SIFAT- SIFAT INKLUSI PADA RUANG MORREY KECIL

SKRIPSI

OLEH
LAILATUL MAZIYAH WILDAN MUFARIDHO
NIM. 16610060

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

SIFAT- SIFAT INKLUSI PADA RUANG MORREY KECIL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Lailatul Maziyah Wildan Mufaridho
NIM. 16610060

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020

SIFAT-SIFAT INKLUSI PADA RUANG MORREY KECIL

SKRIPSI

Oleh
Lailatul Maziyah Wildan Mufaridho
NIM. 16610060

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal April 2020

Pembimbing I,

Dr. Hairur Rahman, M.Si
NIP.198004292006041003

Pembimbing II,

Dr. H.Turmudi, M.Si, Ph.D
NIP.195710051982031006

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

SIFAT-SIFAT INKLUSI PADA RUANG MORREY KECIL

SKRIPSI

Oleh
Lailatul Maziyah Wildan Mufaridho
NIM. 16610060

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 13 April 2020

Penguji Utama	: Dr. Elly Susanti, M.Sc
Ketua Penguji	: Dian Maharani, M.Si
Sekertaris Penguju	: Dr. Hairur Rahman, M.Si
Anggota Penguji	: Dr. Turmudi, M.Si, Ph.D

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Lailatul Maziyah Wildan Mufaridho

NIM : 16610060

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Sifat- Sifat Inklusi Pada Ruang Morrey Kecil

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 11 Mei 2020

Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL 3BEAAHF403031182 6000 ENAM RIBU RUPIAH

Lailatul Maziyah W. M

NIM. 16610060

MOTO

Tidak ada masalah yang selesai tanpa Sholawat

PERSEMBAHAN

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Ayahanda Mahfud Ali Ridho dan Ibunda Munifah tercinta,

yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat,

dan kasih sayang yang tak ternilai, serta adik tersayang Muhammad Ilham Zulfikar dan Muhammad Salman Alfarisi yang selalu menjadi kebanggaan bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Sifat-Sifat Inklusi pada Ruang Morrey Kecil" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abdul Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.

5. Dr. Turmudi, M.Si, P.hD, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen wali yang selalu memberikan motivasi dan arahan kepada penulis.
7. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam proses perkuliahan.
8. Bapak dan Ibu serta adik tercinta yang selalu memberikan do'a, semangat dan motivasi demi keberhasilan penulis.
9. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2016 khususnya Ngiler (Mega, Alfu, Puput, Rutbah, Talitha, Dini, Sely, Arin, Misbah, Hadi), dan teman serumpun yang saya banggakan (Aminah, Tama dan Fahmi) di Pondok Pesantren Putri Tahfizul Qur'an Nurul Furqon yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi khususnya: Mbak Farida, Mbak Eva, dan kamar Khodijah, terima kasih atas dukungan dan motivasi yang tak terlupakan serta kenang-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian, serta KH. Chusaini Al-Hafidz yang selalu memberikan doa kepada para santrinya.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril, khususnya: Ella, Maydi, Naili, Irfan.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, April 2020

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Maziyah Wildan Mufaridho, Lailatul.2020. **Sifat-Sifat Inklusi pada Ruang Morrey Kecil.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.

Kata kunci: Sifat Inklusi, Ruang Morrey kecil, Ruang Morrey kecil lemah

Sifat inklusi merupakan sifat yang membahas keterkaitan anggota antar ruang. Setiap ruang memiliki sifat inklusi. Contoh mudahnya yang sering kita jumpai, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Sebelumnya, sifat-sifat inklusi telah diteliti di Ruang Morrey. Pada penelitian ini, penulis tertarik untuk meneliti sifat-sifat inklusi di Ruang Morrey yang berlaku juga di Ruang Morrey kecil dan Ruang Morrey kecil lemah. Ruang Morrey kecil lebih luas dari pada Ruang Morrey. Dalam membuktikan keberlakuan sifat-sifat inklusi di Ruang Morrey kecil dan Ruang Morrey kecil lemah digunakan ketaksamaan Holder. Sebagai hasil, penulis membuktikan sifat-sifat inklusi akan berlaku juga di Ruang Morrey kecil dan Ruang Morrey kecil lemah.

ABSTRACS

Maziyah Wildan Mufaridho,Lailatul.2020. **Inclusion Properties on The Small Morrey Spaces.** Thesis. Mathematics department, Faculty of Science and Technology, the State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.

Keynote: Inclusion Properties, Small Morrey Spaces, Weak Small Morrey Spaces

The inclusions properties are focus discuss topic the interrelationships of members between spaces. Every space has inclusion properties, for examples $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Previously, the inclusions properties was done in Morrey's spaces. In this research, the author is interested to do research about the properties of inclusion in Morrey's spaces which is applicated in small Morrey's spaces and weak-small Morrey's spaces. In proving the validity of the inclusion properties in the small Morrey's space and the weak-small Morrey's space use Holder inequality. As a result, the author prove the inclusions properties which apply in small Morrey's spaces and weak-small morrey's spaces.

المخلص

ليلة مزية ولدان مفريض 2020. **خصائص التضمين في فضاء موري** . بحث الجامعي. شعبة الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف الأولى : : الدكتور هايرور رحمن ومشرف الثاني : الدكتور الحاج ترمدى.

الكليمات الرئيسية: خاصّيّة التضمين ، فضاء موري صغر ضعيف.

خاصّيّة التضمين هي خاصّيّة ناقشة علاقات العضو بين فضاء . كلّ فضاء لخاصيّة التضمين المثال $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.قبله خاصّيات التضمين بعد البحث في فضاء موري ، الى هذا البحث مؤلف مهتم البعث خاصيّات التضمين في فضاء موري مطبوق في فضاء موري صغير و فضاء موري صغير ضعيف ، اي فضاء موري صغير اوسع من فضاء موري في برهنةاعتبار خاصّيّات التضمين مستعمل تفاوت هولدر . حاصله المؤلّف برهن خاصّيّات التضمين مطبوق فيى فضاء موري صغير و فضاء موري ضعيف

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Krantz, menegaskan bahwa matematika merupakan disiplin ilmu yang paling awal dikenal dan berkembang (Krantz, 2006). Sdangkan menurut C.F Gauss, matematika adalah “Ratu Ilmu”. *Regina Scientiarum*, adalah sebutan matematika dalam bahasa latin, sedangkan dalam bahasa Jerman yaitu *Konign Der Wis senschaften*.

Matematika dengan sebutannya ‘Ratu Ilmu’ mengalami banyak sekali perkembangan. Perkembangannya dimulai sejak zaman babylonia yang mana kurang lebih 4000 tahun lalu hingga sekarang. Salah satu cabang ilmu matematika dan termasuk induk dari ilmu matematika adalah analisis. Bidang analisis terus mengalami perkembangan.

