-1})r \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} = 0 \quad (3.42)$$

$$\frac{d}{ds} \left(r^2 \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0 \quad (3.43)$$

Dengan mengintegalkan persamaan (3.40) dan Persamaan (3.43), didapat persamaan (3.44):

$$\frac{dt}{ds} = ke^{-2f} = \frac{k}{1 - \frac{2m}{r}} = \frac{k}{\gamma} \quad (3.44)$$

Sehingga diperoleh persamaan (3.45):

$$r = \frac{R^2}{m(\cos^2 \varphi + 2\sin^2 \varphi) + R \cos \varphi} \quad (3.45)$$

k = konstanta kelengkungan

r = lintasan foton (km)

m = parameter jarak (km)

R = jari-jari matahari (km)

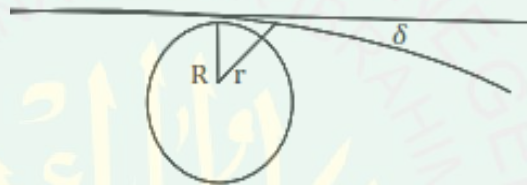
φ = sudut antara R dengan r (rad)

Persamaan (3.45) inilah yang merupakan persamaan lintasan foton. Solusi yang diberikan oleh Einstein sesuai dengan pengamatan para ahli sebagaimana dapat dilihat pada persamaan (3.25). Dengan nilai x dan y :

$$x = r \sin \varphi \quad (3.46)$$

$$y = r \cos \varphi \quad (3.47)$$

maka akan diperoleh gambar lintasan fotonnya, seperti pada Gambar 3.3:



3.3 Lintasan Pembelokan Cahaya (Matthias, 2012)

3.4 Lubang Hitam dalam Koordinat Lainnya

Selain lubang hitam schwarzschild, terdapat juga lubang hitam dengan karakteristik lainnya, diantaranya lubang hitam bermuatan (Reissner-Nordstrom), lubang hitam berotasi (lubang hitam Kerr), dan lubang hitam berotasi dan bermuatan (lubang hitam Kerr-Newman).

3.4.1 Lubang Hitam Reissner Nordstrom

Solusi lubang hitam yang lebih rumit masih bisa diperoleh dengan konteks simetri bola (jika diasumsikan lubang hitam memiliki muatan dan massa). Ruang-waktunya sekarang dideskripsikan oleh metrik Reissner-Nordstrom dan memenuhi syarat dua parameter yaitu M dan Q . Jenis

lubang hitam yang berbeda ini diperoleh ketika salah satu simetri bola menjadi simetri aksial

Metrik Reissner-Nordstrom merupakan sebuah solusi terhadap persamaan medan Einstein yang mendeskripsikan ruang-waktu di sekitar bola simetris yang tidak berotasi dengan massa M dan muatan listrik Q . Selain itu, ada juga asumsi yang menyatakan bahwa ruang tersebut hampa akan materi (hanya terdapat medan elektromagnetik). Ketika $Q \rightarrow 0$, metrik Reissner-Nordstrom seharusnya mendekati metrik Schwarzschild. Sifat lain yang seharusnya dimiliki oleh metrik Reissner-Nordstrom adalah ruang-waktunya harus datar secara asimtotik. Dengan kata lain, apabila jarak dari objek mendekati tak terhingga, maka metrik Reissner-Nordstrom harus mendekati metrik Minkowski.

Bentuk metrik Reissner-Nordstrom :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right) dt^2 \quad (3.48)$$

3.4.2 Lubang Hitam Kerr-Newman

Dalam kasus ini, persamaan medan Einstein vakum mengizinkan solusi yang bergantung pada tiga Parameter yaitu M , Q , dan J , yang bisa diinterpretasikan sebagai massa, muatan, dan momentum angular lubang hitam. Solusi ini disebut metrik Kerr-Newman.

Bentuk metrik Kerr-Newman:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin\theta d\phi]^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2)d\phi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2$$

$$+\rho^2 d\theta^2 \quad (3.49)$$

Dengan $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \sin^2 \theta$$

3.4.3 Lubang Hitam Kerr

Kasus spesial solusi diatas yaitu ketika $Q = 0$ disebut metrik Kerr. Metrik Kerr merepresentasikan sebuah solusi vakum simetri aksial yang terkarakterisasi oleh dua parameter (M dan J) yang digambarkan sebagai massa dan momentum angular lubang hitam (Visser, 2009).

Bentuk metrik Kerr:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi dt + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.50)$$

dengan

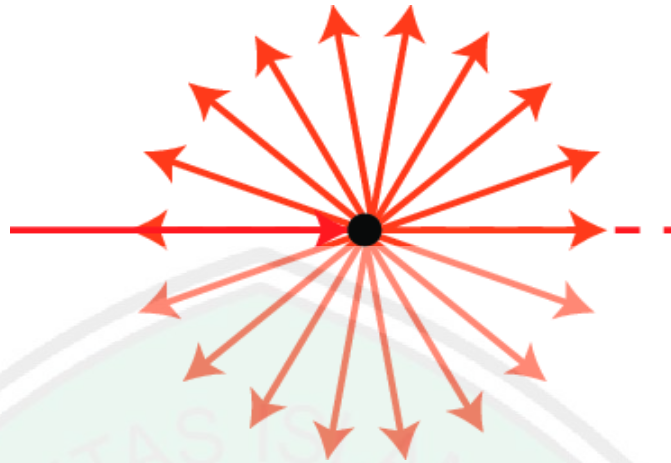
$$a = J/M,$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta,$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

3.5 Koordinat Isotropik

Isotropik berarti identik ke segala arah (invarian sehubungan dengan arah). Sebagai contoh, hamburan isotropik cahaya oleh suatu zat mensyaratkan bahwa intensitas cahaya yang dipancarkan adalah sama di semua arah. Yang memberi kesimpulan isotropik memiliki sifat fisik (seperti Konduktivitas, elastisitas, dan densitas daya) yang sama di semua arah pengukuran.



Gambar 3.4 Hamburan Isotropik

Koordinat isotropik berarti koordinat yang memiliki sifat yang invarian. Aplikasi dari Koordinat Isotropik digunakan untuk menyusun tabel data astronomi relativistik untuk planet, dan semua objek yang berorbit (termasuk satelit) dalam ilmu tata surya, alasannya adalah karena koordinat isotropik merupakan koordinat yang paling sempurna untuk perluasan dari banyaknya gravitasi. Perluasan ini menggambarkan perbandingan langsung dengan gravitasi ruang datar dan dengan teori gravitasi alternatif yang menyaingi persamaan Teori Relativitas Umum.

