

**ADDITIVELY DAN MULTIPLICATIVELY WEIGHTED HARARY INDEX
PADA GRAF IDENTITAS DARI RING KOMUTATIF KESATUAN**

SKRIPSI

**OLEH
ISTIQOMA PUTRI SALSABIL
NIM. 16610054**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

***ADDITIVELY DAN MULTIPLICATIVELY WEIGHTED HARARY INDEX
PADA GRAF IDENTITAS DARI RING KOMUTATIF KESATUAN***

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Istiqoma Putri Salsabil
NIM. 16610054**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**ADDITIVELY DAN MULTIPLICATIVELY WEIGHTED HARARY INDEX
PADA GRAF IDENTITAS DARI RING KOMUTATIF KESATUAN**

SKRIPSI

Oleh
Istiqoma Putri Salsabil
NIM. 16610054

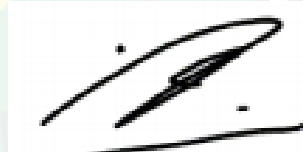
Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 14 April 2020

Pembimbing I



Dr. H Imam Sujarwo, M.Pd
NIP. 19630502 198703 1 005

Pembimbing II



Ach. Nashicuddin, M.A
NIP. 19730705 00003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

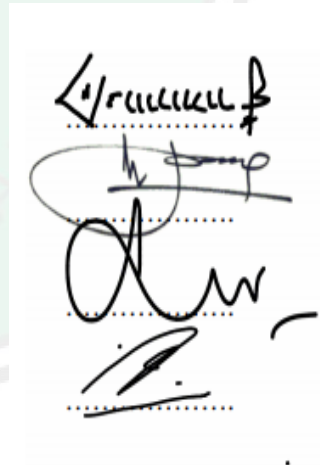
**ADDITIVELY DAN MULTIPLICATIVELY WEIGHTED HARARY INDEX
PADA GRAF IDENTITAS DARI RING KOMUTATIF KESATUAN**

SKRIPSI

Oleh
Istiqoma Putri Salsabil
NIM. 16610054

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 24 April 2020

Penguji Utama : Evawati Alisah, M.Pd
Ketua Penguji : Dr. Turmudi, M.Si., Ph.D
Sekretaris Penguji : Dr. H Imam Sujarwo, M.Pd
Anggota Penguji : Ach Nashicuddin, M.A



Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Istiqoma Putri Salsabil

NIM : 16610054

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : *Additively dan Multiplicatively Weighted Harary Index* pada Graf

Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, April 2020
Yang membuat pernyataan



Istiqoma Putri Salsabil
NIM. 16610054

MOTO

“senantiasa bersyukur dan kembali berikhtiar.”



PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dengan rasa syukur kepada Allah SWT penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Ayahanda H. Khotamil Iman dan Ibunda Dra. Hj Jumiati tercinta,
yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat,
dan kasih sayang yang tak ternilai, serta Kakak Dani dan kakak Ichal yang selalu
menjadi kebanggaan bagi penulis.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “*Additively dan Multiplicatively Weighted Harary Index* pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan” sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.

5. Ach. Nasichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II dan dosen wali yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam proses perkuliahan.
7. Bapak dan Ibu serta kakak tercinta yang selalu memberikan do'a, semangat dan motivasi demi keberhasilan penulis.
8. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2016 khususnya Matematika-B, teman-teman grup ngiler, terima kasih atas dukungan dan motivasi yang tak terlupakan serta kenang-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

Malang, April 2020

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR TABEL	x
DAFTAR GAMBAR	xi
ABSTRAK	xii
ABSTRACT	xiii
المخلص	xiv
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan	5
1.4 Manfaat	5
1.5 Batasan Masalah.....	6
1.6 Metode Penelitian.....	6
1.7 Sistematika Penelitian	7
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1. Graf	9
2.1.1 Terhubung Langsung (<i>adjacent</i>) dan Terkait Langsung (<i>incident</i>) ...	9
2.1.2 Graf Terhubung dan Tak Terhubung	10
2.1.3 Derajat Titik Graf	11
2.2 Ring	11
2.2.1 Ring Komutatif Kesatuan.....	12
2.3 Graf Identitas Dari Ring Komutatif Kesatuan.....	12
2.4 Graf Identitas Membangun Graf Kipas	14
2.5 Harary Index	15
2.6 Pola Hubungan Hamba dengan Tuhannya	17

BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 <i>Additively Weighted Harary Index</i> pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan $Z_p, p = \{p p \geq 5, p \text{ prima}\}$	
3.1.1 <i>Additively Weighted Harary Index</i> pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_5	19
3.1.2 <i>Additively Weighted Harary Index</i> pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_7	21
3.1.3 <i>Additively Weighted Harary Index</i> pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_{11}	22
3.1.4 <i>Additively Weighted Harary Index</i> pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_{13}	25
3.2 <i>Multiplicatively Weighted Harary Index</i> pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan $Z_p, p = \{p p \geq 5, p \text{ prima}\}$	
3.2.1 <i>Multiplicatively Weighted Harary Index</i> pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_5	30
3.2.2 <i>Multiplicatively Weighted Harary Index</i> pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_7	31
3.2.3 <i>Multiplicatively Weighted Harary Index</i> pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_{11}	31
3.2.4 <i>Multiplicatively Weighted Harary Index</i> pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_{13}	32
3.3 Kajian Agama Mengenai Tanda Bagi Orang yang Berilmu	36

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	38
4.2 Saran	39

DAFTAR PUSTAKA	39
----------------------	----

LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Tabel Cayley Ring Komutatif Kesatuan $\mathbb{Z}_5$	13
Tabel 3.1 Tabel Cayley Ring Komutatif Kesatuan $\mathbb{Z}_5$	19
Tabel 3.2 Tabel Cayley Ring Komutatif Kesatuan $\mathbb{Z}_7$	21
Tabel 3.3 Tabel Cayley Ring Komutatif Kesatuan $\mathbb{Z}_{11}$	23
Tabel 3.4 Tabel Cayley Ring Komutatif Kesatuan $\mathbb{Z}_{13}$	25
Tabel 3.5 <i>Additively weighted Harary Index</i> pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan $Z_p, p = \{p p \geq 5, p \text{ prima}\}$	28
Tabel 3.6 <i>Multiplicatively Weighted Harary Index</i> pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan $Z_p, p = \{p p \geq 5, p \text{ prima}\}$	33

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf G.....	9
Gambar 2.2 Graf G.....	10
Gambar 2.3 Graf Terhubung dan Tak Terhubung	11
Gambar 2.4 Graf G.....	11
Gambar 2.5 Graf Identitas Z_5	14
Gambar 2.6 Graf Kipas F_n	14
Gambar 3.1 Graf Identitas dari Z_5	20
Gambar 3.2 Graf Identitas dari Z_7	21
Gambar 3.3 Graf Identitas dari Z_{11}	23
Gambar 3.4 Graf Identitas dari Z_{13}	27
Gambar 3.5 Graf Identitas $I(Z_p)$ dengan $p \geq 5$, p prima	29
Gambar 3.6 Graf Identitas $I(Z_p)$ dengan $p \geq 5$, p prima	34
Gambar 3.7 Graf Hubungan antara Allah SWT dengan Hamba dan Sesama Hamba-Nya	36

ABSTRAK

Istiqoma Putri Salsabil. 2020. **Additively dan Multiplicatively Weighted Harary Index pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd. (II) Ach. Nasichuddin, M.A.

Kata kunci: *additively, multiplicatively, harary index*, graf identitas, ring komutatif kesatuan.

Setiap titik dan sisi dikatakan saling menutup pada graf G jika titik dan titik tersebut terhubung langsung di graf G . *Harary Index* didefinisikan sebagai jumlah reciprocal antara semua pasangan sisi dalam grafik yang terhubung nontrivial. Semua hasil yang ditetapkan pada Harary Index terutama yang berurusan dengan batas dan sifat ekstrem dari *Harary Index*. Harary index yang digunakan dalam penelitian ini adalah *additively weighted harary index* (H_A) dan *multiplicatively weighted harary index* (H_W) yang lalu diterapkan pada graf identitas dari ring komutatif dengan unsur kesatuan.

Tujuan penelitian ini adalah mencari pola umum, kemudian dijadikan suatu teorema dari *additively* dan *multiplicatively weighted harary index*. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*library research*). Hasil penelitian ini adalah:

1. *Additively Weighted Harary Index* dari graf $I(Z_p = \{p|p \geq 5, p \text{ prima}\})$ adalah

$$(p-2)^2 + 4(p-3) + 1$$

2. *Multiplicatively weighted Harary Index* dari graf $I(Z_p = \{p|p \geq 5, p \text{ prima}\})$ adalah

$$((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + ((p \times 2) - 6)$$

Untuk penelitian selanjutnya disarankan untuk meneliti tentang *Weighted Harary co-Indices* pada graf yang lain.

ABSTRACT

Istiqoma Putri Salsabil. 2020. **Additively dan Multiplicatively Weighted Harary Index of Identity Graph of Commutative Ring with Unity**. Thesis. Mathematics department, Faculty of Science and Technology, the State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd. (II) Ach. Nasichuddin, M.A.

Keywords: *additively, multiplicatively, harary index*, identity graph, commutative ring with unity.

Each vertex and edge in a graph G are called covering each other if they are incident. Harary Index is defined as the sum of reciprocal distances between all pairs of edges in a nontrivial connected graph. All results set on the Harary Index are mainly those that deal with the limits and the extreme nature of the Harary Index. Harary index used in this research is additively weighted harary index (H_A) and multiplicatively weighted harary index (H_W) which is then applied to the identity graph of the commutative ring with unity.

The purpose of this research is to find the formula of Harary Index, then becomes a theorem of additively and multiplicatively weighted harary indeces. The Methods used in this research is library research. The result of this research is:

1. *Additively Weighted Harary Index* of graph $I(Z_p = \{p|p \geq 5, p \text{ prime}\})$ is

$$(p - 2)^2 + 4(p - 3) + 1$$

2. *Multiplicatively weighted Harary Index* of graph $I(Z_p = \{p|p \geq 5, p \text{ prime}\})$ is

$$\left((p - 3)((p - 2) \times 2)\right) + (p - 2) + ((p \times 2) - 6)$$

For the next research, the researcher suggests to do researcher *Weighted Harary co-Indices* on other types of graph.

الملخص

إستقامة بوتري سلسيل. 2020. المؤشر Harary الموزون إضافيا وبشكل مضاعف في المخطاط للهوية من الحلقة التبادلية للوحدة. بحث جامعي. قسم الرياضية، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا ملك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانغ.