Salah satu ruang yang memiliki peran penting dan sering dibahas dalam bidang analisis adalah ruang L^p atau dikenal dengan ruang Lebesgue. Ruang Lebesgue merupakan Ruang Banach dengan $1 \leq p \leq \infty$. (Roydendan Fitzpatrick, 2010)

Tahun 1938, seorang matematikawan C.B Morrey mendefinisikan definisi Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p$ dengan $1 \leq p \leq q < \infty$ yang mana merupakan bentuk dari perumuman ruang Lebesgue (Morrey, 1938). Sedangkan pada tahun 1994, Matematikawan Nakai memperkenalkan definisi perumuman ruang Morrey di mana merupakan bentuk dari Ruang Lebesgue yang diperumum. Sama seperti

Ruang Morrey, terdapat beberapa sifat inklusi yang berlaku pada Ruang Morrey diperumum ini (Gunawan dkk, 2017).

Selanjutnya Sawano juga mendefiniskan Ruang Morrey yang diperumum dengan sedikit berbeda dari definisi Nakai. Dari pendefinisian tadi, Sawano kemudian mendefinisikan Ruang Morrey kecil dan Ruang Morrey kecil lemah yang didapatkan dengan membatasi jari-jari di interval $(0,1)$. Ruang Morrey kecil lebih luas dari Ruang Morrey dan merupakan Ruang Banach (Sawano, 2018). Selain Ruang Morrey, juga terdapat definisi Ruang Morrey lemah yang didapatkan dari bentuk perumuman dari ruang Lebesgue lemah. Ruang Morrey lemah merupakan ruang kuasi-Banach. (Grafakos, 2014)

Setiap ruang memiliki karakteristik tertentu dan sifat-sifat yang berlaku. Begitu juga dengan Ruang Banach. Sifat inklusi cukup menarik untuk diteliti, karena didalamnya akan dikaji keterkaitan hubungan antar ruang. Sifat inklusi biasa disimbolkan dengan $\subset$.

Sifat inklusi tidak berlaku untuk dua nilai p yang berbeda pada domain $\mathbb{R}^d$ di ruang Lebesgue. Lain halnya dengan sifat inklusi di Ruang Morrey, hal tersebut berlaku. Gunawan pada ahun 2016, meneiliti sifat inklusi pada Ruang Morrey yang diperumum. Dan dilanjut pada tahun 2018, Gunawan tertarik meneliti Ruang Morrey lemah, Ruang Morrey lemah lebih luas dari pada Ruang Morrey di mana sifat inklusinya sejati.

Ilmuwan matematika terlahir untuk berfikir guna memperluas jangkauan ilmu matematika yang lain. Ilmuwan matematika seperti: C.B Morrey, Nakai, Sawano, dan Gunawan, tidak pernah bosan dan terus mengkaji lebih dalam. Hal yang telah dijelaskan diatas, sesuai dengan kalam Allah SWT pada surat Al-Imron ayat 190 yaitu:

إِنَّ فِى خَلۡقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَٱخۡتِلَٰفِٱلَّيۡلِ وَٱلنَّهَارِ لَأٓيَٰتٖ لِّأُوْلِيٱلۡأَلۡبَٰبِ

Sejatinya dalam penciptaan atau pembentukan langit dan bumi, bergantinya malam dan siang hari dengan sangat rinci, pergantian keduanya dalam waktu yang lama maupun singkat, panas dan dingin, serta peristiwa lainnya itu mengandung dalil yang jelas atas keberadaan , kuasa dan keesaan Allah untuk orang yang berakal sehat. Ayat ini diturunkan ketika suku Quraisy meminta nabi Muhammad SAW dengan berkata: “ Berdoalah kepada Tuhanmu untuk menjadikan bukit Shofa menjadi emas”. Lalu beliau berdoa kepada Tuhan. Kemudian turunlah ayat Al-Imron ayat 190. (Tafsir al-Wajiz)

Ayat tersebut menekankan pada bagian orang yang berakal (لِّأُوْلِيٱلۡأَلۡبَٰبِ), sehingga dalam pengamalannya kita diwajibkan untuk terus menuntut dan mengkaji ilmu. Sehingga berdasarkan paparan di atas dan berdasarkan pengamalan ayat 190 surat al-Imron, selanjutnya akan diteliti apa sifat inklusi yang di Ruang Morrey juga berlaku di Ruang Morrey kecil dan Morrey kecil lemah. Karena Ruang Morrey dan Ruang Morrey kecil sama-sama termasuk Ruang Banach. Sehingga memiliki karakteristik yang hampir sama. Pada penelitian sebelumnya telah dibahas sifat inklusi yang dimiliki oleh Ruang Morrey oleh Gunawan. Penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian sebelumnya, untuk membahas sifat-sifat inklusi yang dimiliki oleh Ruang Morrey kecil mengingat karakteristik keduanya yang hampir sama. Pada penelitian ini, akan diteliti apa sifat inklusi yang di Ruang Morrey juga berlaku di Ruang Morrey kecil dan Morrey kecil lemah.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang dibahas pada penelitian ini berdasarkan latar belakang di atas adalah:

1. Bagaimana berlakunya sifat-sifat inklusi padaRuang Morrey kecil m_q^p?
2. Bagaimana berlakunya sifat-sifat inklusi pada Ruang Morrey kecil lemah wm_q^p?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian yang dibahas pada penelitian ini berdasarkan rumusan masalah di atas adalah:

1. Untuk mengetahui keberlakuan sifat-sifat inklusi pada Ruang Morrey kecil m_q^p.
2. Untuk mengetahui keberlakuan sifat-sifat inklusi pada Ruang Morrey kecil lemah wm_q^p.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaatnya, penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Diharapkan dapat memberikan ilmu baru yang berkaitan dengan berlakunya sifat-sifat inklusi pada Ruang Morrey kecil m_q^p dan Ruang Morrey kecil lemah wm_q^p.
2. Diharapkan dapat memberikan informasi keterkaitan antara sifat-sifat inklusi antara ruang Ruang Morrey kecil dengan Ruang Morrey kecil lemah.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini dibuktikan berlakunya sifat-sifat inklusi pada Ruang Morrey kecil m_q^p dan ruang kecil lemah wm_q^p sehingga penelitian ini tidak akan membahas inklusi di ruang lainnya.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan kajian pustaka, dengan mengumpukan informasi atau rujukan yang terkait dari buku, jurnal, artikel yang berkaitan dengan inklusi Ruang Kecil Morrey dan Ruang Kecil Morrey Lemah.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika kepenulisan yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari empat bagian, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Bab I (satu) meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab II akan dibahas kajian teori yang akan digunakan untuk mendukung pembahasan dan menjawab rumusan masalah. Kajian Pustaka dalam penelitian ini meliputi: ruang bernorma, Ruang Banach, ketaksamaan Holder , ruang lebesgue dan sifat inklusinya, serta Ruang Morrey kecil dan perintah Allah untuk mengembangkan ilmu.

Bab III Pembahasan

Pada bab III (tiga) ini berisi bukti-bukti yang akan dijabarkan untuk menjawab dari rumusan masalah, berdasarkan kajian-kajian teorema yang sudah ada.

