SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN REAKSI DIFUSI MENGGUNAKAN METODE PEMISAHAN VARIABEL

SKRIPSI

OLEH
MIYA RIZKIYA ULKHAK
NIM. 15610126

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN REAKSI DIFUSI MENGGUNAKAN METODE PEMISAHAN VARIABEL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Miya Rizkiya Ulkhak
NIM. 15610126

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN REAKSI DIFUSI MENGGUNAKAN METODE PEMISAHAN VARIABEL

SKRIPSI

Oleh
Miya Rizkiya Ulkhak
NIM. 15610126

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 28 November 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Usman Pagalay, M.Si	Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19650414 200312 1 001	NIP. 19741129 20001 2 005

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN REAKSI DIFUSI MENGGUNAKAN METODE PEMISAHAN VARIABEL

SKRIPSI

Oleh
Miya Rizkiya Ulkhak
NIM. 15610126

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 18 Desember 2019

Penguji Utama	:	Dr. Hairur Rahman, M.Si	....
Ketua Penguji	:	Mohammad Jamhuri, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Anggota Penguji	:	Dr. Elly Susanti, M.Sc	....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Miya Rizkiya Ulkhak

NIM : 15610126

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Solusi Analitik Persamaan Reaksi Difusi Menggunakan Metode Pemisahan Variabel

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 2 Desember 2019
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
5EAHF200653873
6000 ENAM RIBU RUPIAH

Miya Rizkiya Ulkhak
NIM. 15610126

MOTO

"Ombak yang tenang tak akan menghasilkan pelaut yaang tangguh"

PERSEMBAHAN

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Bapak Samsul Ma'arifdan Ibunda Umi Mukaromah tercinta, yang tak pernah lelah untuk memberikan dukungan fisik maupun psikis kepada penulis, tak pernah luput dalam menyambungkan doa kepada Allah Swt, dan berbagai pengorbanan yang tak pernah ternilai. Serta kepada kedua Kakak tersayang M. Abu Yazid Al-bustomi danDewi Maslacha yang selalu penulis cintai

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Solusi Analitik Persamaan Reaksi Difusi Menggunakan Metode Pemisahan Variabel " sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu agama Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si,selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku pembimbimg I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.

5. Dr. Elly Susanti, M.Sc, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen wali yang selalu memberikan motivasi dan arahan kepada penulis.
7. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam proses perkuliahan.
8. Bapak dan Ibu sertakakak tercinta yang selalu memberikan doa, semangat dan motivasi demi keberhasilan penulis.
9. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2015 khususnya MatematikaC dan Keluarga Bumi Palapa atas dukungan serta motivasinya dalam menggapai cita-cita.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materiil maupun moril.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembacapada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, Desember 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Ulkhak, Miya Rizkiya. 2019. **Solusi Analitik Persamaan Reaksi Difusi Menggunakan Metode Pemisahan Variabel**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Dr.Elly Susanti, M.Sc.

Kata Kunci: Reaksi Difusi, Metode Pemisahan Variabel, Syarat Batas Nonhomogen.

Reaksi difusi adalah suatu proses kimia yang terjadi karena dua proses yakni reaksi kimia dan difusi. Reaksi difusi menggambarkan bagaimana suatu zat dapat berubah menjadi zat baru karena reaksi kimia, kemudian substansi zat akan menyebar kedalam suatu wadah. Tujuan Penelitian ini adalah untuk mencari solusi analitik persamaan reaksi difusi menggunakan metode pemisahan variabel

Persamaan reaksi difusi pada penelitian ini memiliki syarat batas yang nonhomogen. Persamaan reaksi difusi diselesaikan secara analitik menggunakan metode pemisahan variabel. Penyelesaian persamaan diferensial parsial menggunakan metode pemisahan variabel dengan syarat batas nonhomogen memerlukan transformasi persamaan. Transformasi persamaan bertujuan untuk membentuk persamaan diferensial parsial yang memiliki syarat batas homogen. Persamaan yang telah diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel selanjutnya akan diselesaikan menggunakan kaidah deret fourier. Deret fourier diperlukan untuk menyelesaikan masalah nilai eigen dan fungsi eigen pada solusi metode pemisahan variabel.