المشرف: (1) الدكتور إمام سوجاروو، الماجستير. (2) أحمد نصيح الدين، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: الإضافية، المضاعفة، المؤشر Harary، المخطاط للهوية، الحلقة التبادلية للوحدة.

يقال أن كل رأس وضلع يتغلقتان في المخطاط G إذا كانا متصلين مباشرة به. يتم تعريف المؤشر Harary على أنه مجموع المسافات المتبادلة بين جميع أزواج الأضلاع في المخطاط المتصل غير بديهي. تم تحديد جميع النتائج في المؤشر Harary خاصة هي التي تتعلق بالحدود والطبيعة المتطرفة. والمؤشر Harary الذي تم استخدامه في هذا البحث هو المؤشر Harary الموزون إضافيا (H_A) والمؤشر Harary الموزون بشكل مضاعف (H_W). ثم يتم تطبيقه بعد ذلك على المخطاط للهوية من الحلقة التبادلية بعنصر الوحدة.

تهدف هذه الدراسة للبحث عن الأنماط العامة التي تصبح نظرية المؤشر Harary الموزون إضافيا وبشكل مضاعف. والطريقة المستخدمة في هذه الدراسة هي البحث الكتابي. كانت نتائج هذه الدراسة هي:

1. المؤشر Harary الموزون إضافيا من المخطاط ($I(Z_p = \{p|p \geq 5, p \text{ prima}\})$ هو

$$(p-2)^2 + 4(p-3) + 1$$

2. المؤشر Harary الموزون بشكل مضاعف من المخطاط ($I(Z_p = \{p|p \geq 5, p \text{ prima}\})$ هو

$$((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + ((p \times 2) - 6)$$

وللبحث الآتي من المستحسن أن يكون في مجال مختلف يعني عن *Weighted Harary*

co-Indices من مخطاط آخر.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Qur'an yang merupakan kalam dari yang Maha Esa, Allah SWT, diwahyukan kepada nabi Muhammad SAW, sebagai nabi terakhir di akhir zaman, agar disampaikan kepada seluruh umat sebagai sumber pokok ajaran Islam dan ilmu pengatuhan di dunia. Dengan demikian, al-Qur'an telah memberikan kepada manusia (hamba) sebagai kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan alat untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkap dan mengetahui keajaiban dari kedua dunia itu (Rahman, 1992). Ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat saling terkait atas satu sama lain dalam kitab suci al-Qur'an.

Matematika sebagai salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai bidang maupun macam ilmu yang lain terus berkembang seiring berkembangnya fenomena di alam yang semakin kompleks sehingga sangat penting untuk dipelajari. Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan dalam matematika yang dikenal dengan bahahasa matemtika. Untuk keperluan tersebut, pertama dicari pokok masalahnya, kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya (Purwanto, 1998).

Cabang ilmu matematika yang mengkaji tentang objek-objek secara diskrit yang artinya terdiri dari elemen-elem yang sejenis yang berbeda atau tidak terhubung adalah matematika diskrit. Dalam matematika diskrit sendiri mempunyai cabang yang diantaranya: himpunan, relasi dan fungsi, induksi matematika,

kombinatorial, pohon, aljabar boolean, kompleksitas algoritma, dan graf. Hingga pada intinya matematika diskrit mempelajari tentang teori graf dan kombinatorial.

Teori graf yang selalu menjadi topik yang menarik untuk dibahas oleh para pengkaji ilmu matematika. Teori graf banyak diartikan sebagai suatu pokok bahasan yang mendapat banyak perhatian karena model-modelnya sangat berguna untuk diaplikasi dalam kehidupan sehari-hari. Graf juga dipakai diberbagai bidang yang bertujuan untuk memodelkan suatu persoalan. Menyelesaikan permasalahan akan menjadi jelas dan dengan mudah untuk menganalisisnya.

Graf G yang didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan berhingga dan tidak kosong dari objek-objek yang disebut dengan titik dan E adalah himpunan yang mungkin kosong dari 2-elemen subhimpunan pada titik V yang disebut dengan sisi. Himpunan titik dan sisi dinotasikan dengan $V(G)$ dan $E(G)$. Jika v adalah titik pada graf G , maka banyak titik di G yang terhubung langsung ke v disebut derajat titik v dan dinotasikan dengan $\deg(v)$ (Chartrand, dkk, 2016).

Unsur-unsur pada graf dalam al-Qur'an yaitu titik-titik yang mengimplementasikan hamba-hambaNya dan sang Pencipta (Allah Swt). Sedangkan sisi yang menghubungkan unsur-unsur tersebut adalah hubungan yang terjadi akan unsur-unsur tersebut. Hubungan Tuhannya dengan hamba-Nya dan hubungan sesama hamba yang terjalin (*Hablun min Allah wa Hablun min an-Nas*). Sebagaimana dalam firman-Nya:

وَاعْبُدُوا اللَّهَ وَلَا تُشْرِكُوا بِهِ شَيْئًا وَبِالْوَالِدَيْنِ إِحْسَانًا وَبِذِي الْقُرْبَىٰ ضُرْبَت
وَالْيَتَامَىٰ وَالْمَسَاكِينِ وَالْجَارِ ذِي الْقُرْبَىٰ وَالْجُنُبِ وَالصَّاحِبِ بِالْجَنبِ
وَابْنِ السَّبِيلِ وَمَا مَلَكَتْ أَيْمَانُكُمْ إِنَّ اللَّهَ لَا يُحِبُّ مَن كَانَ مُخْتَالًا فَخُورًا

“Sembahlah Allah SWT dan janganlah kamu mempersekutukan-Nya dengan sesuatupun. dan berbuat baiklah kepada dua orang ibu-bapak, karib-kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga yang dekat dan tetangga yang jauh, dan teman sejawat, Ibnu sabil dan hamba sahayamu. Sesungguhnya Allah SWT tidak menyukai orang-orang yang sombong dan membangga-banggakan diri” (QS. An-Nisa: 36)

Ayat tersebut mengandung dua bentuk akhlak, yaitu akhlak kepada Allah SWT (*hablum minallah*) yang ditunjukkan dengan perintah agar kita menjalin hubungan baik kepada Allah SWT dengan cara tidak menyekutukan-Nya dengan yang lain. Akhlak terhadap sesama manusia (*hablum minannas*) yang ditunjukkan dengan perintah berbuat baik kepada kedua orang tua, karib kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin tetangga yang dekat dan tetangga yang jauh, teman sejawat, orang yang dalam perjalanan dan hamba sahaya.

Misalkan terdapat dua titik u, v dari G terhubung, atau bertetangga, jika uv adalah sisi dari G . Dua sisi $e \neq f$ terhubung jika mereka memiliki kesamaan (Diestel, 2005). Titik u dan v dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat $u - v$ di G . Jika untuk setiap dua titik berbeda di G adalah terhubung, maka G disebut graf terhubung. Sebaliknya jika ada dua titik u dan v di G , tetapi tidak terdapat lintasan $u - v$ di G , maka G dikatakan tak terhubung (*disconnected*) (Abdussakir, dkk, 2009). Misalkan terdapat G graf terhubung, untuk $u, v \in V(G)$ terdapat jarak antara u dan v yang didefinisikan sebagai titik terpendek antara u dan v di G dan dituliskan dengan $d(u, v)$ (Kusmayadi dan Sudibyo, 2011).

Graf identitas merupakan dari elemen-elemen yang dioperasikan sehingga menghasilkan identitas di ring, misalkan a, b di ring R , sedemikian sehingga diperoleh $a * b = b * a = e$ (e elemen identitas di R). Titik-titik dalam graf

identitas saling terhubung (sisi) jika memenuhi syarat tersebut dan semua titiknya terhubung ke elemen identitas di graf identitas.

Harary Index didefinisikan sebagai jumlah jarak timbal balik antara semua pasangan sisi dalam grafik yang terhubung nontrivial. Semua hasil yang ditetapkan pada *Harary Index* terutama yang berurusan dengan batas dan sifat ekstrem dari *Harary Index* (Zeng, 2013). *Harary Index* yang digunakan dalam penelitian ini yaitu *Additively* dan *Multiplicatively Weighted Harary Index*.

Harary Index membuat peneliti tertarik untuk diteliti lebih lanjut pada graf identitas dari Ring Komutatif Kesatuan. *Additively* dan *Multiplicatively Weighted Harary* dinotasikan sebagai $H_A(G) = \sum_{u \neq v} \frac{(\deg(u) + \deg(v))}{d(u,v)}$ dan $H_W(G) = \sum_{u \neq v} \frac{(\deg(u)\deg(v))}{d(u,v)}$ adalah jumlah hasil pertambahan dan perkalian tiap-tiap derajat titik yang kemudian dibagi dengan jarak tiap-tiap titik yang di jumlah atau dikalikan tersebut. Sebelumnya terdapat banyak penelitian untuk *Harary Index* beberapa diantaranya yaitu Hua dan Zang (2012) telah meneliti Indeks Topologi dari Graf, Zeng (2013) telah meneliti mengenai *Harary Index* dan Properti Hamiltonian dari Graf, Alizadeh (2013) telah meneliti mengenai *Addtively Weighted Harary Index* dari beberapa graf komposit, Xu (2015) telah meneliti *Weighted Harary Indices of Apex Trees and K-Apex Tress*, dan Li Bersama dengan Zhang (2016) telah meneliti mengenai *Some Extremal Properties of the Multiplicatively Weighted Harary Index of Graph*.

Penulis harus melakukan kajian teori graf, harary indeks, serta Ring Komutatif Kesatuan sehingga dapat terbentuk rumusan umumnya, sehingga dibutuhkan waktu yang lama dalam pengerjaannya. Untuk melanjutkan penelitian tentang graf

identitas dalam penelitian ini maka penulis mengangkat judul “***Additively dan Multiplicatively Weighted Harary Index*** pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dapat diperoleh rumusan masalah yaitu

1. Bagaimana prosedur umum dari *additively weighted Harary Index* pada graf identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_p , $p = \{p | p \geq 5, p \text{ prima}\}$?
2. Bagaimana prosedur umum dari *multiplicatively weighted Harary Index* pada graf identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_p , $p = \{p | p \geq 5, p \text{ prima}\}$?

1.3 Tujuan

Adapun tujuan dilakukannya penelitian ini yaitu

1. Untuk mengetahui prosedur umum dari *additively weighted Harary Index* pada graf identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_p , $p = \{p | p \geq 5, p \text{ prima}\}$?
2. Untuk mengetahui prosedur umum dari *multiplicatively weighted Harary Index* pada graf identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_p , $p = \{p | p \geq 5, p \text{ prima}\}$?