Bab IV Penutup

Bab IV (lima) berisi penutup dan saran dari penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Fungsi Terukur

Proposisi 2.1 (Royden dan Fitzpatick, 2010): *Misalkan fungsi f terukur pada domain E, sehingga pernyataan di bawah ini berlaku ekuivalen:*

1. $\forall\ c \in \mathbb{R}$, $\{x \in P | f(x) > c\}$ terukur
2. $\forall\ c \in \mathbb{R}$ $\{x \in P | f(x) \leq c\}$ terukur
3. $\forall\ c \in \mathbb{R}$ $\{x \in P | f(x) < c\}$ terukur
4. $\forall\ c \in \mathbb{R}$ $\{x \in P | f(x) \geq c\}$ terukur

Bukti. Himpunan (i) dan (ii) saling komplemen di E, seperti halnya himpunan (iii) dan (iv), dan komplemen suatu himpunan terukur adalah terukur, maka (i) dan (ii) ekuivalen, seperti halnya (iii) dan (iv). Jadi cukup ditunjukkan bahwa (ii) ↔ (iii).

1. Akan ditunjukkan (ii) → (iii).

   Perhatikan bahwa,

$$\{x \in P\ |f(x) < c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in P | f(x) \leq c - \frac{1}{k}\}$$

   karena $c - \frac{1}{k} \in \mathbb{R}$, maka $\{x \in E | f(x) \leq c - \frac{1}{k}$ terukur. Lebih lanjut gabungannya terukur. Jadi, $\{x \in E | f(x) < c\}$ terukur.

2. Akan ditunjukkan (iii) → (ii).

   Perhatikan bahwa,

$$\{x \in P\ |f(x) < c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in P | f(x) < c + \frac{1}{k}\}$$

karena $c+\frac{1}{k}\in\mathbb{R}$, maka $\{x\in P|f(x)<c+\frac{1}{k}$ terukur. Lebih lanjut irisannya terukur. Jadi, $\{x\in P|f(x)\leq c\}$ terukur.

2.2 Ruang Bernorma

Ruang bernorma merupakan ruang vector atas lapangan real atau kompleks. Misalkan X, adalah fungsi $\|\cdot\|: X\to\mathbb{R}$ dengan $x,y\in X$ dan α adalah sebarang konstanta yang memenuhi kondisi berikut:

(N.1) $\|x\|\geq 0$

(N.2) $\|x\|=0\ jika\ dan\ hanya\ jika\ x=0$

(N.3) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in X$

(N.4) $\|x+y\|\leq\ \|x\|+\|y\|$, $x,y\in X$ (ketaksamaan segitiga)

Disebut sebagai norm. Adapun kuasi-norm hampir sama dengan norm hanya tidak akan memenuhi kondisi ketaksamaan segitiga. Norm dengan X membentuk ruang bernorma yang dinotasikan dengan $(X,\|\cdot\|)$. (Kreysig,1978) Sedangkan ruang bernorma $(X,\|\cdot\|)$ yang lengkap disebut Ruang Banach. (Eidelman,dkk , 1955) Sedangkan ruang kuasi-Banach adalah ruang kuasi-norm yang lengkap. (Wikipedia)

Contoh 2.2. [Ruang Banach] (Kreysig,1978) :

Ruang euclid $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang yang terdiri dari semua pasangan n - baris dari bilangan real dengan, $x=(\xi_1,\dots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\dots,\eta_n)$.

Dan dilengkapi dengan norma,

$$\|x, y\| = \left(\sum_{j=1}^{n} (\xi_j - \eta_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Berikutnya, akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan Ruang Banach, dengan menunjukkan $\mathbb{R}^n$ merupakan ruang bernorma yang lengkap.

Ruang $\mathbb{R}^n$ dikatakan sebagai ruang bernorma, jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(N1) $\|x\| \geq 0$

Berdasarkan definisi harga mutlak jelas bahwa $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$.

(N2) $\|x\| = 0 \; jika \; dan \; hanya \; jika \; x = 0$

Pembuktian dari arah kiri ke kanan, akan dibuktikan $\|x\| = 0$ maka $x = 0$.

Untuk $(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2)^{\frac{1}{2}} = 0$ sehingga haruslah $\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 = 0$, maka akan diperoleh $x = \xi_k = 0$. Untuk pembuktian dari arah sebaliknya, jika $x = \xi_k = 0$ jelas bahwa akan didapatkan $\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{k=1}^{n} |0|^2)^{\frac{1}{2}} = 0$.

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in X$

$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n} 1 \cdot |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |1| \cdot (\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|x\|$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in X$

$$\|x+y\| = \left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2 + \sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\| + \|y\|.$$

Dan terbukti $(\|\cdot\|, R^n)$ merupakan ruang bernorma. Selanjutnya akan ditunjukkan kelengkapan $\mathbb{R}^n$.

(i) Misalkan (x_m) merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}^n$,

di mana $x_m = \left(\xi_1^{(m)}, \dots, \xi_n^{(m)}\right)$. Karena x_m merupakan barisan Cauchy berarti untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $m, r \in N$ sedemikian sehingga,

$$\|x_m - x_r\| = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k^{(m)} - \xi_k^{(r)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon.$$

Untuk k=1,2, … , n tetap,

$$\left(\xi_j^{(m)} - \xi_j^{(r)}\right)^2 < \epsilon^2$$

$$\left|\xi_k^{(m)} - \xi_k^{(r)}\right| < \epsilon$$

(ii) Karena $(\xi_k^1, \xi_k^2, \dots, \xi_k^r)$ merupakan barisan Cauchy di $\mathbb{R}$ di mana $\mathbb{R}$ lengkap, maka barisan itu konvergen. Misalkan ξ_k^r konevergen ke ξ_k. Dapat ditulis,

$$\|x_m, x\| = \|x_m - x_r\| = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_k^{(m)} - \xi_k\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon.$$

maka terbukti barisan Cauchy x_m konvergen di $\mathbb{R}^n$. Dan terbukti $\mathbb{R}^n$ lengkap.

2.3a Ketaksamaan Minkowski

[Teorema Minkowski] (Kreysig, 1978:14):

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_j+\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

di mana $x=(\xi_k)\in l^p$, $y=(\eta_j)\in l^p$, dan $p\geq 1$.

2.3b Ketaksamaan Holder

Lemma 2.3 [Ketaksamaan Holder] (Muscat, 2014:152):

Jika $p,q\geq 1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, dan $x_i,y_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,\ldots,n$, maka

$$\left|\sum x_i y_i\right| \leq \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

di mana $|x|$ adalah norma untuk Ruang Euclid berdimensi satu.

Bukti:

Misalkan $a,b\in\mathbb{R}$, $\alpha,\beta\geq 0$. Dengan mesubstitusikan $a^{1/\alpha}$ dan $b^{1/\beta}$ pada$a$ dan b di $a^{\alpha}b^{\beta}\leq\alpha a+\beta b$, dengan $\alpha=\frac{1}{p}$, $\beta=\frac{1}{q}$, sehingga diperoleh

$$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

untuk $a_i=\frac{x_i}{(\sum|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}}$, $b_i=\frac{y_i}{(\sum|y_i|^q)^{\frac{1}{q}}}$ dan dengan memanfaatkan ketaksamaan Minkowski, maka diperoleh

$$\sum|a_ib_i|\leq\sum\left(\frac{|a_i|^p}{p}+\frac{|b_i|^q}{q}\right)=\frac{1}{p}\left(\sum|a_i|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{q}\left(\sum|b_i|_q^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

sehingga

$$\frac{|\sum x_i y_i|}{(\sum|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}(\sum|y_i|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

atau dapat disimpulkan bahwa

$$\left|\sum x_i y_i\right| \leq \left(\sum|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

terbukti (Muscat, 2014:151).