Manfaat lain isotropik terdapat dalam telekomunikasi yaitu antena, sumber cahaya, atau sumber suara yang secara teoritis memancarkan sinyal dengan kepadatan daya yang sama di semua arah. Sifat-sifat material yang sama di semua arah. Antena isotropik memancarkan daya yang sama ke semua arah. Dalam praktiknya, antena tidak ada yang isotropik. Namun, antena isotropik yang sempurna, yang disebut "radiator isotropik," dapat dihitung, dan digunakan sebagai dasar untuk mengukur kekuatan sinyal antena nyata.

BAB IV
LUBANG HITAM SCWARZSCHILD PADA KOORDINAT ISOTROPIK

4.1 Metrik Schwarzschild pada koordinat isotropik

Berikut ini adalah ruang-waktu (Metrik) Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.1)$$

Metrik (4.1) merupakan bentuk standar, yang akan diturunkan menjadi metrik Schwarzschild pada koordinat isotropik. Tujuan mentransformasi kedalam bentuk koordinat isotropik adalah untuk menuliskan sifat yang ada dalam metrik (4.1) sama dalam segala arah. Oleh karena itu dituliskan metrik (4.1) dalam bentuk:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + B^2(r') [dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]$$
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + B^2(r') d\Sigma^2 \quad (4.2)$$

Jika persamaan (4.2) dibandingkan dengan metrik Schwarzschild (4.1), agar bagian angular-nya setara maka seharusnya:

$$B^2(r')r'^2 = r^2 \quad (4.3)$$

dan bagian radialnya menjadi:

$$B^2(r')dr'^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (4.4)$$

Eliminasi persamaan (4.3) dan (4.4) untuk menghilangkan $B^2(r')$, sehingga diperoleh:

$$\frac{dr'^2}{r'^2} = \frac{dr^2}{r^2 - 2mr}, \quad (4.5)$$

diakarkan,

$$\frac{\pm dr'}{r'} = \frac{dr}{\sqrt{r^2 - 2mr}}, \quad (4.6)$$

kemudian persamaan (4.6) diintegalkan menjadi,

$$\pm \ln \left[(r^2 - 2mr)^{1/2} + (r - m) \right] = \ln r' + C \quad (4.7)$$

selanjutnya untuk mengevaluasi nilai konstanta dan menentukan sisi kiri persamaan persamaan (4.7) dipertimbangkan r jauh lebih besar dari $2m$ maka $(r^2 - 2mr) \approx r^2$ dan $(r - m) \approx r$, sehingga secara asimtotik diperoleh,

$$\pm \ln(2r) = \ln r' + C \quad (4.8)$$

untuk jarak radial yang besar diharapkan r dan r' setara secara asimtotik, sehingga tanda digunakan adalah positif dan konstanta menjadi $\ln r'$. Persamaan (4.8) menjadi,

$$\sqrt{r^2 - 2mr} + (r - m) = 2r', \quad (4.9)$$

Agar dapat menyelesaikan persamaan aljabar (4.9), r dianggap sebagai fungsi dari r' ,

$$\left[(r - m) + \sqrt{r^2 - 2mr} \right] \left[(r - m) - \sqrt{r^2 - 2mr} \right] = m^2 \quad (4.10)$$

substitusi persamaan (4.10) dengan (4.9), sehingga diperoleh

$$(r - m) - \sqrt{r^2 - 2mr} = \frac{m^2}{2r'} \quad (4.11)$$

selanjutnya disederhanakan persamaan (4.11) menggunakan (4.9) yang menghasilkan,

$$r - m = r' + \frac{m^2}{4r'} \quad (4.12)$$

sehingga diperoleh bentuk

$$r = r' + \frac{m^2}{4r'} + m, \quad (4.13)$$

setelah disederhanakan maka persamaan (4.13) menjadi:

$$r = r' \left(1 + \frac{m}{2r'}\right)^2. \quad (4.14)$$

Sebelumnya dari persamaan (4.3) diperoleh

$$B^2(r')r'^2 = r^2,$$

yang diakarkan menjadi,

$$B(r')r' = \pm r \quad (4.15)$$

karena nilai r selalu (+), sehingga didapatkan nilai $B(r')$ menjadi

$$B(r') = \frac{r}{r'} = \left(1 + \frac{m}{2r'}\right)^2, \quad (4.16)$$

koefisien dt pada persamaan (4.2) menjadi:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) = 1 - \frac{2m}{r' \left(1 + \frac{m}{2r'}\right)^2} = \left(\frac{1 - m/2r'}{1 + m/2r'}\right)^2. \quad (4.17)$$

Sehingga diperoleh Metrik Schwarzschild pada koordinat isotropik:

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - m/2r'}{1 + m/2r'}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2r'}\right)^4 \left(dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right) \quad (4.18)$$

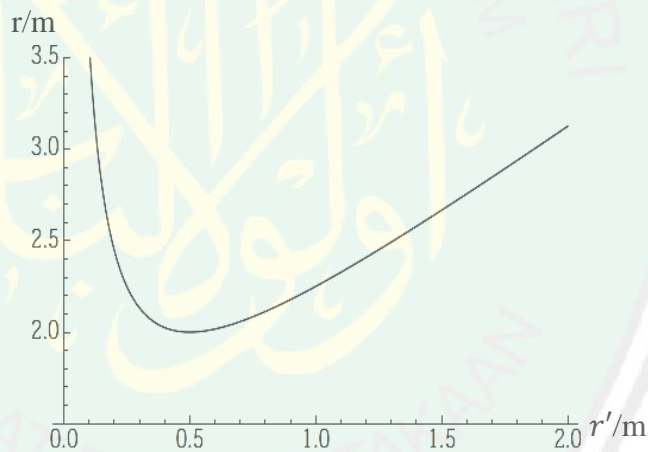
merupakan solusi vakum simetri bola dari persamaan medan Einstein menggunakan koordinat radial isotropik r' .