1.4 Manfaat

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai tambahan pengetahuan mengenai *Harary Index* yang di aplikasikan pada graf identitas dari ring komutatif kesatuan, serta dapat dijadikan literatur penunjang dan bahan perbandingan dengan metode yang ada lainnya.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini akan memfokuskan pembahasannya pada *additively* dan *multiplicatively Harary Index* pada graf identitas dari ring komutatif kesatuan modulo lima, tujuh, 11, dan 13. Penulis hanya mengambil sampel penelitian pada bilangan prima dengan rentang $5 \leq p \leq 13$ dikarenakan sudah dapat terbentuk suatu rumusan umum dari proses yang dilakukan, dan pada ring komutatif kesatuan bermodulo dua dan tiga peneliti tidak menggunakannya dikarenakan ring komutatif kesatuan tersebut tidak membentuk suatu pola yang dibutuhkan.

1.6 Metode Penelitian

Berdasarkan latar belakang tersebut maka penelitian ini akan menggunakan jenis penelitian kepustakaan (*library research*). Penelitian ini jha akan dilakukan dengan mengkaji buku-buku serta jurnal yang membahas mengenai topik graf dan aljabar abstrak yang berkaitan dengan tema penelitian.

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Pola pembahasannya dimulai dari hal-hal khusus yang lalu diperumum dan bersifat deduktif. Adapun langkah-langkah untuk mengetahui *additively* dan *multiplicatively* Harary Index pada graf identitas dari Ring Komutatif Kesatuan pada modulo Z_5, Z_7, Z_{11} dan Z_{13} adalah sebagai berikut:

1. Menentukan anggota dari Z_5 dengan menggunakan tabel Cayle operasi perkalian.
2. Mentukan himpunan titik $I(R)$ dari anggota Z_5 .
3. Menggambar graf identitas dengan menghubungkan setiap elemen unit dengan unsur identitasnya.

4. Menentukan derajat dan lintasan pada graf identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_5 .
5. Menentukan *additively* dan *multiplicatively weighted Harary Index* pada graf identitas dari Ring Komutatif Kesatuan.
6. Mengulangi langkah 1,2,3,4 dan 5 untuk Ring Komutatif Kesatuan pada Z_7, Z_{11}, Z_{13} .
7. Membuat dugaan (konjektur) *additively* dan *weighted multiplicatively Harary Index* berdasarkan pola perumusan yang ditemukan untuk masing-masing kasus pada Z_5, Z_7, Z_{11} dan Z_{13} .
8. Merumuskan konjektur tentang *additively* dan *multiplicatively weighted Harary Index* sebagai suatu teorema.
9. Menghasilkan teorema-teorema tentang *additively* dan *multiplicatively weighted Harary Index* yang dilengkapi dengan bukti deduktif.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan pada penelitain ini dibagi menjadi empat bab dan setiap bab terdiri dari beberapa subbab yang akan menjelaskan lebih rinci. Sistematika dimaksudkan agar penulisan terarah dan dapat dengan mudah dipahami. Adapun sistematika tersebut yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan berisi mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II Kajian Pustaka

Kajian pustaka berisi mengenai teori-teori yang berkaitan dengan penelitian yang serta dapat membantu peneliti. Pada penelitian ini, teori yang digunakan meliputi: graf yang terdiri dari derajat titik, graf terhubung, derajat serta lintasan. Selain itu, terdapat juga kajian mengenai ring, graf identitas dari ring kesatuan, *additively* dan *multiplicatively Harary Index*, serta anjuran untuk selalu berpikir dalam Al-Qur'an.

BAB III Pembahasan

Pembahasan berisi mengenai penyelesaian terhadap permasalahan *additively* dan *multiplicatively Harary Index* pada graf identitas dari Ring Komutatif Kesatuan, serta kajian agama mengenai tanda bagi orang yang berilmu.

BAB IV Penutup

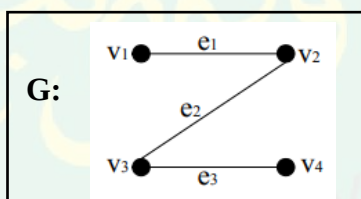
Penutup berisi kesimpulan dari hasil pembahasan serta saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

Suatu graf G didefinisikan sebagai himpunan tak kosong V dari objek yang disebut **tepi** bersamaan dengan himpunan yang mungkin kosong E dari dua-elemen subset dari V yang disebut dengan **simpul**. Tepi terkadang disebut dengan **titik** atau **node**, demikian dengan simpul terkadang disebut dengan **sisi** atau **hubungan**. Untuk menunjukkan bahwa graf G mempunyai himpunan titik V dan himpunan sisi E , kita tulis $G = (V, E)$. Untuk menjelaskan bahwa V dan E adalah himpunan titik dan himpunan sisi dari graf G , kita tulis dengan V sebagai $V(G)$ dan E sebagai $E(G)$. Setiap titik $\{u, v\}$ dari G biasanya di notasikan dengan uv atau vu . Jika $d = uv$ adalah titik di G , d adalah lintasan sisi dari u ke v (Chartrand, Lisniak dan Zhang, 2016).



Gambar 2.1 Graf G

Gambar 2.1 dapat dinyatakan dengan $G = (V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$, dengan $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_2, v_3)$ dan $e_3 = (v_3, v_4)$.

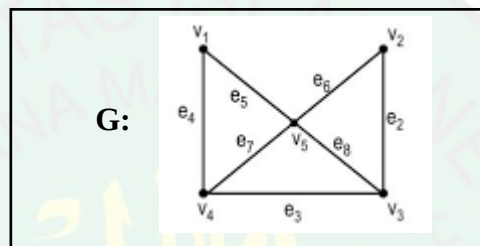
2.1.1 Terhubung Langsung (adjacent) dan Terkait Langsung (incident)

Dua titik u, v dari G terhubung, atau bertetangga, jika uv adalah sisi dari G . Dua sisi $e \neq f$ terhubung jika mereka memiliki kesamaan (Diestel, 2005). Titik v

dan sisi uv dikatakan terkait langsung satu sama lain. Sama dengan y dan xy juga terkait langsung (Chartrand dan Zhang, 2009).

Contoh:

Diketahui suatu graf G seperti pada gambar dibawah, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ dan $e_2 = (v_2, v_3)$, $e_3 = (v_3, v_4)$, $e_4 = (v_4, v_1)$, $e_5 = (v_1, v_5)$, $e_6 = (v_5, v_2)$, $e_7 = (v_5, v_4)$, $e_8 = (v_5, v_3)$.



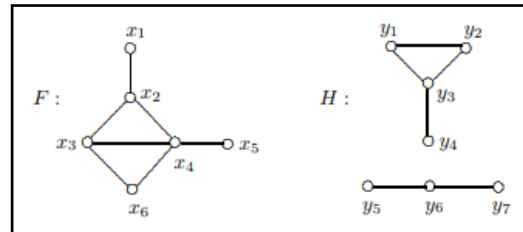
Gambar 2.2 Graf G

Berdasarkan gambar di atas, maka titik v_1 dan v_4 terhubung langsung, demikian juga dengan v_1 dan v_5 , v_2 dan v_5 , v_4 dan v_5 , v_3 dan v_5 , v_4 dan v_3 . Diketahui pula pada gambar diatas yaitu sisi e_4 terkait langsung dengan titik v_1 dan v_4 , sisi e_5 terkait langsung dengan titik v_1 dan v_5 , sisi e_6 terkait langsung dengan titik v_5 dan v_2 , sisi e_2 terkait langsung dengan titik v_2 dan v_3 , sisi e_3 terkait langsung dengan titik v_3 dan v_4 , sisi e_7 terkait langsung dengan titik v_4 dan v_5 , sisi e_8 terkait langsung dengan titik v_3 dan v_5 .

2.1.2 Graf Terhubung dan Tak Terhubung

Graf terhubung setiap pasang dari titik u, v dihubungkan terurut oleh sisi dan titik, $v = v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_k = w$, dimana v_i dan v_{i+1} adalah titik terakhir dari sisi e_i (Guichard, 2016). Graf G yang tidak terhubung disebut dengan graf tak terhubung. Graf F pada gambar dibawah terhubung selama F terdapat $u - v$

(lintasan) untuk setiap dua titik u dan v di F . Disisi yang lain, graf H tak terhubung, untuk contoh, H tidak terdapat lintasan (sisi) $y_4 - y_5$ (Chartrand dan Zhang, 2009).

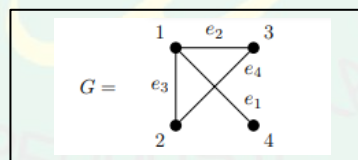


Gambar 2.3 Graf terhubung dan tak terhubung

2.1.3 Derajat Titik Graf

Derajat dari sebuah titik v di graf G adalah jumlah sisi dari titik di G yang terhubung langsung ke v . Dengan demikian titik v adalah jumlah titik di persikitaran $N(v)$. Secara ekuivalen, derajat dari v adalahnya jumlah sisi dari G yang terikat langsung dengan v . Derajat dari v di tuliskan dengan $\deg(v)$. Titik yang berderajat nol disebut dengan titik terisolasi dan dengan derajat satu adalah titik terakhir. Sisi yang terikat langsung dengan titik terakhir disebut sisi-*pendant* (Chartrand dan Zhang, 2009).

Contoh:



Gambar 2.4 Graf G

Dapat diketahui derajat dari graf G diatas yaitu: $\deg(1) = 3$, $\deg(2) = 2$, $\deg(3) = 2$, dan $\deg(4) = 1$.

2.2 Ring

Ring R merupakan suatu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner, operasi penjumlahan (dituliskan $a + b$) dan operasi perkalian (dituliskan $a \cdot b$), sedemikian hingga untuk $\forall a, b, c \in R$, maka:

1. $a + b = b + a$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Terdapat identitas pada operasi penjumlahan yaitu nol. Sedemikian hingga $a + 0 = a \forall a \in R$.
4. Terdapat suatu elemen $-a \in R$ sedemikian hingga $a + (-a) = 0$.
5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(b + c) \cdot a = a \cdot b + c \cdot a$.

Jadi, ring adalah suatu grup Abelian dibawah operasi penjumlahan, serta asosiatif terhadap operasi perkalian pada distributif kiri dan kanannya atas operasi penjumlahan (Gallian, 2012).

2.2.1 Ring Komutatif Kesatuan

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah ring. Jika terdapat suatu unsur e di R sedemikian hingga $x \cdot e = e \cdot x = x, \forall x \in R$, maka satu disebut unsur kesatuan dan R adalah ring dengan unsur kesatuan. Jika R komutatif terhadap operasi perkalian, maka R disebut ring komutatif. Sehingga R yang komutatif dan mempunyai unsur kesatuan terhadap operasi perkalian disebut ring komutatif dengan unsur kesatuan (Gilbert dan Jimmie, 2014).