Hasil yang diperoleh dari solusi analitik persamaan reaksi difusi menggunakan metode pemisahan variabel adalah

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4\pi(2-1)}{(4\pi^2 n^2 - 4\pi^2 n + \pi^2 + 4)} \sin\left(\frac{1}{2}(2\mathrm{n}-1)\pi x\right) e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)^2\right)\mathrm{t}}$$

$$+\left(\left(1-\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^{x} + \left(\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^{-x}\right)$$

Disimpulkan bahwa metode pemisahan variabel dalam penelitian ini dikategorikan sebagai salah satu metode yang menghasilkan solusi analitik pada persamaan reaksi difusi.

ABSTRACT

Ulkhak, Miya Rizkiya. 2019. **Analytical Solution of Diffusion-Reaction Equation Using Separation Variable Method.** Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisors: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si, (II) Dr. Elly Susanti, M.Sc

Keyword: Reaction Diffusion, Separation Variable Method, Nonhomogeneous Boundary Value Problem

Diffusion reaction is a chemical process that occurs because of two processes namely chemical reaction and diffusion. Diffusion reactions describe how a substance can be changed into a new substance due to chemical reactions, then the substance of the substance will spread into the container. The purpose of this study is to find the analytical solutions for the diffusion reaction equation using the variable separation method.

The diffusion reaction equation in this study has nonhomogeneous boundary conditions. The diffusion reaction equation is solved analytically using the variable separation method. Solving partial differential equations using the variable separation method on the condition of nonhomogeneous boundaries requires transformation of equations. Equation transformation aims to form partial differential equations which have homogeneous boundary conditions. Equations that have been solved using the variable separation method will then be solved using the fourier series rules. Fourier series are needed to solve the problem of eigenvalue and eigenfunction in the solution of variable separation methods.

The results obtained from the analytical solution of the diffusion reaction equation using the variable separation method are

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4\pi(2-1)}{(4\pi^2 n^2 - 4\pi^2 n + \pi^2 + 4)} \sin\left(\frac{1}{2}(2\mathrm{n}-1)\pi x\right) e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)^2\right)\mathrm{t}}$$

$$+\left(\left(1-\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^{x} + \left(\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^{-x}\right)$$

It was concluded that the variable separation method in this study was categorized as one of the methods that produced analytic solutions to the diffusion reaction equation.

.

ملخص

الحق، ميا رزقيا. ٢٠١٩. **الحل التحليلي لمعادلة رد الفعل باستخدام طريقة متغير الفصل**.البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا ملك إبراهيم مالانج. المشرف : (١) عثمان باجالي الماجستير (٢) إيلي سوسانتي الماجستير.

الكلمات الرئيسية : تفاعل الانتشار ، طريقة الفصل المتغير ، شروط الحدود غير البشرية.

تفاعل الانتشار هو عملية كيميائية تحدث بسبب عمليتين هما التفاعل الكيميائي والانتشار. تصف تفاعلات الانتشار كيفية تغيير مادة ما إلى مادة جديدة بسبب التفاعلات الكيميائية ، ثم تنتشر مادة المادة في الحاوية. الغرض من هذه الدراسة هو إيجاد حلول تحليلية لمعادلة تفاعل الانتشار باستخدام طريقة الفصل المتغير

معادلة تفاعل الانتشار في هذه الدراسة لها شروط حدود غير متجانسة. يتم حل معادلة تفاعل الانتشار بطريقة تحليلية باستخدام طريقة الفصل المتغير. يتطلب حل المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام طريقة الفصل المتغير على شرط الحدود غير المتجانسة تحويل المعادلات. يهدف تحويل المعادلة إلى تكوين معادلات تفاضلية جزئية لها شروط حدود متجانسة. سيتم بعد ذلك حل المعادلات التي تم حلها باستخدام طريقة الفصل المتغير باستخدام قواعد سلسلة .fourierهناك حاجة إلى سلسلةFourierلحل مشكلةeigenvalueوeigenfunctionفي حل أساليب الفصل متغير.

النتائج التي تم الحصول عليها من الحل التحليلي لمعادلة تفاعل الانتشار باستخدام طريقة الفصل المتغير هي

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{4\pi(2-1)}{(4\pi^2n^2-4\pi^2n+\pi^2+4)}\sin\left(\frac{1}{2}(2\mathrm{n}-1)\pi x\right)e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)^2\right)\mathrm{t}}$$
$$+\left(\left(1-\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^{x}+\left(\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^{-x}\right)$$