Jari-jari r' tidak sepenuhnya mencakup keseluruhan area r tetapi hanya wilayah $r \geq 2m$. Namun, meskipun ada keanehan ini r' lebih dekat ke tipe jari-jari euklidean dari pada r . Ketika $r \rightarrow \infty$, baik r maupun r' tidak setara secara asimtotik tetapi sedikit bergeser setengahnya menjadi jari-jari Schwarzschild:

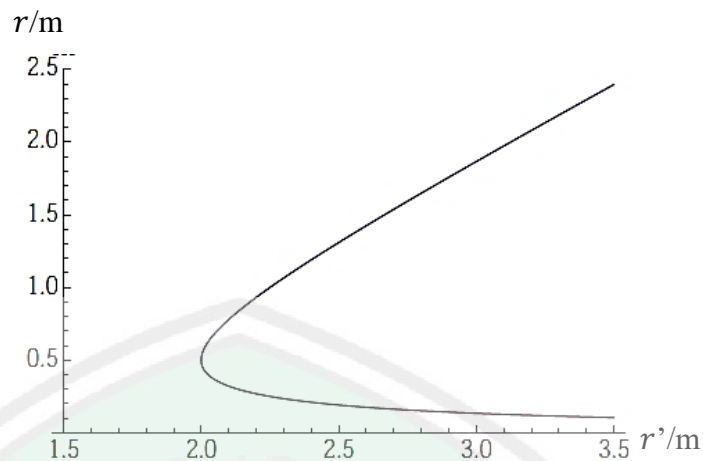
$$r \approx r' + m$$

Koordinat $r' \pm$ meliputi dua wilayah eksterior yang identik secara geometris, dimana $r > 2m$ (Wilayah ini sering diartikan sebagai gambar cermin satu sama lainnya), tapi ini tidak sesuai dengan keseimbangan transformasi yang melibatkan koordinat angular θ, ϕ dan itu tidak sesuai dengan (4.3). Adapun wilayah yang tidak dicakup oleh r' adalah wilayah interior dimana $r < 2m$, karenanya (4.6) juga bukan surjektif, (lihat gambar 4.1 dan 4.2).

Karena (4.6) bukan bijektif, grafik koordinat didefinisikan menggunakan r dan r' terlihat memberikan peningkatan pada keseragaman yang tidak difeomorfik dimanapun satu sama lain. Namun, diketahui bahwa mereka mencakup berbagai daerah dari perluasan keseragaman Schwarzschild secara maksimal yang dapat dicakup secara global, sebagai contoh dari koordinat Kruzska-Szekeres.



Gambar 4.1 Pemetaan Koordinat dari koordinat radial isotropik r' terhadap koordinat radial Schwarzschild r , dengan massa gravitasi m .



Gambar 4.2 Pemetaan koordinat inversi dari koordinat radial Schwarzschild r terhadap koordinat radial isotropik $r' \pm$, dengan massa gravitasi m .

Berdasarkan gambar (4.1) r dapat menuju nol lagi. Koefisien dt^2 bernilai nol ketika $r = m/2$, yang ditandai sebagai jari-jari atau horizon peristiwa dari lubang hitam, dan dimana m adalah massa titik dari singularitas lubang hitam dilokasi pada $r = 0$.

Dimisalkan $r' \Rightarrow 4m^2/r'$. Hal ini membalikkan geometri melalui bola pada $r' = m/2$, tetapi bentuk fungsional dari metrik sebelah kiri tidak berubah. Ini menunjukkan bahwa wilayah ruang-waktu dimana $r' \rightarrow 0$ secara mirip dengan $r' \rightarrow \infty$. Dengan kata lain, $r' \rightarrow 0$ berbeda secara asimtotik pada wilayah datar dari alam semesta, dan bola pada $r' = m/2$ mewakili lubang cacing.

4.2 Penggambaran Orbit Geodesik dari Lubang Hitam Schwarzschild pada koordinat isotropik

Bentuk Metrik Schwarzschild pada koordinat isotropik memiliki beberapa keunggulan, antara lain untuk memperoleh gerak pulsa cahaya, diatur $ds = 0$ (null geodesik) memberikan:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{(1-m/2r')^2}{(1+m/2r')^6}. \quad (4.19)$$

Pada sebuah jarak r' dari asalnya, kecepatan cahaya bernilai

$$\dot{r}' = \pm \frac{(1-m/2r')}{(1+m/2r')^3} \quad (4.20)$$

dalam semua arah. Sedangkan untuk koordinat standar (4.1) kecepatan cahaya tidak sama untuk arah radial dan *transverse*-nya.

Dalam koordinat Schwarzschild (standar) maupun dalam bentuk isotropiknya, kedua sistem memiliki kecepatan cahaya maju maupun mundur yang bernilai sama di sepanjang lintasan. Sehingga koordinat t sesuai dengan pernyataan dari Fitzgerald tentang simultanitas pada tempat berbeda yang menyatakan bahwa simultanitas dapat ditentukan dengan menggunakan sinyal cahaya. Jika jam di A mengirim sinyal cahaya pada waktu t_A yang mencapai B kemudian segera tercermin, sehingga kembali ke A pada waktu t_A' , maka waktu kedatangan di B adalah $\frac{1}{2}(t_A + t_A')$ sama seperti dalam teori relativitas khusus. Selanjutnya terdapat penemuan alternatif, simultanitas yang ditentukan dengan perjalanan lambat dari kronometer (Kronometer adalah alat pencatat waktu yang cukup tepat untuk dapat digunakan sebagai standar waktu portabel, biasanya digunakan untuk menentukan bujur dengan cara navigasi selestial). Laju waktu jam akan bergantung pada posisinya di koordinat, dikarenakan pengaruh medan gravitasi.

Sistem Isotropik juga dapat ditemukan secara langsung dengan mencari solusi tertentu dari persamaan Einstein yang memiliki bentuk (3.1), atau

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\mu (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) + e^\nu dt^2 \quad (4.21)$$

dimana λ, μ, ν adalah fungsi-fungsi dari r . Dengan metode seperti pada bab III, kita menemukan

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \mu'' + \frac{1}{2}v'' + \frac{2}{r}\mu' - \frac{1}{r}\lambda' + \frac{1}{2}\mu'^2 - \frac{1}{2}\lambda'\mu' - \frac{1}{4}\lambda'v' + \frac{1}{4}v'^2 \\
g_{22} &= e^{\mu-\lambda} \left[1 + 2r\mu' + \frac{1}{2}r(v' - \lambda') + \frac{1}{2}r^2\mu'' + \frac{1}{2}r^2\mu'(\mu' + \frac{1}{2}v' - \frac{1}{2}\lambda') \right] - 1 \\
g_{33} &= g_{22}\sin^2\theta \\
g_{44} &= -e^{v-\lambda} \left[\frac{1}{2}v'' + \frac{1}{r}v' + \frac{1}{2}v'\mu' - \frac{1}{4}\lambda'v' + \frac{1}{4}v'^2 \right] \tag{4.22}
\end{aligned}$$

sedangkan yang lainnya bernilai nol.