2.3 Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan

Graf identitas dari ring komutatif yang diartikan sebagai titik dari elemen-elemen yang dioperasikan sehingga menghasilkan identitas di ring komutatif, misalkan a, b di ring komutatif R , sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$ (e elemen identitas di R). Titik-titik dalam graf identitas yang terhubung langsung (sisi) jika memenuhi syarat tersebut dan semua titiknya terhubung ke elemen identitas di graf identitas (Kandasamy dan Smarandache, 2009).

Misalakan R adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan satu. Ambil $I(R)$ sebagai himpunan *unit* di R (jelas $I(R) \neq 0$ sebagaimana $1 \in I(R)$). Kemudian unsur-unsur dari $I(R)$ akan membentuk titik pada graf sederhana. Dua unsur x dan y di R terhubung langsung (*adjacent*) jika dan hanya jika $x \circ y = 1$. Asumsikan bahwa 1 terhubung langsung pada setiap *unit* di R . Sehingga graf dengan himpunan titik $I(R) = \{1\}$ maka graf identitasnya hanya satu titik (Kandasamy dan Smarandache, 2009).

Contoh:

Diberikan $(Z_5, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 5 dengan $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel Cayley $(Z_5, +, \cdot)$ terhadap operasi perkalian, yaitu:

Tabel 2.1 Tabel Cayley Ring Komutatif Kesatuan Z_5

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

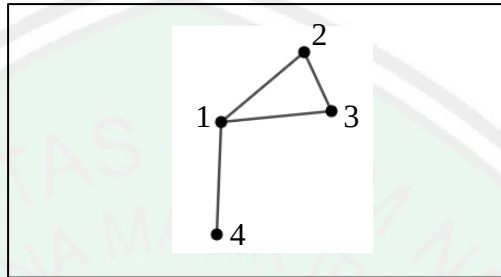
Menurut definisi yang diberikan oleh Kandasamy dan Smarandache pada graf identitas, sehingga berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh *unit* dari Z_5 adalah

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 1$$

$$4 \cdot 4 = 1$$

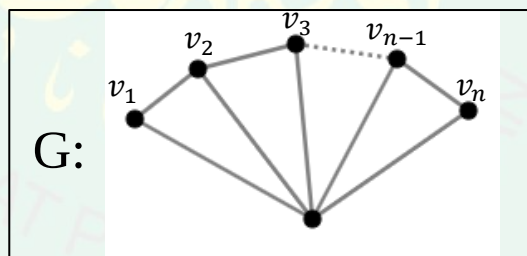
Diperoleh himpunan *unit* dari Z_5 yaitu $I(Z_5) = \{1, 2, 3, 4\}$. Setiap *unit*nya di Z_5 kan terhubung langsung. Digambarkan graf identitas dari ring komutatif dengan unsur kesatuan sebagai berikut:



Gambar 2.5 Graf Identitas Z_5

2.4 Graf Identitas Membangun Graf Kipas

Graf kipas dibentuk dari penjumlahan graf komplit (K_1) dan graf lintasan (P_n), yaitu $F_n = K_1 + P_n$. Dengan demikian graf kipas mempunyai $(n + 1)$ titik dan $(2n - 1)$ sisi (Gallian, 2007).



Gambar 2.6 Graf Kipas F_n

Dengan melihat pada definisi graf identitas dari ring komutatif kesatuan pada subbab sebelumnya, graf identitas merupakan bentuk graf yang membangun graf kipas. Jika dilihat pada gambar graf kipas dan graf identitas dari ring komutatif kesatuan terdapat perbedaan yaitu pada satu pasang graf (satu titik dan satu sisi) yang terhubung langsung dengan elemen identitasnya. Pasangan graf tersebut yang menjadikan perbedaan akan dua graf tersebut.

2.5 Harary Index

Indeks Harary yang pada awalnya di digunakan sebagai pomedalan molekul-molekul kimia untuk memudahkan dalam mencari perhitungan-perhitungan yang diperlukan. Pada tahun 1990 suatu kelompok matematikawan dan komputasi kimia merancang invarian teori graf (indeks topologi) untuk karakterisasi graf kimia, yang demikian diberi nama *Harary Index*. *Harary Index*, dinotasikan dengan H , dimana ini merancang dari jarak timbal balik (*reciprocal distance*) dan memiliki sejumlah sifat yang menarik (Lucic dkk, 2002).

Penyelidikan akan modifikasi *Harary Index* merupakan pembelajaran dalam bidang matematika, tetapi orang harus menyadari bahwa itu awalnya diperkenalkan dalam kimia-matematika dengan motivasi bahwa itu akan meningkatkan ketidakkonsistenan jika indeks Wiener klasik yang disebabkan oleh beberapa fakta bahwa kontribusi dari pasangan titik terdekat ke hasil keseluruhan jauh lebih kecil daripada sisi terjauh.

Harary Index didefinisikan sebagai resiprocal antara semua pasangan sisi dalam grafik yang terhubung nontrivial. Semua hasil yang ditetapkan pada Harary Index terutama yang berurusan dengan batas dan sifat ekstrem dari Harary Index (Zeng, 2013).

Additively Weighted Harary Indices (H_A) dan *Multiplicatively Weighted Harary Indices* (H_M) dirumuskan sebagai (Xu dkk, 2014)

$$H_A(G) = \sum_{u \neq v} \frac{(\deg(u) + \deg(v))}{d(u, v)}$$

$$H_M(G) = \sum_{u \neq v} \frac{(\deg(u) \deg(v))}{d(u, v)}$$

Additively Weighted Harary index diperkenalkan pertama oleh Hua dan Zhang pada tahun 2012 berdasarkan judul “*On the reciprocal degree distance of graphs*” karena dapat dipertimbangkan analogi akan jarak derajat pada suatu graf. Namanya sekarang menjadi H_A diciptakan oleh Alizadeh, Iranmanesh, dan Dosilic pada tahun 2013 dalam tulisannya yang berjudul “*Additively Weighted Harary Index of some composite graphs*” dimana mereka diperkenalkan secara independent invarian ini yang sama pada *mulirplicatively weighted Harary index* (Xu et al, 2015).

Additively Weighted Harary Indices disebut *reciprocal degree distance* karena bisa dilihat sebagai analogi *reciprocal* dari *degree distance* (Xu dkk, 2014).

Berdasarkan Gambar 2.5 dapat diketahui sebagai berikut:

- a. $\deg(0)=0$ $\deg(2)=2$ $\deg(4)=1$
 $\deg(1)=3$ $\deg(3)=2$
- b. $d(0,1)=0$ $d(1,2)=1$ $d(2,4)=2$
 $d(0,2)=0$ $d(1,3)=1$ $d(3,4)=2$
 $d(0,3)=0$ $d(1,4)=1$
 $d(0,4)=0$ $d(2,3)=1$

Sehingga didapatkan,

$$\begin{aligned}
 \text{a. } H_A(G) &= \frac{\deg(1)+\deg(2)}{d(1,2)} + \frac{\deg(1)+\deg(3)}{d(1,3)} + \frac{\deg(1)+\deg(4)}{d(1,4)} + \\
 &\quad \frac{\deg(2)+\deg(3)}{d(2,3)} \\
 &= \frac{(\deg(1) \times 3) + (\deg(2) \times 2) + (\deg(3) \times 2) + \deg(4)}{1} \\
 &= (3 \times 3) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + 1 \\
 &= 18
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } H_M(G) &= \frac{\deg(1) \deg(2)}{d(1,2)} + \frac{\deg(1) \deg(3)}{d(1,3)} + \frac{\deg(1) \deg(4)}{d(1,4)} + \frac{\deg(2) \deg(3)}{d(2,3)} \\
 &= \frac{(2 \times (3 \times 2)) + (3 \times 1) + (2 \times 2)}{1} \\
 &= 12 + 3 + 4 \\
 &= 19
 \end{aligned}$$

2.6 Pola Hubungan Hamba dengan Tuhannya

Menurut Wahab dalam buku nya (1996) menuliskan tafsir QS An-Nisa ayat 36 oleh Tafsir Al-Muyassar yaitu setelah Allah memerintahkan kedua belah pihak - suami-istri untuk bergaul dengan baik, kemudian Allah memerintahkan untuk melakukan perbuatan-perbuatan yang baik. Allah memulai perintah ini dengan perintah mengesakan-Nya dengan penuh rasa cinta, ketundukan, dan ikhlas; Allah melarang perbuatan syirik, sebab Dia Memiliki kuasa mutlak dalam mengatur alam semesta ini, tanpa ada sekutu yang membantu-Nya. Kemudian Allah menyandingkan perintah ini dengan perintah berbakti kepada kedua orangtua; Ini merupakan dalil yang menunjukkan besarnya hak mereka berdua atas anak-anaknya dan kewajiban berbakti kepada keduanya. kemudian Allah memerintahkan untuk berbuat baik kepada setiap muslim yang memiliki hubungan kerabat seperti saudara, paman, dan lainnya; dan berbuat baik kepada anak-anak yatim yang telah kehilangan ayah mereka sejak masa kecil, kepada orang-orang miskin yang tidak mampu mencukupi kebutuhan mereka, kepada tetangga dekat dan tetangga jauh, Kepada orang yang selalu menyertai kita baik itu istri, tamu, atau teman dalam perjalanan, serta kepada musafir yang sedang singgah. kemudian Allah memerintahkan untuk berbuat baik kepada setiap yang kita miliki baik itu berupa budak maupun hewan peliharaan.