Lemma 2.4 [Ketaksamaan Holder untuk Ruang Euclid berdimensi 2] (Muscat, 2014:152):

Jika $p, q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dan $x_i, y_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1,2, \dots, n$, maka

$$\left\|\sum x_i y_i\right\|_{\mathbb{R}^2} \leq \left(\sum \|x_i\|_{\mathbb{R}^2}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum \|y_i\|_{\mathbb{R}^2}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

di mana $\|x\|_{\mathbb{R}^2}$ merupakan norma Ruang Euclid untuk $\mathbb{R}$ berdimensi 2 $(\mathbb{R}^2)$ yang didefinisikan sebagai

$$\|x\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Bukti:

Misalkan $a, b \in \mathbb{R}^2$, $\alpha, \beta \geq 0$. Dengan mensubstitusikan $a^{1/\alpha}$ dan $b^{1/\beta}$ pada a dan b di $a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$, dengan $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$, akan didapatkan

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

untuk $a_i = \frac{x_i}{(\sum|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}}$, $b_i = \frac{y_i}{(\sum|y_i|^q)^{\frac{1}{q}}}$ dan dengan memanfaatkan ketaksamaan Minkowski, maka diperoleh

$$\left\|\sum a_i b_i\right\|_{\mathbb{R}^2} \le \sum \|a_i b_i\|_{\mathbb{R}^2} \le \sum \left(\frac{\|a_i\|_{\mathbb{R}^2}^p}{p} + \frac{|b_i|_{\mathbb{R}^2}^q}{q}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\left(\sum \|a_i\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{q}\left(\sum \|b_i\|_q^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

sehingga

$$\frac{\|\sum x_i y_i\|_{\mathbb{R}^2}}{\left(\sum \|x_i\|_{\mathbb{R}^2}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum \|y_i\|_{\mathbb{R}^2}^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

atau dapat disimpulkan bahwa

$$\left\|\sum x_i y_i\right\|_{\mathbb{R}^2} \le \left(\sum \|x_i\|_{\mathbb{R}^2}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum \|y_i\|_{\mathbb{R}^2}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

terbukti (Muscat, 2014:152).

Lemma 2.5 [Ketaksamaan Holder untuk dimensi n($\mathbb{R}^n$)] (Muscat, 2014:152):

Jika $p, q \ge 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dan $x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1,2, \dots, n$, maka

$$\left\|\sum x_i y_i\right\|_{\mathbb{R}^n} \le \left(\sum \|x_i\|_{\mathbb{R}^n}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum \|y_i\|_{\mathbb{R}^n}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

di mana $\|x\|_{\mathbb{R}^n}$ adalah norma Ruang Euclid untuk $\mathbb{R}$ dengan dimensi n($\mathbb{R}^n$) yang didefinisikan sebagai

$$\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^n}$$

Bukti:

Untuk membuktikannya, misalkan $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \ge 0$. Substitusikan $a^{1/\alpha}$ dan $b^{1/\beta}$ pada a dan b di $a^\alpha b^\beta \le \alpha a + \beta b$, dengan $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$, sehingga diperoleh

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

untuk $a_i = \frac{x_i}{(\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}}$, $b_i = \frac{y_i}{(\sum |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}}$ dan dengan memanfaatkan ketaksamaan Minkowski, maka diperoleh

$$\left\|\sum a_i b_i\right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \sum \|a_i b_i\|_{\mathbb{R}^n} \leq \sum \left(\frac{\|a_i\|_{\mathbb{R}^n}^p}{p} + \frac{|b_i|_{\mathbb{R}^n}^q}{q}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\left(\sum \|a_i\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{q}\left(\sum \|a_i\|_q^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

sehingga

$$\frac{\|\sum x_i y_i\|_{\mathbb{R}^n}}{(\sum \|x_i\|_{\mathbb{R}^n}^p)^{\frac{1}{p}} (\sum \|y_i\|_{\mathbb{R}^n}^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

atau dapat disimpulkan bahwa

$$\left\|\sum x_i y_i\right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \left(\sum \|x_i\|_{\mathbb{R}^n}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum \|y_i\|_{\mathbb{R}^n}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Terbukti.

Akibat 2.6 [Ketaksamaan Holder] (Darmawijaya, 2007:239):

Berdasarkan lemma di atas, jika $1 < p < \infty$ maka untuk setiap $f \in L^p(X, \mu)$ dan $g \in L^q(X, \mu)$ dengan $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, maka

$$\left|\int_X gh \, d\mu\right| \leq \int_X |gh| \, d\mu \leq \|g\|_p \cdot \|h\|_q$$

dengan

$$\|g\|_p = \left\{\int_X |g|^p \, d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} \text{dan} \|h\|_q = \left\{\int_X |h|^q \, d\mu\right\}^{\frac{1}{q}}$$

Bukti:

Jelas bahwa setiap $g \in L^p(X,\mu)$ dan $h \in L^q(X,\mu)$, bilangan $\|f\|_p$ dan $\|g\|_q$ merupakan dua bilangan real.

Karena $g \in L^p(X,\mu)$ dan $h \in L^q(X,\mu)$, dengan $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ dan $1 < p < \infty$ dengan memanfaatkan Lemma Young, maka diperoleh

$$\frac{1}{\|g\|_p \cdot \|h\|_q} \int_X |fg|\, d\mu = \int_X \frac{|g|}{\|g\|_p} \cdot \frac{|h|}{\|h\|_q} d\mu \leq \int_X \left\{ \frac{1}{p} \cdot \frac{|g|^p}{\|g\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|h|^q}{\|h\|_q^q} \right\} d\mu$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\|g\|_p^p} \int_X |g|^p\, d\mu + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\|h\|_q^q} \int_X |h|^q\, d\mu$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa

$$\int_X |gh|\, d\mu \leq \|g\|_p \cdot \|h\|_q$$

Terbukti.

2.4 Ruang Lebesgue

Ruang Lebesgue $L^p(X)$ termasuk ruang fungsi, misalkan X adalah himpunan terukur dan ada sebarang nilai $1 \leq p < \infty$ yang dilengkapi dengan norm $\|\cdot\|_{L^p}$ merupakan ruang bernorma, dengan

$$\|g\|_{L^p} = \left(\int_X |g(x)|^p\, d\mu < \infty \right)^{1\backslash p}$$

(Limanta, Kevin Mandira, 2014)

Setiap sebarang fungsi terukur Lebesgue $g: X \to \mathbb{R}$ anggota $L_p(X)$. Sebagai ruang bernorma, ruang Lebesgue juga memiliki sifat kekonvergenan dan kriteria Cauchy sehingga termasuk sebagai Ruang Banach. Dan untuk $p = 2$ ruang Lebesgue merupakan ruang Hilbert. (Kreysig, 1978)

2.4.1 Ruang Lebesgue Lemah

Ruang Lebesgue lemah $wL^p(\mathbb{R}^d)$ adalah himpunan semua fungsi terukur $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\ (atau\ \mathbb{C})$. Misalkan $1 \leq p < \infty$, sehingga

$$\|g\|_{wL^p} = \sup_{\lambda > 0} \lambda |\{x \in \mathbb{R}^d : |g(x)| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}} < \infty$$

dengan $|\{x \in \mathbb{R}^d : |g(x)| > \lambda\}|$ menyatakan ukuran Lebesgue dari $\{x \in \mathbb{R}^d : |g(x)| > \lambda\}$. (Grafakos, 2014: 403)

2.4.2 Sifat Inklusi Ruang Lebesgue dan Ruang Lebesgue Lemah

Teorema 2.7 (Grafakos, 2014: 403) Jika $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ maka $f \in wL^p(\mathbb{R}^n)$

Bukti. Misalkan $t > 0$ dan $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Didefinisikan $X \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n | f(x)| > t\}$ maka diperoleh

$\|f\|^p_{L^p\ (\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx \geq \int_X |f(x)|^p\, dx > \int_X t^p\, dx = |X| t^p,$ sehingga $|X| = |\{x \in \mathbb{R}^n | f(x)| > t\}| \leq \frac{1}{t^p} \|f\|^p_{L^p\ (\mathbb{R}^n)}$.