استنتج أن طريقة الفصل المتغير في هذه الدراسة صنفت كواحدة من الطرق التي أنتجت حلول تحليلية لمعادلة تفاعل الانتشار.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Air merupakan sumber kehidupan makhluk hidup yang utama. Keberadaan air di bumi ini terjaga karena adanya suatu siklus alam yaitu siklus Hidrologi. Siklus Hidrologi terjadi dengan berbagai macam proses. Namun, proses akhir dari siklus Hidrologi adalah Hujan. Fenomena hujan dijelaskan dalam Al-qur'an. Allah berfirman dalam surat An-naba' ayat 14 :

"dan kami turunkan dari awan air yang banyak tercurah"

Tafsir quraisy shihab menjelaskan bahwa air tercurah yang dimaksudkan adalah air hujan. Tafsir quraisy shihab menjelaskan bahwa hujan merupakan hasil kumpulan uap-uap air laut dan samudra yang membentuk awan yang kemudian setelah terkumpul dapat berubah menjadi tetesan hujan. Proses berkumpulnya uap-uap air laut dalam hujan membutuhkan suatu proses yang dalam ilmu sains dikenal dengan reaksi kimia.

Reaksi kimia merupakan suatu proses alami yang menghasilkan antarubahan senyawa kimia. Ada berbagai macam reaksi kimia salah satunya yakni reaksi kimia elementer. Reaksi kimia elementer merupakan reaksi kimia yang menghasilkan interaksi antar molekul yang sama atau berbeda serta menghasilkan suatu molekul yang baru yang berbeda dari molekul asalnya. Penerapan reaksi kimia yang berkaitan dengan penyebaran molekul membutuhkan bantuan proses lain yaitu dengan difusi (Ingalls,2012).

Difusi merupakan suatu proses ilmiah yang sering kali terjadi dalam berbagai macam bidang keilmuan. Proses difusi merupakan suatu proses alami yang terjadi tanpa adanya suatu perilaku yang dipaksakan. Difusi adalah suatu proses perpindahan zat dari zat yang berkonsentrasi tinggi menuju zat yang berkonsentrasi rendah (Holman, 1994).

Proses difusi akan terus terjadi hingga seluruh partikel zat terlarut menyebar dan tercampur dengan zat pelarut yang menyebabkan konsentrasi kedua zat menjadi setimbang. Perbedaan konsentrasi zat terlarut dan pelarut disebut gradien kosentrasi. Penelitian ini akan mengkaji tentang proses difusi yang terjadi pada reaksi kimia. Proses ini biasa dikenal dengan proses reaksi difusi.

Proses reaksi difusi dapat dimodelkan secara matematis sebagai suatu bentuk persamaan. Persamaan yang dipakai adalah persamaan diferensial parsial. Hal ini disebabkan karena proses reaksi difusi akan bergantung pada dua variabel bebas yaitu x dan t. Persamaan diferensial yang menggambarkan proses reaksi difusi disebut dengan persamaan reaksi difusi.

Persamaan reaksi difusi adalah persamaan diferensial parsial yang mendeskripsikan bagaimana konsentrasi dari satu atau lebih substansi terdistribusi dalam ruang berubah karena dua proses. Proses pertama yaitu proses reaksi kimia elementer dimana substansi diubah menjadi suatu zat yang baru. Proses kedua yaitu proses yang menyebabkan substansi menyebar dalam ruang.

Solusi analitik untuk menyelesaikan persamaan reaksi difusi dapat diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel. Metode pemisahan variabel dipilih karena metode pemisahan variabel merupakan metode paling baik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial yang berkaitan dengan syarat batas(Zauderer, 2006).

Metode pemisahan variabel memisahkan variabel pada Persamaan Diferensial Parsial sehingga dihasilkan beberapa Persamaan Diferensial Biasa (PDB) sesuai dengan variabel bebasnya. Selanjutnya masing-masing PDB diselesaikan dengan memanfaatkan pemisahan variabel. Penyelesaian menggunakan metode pemisahan variabel selanjutnya akan diselesaikan menggunakan deret fourier. Deret fourier diperlukan untuk menyelesaikan kombinasi linier takhingga dan fungsi eigen dari batasan-batasan yang diberikan (Haberman, 1998).