Dapat dilihat dengan jelas pada ayat tersebut dan pada Tafsir Al-Muyassar bahwa ayat tersebut menjelaskan dengan tegas hubungan vertikal atau *Hablum minallah* (Hamba-Tuhannya) dan hubungan horizontal atau *Hablum minannas* (Hamba-Hamba). Allah memerintahkan manusia untuk saling menyayangi dan berbuat baik satu dengan yang lainnya. Allah mengatur masalah hubungan yang baik sesama manusia antara lain tentang:

1. Mendahulukan kepentingan orang lain (QS 2:177, 59:9),
2. Berbuat baik adalah merupakan sebaik-baik amalan (QS 3:92, 3:134),
3. Menyempurnakan takaran dan timbangan, serta tidak merugikan orang lain (QS 7:85, 11:84, 11:85, 17:35, 26:181, dsb) – mengurangi takaran termasuk korupsi.
4. Berinfak atau memberikan sebagian rizki kepada orang lain (QS 2:254, 3:92, 14:31, 32:16, 35:29, 42:38, dsb)
5. Tolong menolong dan kasih sayang (QS 5:2, 48:29, 24:22, 90:17), dan masih banyak banyak lagi.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 *Additively Weighted Harary Index* pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan $Z_p, p = \{p | p \geq 5, p \text{ prima}\}$

3.1.1 *Additively Weighted Harary Index* pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_5

Diberikan $(Z_5, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif kesatuan pada himpunan bilangan bulat ber modulo 5 dengan $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel *Cayley* terhadap operasi perkalian sehingga diperoleh:

Tabel 3.1 Tabel *Cayley* dari Z_5

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

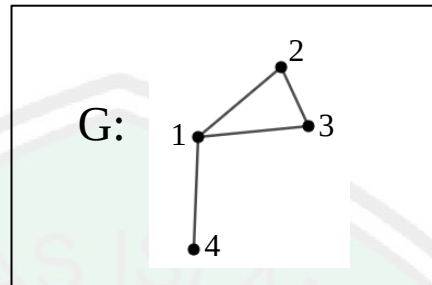
Graf identitas didefinisikan sebagai dua unsur x dan y yang berada pada Z_5 terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = 1$ (Kandasamy dan Smarandache, 2009). Sehingga berdasarkan tabel diatas diperoleh elemen *unit* dari Z_5 yaitu:

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 1$$

$$4 \cdot 4 = 1$$

Maka himpunan *unit* dari Z_5 yaitu $I(Z_5) = \{1, 2, 3, 4\}$. Setiap elemen unit di Z_5 akan terhubung langsung dengan 1. Dengan demikian dapat dibentuk suatu graf identitas dari ring komutatif kesatuan sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf Identitas dari Z_5

Berikut diketahui derajat titik dan lintasan titik berdasarkan Gambar 3.1 tersebut sebagai berikut:

Derajat titik : $\deg(1) = 3$; $\deg(2) = 2$; $\deg(3) = 2$; $\deg(4) = 1$

Lintasan titik : $d(1,2) = 1$; $d(1,3) = 1$; $d(1,4) = 1$; $d(2,4) = 2$; $d(2,3) = 1$; $d(3,4) = 2$

Sehingga dapat diperoleh *Additively Weighted Harary Index* Z_5 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 H_A(G) &= \frac{\deg(1) + \deg(2)}{d(1,2)} + \frac{\deg(1) + \deg(3)}{d(1,3)} + \frac{\deg(1) + \deg(4)}{d(1,4)} \\
 &\quad + \frac{\deg(2) + \deg(3)}{d(2,3)} \\
 &= \frac{(\deg(1) \times 3) + (\deg(2) \times 2) + (\deg(3) \times 2) + \deg(4)}{1} \\
 &= (3 \times 3) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + 1 \\
 &= (p - 2)^2 + 4(p - 3) + 1
 \end{aligned}$$

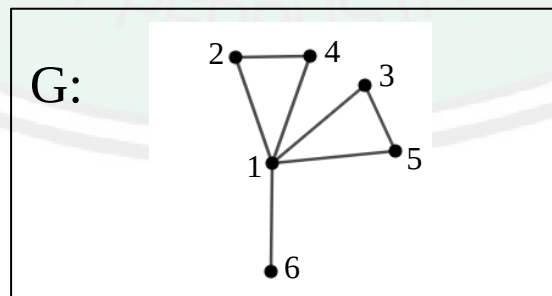
3.1.2 Additively Weighted Harary Index pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_7

Diberikan $(Z_7, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif kesatuan pada himpunan bilangan bulat ber modulo 7 dengan $Z_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel Cayley terhadap operasi perkalian sehingga diperoleh:

Tabel 3.2 Tabel Cayley dari Z_7

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Berdasarkan Tabel 3.2 di atas, maka diperoleh $I(Z_7) = \{1,2,3,4,5,6\}$ sehingga graf identitas dari ring komutatif kesatuan yang terbentuk sebagai berikut:



Gambar 3.2 Graf Identitas dari Z_7

Dapat diketahui derajat titik dan lintasan titik berdasarkan Gambar 3.2 tersebut sebagai berikut:

Derajat titik : $\deg(1)= 5$; $\deg(2)= 2$; $\deg(3)= 2$; $\deg(4)= 2$; $\deg(5)= 2$;
 $\deg(6)= 1$

Lintasan titik : $d(1,2)= 1$ $d(1,6)= 1$ $d(2,6)= 2$ $d(4,5)= 2$
 $d(1,3)= 1$ $d(2,3)= 2$ $d(3,4)= 3$ $d(4,6)= 2$
 $d(1,4)= 1$ $d(2,4)= 1$ $d(3,5)= 1$ $d(5,6)= 2$
 $d(1,5)= 1$ $d(2,5)= 2$ $d(3,6)= 2$

Sehingga dapat diperoleh *Additively Weighted Harary Index* Z_7 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 H_A(G) &= \frac{\deg(1) + \deg(2)}{d(1,2)} + \frac{\deg(1) + \deg(3)}{d(1,3)} + \frac{\deg(1) + \deg(4)}{d(1,4)} \\
 &\quad + \frac{\deg(1) + \deg(5)}{d(1,5)} + \frac{\deg(1) + \deg(6)}{d(1,6)} + \frac{\deg(3) + \deg(5)}{d(3,5)} \\
 &\quad + \frac{\deg(2) + \deg(4)}{d(2,4)} \\
 &= \frac{(\deg(1) \times 5) + (\deg(2) \times 2) + (\deg(3) \times 2) + (\deg(4) \times 2) + (\deg(5) \times 2) + \deg(6)}{1} \\
 &= (5 \times 5) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + 1 \\
 &= (p - 2)^2 + 4(p - 3) + 1
 \end{aligned}$$

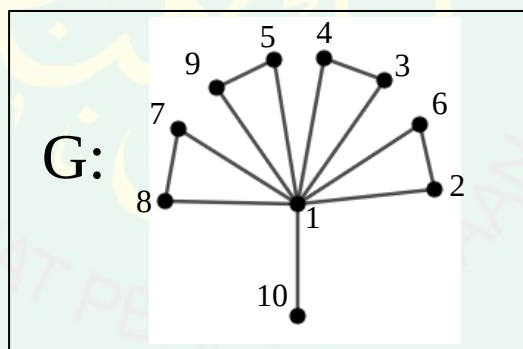
3.1.3 *Additively Weighted Harary Index* pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_{11}

Diberikan $(Z_{11}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif kesatuan pada himpunan bilangan bulat ber modulo 11 dengan $Z_{11} = \{0,1,2,3, \dots, 10\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel *Cayley* terhadap operasi perkalian sehingga diperoleh:

Tabel 3.3 Tabel Cayley dari Z_{11}

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9
3	0	3	6	9	1	4	7	10	2	5	8
4	0	4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
5	0	5	10	4	9	3	8	2	7	1	6
6	0	6	1	7	2	8	3	9	4	10	5
7	0	7	3	10	6	2	9	5	1	8	4
8	0	8	5	2	10	7	4	1	9	6	3
9	0	9	7	5	3	1	10	8	6	4	2
10	0	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Berdasarkan Tabel 3.3 di atas, maka diperoleh $I(Z_{11}) = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$ sehingga diperoleh graf identitas dari ring komutatif kesatuan sebagai berikut:

Gambar 3.3 Graf Identitas dari Z_{11}

Dapat diketahui derajat titik dan lintasan titik berdasarkan Gambar 3.3 tersebut sebagai berikut:

Derajat titik: $\deg(1)=9$ $\deg(3)=2$ $\deg(5)=2$ $\deg(7)=2$ $\deg(9)=2$
 $\deg(2)=2$ $\deg(4)=2$ $\deg(6)=2$ $\deg(8)=2$ $\deg(10)=1$

Lintasan titik:

$$\begin{aligned}
 & d(1,2)=1 \quad d(1,9)=1 \quad d(2,8)=2 \quad d(3,8)=2 \quad d(4,9)=2 \quad d(6,7)=2 \\
 & d(1,3)=1 \quad d(1,10)=1 \quad d(2,9)=2 \quad d(3,9)=2 \quad d(4,10)=2 \quad d(6,8)=2 \\
 & d(1,4)=1 \quad d(2,3)=2 \quad d(2,10)=2 \quad d(3,10)=2 \quad d(5,6)=2 \quad d(6,9)=2 \\
 & d(1,5)=1 \quad d(2,4)=2 \quad d(3,4)=1 \quad d(4,5)=2 \quad d(5,7)=2 \quad d(6,10)=2 \\
 & d(1,6)=1 \quad d(2,5)=2 \quad d(3,5)=2 \quad d(4,6)=2 \quad d(5,8)=2 \quad d(7,8)=1 \\
 & d(1,7)=1 \quad d(2,6)=1 \quad d(3,6)=2 \quad d(4,7)=2 \quad d(5,9)=1 \quad d(7,9)=2 \\
 & d(1,8)=1 \quad d(2,7)=2 \quad d(3,7)=2 \quad d(4,8)= \quad d(5,10)=2 \quad d(7,10)=2 \\
 & d(8,9)=2 \quad d(8,10)=2 \quad d(9,10)=2
 \end{aligned}$$

Sehingga dapat diperoleh *Additively Weighted Harary Index* Z_{11} sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 H_A(G) &= \frac{\deg(1) + \deg(2)}{d(1,2)} + \frac{\deg(1) + \deg(3)}{d(1,3)} + \frac{\deg(1) + \deg(4)}{d(1,4)} + \frac{\deg(1) + \deg(5)}{d(1,5)} \\
 &\quad + \frac{\deg(1) + \deg(6)}{d(1,6)} + \frac{\deg(1) + \deg(7)}{d(1,7)} + \frac{\deg(1) + \deg(8)}{d(1,8)} \\
 &\quad + \frac{\deg(1) + \deg(9)}{d(1,9)} + \frac{\deg(1) + \deg(10)}{d(1,10)} + \frac{\deg(3) + \deg(4)}{d(3,4)} \\
 &\quad + \frac{\deg(2) + \deg(6)}{d(2,6)} + \frac{\deg(7) + \deg(8)}{d(7,8)} + \frac{\deg(5) + \deg(9)}{d(5,9)} \\
 &= \frac{(\deg(1) \times 9) + (\deg(2) \times 2) + (\deg(3) \times 2) + (\deg(4) \times 2) + (\deg(5) \times 2) + (\deg(6) \times 2)}{1} \\
 &\quad + \frac{(\deg(7) \times 2) + (\deg(8) \times 2) + (\deg(9) \times 2) + \deg(10)}{1} \\
 &= (9 \times 9) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) \\
 &\quad + (2 \times 2) + (2 \times 2) + 1 \\
 &= (p - 2)^2 + 4(p - 3) + 1
 \end{aligned}$$