Karena hubungan yang identik antara g_{11} , g_{22} , dan g_{44} , lenyapnya tensor ini hanya memberikan dua persamaan untuk menentukan nilai λ , μ , v . Oleh karena itu ada serangkaian solusi khusus yang tak terbatas yang menjadikan nilai λ , μ , v berbeda. Dua solusi yang dipertimbangkan dengan mengambil $\mu = 0$, dan $\lambda = \mu$, adapun solusi yang sama diperoleh dengan cara yang lebih sederhana dengan mengganti fungsi dari r dalam metrik Schwarzschild (4.1).

Jika dibandingkan dengan koordinat kelengkungan Schwarzschild, maka dalam koordinat Schwarzschild isotropik hanya koordinat r yang berubah, seperti yang telah didapatkan pada persamaan (4.14)

$$r = r' \left(1 + \frac{m}{2r'} \right)^2$$

yang dapat diubah ke bentuk

$$r' = \frac{1}{4} (2r - r_s \pm 2\sqrt{r(r - r_s)}) \tag{4.23}$$

(dalam koordinat isotropik ini, horizonnya sekarang adalah pada $r' = \frac{m}{2}$).

Perhatikan bahwa koordinat isotropik hanya menjelaskan wilayah geometri Schwarzschild dengan $r \geq 2m$. Horison peristiwa lubang hitam terletak di $r = m/2$ dalam koordinat ini sehingga orbit foton menjadi

$$r'_{foton} = (2 + \sqrt{3})r'_s \quad (4.24)$$

Simbol Christoffel yang tidak nol dari metrik Schwarzschild pada koordinat isotropik

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^{r'} &= \frac{2(r' - m/2)r'^4(m/2)c^2}{(r' + m/2)^7}, \\ \Gamma_{tr'}^t &= \frac{m}{r'^2 - (2m)^2} \\ \Gamma_{r'r'}^{r'} &= -\frac{m}{(r' + m/2)r'} \\ \Gamma_{r'\theta}^\theta &= \frac{r' - m/2}{(r' + m/2)r'} \\ \Gamma_{\theta\theta}^{r'} &= -r' \frac{r' - m/2}{r' + m/2} \\ \Gamma_{r'\phi}^\phi &= \frac{r' - m/2}{(r' + m/2)r'} \\ \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cot\theta, \\ \Gamma_{\phi\phi}^{r'} &= -\frac{(r' - m/2)r' \sin^2\theta}{r' + m/2} \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin\theta \cos\theta \end{aligned} \quad (4.25)$$

Adapun Tensor-Rieman yang tidak nol diperoleh,

$$\begin{aligned} R_{tr'tr'} &= -\frac{4(r' - \frac{m}{2})^2 (\frac{m}{2})c^2}{(r' + \frac{m}{2})^4 r'}, & R_{t\theta t\theta} &= \frac{2(r' - \frac{m}{2})^2 r' (\frac{m}{2})c^2}{(r' + \frac{m}{2})^4}, \\ R_{t\phi t\phi} &= \frac{2(r' - \frac{m}{2})^2 r' c^2 (\frac{m}{2}) \sin^2\theta}{(r' + \frac{m}{2})^4}, & R_{r'\theta r'\theta} &= -\frac{2(r' - \frac{m}{2})^2 (\frac{m}{2})}{(r')^3}, \end{aligned}$$

$$R_{r'\phi r'\phi} = \frac{-2\left(r' + \frac{m}{2}\right)^2 \left(\frac{m}{2}\right) \sin^2 \theta}{(r')^3}, \quad R_{\theta\phi\theta\phi} = \frac{4\left(r' + \frac{m}{2}\right)^2 \left(\frac{m}{2}\right) \sin^2 \theta}{r'}. \quad (4.26)$$

Tensor Ricci dan Skalar Ricci secara dilynapkan identik.

Dari simbol Christoffel yang telah dihitung sehingga menghasilkan persamaan gerak

$$\ddot{r} = -\frac{m}{r^2} \frac{\left(1 - \frac{m}{2r}\right)}{\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^7} + \frac{3m}{r^2} \frac{\left(1 - \frac{m}{6r}\right)}{\left(1 - \frac{m}{2r}\right)\left(1 + \frac{m}{2r}\right)} \dot{r}^2 \quad (4.27)$$

ini juga dapat disusun kembali sebagai

$$\ddot{r} = -\frac{m}{r^2} \left\{ \frac{\left(1 - \frac{m}{2r}\right)}{\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^7} - \frac{3m}{r^2} \frac{\left(1 - \frac{m}{6r}\right)}{\left(1 - \frac{m}{2r}\right)\left(1 + \frac{m}{2r}\right)} \dot{r}^2 \right\} \quad (4.28)$$

ini sudah menunjukkan (mengerjakan dalam r dan \dot{r}) yang \dot{r} merubah tanda pada kecepatan koordinat kritis

$$(\dot{r})_*^2 = \frac{1}{3} \frac{\left(1 - \frac{m}{2r}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^6 \left(1 - \frac{m}{6r}\right)} \quad (4.29)$$

pada umumnya r (pada medan lemah), tanda balik ini berlangsung pada $\dot{r}^2 \approx \frac{1}{3}$ ini agak relativistik tetapi tentu saja tidak ultra-relativistik. (Dalam batas medan lemah, koordinat kelengkungan Schwarzschild dan koordinat isotropik saling asimtotik.)