Akibatnya

$$t|X|^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Jadi, $\|f\|_{wL^p} \leq \|f\|_{L^p}$ dan $f \in wL^p(\mathbb{R}^n)$.

Ruang Lebesgue lemah termasuk ke dalam Ruang Kuasi-Banach (lihat subbab 2.2), dan Ruang Lebesgue lemah lebih luas dari ruang Lebesgue.

2.5 Ruang Morrey

C.B. Morrey mengenalkan Ruang Morrey pertama kali. Ruang Morrey merupakan bentuk perumuman dari ruang Lebesgue.

2.5.1 Ruang Morrey

Misalkan $1 \leq p \leq q < \infty$. Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p = \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^d)$ merupakan himpunan semua fungsi yang terukur sehingga,

$$\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^d) := \{f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^d) : \|f|\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^d)\| < \infty\},$$

di mana norm $\|f|\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^d)\|$ adalah,

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} := \sup_{\substack{a\in R^d \\ r>0}} |\, B(a,R)\,|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(y)|^p \, dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

(Von Neumann-1904)

$|B(a,R)|$ menotasikan ukuran Lebesgue di bola buka $B(a,R)$ dengan domain di $\mathbb{R}^d$, a sebagai titik pusat dan R sebagai jari-jari. Catatan, ketika $p = q$ maka $\mathcal{M}_q^p = L^p$. (Gunawan dkk, 2017)

Contoh 2.8 [Ruang Morrey] (Gunawan dkk, 2016):

Misalkan $1 \leq p < q < \infty$, dan $x \in \mathbb{R}^d$. Diberikan,

$$f(x) = |x|^{-\frac{d}{q}}.$$

Perhatikan bahwa ,

$$|B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |x|^{-\frac{dp}{q}} dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \; Cr^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}} \left(\omega_d \int_0^r t^{-\frac{dp}{q}} \cdot t^{(d-1)} \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \; Cr^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}} \left(\omega_d \int_0^r t^{d-\frac{dp}{q}-1} \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \; Cr^{\frac{d}{q}-\frac{d}{p}}\omega_d^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{d-\left(\frac{dp}{q}\right)}\right)^{\frac{1}{p}} r^{\frac{d}{p}-\frac{d}{q}}$$

$$\leq \; C_1\left(\frac{1}{d-\left(\frac{dp}{q}\right)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Dengan ω_d merupakan luas permukaan bidang berdimensi $d-1$ dan C_1 suatu konstanta. Dan terbukti $f \in \mathcal{M}_q^p$.

2.5.2 Ruang Morrey Lemah

Misalkan $1 \leq p \leq q < \infty$. Fungsi terukur f pada $\mathbb{R}^d$ dengan,

$$\|f\|_{w\mathcal{M}_q^p} := \sup\left\|\gamma\chi_{\{|f|>\gamma\}}\right\|_{\mathcal{M}_q^p}$$

adalah hingga. (Gunawan dkk, 2017)

2.5.3 Sifat Inklusi Ruang Morrey dengan Ruang Morrey Lemah

Teorema 2.9 [Sifat Inklusi] (Gunawan dkk, 2017):

Untuk $1 \leq p_1 \leq p_2 < q < \infty$, inklusi dibawah ini terjadi:

$$w\mathcal{M}_q^{p_2} \subseteq w\mathcal{M}_q^{p_1}.$$

Selanjutnya jika $p_1 < p_2$ maka

$$w\mathcal{M}_q^{p_2} \subseteq \mathcal{M}_q^{p_1}.$$

Teorema 2.10 [Sifat Inklusi] (Gunawan dkk, 2017):

Jika $1 \leq p_1 < p_2 < q < \infty$ maka masing-masing di bawah ini proper inklusi:

i. $\mathcal{M}_q^{p_2} \subseteq \mathcal{M}_q^{p_1}$

ii. $w\mathcal{M}_q^{p_2} \subseteq \mathcal{M}_q^{p_1}$

iii. $w\mathcal{M}_q^{p_2} \subseteq w\mathcal{M}_q^{p_1}$

Teorema 2.11 [Sifat Inklusi] (Gunawan dkk, 2017):

Misalkan $1 \leq p \leq q$, maka inklusi $\mathcal{M}_q^p \subseteq w\mathcal{M}_q^p$ adalah proper inklusi.

Dapat diketahui hubungan Ruang Morrey termuat dalam Ruang Morrey lemah. Maka Ruang Morrey lemah lebih luas dari pada Ruang Morrey.

2.6 Ruang Morrey Kecil

Ruang Morrey kecil diperkenalkan oleh Sawano pertama kali pada tahun 2018. Ruang Morrey kecil diperoleh dengan membatasi jari-jari bola pada definisi Ruang Morrey hanya di interval (0,1). (Sawano, 2018)

Misalkan $1 \leq p \leq q < \infty$. Ruang Morrey kecil $m_q^p(\mathbb{R}^d) = m_q^p$ adalah himpunan semua fungsi terukur $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ($atau$ $\mathbb{C}$) sehingga

$$\|f\|_{m_q^p} := \sup_{\substack{a \in R \\ R \in (0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Ruang Morrey kecil memuat Ruang Morrey dan juga lebih luas dari Ruang Morrey. Hal ini karena jika $f \in \mathcal{M}_q^p$, maka

$$\|f\|_{m_q^p} = \sup_{a \in \mathbb{R}^d, R \in (0,1)} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{a \in \mathbb{R}^d, R > 0} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|f\|_{\mathcal{M}_q^p}$$

Didapatkan $f \in m_q^p$.

Contoh 2.12 [Contoh Ruang Morrey Kecil] :

Fungsi konstan tak nol $f(x) = k$.

$$\|f\|_{m_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r\in(0,1)} |\,B(a,R)\,|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |k|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r\in(0,1)} |\,B(a,R)\,|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |k||\,B(a,R)\,|^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r\in(0,1)} |k||\,B(a,R\,)|^{\frac{1}{q}}$$

$$< \infty$$

Terbukti $f \in m_q^p$.

Contoh 2.13 [Contoh Ruang Morrey Kecil] :

Misalkan $a \in \mathbb{R}^n, r > 0,\ g(x) = \chi B(a,r)(x),\ g \in m_q^p$.