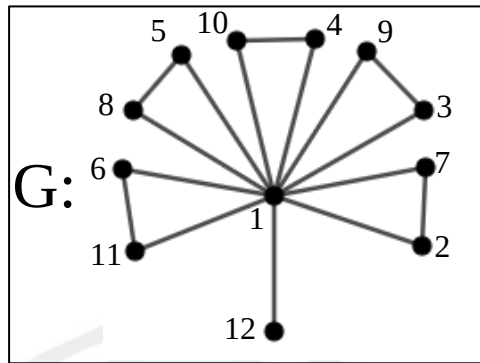
3.1.4 Additively Weighted Harary Index pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_{13}

Diberikan $(Z_{13}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif kesatuan pada himpunan bilangan bulat ber modulo 13 dengan $Z_{13} = \{0,1,2,3,\dots,12\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel Cayley terhadap operasi perkalian sehingga diperoleh:

Tabel 3.4 Tabel Cayley dari Z_{13}

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	0	2	4	6	8	10	12	1	3	5	7	9	11
3	0	3	6	9	12	2	5	8	11	1	4	7	10
4	0	4	8	12	3	7	11	2	6	10	1	5	9
5	0	5	10	2	7	12	4	9	1	6	11	3	8
6	0	6	12	5	11	4	10	3	9	2	8	1	7
7	0	7	1	8	2	9	3	10	4	11	5	12	6
8	0	8	3	11	6	1	9	4	12	7	2	10	5
9	0	9	5	1	10	6	2	11	7	3	12	8	4
10	0	10	7	4	1	11	8	5	2	12	9	6	3
11	0	11	9	7	5	3	1	12	10	8	6	4	2
12	0	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Berdasarkan Tabel 3.4 di atas, maka diperoleh $I(Z_{13}) = \{1,2,3,\dots,12\}$ sehingga graf identitas dari ring komutatif kesatuan yang terbentuk yaitu sebagai berikut:

Gambar 3.4 Graf Identitas dari Z_{13}

Dapat diketahui derajat titik dan lintasan titik berdasarkan Gambar 3.4 tersebut sebagai berikut:

Derajat titik : $\deg(1)= 11$ $\deg(4)= 2$ $\deg(7)= 2$ $\deg(10)= 2$
 $\deg(2)= 2$ $\deg(5)= 2$ $\deg(8)= 2$ $\deg(11)= 2$
 $\deg(3)= 2$ $\deg(6)= 2$ $\deg(9)= 2$ $\deg(12)= 1$

Lintasan titik :

$d(1,2)= 1$ $d(1,6)= 1$ $d(1,10)= 1$ $d(2,4)= 2$ $d(2,8)= 2$ $d(2,12)= 2$
 $d(1,3)= 1$ $d(1,7)= 1$ $d(1,11)= 1$ $d(2,5)= 2$ $d(2,9)= 2$ $d(3,4)= 1$
 $d(1,4)= 1$ $d(1,8)= 1$ $d(1,12)= 1$ $d(2,6)= 2$ $d(2,10)= 2$ $d(3,5)= 2$
 $d(1,5)= 1$ $d(1,9)= 1$ $d(2,3)= 2$ $d(2,7)= 1$ $d(2,11)= 2$ $d(3,6)= 2$

 $d(3,7)= 2$ $d(3,11)= 2$ $d(4,7)= 2$ $d(4,11)= 2$ $d(5,8)= 1$ $d(5,12)= 2$
 $d(3,8)= 2$ $d(3,12)= 2$ $d(4,8)= 2$ $d(4,12)= 2$ $d(5,9)= 2$ $d(6,7)= 2$
 $d(3,9)= 1$ $d(4,5)= 2$ $d(4,9)= 2$ $d(5,6)= 2$ $d(5,10)= 2$ $d(6,8)= 2$
 $d(3,10)= 2$ $d(4,6)= 2$ $d(4,10)= 1$ $d(5,7)= 2$ $d(5,11)= 2$ $d(6,9)= 2$

 $d(6,10)= 2$ $d(7,9)= 2$ $d(8,9)= 2$ $d(9,10)= 2$ $d(10,12)= 2$
 $d(6,11)= 1$ $d(7,10)= 2$ $d(8,10)= 2$ $d(9,11)= 2$ $d(11,12)= 2$

$$d(6,12)=2 \quad d(7,11)=2 \quad d(8,11)=2 \quad d(9,12)=2$$

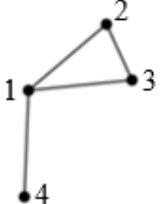
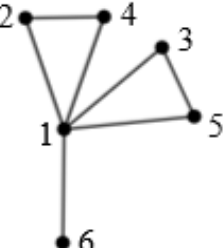
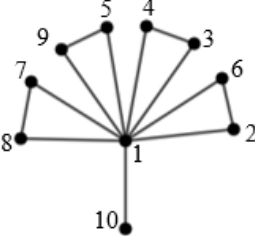
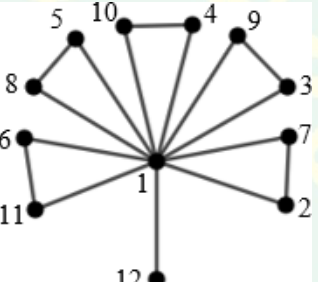
$$d(7,8)=2 \quad d(7,12)=2 \quad d(8,12)=2 \quad d(10,11)=2$$

Sehingga dapat diperoleh *Additively Weighted Harary Index* Z_{13} sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 H_A(G) &= \frac{\deg(1) + \deg(2)}{d(1,2)} + \frac{\deg(1) + \deg(3)}{d(1,3)} + \frac{\deg(1) + \deg(4)}{d(1,4)} \\
 &\quad + \frac{\deg(1) + \deg(5)}{d(1,5)} + \frac{\deg(1) + \deg(6)}{d(1,6)} + \frac{\deg(1) + \deg(7)}{d(1,7)} \\
 &\quad + \frac{\deg(1) + \deg(8)}{d(1,8)} + \frac{\deg(1) + \deg(9)}{d(1,9)} + \frac{\deg(1) + \deg(10)}{d(1,10)} \\
 &\quad + \frac{\deg(1) + \deg(11)}{d(1,11)} + \frac{\deg(1) + \deg(12)}{d(1,12)} + \frac{\deg(2) + \deg(7)}{d(2,7)} \\
 &\quad + \frac{\deg(3) + \deg(9)}{d(3,9)} + \frac{\deg(10) + \deg(4)}{d(10,4)} + \frac{\deg(5) + \deg(8)}{d(5,8)} \\
 &\quad + \frac{\deg(6) + \deg(11)}{d(6,11)} \\
 &= \frac{(\deg(1) \times 11) + (\deg(2) \times 2) + (\deg(3) \times 2) + (\deg(4) \times 2) + (\deg(5) \times 2) + (\deg(6) \times 2)}{1} \\
 &\quad + \frac{(\deg(7) \times 2) + (\deg(8) \times 2) + (\deg(9) \times 2) + (\deg(10) \times 2) + (\deg(11) \times 2) + \deg(12)}{1} \\
 &= (11 \times 11) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) \\
 &\quad + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) \\
 &\quad + (2 \times 2) + 1 \\
 &= (p - 2)^2 + 4(p - 3) + 1
 \end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan *additively weighted Harary Index* pada graf identitas dari Ring Komutatif Kesatuan pada $I(Z_p)$ dengan $p \geq 5$ dan p prima maka dapat dinyatakan dalam tabel sebagai berikut:

Tabel 3.5 *Additively weighted Harary Index* pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan $Z_p, p = \{p|p \geq 5, p \text{ prima}\}$

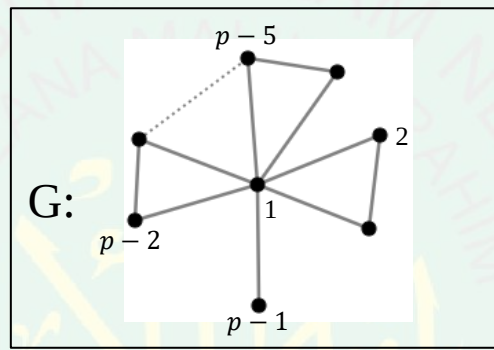
Modulo	Gambar Graf	<i>Additively weighted Harary Index</i>
Z_5		$= (3 \times 3) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + 1$ $= (p - 2)^2 + 4(p - 3) + 1$ $= 18$
Z_7		$= (5 \times 5) + (2 \times 2) + (2 \times 2)$ $+ (2 \times 2) + (2 \times 2)$ $+ 1$ $= (p - 2)^2 + 4(p - 3) + 1$ $= 42$
Z_{11}		$= (9 \times 9) + (2 \times 2) + (2 \times 2)$ $+ (2 \times 2) + (2 \times 2)$ $+ (2 \times 2) + (2 \times 2)$ $+ (2 \times 2) + (2 \times 2)$ $+ 1$ $= (p - 2)^2 + 4(p - 3) + 1$ $= 114$
Z_{13}		$= (11 \times 11) + (2 \times 2) + (2 \times 2)$ $+ (2 \times 2) + (2 \times 2)$ $+ (2 \times 2) + (2 \times 2)$ $+ (2 \times 2) + (2 \times 2)$ $+ (2 \times 2) + (2 \times 2)$ $+ 1$ $= (p - 2)^2 + 4(p - 3) + 1$ $= 162$

Teorema 3.1

Misalkan $(Z_p, +, \cdot)$ dengan $p = \{p|p \geq 5, p \text{ prima}\}$ adalah ring komutatif kesatuan pada bilangan bulat modulo prima, maka prosedur umum *additively weighted Harary Index* dari graf $I(Z_p)$ adalah $(p - 2)^2 + 4(p - 3) + 1$.