Dari persamaan Killing Conservation, karena metrik dalam koordinat isotropik diagonal, dapat disimpulkan

$$\dot{r} = \pm \frac{\sqrt{(\epsilon^2 + g_{tt})(-g_{tt}g_{rr})}}{\epsilon g_{rr}} = \pm \frac{\sqrt{(1 + \epsilon^{-2}g_{tt})(-g_{tt}g_{rr})}}{g_{rr}} \quad (4.30)$$

ini mengimplikasikan

$$\dot{r} = \pm \frac{1}{\epsilon} \sqrt{\epsilon^2 - \left(\frac{1-\frac{m}{2r}}{1+\frac{m}{2r}}\right)^2 \frac{\left(\frac{1-\frac{m}{2r}}{1+\frac{m}{2r}}\right)}{\left(1+\frac{m}{2r}\right)^3}}. \quad (4.31)$$

Perhatikan bahwa pada horison, sekarang terletak pada $r = m/2$, kita memiliki lagi $\dot{r} = 0$, sementara pada spasial tak terbatas kita dapatkan lagi $\dot{r} \rightarrow \sqrt{1 - \epsilon^{-2}}$ pada energi tetap. Dengan menggabungkan hasil ini, untuk partikel jatuh (pada energi tetap ϵ), diperoleh

$$\ddot{r} = -\frac{m}{r^2} \frac{\left(\frac{1-\frac{m}{2r}}{1+\frac{m}{2r}}\right)}{\left(1+\frac{m}{2r}\right)^7} \left(1 - \frac{3\left(\frac{1-\frac{m}{2r}}{6r}\right)}{\epsilon^2} \left[\epsilon^2 - \left(\frac{1-\frac{m}{2r}}{1+\frac{m}{2r}}\right)^2\right]\right) \quad (4.32)$$

Perhatikan bahwa percepatan koordinat \ddot{r} melewati nol dan (terlepas dari nol trivial di $(r_* = m/2)$) tanda perubahan pada nilai kritis r_* dari r diberikan dengan menyelesaikan persamaan kubik

$$r_* = 1 - \frac{3\left(\frac{1-\frac{m}{2r}}{6r}\right)}{\epsilon^2} \left[\epsilon^2 - \left(\frac{1-\frac{m}{2r}}{1+\frac{m}{2r}}\right)^2\right] = 0. \quad (4.33)$$

Untuk sebuah partikel jatuh saat rehat dari spasial tak terhingga ($\epsilon = 1$), ini mengimplikasikan pada

$$\dot{r} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1-\frac{m}{2r}}{1+\frac{m}{2r}}\right)^2 \frac{\left(\frac{1-\frac{m}{2r}}{1+\frac{m}{2r}}\right)}{\left(1+\frac{m}{2r}\right)^3}} \quad (4.34)$$

$$\ddot{r} = -\frac{m}{r^2} \frac{\left(\frac{1-\frac{m}{2r}}{1+\frac{m}{2r}}\right)}{\left(1+\frac{m}{2r}\right)^7} \left(1 - 3\left(1 - \frac{m}{6r}\right) \left[1 - \left(\frac{1-\frac{m}{2r}}{1+\frac{m}{2r}}\right)^2\right]\right), \quad (4.35)$$

dengan (tidak trivial) nol percepatan koordinat yang ditentukan oleh

$$1 - 3\left(1 - \frac{m}{6r}\right) \left[1 - \left(\frac{1-\frac{m}{2r}}{1+\frac{m}{2r}}\right)^2\right] \quad (4.36)$$

$$r_* = (5 \pm 2\sqrt{5}) \frac{m}{2} \quad (4.37)$$

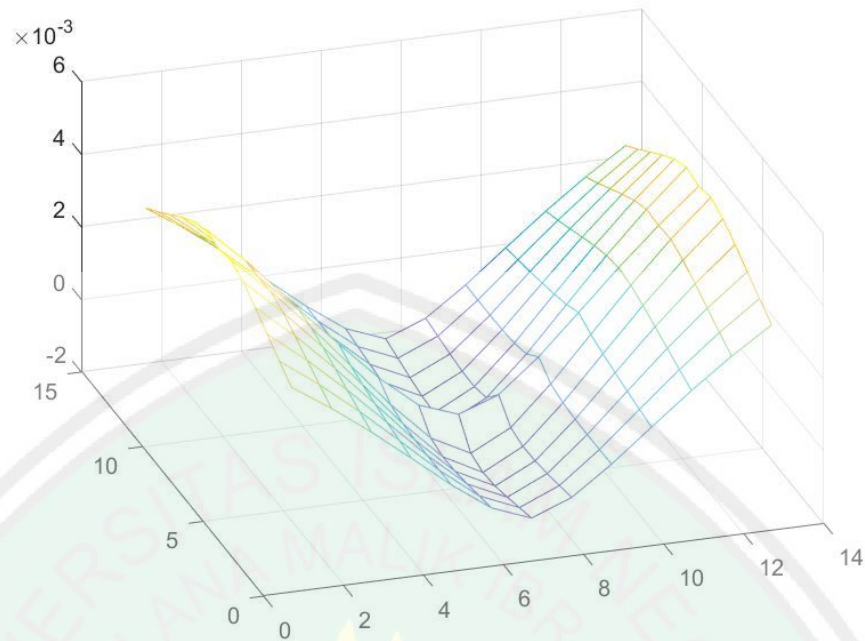
Berdasarkan persamaan (4.33) dapat dipahami bahwa pada jarak yang jauh $\dot{r} \rightarrow \sqrt{2m/r}$ seperti yang diharapkan dari batas Newtonian. Adapun percepatannya pada jarak yang jauh $\ddot{r} \rightarrow -m/r^2$. Dalam koordinat isotropik, ISCO berada di $(\frac{5}{2} + \sqrt{6})m$, yang mana \dot{r} tidak menuju 0. Dari pernyataan diatas dapat diketahui bahwa dua lokasi ini bertepatan dalam koordinat kelengkungan merupakan suatu kebetulan.

Untuk null geodesik ($\epsilon \rightarrow \infty$), kita mempunyai

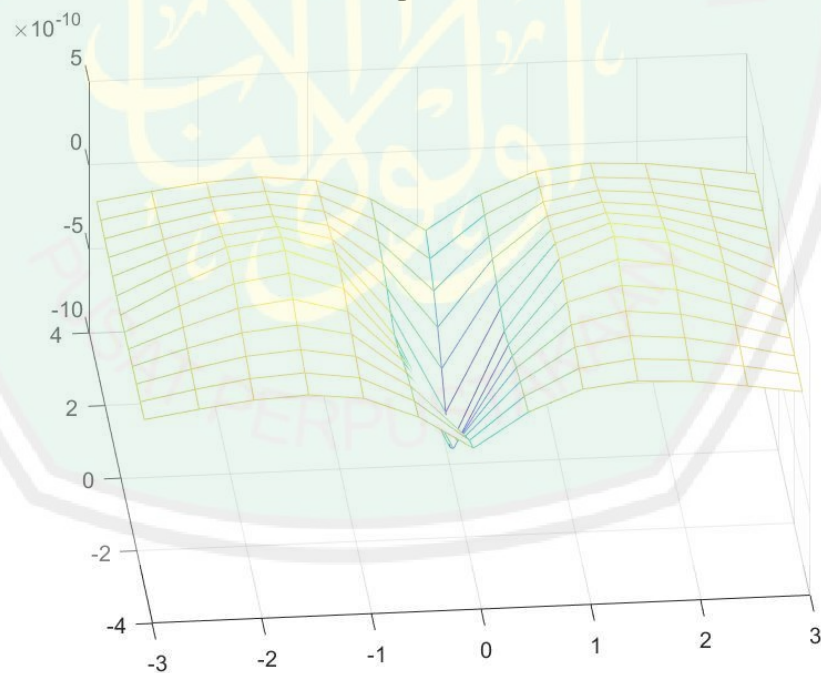
$$\dot{r} = - \frac{\left(1 - \frac{m}{2r}\right)}{\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3} \quad (4.38)$$