Menurut Straus (2009) persamaan diferensial parsial dengan syarat batas nonhomogen dapat diselesaikan dengan metode pemisahan variabel dengan syarat harus dilakukan pentransformasian pada persamaan yang diberikan. Menurut White (2010) tujuan dari transformasi persamaan ini adalah untuk membentuk suatu persamaan baru yang memiliki syarat batas homogen. Selanjutnya, persamaan dapat diselesaikan mengunakan metode pemisahan variabel

Berdasarkan uraian yang telah dipaparkan sebelumnya, penelitian ini peneliti akan mengkaji dan menganalisis persamaan reaksi difusi dengan syarat batas nonhomogen secara analitik dengan judul “Solusi Analitik Persamaan Reaksi Difusi Menggunakan Metode Pemisahan Variabel”

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan dari uraian latar belakang diatas, maka rumusan masalah penelitian ini adalah sebagai berikut: Bagaimana penyelesaian persamaan reaksi difusi secara analitik menggunakan metode pemisahan variabel?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut: Mengetahui penyelesaian persamaan reaksi difusi secara analitik menggunakan metode pemisahan variabel.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah sebagai berikut: Mendapatkan penyelesaian persamaan reaksi difusi secara analitik menggunakan metode pemisahan variabel.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah persamaan reaksi difusi dengan syarat batas nonhomogen(White & Subramanian, 2010:293) yaitu;

$$\frac{\partial c_A}{\partial t_1} = D_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} - kc_A(z, t_1)$$

dengan kondisi awal

$$c_A(z, 0) = 0$$

syarat batas

$$c_A(0, t_1) = 0.01$$

$$\frac{\partial c_A}{\partial z}(0.1, t_1) = 0$$

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian adalah studi literatur dengan menelaah dan mempelajari buku-buku, jurnal-jurnal, dan referensi lain yang mendukung penelitian ini. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini yaitu:

1. Melakukan penskalaan pada persamaan reaksi difusi yang diberikan.
2. Mentransformasi persamaan reaksi difusi dengan menjumlahkan dua fungsi baru yang tidak diketahui dan fungsi baru yang dipilih.
3. Menyelesaikansolusi analitikfungsi baru yang dipilih menggunakan kaidah penyelesaian mengikuti syarat batas yang diberikan.
4. Menyelesaikan solusi analitik fungsi baru yang tidak diketahui dengan menggunakan metode pemisahan variabel.
5. Menyelesaikan solusi khusus persamaan reaksi difusi.
6. Mensimulasi solusi persamaan reaksi difusi yang didapatkan dari penyelesaian secara analitik.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulis memberikan gambaran umum sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini menguraikan mengenai latar belakang penelitian, rumusan masalah penelitian, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menyajikan kajian pustaka yang dipakai dasar pembahasan penelitian ini, meliputi difusi, reaksi kimia, persamaan reaksi difusi, metode pemisahan variabel, dan deret fourier.

Bab III Pembahasan

Bab ini menjabarkan tentang hasil penelitian yang diperoleh, yaitu solusi anailitik persaman reaksi difusi menggunakan metode pemisahan variabel

Bab IV Penutup

Bab ini menguraikan kesimpulan akhir yang merupakan jawaban dari rumusan masalah penelitian dan saran dari penulis untuk pembaca.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1Persamaan Reaksi Difusi

Reaksi kimia merupakan suatu proses alami yang menghasilkan antarubahan senyawa kimia. Ada berbagai macam reaksi kimia salah satunya yakni reaksi kimia elementer. Reaksi kimia elementer merupakan reaksi kimia yang menghasilkan interaksi antar molekul yang sama atau berbeda dan mengahasilkan suatu molekul yang baru yang berbeda dari molekul asalnya. Reaksi kimia akan selalu berkaitan dengan interaksi antar molekul.

Interaksi antar dua molekul dapat mengakibatkan suatu proses reaksi kimia yang membentuk molekul baru. Ada dua macam interaksi antar molekul yakni, interaksi yang bersifat *irreversible* dan *revesible*(Ingalls,2012).

Hubugan *irreversible* didefinisakan sebagai satu hubungan yang terbentuk dari dua molekul yang berbeda (A dan B) kemudian bereaksi, sehingga membentuk suatu molekul yang baru (C).

$$A + B \ \rightarrow C$$

hubungan antara molekul bersifat satu arah artinya hubungan keduanya tidak dapat di balik atau molekul C tidak dapat kembali menjadi molekul A atau B.

Hubugan *reversible* didefinisakan sebagai satu hubungan yang terbentuk dari dua molekul yang berbeda (A dan B) kemudian bereaksi, sehingga membentuk suatu molekul yang baru (C)

$$A + B \ \leftrightarrow C$$

hubungan antara molekul bersifat dua arah artinya hubungan keduanya berlaku secara berkebalikan atau molekul C dapat kembali menjadi molekul A dan B (Ingalls, 2012).