Bukti

Misalkan $(Z_p, +, \cdot)$ untuk $p \geq 5$ dengan p bilangan bulat prima adalah ring komutatif kesatuan yang unsur identitas yaitu 1, himpunan bilangan bulat bermodulo p adalah $Z_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$. Maka diperoleh himpunan *unit* pada bilangan bulat bermodulo p yaitu $I(Z_p) = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, p-5, \dots, p-2, p-1\}$. Dua unsur $I(Z_p)$ yang hasil perkaliannya sama dengan 1 akan terhubung langsung. Selanjutnya, untuk setiap elemen *unit* di $I(Z_p)$ akan terhubung langsung dengan 1. Maka diperoleh graf $I(Z_p)$ sebagai berikut:



Gambar 3.5 Graf Identitas $I(Z_p)$ dengan $p \geq 5, p$ prima

Berdasarkan Gambar 3.5 di atas, diperoleh $\deg(1) = p-2$, $\deg(p-1) = 1$ dan $\deg(v) = 2$ untuk $v \neq 1$ atau $v \neq p-1$. Diperoleh pula nilai jarak dari u, v yang terhubung langsung yaitu 1. Dengan demikian didapatkan *additively weighted harary index* dari $I(Z_p)$ dengan $p \geq 5$ sebagai berikut:

$$H_A(G) = \sum_{u \neq v} \frac{(\deg(u) + \deg(v))}{d(u, v)}$$

$$H_A(G) = \frac{\deg 1 + \deg(v)}{d(1, v)} + \dots + \frac{\deg 1 + \deg(p-1)}{d(1, p-1)} + \underbrace{\frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u, v)} + \dots + \frac{\deg(u) + \deg(v)}{d(u, v)}}_{p-3}$$

$$H_A(G) = \frac{(p-2) + \deg(v)}{1} + \dots + \frac{(p-2) + 1}{1} + \underbrace{\frac{\deg(u) \times 2}{1} + \dots + \frac{\deg(v)}{1}}_{p-3}$$

$$H_A(G) = \frac{(p-2)}{1} + \dots + \frac{(p-2) + 1}{1} + \underbrace{\frac{\deg(u) \times 2}{1} + \dots + \frac{\deg(v) \times 2}{1}}_{p-3}$$

$$H_A(G) = \frac{((p-2) \times (p-2))}{1} + \underbrace{\frac{2 \times 2}{1} + \dots + \frac{2 \times 2}{1}}_{p-3} + \frac{1}{1}$$

$$H_A(G) = \frac{(p-2)^2 + 4(p-3) + 1}{1}$$

$$H_A(G) = (p-2)^2 + 4(p-3) + 1$$

3.2 *Multiplicatively Weighted Harary Index* pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan $Z_p, p = \{p | p \geq 5, p \text{ prima}\}$

3.2.1 *Multiplicatively Weighted Harary Index* pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_5

Diberikan $(Z_5, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif kesatuan pada himpunan bilangan bulat bermodulo 5 dengan $Z_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, menggunakan tabel cayle pada Tabel 3.1 diperoleh himpunan *unit* dari $I(Z_5) = \{1, 2, 3, 4\}$ dan diperoleh pula graf identitas seperti pada Gambar 3.1, menggunakan cara yang sama sehingga dapat diperoleh *Multiplicatively Weighted Harary Index* Z_5 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H_M(G) &= \frac{\deg(1) \deg(2)}{d(1,2)} + \frac{\deg(1) \deg(3)}{d(1,3)} + \frac{\deg(1) \deg(4)}{d(1,4)} + \frac{\deg(2) \deg(3)}{d(2,3)} \\ &= \frac{(2 \times (3 \times 2)) + (3 \times 1) + (2 \times 2)}{1} \\ &= ((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + 4 \\ &= ((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + ((p \times 2) - 6) \end{aligned}$$

3.2.2 *Multiplicatively Weighted Harary Index* pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_7

Diberikan $(Z_7, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif kesatuan pada himpunan bilangan bulat bermodulo 7 dengan $Z_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, menggunakan tabel cayle pada tabel 3.2 diperoleh himpunan *unit* dari $I(Z_7) = \{1,2,3,4,5,6\}$ dan diperoleh pula graf identitas seperti pada Gambar 3.2, menggunakan cara yang sama sehingga dapat diperoleh *Multiplicatively Weighted Harary Index* Z_7 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 H_M(G) &= \frac{\deg(1)\deg(2)}{d(1,2)} + \frac{\deg(1)\deg(3)}{d(1,3)} + \frac{\deg(1)\deg(4)}{d(1,4)} + \frac{\deg(1)\deg(5)}{d(1,5)} \\
 &\quad + \frac{\deg(1)\deg(6)}{d(1,6)} + \frac{\deg(3)\deg(5)}{d(3,5)} + \frac{\deg(2)\deg(4)}{d(2,4)} \\
 &= \frac{(4 \times (5 \times 2)) + (5 \times 1) + (2 \times (2 \times 2))}{1} \\
 &= ((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + 8 \\
 &= ((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + ((p \times 2) - 6)
 \end{aligned}$$

3.2.3 *Multiplicatively Weighted Harary Index* pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan Z_{11}

Diberikan $(Z_{11}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif kesatuan pada himpunan bilangan bulat bermodulo 11 dengan $Z_{11} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, menggunakan tabel cayle pada Tabel 3.3 diperoleh himpunan *unit* dari $I(Z_{11}) = \{1,2,3, \dots, 10\}$ dan diperoleh pula gambar graf identitas seperti pada Gambar 3.3, menggunakan cara yang sama sehingga dapat diperoleh *Multiplicatively Weighted Harary Index* Z_{11} sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
H_M(G) &= \frac{\deg(1)\deg(2)}{d(1,2)} + \frac{\deg(1)\deg(3)}{d(1,3)} + \frac{\deg(1)\deg(4)}{d(1,4)} + \frac{\deg(1)\deg(5)}{d(1,5)} \\
&\quad + \frac{\deg(1)\deg(6)}{d(1,6)} + \frac{\deg(1)\deg(7)}{d(1,7)} + \frac{\deg(1)\deg(8)}{d(1,8)} \\
&\quad + \frac{\deg(1)\deg(9)}{d(1,9)} + \frac{\deg(1)\deg(10)}{d(1,4)} + \frac{\deg(3)\deg(4)}{d(3,4)} \\
&\quad + \frac{\deg(2)\deg(6)}{d(2,6)} + \frac{\deg(7)\deg(8)}{d(7,8)} + \frac{\deg(5)\deg(9)}{d(5,9)} \\
&= \frac{(8 \times (9 \times 2)) + (9 \times 1) + (4 \times (2 \times 2))}{1} \\
&= ((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + 16 \\
&= ((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + ((p \times 2) - 6)
\end{aligned}$$

3.2.4 Multiplicatively Weighted Harary Index pada Graf Identitas dari Ring

Komutatif Kesatuan Z_{13}

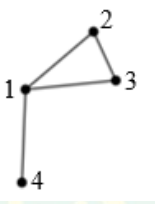
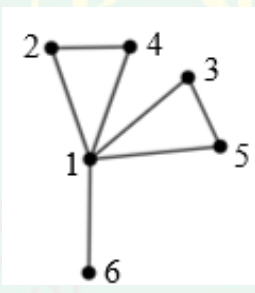
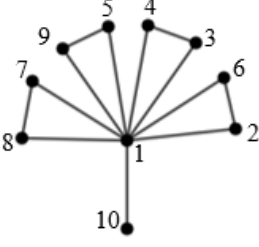
Diberikan $(Z_{13}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif kesatuan pada himpunan bilangan bulat bermodulo 13 dengan $Z_{13} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, menggunakan tabel cayle pada Tabel 3.4 diperoleh himpunan *unit* pada $I(Z_p) = \{1,2,3, \dots, 12\}$ dan diperoleh pula gambar graf identitas seperti pada Gambar 3.4 sehingga dapat diperoleh *Multiplicatively Weighted Harary Index* Z_{13} sebagai berikut:

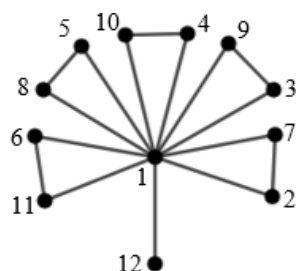
$$\begin{aligned}
H_M(G) &= \frac{\deg(1)\deg(2)}{d(1,2)} + \frac{\deg(1)\deg(3)}{d(1,3)} + \frac{\deg(1)\deg(4)}{d(1,4)} + \frac{\deg(1)\deg(5)}{d(1,5)} \\
&\quad + \frac{\deg(1)\deg(6)}{d(1,6)} + \frac{\deg(1)\deg(7)}{d(1,7)} + \frac{\deg(1)\deg(8)}{d(1,8)} \\
&\quad + \frac{\deg(1)\deg(9)}{d(1,9)} + \frac{\deg(1)\deg(10)}{d(1,4)} + \frac{\deg(1)\deg(11)}{d(1,4)} \\
&\quad + \frac{\deg(1)\deg(12)}{d(1,4)} + \frac{\deg(2)\deg(7)}{d(2,7)} + \frac{\deg(3)\deg(9)}{d(3,9)} \\
&\quad + \frac{\deg(10)\deg(4)}{d(10,4)} + \frac{\deg(5)\deg(8)}{d(5,8)} + \frac{\deg(6)\deg(11)}{d(6,11)} \\
&= \frac{(10 \times (11 \times 2)) + (11 \times 1) + (5 \times (2 \times 2))}{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + 20 \\
&= ((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + ((p \times 2) - 6)
\end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan *multiplicatively weighted Harary Index* pada graf identitas dari ring komutatif kesatuan maka dapat dinyatakan dalam tabel sebagai berikut:

Tabel 3.6 *Multiplicatively Weighted Harary Index* pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan $Z_p, p = \{p | p \geq 5, p \text{ prima}\}$

Modulo	Gambar Graf	<i>Multiplicatively weighted Harary Index</i>
Z_5		$ \begin{aligned} &= \frac{(2 \times (3 \times 2)) + (3 \times 1) + (2 \times 2)}{1} \\ &= ((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + 4 \\ &= ((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + ((p \times 2) - 6) \\ &= 19 \end{aligned} $
Z_7		$ \begin{aligned} &= \frac{(4 \times (5 \times 2)) + (5 \times 1) + (2 \times (2 \times 2))}{1} \\ &= ((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + 8 \\ &= ((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + ((p \times 2) - 6) \\ &= 53 \end{aligned} $
Z_{11}		$ \begin{aligned} &= \frac{(8 \times (9 \times 2)) + (9 \times 1) + (4 \times (2 \times 2))}{1} \\ &= ((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + 16 \\ &= ((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + ((p \times 2) - 6) \\ &= 169 \end{aligned} $

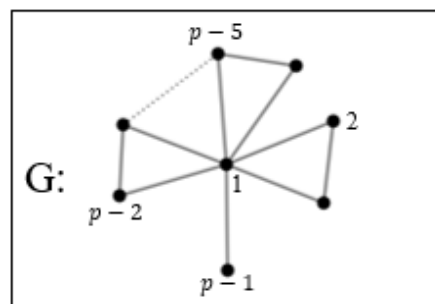
Z_{13}		$= \frac{(10 \times (11 \times 2)) + (11 \times 1) + (5 \times (2 \times 2))}{1}$ $= ((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + 20$ $= ((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + ((p \times 2) - 6)$ $= 251$
----------	---	---

Teorema 3.2

Misalkan $(Z_p, +, \cdot)$ dengan $p = \{p | p \geq 5, p \text{ prima}\}$ adalah suatu ring komutatif kesatuan pada bilangan bulat modulo prima, maka prosedur umum *Multiplicatively weighted Harary Index* dari graf $I(Z_p)$ adalah $((p-3)((p-2) \times 2)) + (p-2) + ((p \times 2) - 6)$.