$$\ddot{r} = \frac{2m}{r^2} \frac{\left(1 - \frac{m}{2r}\right)\left(1 - \frac{m}{4r}\right)}{\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^7} \quad (4.39)$$

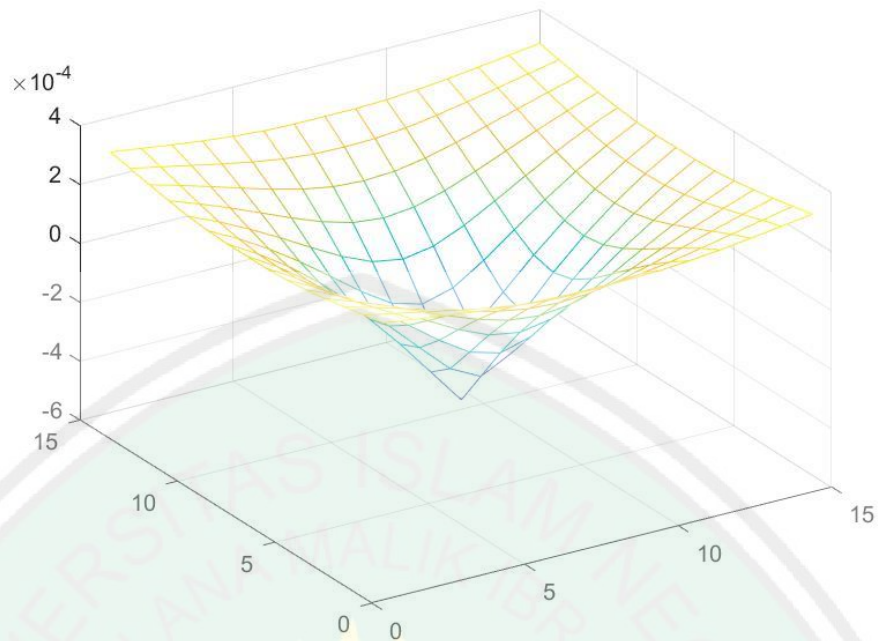
Kecepatan koordinat radial dan percepatan koordinat radial untuk geodesik bak waktu diplot seperti ditunjukkan di gambar 4.3 dan 4.4. Untuk geodesik null, dapat dilihat pada gambar 4.5 dan 4.6. Perhatikan persamaan dan perbedaan dibandingkan dengan apa yang kita peroleh sebelumnya untuk koordinat kelengkungan Schwarzschild.



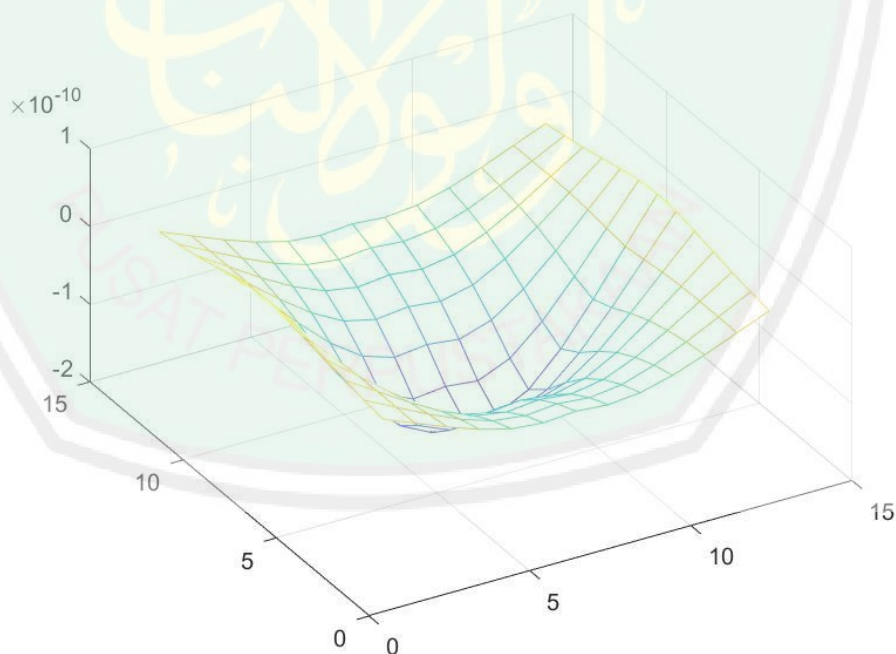
Gambar 4.3 Perilaku \dot{r} dalam geometri Schwarzschild menggunakan koordinat isotropik untuk $m = 1$ dan $\epsilon = 1$. Perhatikan bahwa kecepatan koordinat negatif sepanjang jalan dari horizon (cakrawala) (sekarang pada $m / 2$) hingga tak terbatas spasial.



Gambar 4.4 Perilaku \dot{r} dalam geometri Schwarzschild menggunakan koordinat isotropik untuk $m = 1$ dan $\epsilon = 1$. Perhatikan bahwa kurva melintasi sumbu r baik $r = \frac{1}{2}$ dan $r = \frac{5+2\sqrt{5}}{2} \approx 4.736067977$; ada akar ketiga nonfisik di $r = \frac{5-2\sqrt{5}}{2} \approx 0.263932023$.



Gambar 4.5 Perilaku \dot{r} untuk null geodesik dalam geometri Schwarzschild menggunakan koordinat isotropik untuk $m = 1$ dan $\epsilon \rightarrow \infty$. Perhatikan bahwa kecepatan koordinat negatif sepanjang jalan dari horizon (cakrawala) (sekarang pada $m/2$) hingga tak terbatas spasial.