$\|g\|_{m_q^p} = \left(\frac{Cn}{n}\right)^{\frac{1}{q}} \min\left\{1, r^{\frac{n}{q}}\right\}$, perhatikan bahwa:

$$\|g\|_{m_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r\in(0,1)} |\,B(a,R)\,|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} \chi_{B(a,r)}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r\in(0,1)} |\,B(a,R)\,|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |\,B(a,R) \cap B(a,r)\,|^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r\in(0,1)} |\,B(a,R) \cap B(a,r)\,|^{\frac{1}{q}}$$

$$= |B(a, \min\{1,r\}|^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\frac{Cn}{n}\right)^{\frac{1}{q}} \min\left\{1, r^{\frac{n}{q}}\right\}$$

dan

$$\|g\|_{m_q^p} \geq |B(a, \min\{1,r\}\,)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,\min\{1,r\})} \chi B(a,r)(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |B(a, \min\{1, r\})|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |B(a, \min\{1, r\}) \cap B(a, r)|^{\frac{1}{p}}$$

$$= |B(a, \min\{1, r\})|^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\frac{Cn}{n}\right)^{\frac{1}{q}} \min\left\{1, r^{\frac{n}{q}}\right\}$$

Didapatkan $\|g\|_{m_q^p} = \left(\frac{Cn}{n}\right)^{\frac{1}{q}} \min\left\{1, r^{\frac{n}{q}}\right\}$, maka $g \in m_q^p$.

2.7 Ruang Morrey Kecil Lemah

Ruang Kecil kecil lemah didefiniskan dengan,

$$\|f\|_{wm_q^p} = \sup_{\lambda > 0} \lambda \left\|\chi_{(\lambda,\infty]}(|f|)\right\|_{m_q^p}.$$

(Sawano, 2018)

2.8 Kajian Agama

Pada sub bab ini, akan dibahas bagaimana al-Quran menjelaskan keterkaitan ruang morey kecil dan Ruang Morrey kecil lemah dianalogikan dengan matahari dan bulan. Hal ini, sesuai dengan firman Allah SWT dalam surah al-Anbiya [21] ayat 33:

وَهُوَالَّذِيْ خَلَقَ الَّيْلَ وَالنَّهَارَ وَالشَّمْسَ وَالْقَمَرَ كُلٌّ فِيْ فَلَكٍ يَسْبَحُوْنَ۝

"*Dan Dialah (Allah SWT) yang telah menciptakan malam dan siang, matahari dan bulan. Masing-masing dari keduanya itu beredar berdasarkan garis edarnya*."

Makna yang dapat diambil dari ayat tersebut bahwasanya setiap segala sesuatu memiliki sifat dan keterkaitan antara satu dengan yang lainnya. Misalnya Allah menciptakan matahari dan bulan sebagai bentuk kekuasaannya. Matahari dan bulan akan selalu berkaitan. Dan salah satu sifat yang dimiliki oleh matahari dan bulan adalah revolusi. Keduanya beredar berdasarkan garis edarnya.

Menurut tafsir Ibnu Katsir, وَالشَّمْسَ وَالقَمَرَ yang memiliki arti matahari dan bulan. Matahari memiliki cahaya khusus yang biasa disebut bintang, ruang edar sendiri, masa yang terbatas serta gerakan dan perjalanan khusus. Sedangkan bulan dengan cahaya lain yaitu dengan memantulkan cahaya dari matahari, ruang edar lain, perjalanan lain dan ukuran lain. كُلٌّ فِيْ فَلَكٍ يَسْبَحُوْنَ yang artinya, masing-masing keduanya itu beredar di dalam garis edarnya.

Hikmah yang dapat diambil dari tafsir Ibnu Katsir bahwasanya bulan dan bintang akan beredar sesuai dengan ruang dan garis edarnya masing-masing. Sama halnya dengan ruang yang ada di dalam matematika. Ruang Morrey kecil memiliki keterkaitan dengan Ruang Morrey. Tetapi, keduanya merupakan ruang yang berbeda dan memiliki sifat yang berbeda. Hal ini, yang disebut beredar sesuai dengan garisnya.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Ruang Morrey Kecil

Ruang Morrey kecil merupakan ruang fungsi terukur dengan jari-jari $r \in (0,1)$, yang pertama kali diperkenalkan oleh Sawano (2018) dan termasuk ke dalam Ruang Banach. Untuk membahas sifat-sifat inklusi yang dimiliki Ruang Morrey kecil akan dijelaskan terlebih dahulu definisi dari Ruang Morrey kecil.

Ruang Morrey kecil merupakan himpunan dari semua fungsi yang terukur f dan memenuhi,

$$\|f\|_{m_q^p} = \sup_{\substack{a \in R \\ R \in (0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

dan merupakan Ruang Banach. (Mu'tazili dan Gunawan, 2019)

3.1.1 Inklusi pada Ruang Morrey Kecil

Teorema 3.1. Jika $1 \leq p_1 \leq p_2 < q < \infty$ maka $m_q^{p_2} \subseteq m_q^{p_1}$

$$\|f\|_{m_q^{p_1}} \leq \|f\|_{m_q^{p_2}}$$

Bukti:

Ambil sebarang $f \in m_q^{p_1}$

$$\|f\|_{m_q^{p_1}} = \sup_{\substack{a \in R \\ R \in (0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}} \left(\int_{B(a,R)} |f(y)|^{p_1} dy \right)^{\frac{1}{p_1}}$$

Menggunakan Ketaksamaan Hölder

$$|B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}}\left(\int_{B(a,R)}|f(y)|^{p_1}dy\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leq \quad |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}}\left(\int_{B(a,R)}|f(y)|^{p_1}dy\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$\leq = \quad |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}}\left(\left(\int_{B(a,R)}|f(y)|^{p_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}dy\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\left(\int_{B(a,R)}dx\right)^{1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$= \quad |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}}\left(\int_{B(a,R)}|f(y)|^{p_2}dy\right)^{\frac{1}{p_2}}\left(\int_{B(a,R)}dx\right)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}$$

$$= \quad |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}}\left(\int_{B(a,R)}|f(y)|^{p_2}dy\right)^{\frac{1}{p_2}}|B(a,R)|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}$$

$$= \quad |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_2}}\left(\int_{B(a,R)}|f(y)|^{p_2}dy\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$= \quad \|f\|_{m_q^{p_2}}$$

Terbukti bahwa $m_q^{p_2} \subseteq m_q^{p_1}$.

Contoh 3.2. Misalkan fungsi konstanta tak nol $f(y) = k$, dan jika $1 \leq p_1 \leq p_2 < q < \infty$ maka $m_q^{p_2} \subseteq m_q^{p_1}$.