Bukti.

Misalkan $(Z_p, +, \cdot)$ untuk $p \geq 5$ dengan p bilangan bulat prima adalah ring komutatif kesatuan yang unsur identitas yaitu 1, himpunan bilangan bulat bermodulo p adalah $Z_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$. Maka diperoleh himpunan *unit* pada bilangan bulat bermodulo p yaitu $I(Z_p) = \{1, 2, 3, \dots, p-5, \dots, p-2, p-1\}$. Dua unsur $I(Z_p)$ yang hasil perkaliannya sama dengan 1 akan terhubung langsung. Selanjutnya, untuk setiap elemen *unit* di $I(Z_p)$ akan terhubung langsung dengan 1. Maka diperoleh graf $I(Z_p)$ sebagai berikut:



Gambar 3.6 Graf Identitas $I(Z_p)$ dengan $p \geq 5, p$ prima

Berdasarkan Gambar 3.6 sebelumnya, diperoleh $\deg(1) = p - 2$, $\deg(p - 1) = 1$ dan $\deg(v) = 2$ untuk $v \neq 1$ atau $v \neq p - 1$. Diperoleh pula nilai jarak dari u, v yang terhubung langsung yaitu 1. Dengan demikian didapatkan *multiplicatively weighted harary index* dari $I(Z_p)$ dengan $p \geq 5$ sebagai berikut:

$$H_M(G) = \sum_{u \neq v} \frac{(\deg(u) \times \deg(v))}{d(u, v)}$$

$$H_M(G) = \underbrace{\frac{\deg 1 \times \deg(v)}{d(1, v)} + \dots + \frac{\deg 1 \times \deg(u)}{d(1, u)}}_{p-3} + \frac{\deg 1 \times \deg(p - 1)}{d(1, p - 1)}$$

$$+ \frac{\deg(u) \times \deg(v)}{d(u, v)} + \dots + \frac{\deg(x) \times \deg(y)}{d(x, y)}$$

$$H_M(G) = \frac{((p - 3)(\deg 1 \times 2))}{1} + \frac{\deg 1 \times \deg(p - 1)}{1} + \frac{\deg(u) \times \deg(v)}{d(u, v)}$$

$$H_M(G) = \frac{((p - 3)((p - 2) \times 2))}{1} + \frac{(p - 2) \times 1}{1} + \frac{n}{1}$$

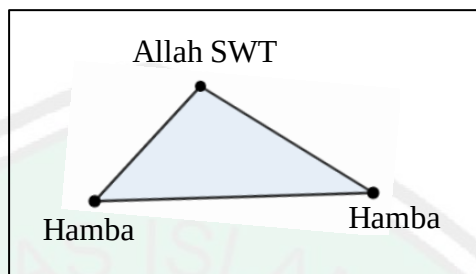
$$H_M(G) = \frac{((p - 3)((p - 2) \times 2)) + (p - 2) \times 1 + n}{1}$$

$$H_M(G) = ((p - 3)((p - 2) \times 2)) + (p - 2) + ((p \times 2) - 6)$$

Dimana n sama dengan hasil dari $\frac{\deg(u) \times \deg(v)}{d(u, v)}$.

3.3 Pola Hubungan Hamba dengan Tuhannya dalam Perspektif Teori Graf

Pada surat An-Nisa ayat 36 tersebut dapat dipresentasikan dalam bentuk suatu graf sederhana sebagai berikut:



Gambar 3.7 Graf Hubungan antara Allah SWT dengan Hamba dan Sesama Hamba-Nya

Gambar di atas terlihat hubungan dengan sesama hamba yang dapat dinotasikan atau disimbolkan dengan garis (sisi) horizontal dan hubungan hamba dengan sang Pencipta, Allah SWT. yang dinotasikan atau disimbolkan dengan garis (sisi) miring atau vertikal.

Sisi-sisi dan titik pada graf sederhana tersebut mempresentasikan surat An-Nisa' ayat 36 yang merupakan simbolisasi akan kegiatan yang membentuk suatu hubungan antar titik, hamba dengan hamba dan hamba dengan Tuhannya, Allah SWT. Titik-titik pada graf tersebut juga menyimbolkan akan pelaku kegiatan hubungan tersebut yang dimana pada graf tersebut dua titik yang berbeda yaitu titik yang menyimbolkan sebagai hamba dan titik yang menyimbolkan sebagai Allah SWT.

Menurut Chartrand dkk, (2016) suatu graf dikatakan dapat terbentuk jika tidak terdapat suatu pasangan dua titik yang saling terhubung langsung atau dengan kata lain tidak ada graf tak terhubung. Hubungan antar dua titik tersebut dihubungkan dengan suatu sisi yang mana sisi ini merupakan simbolisasi akan hubungan (dalam

kajian Islam) dua titik yang dimana ini juga merupakan simbolisasi akan pelaku hubungan tersebut. Pada hubungan sesama hamba, hubungan dapat terjadi dengan berbagai kegiatan seperti silaturahmi, pengajian, gotong royong, dan lain sebagainya. Sedangkan pada hubungan hamba dengan Tuhannya, Allah SWT, pola hubungan dapat terjadi dengan kegiatan sholat, dzakat, tadarus, menjalankan perintahNya dan menjauhi laranganNya, dan lain sebagainya.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan *additively* dan *multiplicatively weighted harary index* pada graf identitas dari ring komutatif kesatuan $Z_p, p = \{p | p \geq 5, p \text{ prima}\}$ dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Prosedur umum dari *additively weighted harary index* pada graf identitas dari ring komutatif kesatuan $Z_p, p = \{p | p \geq 5, p \text{ prima}\}$ adalah $(p - 2)^2 + 4(p - 3) + 1$.
2. Prosedur umum dari *multiplicatively weighted harary index* pada graf identitas dari ring komutatif kesatuan $Z_p, p = \{p | p \geq 5, p \text{ prima}\}$ adalah $((p - 3)((p - 2) \times 2)) + (p - 2) + ((p \times 2) - 6)$.

4.2 Saran

Karena penelitian ini masih pada *weighted harary index* pada graf identitas dari gelanggang komutatif dengan unsur satuan, maka penelitian selanjutnya dapat dilakukan dengan mencari *weighted harary co-indices* pada graf lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Abdussakir, Azizah, N. N., dan Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf: Topik Dasar untuk Tugas Akhir Skripsi*. Malang: UIN-Maliki Press.
- Chartrand, G., Lisniak, L dan Zhang, P. 2016. *Graphs & Digraphs Sixth Edition*. London: CRC Press.
- Chartrand, G dan Zhang P. 2009. *Chromatic Graph Theory*. London: CRC Press.
- Diestel, Reinhard. 2005. *Graph Theory*. New York: Springer.
- Galian, Joseph. 2007. *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. <http://www.combinatorics.org/survey/ds6.pdf>. (diakses pada tanggal 13 Maret 2020)
- Guichard, David. 2016. *An Introduction to Combinatorics and Graphs Theory*. California: Creative Commons.
- Gilbert Linda, dan Jimmie Gilbert. 2014. *Eight Edition Element of Modern Algebra*. USA: Cengage Learning.
- Kandasamy, W.B.V., dan Smarandache F. 2009. *Groups as Graphs*. Romania: Editura CuArt.
- Kusmayadi, T.A dan Sudiby, N.A. 2011. Eccentric Digraph of Cocktail Party Graph and Hypercube. *IPTEK the Journal for Technology and Science*, 22(4), 198-204.c v

Lucic Bono et al. 2002. Harary Index- Twelve Years Later. *Croatica Chemica Acta*. 75(4), 847-868.

Wahhab, Muhammad bin Abdul. 1996. *Kitab At-Tawhid- the Book of Monotheism*. Arab: Darussalam Publisher.

Shihab, M.Q. 1996. *Wawasan Al-Qur'an: Tafsir Maudhu'i atas Berbagai Persoalan Umat*. Bandung: Mizan.

Xu, Kexiang dkk. 2014. External (n,m) -Graphs with Respect to Distance-Degree-Based Topological Indices. *Match Commun, Math. Comput. Chem*, 72,865-880.

Xu Kexiang et al. 2015. Weighted Harary indices if apex trees and k -apex trees. *Discrete Applied Mathematics*. 186, 30-40.

Zeng, Ting. 2013. *Harary Index and Hamiltonian Property of Graphs*. *Math. Comput. Chem*, 70,645-649.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Istiqoma Putri Salsabil
NIM : 16610054
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : *Additively dan Multiplicatively Weighted Harary Index* pada Graf Identitas dari Ring Komutatif Kesatuan
Pembimbing I : Dr. H Imam Sujarwo, M.Pd
Pembimbing II : Ach. Nasichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	22 Januari 2020	Konsultasi Bab I & Bab II	1.
2.	20 Januari 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan	2.
3.	27 Januari 2020	Konsultasi Bab I & Bab II	3.
4.	31 Januari 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan	4.
5.	30 Januari 2020	Konsultasi Bab III	5.
6.	27 Maret 2020	Pembenahan Kajian Keagamaan	6.
7.	20 Maret 2020	Konsultasi Bab III dan Konsultasi Bab IV	7.
8.	30 Maret 2020	ACC Kajian Keagamaan	8.
9.	31 Maret 2020	Konsultasi Abstrak	9.
10.	3 April 2020	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 3 April 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

RIWAYAT HIDUP



Istiqoma Putri Salsabil, biasa dipanggil dengan Puput. Lahir di kota Sidoarjo pada tanggal 21 Maret 1998, bertempat tinggal di Perumahan Villa Jasmine 2 blok F/4. Anak ke tiga dari tiga bersaudara dari pasangan bapak H. Khotamil Iman dan Dra. Hj Djumiati, bersama 2 anggota keluarga lainnya saudara Rodhiatul Kusuma Wardani dan saudara Mochammad Faishal Amin.

Pendidikan dasarnya ia tempuh di Sekolah Dasar Muhammadiyah 1 Sidoarjo yang lulus tepat pada tahun 2010, setelah itu ia melanjutkan sekolah ke SMP Negeri 6 Sidoarjo dan lulus pada tahun 2013, kemudian ia melanjutkan pendidikannya ke SMK Farmasi Sekesal Surabaya yang lulus pada tahun 2016. Selanjutnya, pada tahun 2016 itu pula, ia menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil program studi Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, ia berperan aktif sebagai pada organisasi intra dan ekstra kampus dalam rangka mengembangkan kompetensi non akademiknya. Dia juga penerima beasiswa bergengsi yang di kelola oleh Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan yaitu Beasiswa Unggulan pada tahun 2017.