Gambar 4.6 Perilaku \dot{r} untuk null geodesik dalam geometri Schwarzschild menggunakan koordinat isotropik untuk $m = 1$ dan $\epsilon \rightarrow \infty$. Perhatikan horizon (cakrawala) sekarang pada $m/2$; ada nol ekstra di $m/4$. Perhatikan percepatan koordinat positif sepanjang jalan dari cakrawala ke tak terhingga spasial.

BAB V PENUTUP

5.1. Kesimpulan

1. Lubang Hitam Schwarzschild pada koordinat isotropik memberikan nilai metrik yang sama dalam segala arah :

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - m/2r'}{1 + m/2r'}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2r'}\right)^4 \left(dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right)$$

2. Interpretasi Geodesik Lubang hitam schwarzschild memberikan hasil berupa kecepatan dan percepatan pada jarak terdekat (null-geodesik) sebagai berikut:

$$\dot{r} = -\frac{\left(1 - \frac{m}{2r}\right)}{\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^3}$$

$$\ddot{r} = \frac{2m}{r^2} \frac{\left(1 - \frac{m}{2r}\right)\left(1 - \frac{m}{4r}\right)}{\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^7}$$

5.2. Saran

Untuk penelitian selanjutnya, penelitian dapat dikembangkan dengan lubang hitam yang bermuatan (Reissner-Nordstrom), bergerak (Kerr), maupun bermuatan dan bergerak (Kerr-Newman).

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Quran dan Terjemahannya. 2008. *Departemen Agama Republik Indonesia*. Bandung: Diponegoro.
- Anugraha, R. 2014. *Teori Relativitas dan Aplikasinya pada Elektrodinamika, Lubang Hitam, dan Jagat Raya*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.
- Carmeli, M. 1982. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*. New York: John Wiley dan Sons.
- Dallarson, Mirjana & Nills. 2015. *Tensors, Relativity, and Cosmology second edition*, London: Academic Press.
- Frolov, V.P & Novikov, I. D. 1998. *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*. Netherlands: Springer.
- Hobson, M. P., Efstathiou, G.P. dan Lasenby A.N. 2006. *General Relativity: An Introduction for Physicist*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lawden. 1982. *Introduction to Tensor Calculus Relativity and Cosmology*. New York: Dover Publication
- Mattias, Blau. 2012. *Lecture Notes on General Relativity*. Swizertland: Albert Einstein Center for Fundamental Physics Institut F'ur Theoretische Physik.
- Thayyarah, Nadiyah. 2013. *Buku Pintar Sains Dalam Al-Qur'an*. Jakarta: Zaman.
- Visser, M. 2009. *The Kerr spacetime: A brief introduction*. arXiv:0706.0622v3.
- Weyl, H. 1917. *Zur Gravitationstheorie*, Ann. d. Physk, 54, 117. Terjemahan Bahasa Inggris oleh Nutto, C., Crothers, S.J. 2012. *On the Theory of Gravitation*. Gen. Rel. Grav. 44,779-810.
- Wospakrik, H.J. 1987, *Berkenalan dengan teori kerelatifan umum Einstein dan biografi Albert Einstein*. Bandung: ITB Press.



LAMPIRAN

Lampiran 1 Analisis Tensor

1. Operasi pada Tensor

Operasi yang berlaku pada tensor adalah :

a. Kombinasi linear

Berlaku jika tensor-tensor tersebut memiliki jenis yang sama seperti

$$aA_{\alpha\beta}^{\mu} + bB_{\alpha\beta}^{\mu} = cC_{\alpha\beta}^{\mu}$$

Adapun bentuk $aA_{\alpha\beta}^{\mu} + bB_{\alpha\beta}^{\mu}$ tidak didefinisikan.

b. Perkalian luar

Terhadap dua tensor atau lebih yang memiliki indeks yang berbeda, dapat dilakukan perkalian luar seperti

$$A_{\alpha}^{\beta} B_{\mu\nu} = C_{\alpha\mu\nu}^{\beta}$$

c. Kontraksi

Proses menyamakan sepasang atau lebih pasangan indeks kovarian dan kontravarian, seperti

$$C_{\alpha\mu\nu}^{\beta} \xrightarrow{\text{kontraksi } (\alpha, \beta)} C_{\beta\mu\nu}^{\beta} = C_{\mu\nu}$$

disebut kontraksi meliputi indeks (α, β) . Proses kontraksi menurunkan rank tensor sebanyak 2.

d. Perkalian dalam

Proses ini dilakukan terhadap tensor sehingga faktor-faktornya memiliki sepasang indeks sekutu atau lebih seperti

$$A_{\alpha}^{\beta\mu} B_{\gamma}^{\alpha} = C_{\gamma}^{\beta\mu}$$

e. Hukum pembagian

Ditinjau kasus berikut. Misalkan $C = A^{\mu} B_{\mu}$ merupakan suatu skalar untuk sembarang vektor kontravarian A^{μ} , maka B_{μ} pasti merupakan suatu vektor kovarian. Sebaliknya jika C merupakan suatu skalar untuk sembarang vektor kovarian B_{μ} maka A^{μ} pasti merupakan suatu vektor kontravarian. Hal ini dapat diperluas untuk tensor.

2. Turunan Kovarian

Ditinjau persamaan transformasi untuk vektor berikut

$$A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \bar{A}^\nu$$

Dengan menurunkan A^μ terhadap x^α , diperoleh

$$\partial_\alpha A^\mu = (\partial_{\bar{\nu}} \partial_\alpha x^\mu) \bar{A}^\nu + (\partial_{\bar{\nu}} x^\mu) (\partial_\alpha \bar{A}^\nu)$$

yang bukan merupakan tensor. Karena itu perlu dicari cara untuk membentuk tensor dengan menggunakan turunan parsial tersebut. Untuk itu didefinisikan lambang Christoffel sebagai berikut :

1. Lambang Christoffel jenis pertama yang dinyatakan sebagai

$$[\mu\nu, \beta] = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\beta g_{\mu\nu})$$

2. Lambang Christoffel jenis kedua yang dinyatakan sebagai

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = g^{\alpha\beta} [\mu\nu, \beta]$$

Kedua lambang Christoffel tersebut bukan merupakan tensor.