Bukti. Ambil $f \in m_q^{p_1}$ dengan $f(y) = k$,

$$\|f\|_{m_q^{p_1}} = \sup_{\substack{a\in R\\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}}\left(\int_{B(a,R)}|k|^{p_1}dy\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

Menggunakan Ketaksamaan Hölder

$$|B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}}\left(\int_{B(a,R)}|k|^{p_1}dy\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leq \quad |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p1}} \left(\int_{B(a,R)} |k|^{p_1} dy \right)^{\frac{1}{p2}}$$

$$= \quad |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p1}} \left(\left(\int_{B(a,R)} |k|^{p_1 \left(\frac{p2}{p1}\right)} dy \right)^{\frac{p1}{p2}} \left(\int_{B(a,R)} dx \right)^{1-\left(\frac{p1}{p2}\right)} \right)^{\frac{1}{p1}}$$

$$= \quad |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p1}} \left(\int_{B(a,R)} |k|^{p_2} dy \right)^{\frac{1}{p2}} \left(\int_{B(a,R)} dx \right)^{\frac{1}{p1}-\frac{1}{p2}}$$

$$= \quad |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p1}} \left(\int_{B(a,R)} |k|^{p_2} dy \right)^{\frac{1}{p2}} |B(a,R)|^{\frac{1}{p1}-\frac{1}{p2}}$$

$$= \quad |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p2}} \left(\int_{B(a,R)} |k|^{p_2} dy \right)^{\frac{1}{p2}}$$

$$\leq \quad \|f\|_{m_q^{p2}}$$

Terbukti bahwa $m_q^{p2} \subseteq m_q^{p1}$.

Teorema 3.3. Jika $1 \leq p_1 \leq p_2 < q < \infty$ maka

$$L_q = m_q^q \subseteq m_q^{p2} \subseteq m_q^{p1}$$

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa $L_q = m_q^q$ haruslah $L_q \subset m_q^q$ dan $L_q \supset m_q^q$.

$$| B(a,R) |^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(a,R)} |f(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \quad | B(a,R) |^0 \left(\int_{B(a,R)} |f(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_{B(a,R)} |f(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{L_q}$$

Untuk pembuktian dari arah sebaliknya,

Ambil sebarang $f \in L_q$

$$\|f\|_{Lq} = \left(\int_{B(a,R)} |f(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= |B(a,R)|^0 \left(\int_{B(a,R)} |f(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \sup_{\substack{a\in R\\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(a,R)} |f(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} = m_q^q$$

Terbukti $L_q = m_q^q$.

Berikutnya untuk membuktikan $m_q^q \subseteq m_q^{p2}$, ambil sebarang $f \in m_q^{p2}$.

$$\|f\|_{m_q^{p2}} := \sup_{\substack{a\in R^n\\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p2}} \left(\int_{B(a,R)} |f(y)|^{p2} dy\right)^{\frac{1}{p2}} < \infty.$$

Menggunakan Ketaksamaan Hölder

$$|B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p2}} \left(\int_{B(a,R)} |f(y)|^{p2} dy\right)^{\frac{1}{p2}}$$

$$\leq |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p2}} \left(\left(\int_{B(a,R)} |f(y)|^{p2\left(\frac{q}{p2}\right)} dy\right)^{\frac{p2}{q}} \left(\int_{B(a,R)} dx\right)^{1-\frac{p2}{q}}\right)^{\frac{1}{p2}}$$

$$= |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p2}} \left(\int_{B(a,R)} |f(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B(a,R)} dx\right)^{\frac{1}{p2}-\frac{1}{q}}$$

$$= |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p2}} \left(\int_{B(a,R)} |f(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} |B(a,R)|^{\frac{1}{p2}-\frac{1}{q}}$$

$$= |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(a,R)} |f(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

$\leq \|f\|_{m_q^q}$

Dan terbukti $m_q^q \subseteq m_q^{p_2}$.

Contoh 3.4. Misalkan fungsi konstanta tak nol $f(y) = k$, dan

Jika $1 \leq p_1 \leq p_2 < q < \infty$ maka $L_q = m_q^q \subseteq m_q^{p_2} \subseteq m_q^{p_1}$.

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa $L_q = m_q^q$ haruslah $L_q \subset m_q^q$ dan $L_q \supset m_q^q$.

$$| B(a,R) |^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(a,R)} |k|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \quad | B(a,R)|^0 \left(\int_{B(a,R)} |k|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\int_{B(a,R)} |k|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{L_q}$$

Untuk pembuktian dari arah sebaliknya,

Ambil $f \in L_q$, dengan $f(y) = k$

$$\|f\|_{Lq} = \left(\int_{B(a,R)} |k|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=|B(a,R)|^0 \left(\int_{B(a,R)} |k|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \sup_{\substack{a \in R \\ R \in (0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(a,R)} |k|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{m_q^q}$$

Terbukti $L_q = m_q^q$.

Berikutnya untuk membuktikan $m_q^q \subseteq m_q^{p2}$, ambil $f \in m_q^{p2}$ dengan $f(y) = k$.

$$\|f\|_{m_q^{p2}} := \sup_{\substack{a \in R^n \\ R \in (0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p2}} \left(\int_{B(a,R)} |k|^{p2} dy\right)^{\frac{1}{p2}} < \infty.$$

Menggunakan Ketaksamaan Hölder

$$|B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p2}} \left(\int_{B(a,R)} |k|^{p2} dy\right)^{\frac{1}{p2}}$$

$$\leq |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p2}} \left(\left(\int_{B(a,R)} |k|^{p2\left(\frac{q}{p2}\right)} dy\right)^{\frac{p2}{q}} \left(\int_{B(a,R)} dx\right)^{1-\frac{p2}{q}}\right)^{\frac{1}{p2}}$$

$$= |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p2}} \left(\int_{B(a,R)} |k|^{q} dy\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B(a,R)} dx\right)^{\frac{1}{p2}-\frac{1}{q}}$$

$$= |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p2}} \left(\int_{B(a,R)} |k|^{q} dy\right)^{\frac{1}{q}} |B(a,R)|^{\frac{1}{p2}-\frac{1}{q}}$$

$$= |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q}} \left(\int_{B(a,R)} |k|^{q} dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \|f\|_{m_q^q}$$

Dan terbukti $m_q^q \subseteq m_q^{p2}$.

3.2 Ruang Morrey Kecil Lemah

Ruang Morrey kecil lemah merupakan himpunan dari semua fungsi yang terukur f dan memenuhi,

$$\|f\|_{wm_q^p} = \sup_{\substack{a\in R^n\\ \lambda>0\\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\int_{B(a,r)} \left|\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} < \infty$$

dan merupakan Ruang Banach.

Contoh 3.5 [Contoh Ruang Morrey Kecil Lemah]:

Misalkan $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, dan $g(x) = \chi_{B(a,r)}(x)$, maka $g \in wm_q^p$ dan

$\|g\|_{wm_q^p} = \left(\frac{Cn}{n}\right)^{\frac{1}{q}} \min\left\{1, r^{\frac{n}{q}}\right\}$. Perhatikan bahwa

$$\|g\|_{wm_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, R\in(0,1), \lambda>0} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \lambda \left(\int_{B(a,R)} \left|\chi_{\{x:|\chi_{B(a,r)}(x)|>\lambda\}}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, 0<R, \lambda<1} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \lambda |B(a,R) \cap B(a,r)\,|^{\frac{1}{p}}$$

$$= |B(a, \min\{1, r\})|^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\frac{Cn}{n}\right)^{\frac{1}{q}} \min\{1, r^{\frac{n}{q}}\}.$$

3.2.1 Inklusi pada Ruang Morrey Kecil Lemah

Teorema 3.6. Jika $1 \le p < q < \infty$, maka $m_q^p \subseteq wm_q^p$

Bukti. Jika $f \in m_q^p$ dan $\lambda > 0$ maka $|f(x)| \ge \lambda\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)$ sehingga

$$\|f\|_{m_q^p} \ge |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\ge |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |\,\lambda\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)^p) dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Untuk setiap bola buka berpusat di a dan berjari-jari $R < 1$. Dengan mengambil supremum atas $a \in R^n, R \in (0,1)$ dan $\lambda > 0$ diperoleh $\|f\|_{wm_q^p} \leq \|f\|_{m_q^p} < \infty$. Akibatnya $f \in wm_q^p$. Dapat disimpulkan $m_q^p \subseteq wm_q^p$.