Kedua lambang Christoffel tersebut digunakan untuk mendefinisikan turunan kovarian. Turunan kovarian suatu vektor kontravarian A^μ didefinisikan sebagai

$$A^\mu_{;\nu} = \partial_\nu A^\mu + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\alpha \quad (3.4)$$

Sedangkan turunan kovarian vektor kovarian A_μ adalah

$$A_{\mu;\nu} = \partial_\nu A_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha \quad (3.4)$$

Dapat ditunjukkan bahwa $A^\mu_{;\nu}$ dan $A_{\mu;\nu}$ merupakan tensor. Generalisasi proses penurunan kovarian pers. (3.41) dan (3.42) untuk tensor dengan rank yang lebih tinggi adalah sebagai berikut.

1. Tensor kontravarian rank n

$$A_{;\nu}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \partial_\nu A^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\mu_1} A^{\alpha\mu_2\cdots\mu_n} + \cdots \\ + \Gamma_{\nu\alpha}^{\mu_n} A^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1}\alpha}$$

2. Tensor kovarian rank n

$$A_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n;\nu} = \partial_\nu A_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} + \Gamma_{\mu_1\nu}^\alpha A_{\alpha\mu_2\cdots\mu_n} + \cdots + \Gamma_{\mu_n\nu}^\alpha A_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1}\alpha}$$

3. Tensor campuran rank m kontravarian dan rank n kovarian

$$A_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n;\nu}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m} = \partial_\nu A_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu_1} A_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}^{\alpha\mu_2\cdots\mu_m} + \cdots \\ + \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu_m} A_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{m-1}\beta} \\ - \Gamma_{\nu_1\alpha}^\beta A_{\beta\nu_2\cdots\nu_n}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m} - \cdots - \Gamma_{\nu_n\alpha}^\beta A_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{n-1}\beta}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_m}$$

3. Pembuktian Persamaan

Lambang Christoffel jenis pertama dinyatakan:

$$[\mu\nu, \beta] = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu})$$

$$\Gamma_{\mu\nu, \sigma} = [\mu\nu, \sigma] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right)$$

Lambang Christoffel jenis kedua dinyatakan oleh persamaan

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \\ = g^{\alpha\beta} [\mu\nu, \beta] \\ = g^{\alpha\beta} \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \\ = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu})$$

Atau bentuk lain dari lambang Christoffel jenis kedua

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu, \sigma \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \right)$$

4. Pembuktian Persamaan 2

Contoh Soal dengan pemakaian lambang Christoffel jenis pertama

Jika diketahui : $ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2$

Bentuk umum:

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + 2g_{13}dx_1dx_3 + 2g_{23}dx_2dx_3$$

Maka diperoleh:

$$g_{11} = a^2$$

$$g_{22} = a^2 \sin^2 \theta$$

$$g_{33} = g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0$$

$$g_{12} = g_{22} = 0$$

Ekuivalen valensinya:

$$X_1 = \theta$$

$$X_4 = \phi$$

Dengan menggunakan lambang Christoffel jenis pertama carilah [22,1] dan [22,2]

$$[22,1] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial \theta} (a^2 \sin^2 \theta) \right)$$

$$= \frac{1}{2} (-a^2 2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$= -a^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$[22,2] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} (a^2 \sin^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta) \right)$$

$$= \frac{1}{2} (0)$$

$$= 0$$

Jadi untuk mencari kofaktor g_{11} dan g_{22} terlebih dahulu dicari determinannya yaitu:

$$\begin{aligned} g &= \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} \\ &= a^4 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\text{Kofaktor } g^{11} = \frac{\text{kofaktor } g_{11}}{g} = \frac{a^2 \sin^2 \theta}{a^4 \sin^2 \theta} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{g_{11}}$$

$$\text{Kofaktor } g^{22} = \frac{\text{kofaktor } g_{22}}{g} = \frac{a^2}{a^4 \sin^2 \theta} = \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} = \frac{1}{g_{22}}$$

Tensor kelengkungan $R_{\beta\mu\alpha\nu}$ dapat ditentukan dengan perkalian dalam antara tensor metrik $g_{\beta\eta}$ dan tensor Riemann-Christoffel $R_{\mu\alpha\nu}^{\eta}$ menurut persamaan:

$$R_{\beta\mu\alpha\nu} = g_{\beta\eta} R_{\mu\alpha\nu}^{\eta}$$

kontraksi $R_{\mu\alpha\nu}^{\eta}$ terhadap indeks (η, ν) menghasilkan tensor Ricci $R_{\mu\alpha}$.

$$R_{\mu\alpha\nu}^{\eta} = \partial_{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\eta} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\eta} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\eta} \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}$$

$$R_{\mu\alpha\nu}^{\nu} = \partial_{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\eta} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta}$$

$$R_{\mu\alpha} = \partial_{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\nu} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu} + \Gamma_{\beta\alpha}^{\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\nu} \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta}$$

$$R_{\mu\alpha} = R_{\mu\alpha\nu}^{\nu}$$

Skalar Kelengkungan R diperoleh melalui perkalian antara $g^{\mu\alpha}$ dan $R_{\mu\alpha}$ yang ditulis sebagai

$$R = g^{\mu\alpha} R_{\mu\alpha}$$



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nuralfin Anripa
NIM : 14640035
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Fisika
Judul Skripsi : Studi Orbit Geodesik Lubang Hitam Schwarzschild
dalam Koordinat Isotropik
Pembimbing I : Drs. Abdul Basid, M.Si
Pembimbing II : Ahmad Abthokhi, M.Pd

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	1 Januari 2019	Konsultasi Bab I, II, dan III	
2	6 Januari 2019	Konsultasi Bab I, II, dan III	
3	21 Januari 2019	Konsultasi Bab I, II, dan III	
4	28 Januari 2019	Konsultasi Bab I, II, III dan ACC	
5	16 Mei 2019	Konsultasi Data Hasil Hitungan Bab IV	
6	23 Juni 2019	Konsultasi Data Hasil Hitungan Bab IV	
7	25 Juli 2019	Konsultasi Bab IV	
8	2 Agustus 2019	Konsultasi Bab IV	
9	9 November 2019	Konsultasi Bab IV	
10	25 Januari 2020	Konsultasi Kajian Agama	
11	26 Februari 2020	Konsultasi Kajian Agama dan ACC	
12	29 Februari 2020	Konsultasi Semua Bab, Abstrak dan ACC	

Malang, 22 April 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Fisika,

Drs. Abdul Basid, M.Si
NIP. 19650504 199003 1 003