Contoh 3.7. Misalkan fungsi konstanta tak nol $f(x) = k$, dengan $1 \leq p < q < \infty$, maka $m_q^p \subseteq wm_q^p$.

Jika $f \in m_q^p$ dan $\lambda > 0$ maka $|f(x)| \geq \lambda\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)$ sehingga

$$\|f\|_{m_q^p} \geq |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{B(a,R)} |k|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\geq |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{B(a,R)} |\lambda\chi_{\{x:|k|>\lambda\}}(x)^p)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Untuk setiap bola buka berpusat di a dan berjari-jari $R < 1$. Dengan mengambil supremum atas $a \in R^n, R \in (0,1)$ dan $\lambda > 0$ diperoleh $\|f\|_{wm_q^p} \leq \|f\|_{m_q^p} < \infty$. Akibatnya $f \in wm_q^p$. Dapat disimpulkan $m_q^p \subseteq wm_q^p$.

Teorema 3.8. Jika $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, maka $wm_q^{p_2} \subseteq wm_q^{p_1}$.

Bukti. Jika $p_1 < p_2$, maka dengan ketaksamaan Holder

$$|B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}}\left(\int_{B(a,R)} |\lambda\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)^{p_1})dx\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leq |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}}\left(\left(\int_{B(a,R)} |\lambda\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)^{p_1})dx\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\left(\int_{B(a,r)} dx\right)^{1-\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$= |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}}\left(\int_{B(a,R)} |\lambda\chi_{\{x:|f(x)|>\lambda\}}(x)^{p_2})dx\right)^{\frac{1}{p_2}} \ |B(a,R)|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}$$

$$\leq \|f\|_{wm_q^{p_2}}$$

Maka terbukti bahwa $wm_q^{p_2} \subseteq wm_q^{p_1}$.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Pembahasan terkait sifat-sifat inklusi telah dijelaskan pada bab sebelumnya, sehingga dapat disimpulkan bahwa:

1. Sifat-sifat inklusi berlaku pada Ruang Morrey kecil yaitu:
   a. Jika $1 \leq p_1 \leq p_2 < q < \infty$ maka $m_q^{p_2} \subseteq m_q^{p_1}$
   b. Jika $1 \leq p_1 \leq p_2 < q < \infty$ maka $L_q = m_q^q$
2. Sifat-sifat inklusi berlaku pada Ruang Morrey kecil lemah yaitu:
   a. Jika $1 \leq p < q < \infty$, maka $m_q^p \subseteq wm_q^p$
   b. Jika $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, maka $wm_q^{p_2} \subseteq wm_q^{p_1}$.

4.2 Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya, peneliti bisa mencoba membuktikan sifat-sifat inklusi di ruang yang lain. Atau tetap di Ruang Morrey kecil dan Ruang Morrey kecil lemah dengan sifat inklusi yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Badi, dan Tajdin. 2004. *Islamic Creative Thinking-Berpikir Kreatif Berdasarkan Metode Qurani*. Bandung: Mizania.

Eidelman, dkk. 1955. *Functional Analysis An Introduction.*. United States of America: American Mathematical Society.

Grafakos. 2014. L_p *Spaces and Interpolation.* Springer. New York

Gunawan,dkk. 2016. *An Inclusion Property of Generalized Morrey Spaces.* Math Nachr

Gunawan,dkk. 2017. *Proper Inclusions of Morrey Spaces.* arXiv: 1702.07053v1 [math.FA].

Katsir, Ibnu. 2004. *TafsirIbnuKatsirJilid 1*. Terjemahanoleh Abdullah. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Krantz, Steven. 2006. *An Episodic History of Mathematics*. St. Louis. h.iii.

Kreyszig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Willey & Sons.

Limanta, Kevin Mandira. 2014. *Ruang Morrey Kuat dan Lemah*. Progam Studi Sarjana Matematika. FMIPA. Institut Teknologi Bandung.

Muscat. 2014 . *Functional Analysis*. Springer: New York.

Mu'tazili dan Gunawan. 2019. *Von Neumann - Jordan Constant, James constant, and Dunkl-Williams Constant for Small Morrey Spaces*. arXiv: 1904.01712v2 [math.FA].

Sawano. 2018. *A Thought on Generalized Morrey Spaces*. arXiv: 1812.08394 [math.FA]

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lailatul Maziyah Wildan Mufaridho
NIM : 16610060
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : *Sifat-Sifat Inklusi pada Ruang Morrey*
Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman,M.Si
Pembimbing II : Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	04 Februari 2020	Konsultasi Bab I & Bab II	1.
2.	07 Februari 2020	Konsultasi Bab I, II, & III	2
3.	8 Februari 2020	Konsultasi Kajian Keagamaan	3.
4.	10 Februari 2020	ACC Bab I & Bab II	4
5.	17 Februari 2020	Konsultasi Bab III	5.
6.	20 Februari 2020	Pembenahan Bab III	6
7.	20 Februari	Konsultasi Bab IV	7.
8.	28 April 2020	Konsultasi Abstrak	8
9.	10 Februari 2020	ACC Kajian Keagamaan	9.
10.	12 April 2020	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 06 Mei 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

RIWAYAT HIDUP

Lailatul Maziyah Wildan Mufaridho yang akrab dipanggil Maziyah, lahir di Pasuruan pada tanggal 07 April 1998. Maziyah merupakan anak pertama dari pasangan H. Mahfud Ali Ridho dan H. Munifah. Selama di Malang, Maziyah tinggal di PPTQ Nurul Furqon yang sekaligus menjadi pendidikan nonformal. Disusul pendidikan nonformal lainnya: Komunitas Al-Farazi, Komunitas 3CS, dan HTQ Uin Malang. Adapun prestasi yang telah di raih di bangku perkulihan: Pemakalah SiManis (2019), Pemakalah seminar Greentech (2019), kontributor Buku Antalogi di Luar Jendela (2019), Kontributor Buku Antalogi Bait yang Bercengkerama (2019).

Adapun riwayat pendidikannya: SDN 1 Kejapanan, SMPN 2 Bangil, SMAN 3 Jombang. Sedangkan riwayat pendidikan non formalnya: PP. Nurul Madinah Bangil, PP. Sunan Ampel Jombang. Semasa di SMA, Maziyah pernah menjuarai olimpiade Sains Nasional yang diadakan PP.Tambak Beras dengan juara 2. Dan peserta OSN tingkat Kabupaten. Maziyah juga turut aktif menjadi pengurus devisi pendidikan di PP. Sunan Ampel Jombang.