Reaksi kimia dalam pemodelannya tidak dapat secara langsung dimodelkan. Hal ini disebabkan karena akan adanya ketidak cocokan dalam menggambarkan suatu masalah matematis dengan masalah yang nyata. Oleh karena itu, reaksi kimia membutuhkan suatu proses bantuan yakni proses difusi dalam membentuk suatu model reaksi kimia secara matematis dan realistis.

Difusi menurut Holman (1994) merupakan peristiwa mengalirnya atau berpindahnya suatu zat pelarut dari bagian yang berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi lebih rendah. Difusi disebabkan oleh adanya gradien konsentrasi yaitu perbedaan konsentrasi antar kedua zat. Komponen pada zat pelarut akan bergerak kearah zat terlarut untuk menyamakan konsentrasi dan mengapuskan gradien. Dengan kata lain, difusi akan terus terjadi hingga seluruh partikel tersebar luas secara merata dan mencapai keadaan setimbang

Proses reaksi kimia dan difusi dapat saling berhubungan. Hubungan antar kedua proses ini menimbulkan proses kimia yang biasa disebut dengan proses reaksi difusi. Secara matematis proses ini dapat dimodelkan dalam bentuk pemodelan matematika. Pemodelan yang digunakan adalah persamaan diferensial parsial. Hal ini mengingat bahwa proses yang terjadi akan bergantung pada dua hal yaitu posisi (x) dan waktu (t). Persaman diferensial ini dapat disebut dengan persamaan reaksi difusi.

Persamaan reaksi difusi adalah persamaan diferensial parsial yang mendeskripsikan bagaimana konsentrasi dari satu atau lebih substansi terdistribusi dalam ruang berubah karena pengaruh dua proses. Pertama adalah Reaksi kimia elementer dimana substansi diubah menjadi zat yang baru. Kedua difusi yang menyebabkan substansi menyebar dalam ruang.

Model persamaan reaksi difusi yang dapat diberikan adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t_1} = D_{AB}\frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} - kc_A(z,t_1)$$

Laju perubahan konsentrasi reaksi kimia pada zat gas (A) terhadap waktu sebanding dengan perubahan komponen zat gas (A) karena difusi antar zat gas (A) dan zat cair (B) kemudian komponen reaksi kimia meluruh sebesar (k)

2.2Masalah Syarat batas

Syarat batas merupakan sistem persamaan diferensial biasa dengan nilai solusi dan turunan yang ditentukan berada pada lebih dari satu titik. Paling umum, solusi dan turunannya ditentukan hanya pada dua titik batas (Boyce dan Prima, 2009). Misalkan diberikan persamaan sebagai berikut :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \qquad (2.1)$$

dengan syarat batas

$$y(\alpha) = y_0, y(\beta) = y_1.$$

Klasifikasi penting dari masalah nilai batas adalah kehomogenan syarat batas. Apabila nilai batas $y_0$dan y_1 sama dengan nol, maka disebut syarat batas homogen dan bila $y_0$dan y_1 tidak sama dengan nol, maka disebut syarat batas nonhomogen (Boyce dan Prima, 2009).

Contoh, persamaan dengan syarat batas nonhomogen diberikan sebagai berikut;

$$\frac{\partial u\ (x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u\ (x,t)}{\partial x^2} - u(x,t) \qquad (2.2)$$

dengan syarat batas

$$u(0,t) = y_0 = 1, \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = y_1 = 0.$$

Karena nilai dari y_0 tidak sama dengan nol sedangkan nilai dari y_1 sama dengan nol maka persamaan (2.2) memiliki syarat batas yang non homogen.

Contoh syarat batas homogen yaitu :

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - \Phi^2 v(x,t) \qquad (2.3)$$

dengan nilai batas $v(x,t)$ adalah

$$v(0,t) = y_0 = 0, \frac{\partial v}{\partial x}(L,t) = y_1 = 0 \qquad (2.4)$$

Karena nilai dari $y_0 = 0$ dan nilai dari $y_1 = 0$ maka persamaan (2.3) memiliki syarat batas homogen.

Selain klasifikasi masalah syarat batas homogen dan nonhomogen terdapat tiga bentuk syarat batas yaitu ;

1. Syarat batas *"Dirichlet"*

   Menurut Straus syarat batas *Dirichlet* dapat dinyatakan sebagai berikut :

   $$u(0,t) = g(t) \quad \text{dan} \quad u(L,t) = h(t)$$

2. Syarat batas *"Neumann"*

   Menurut Straus syarat batas *Neumann*dapat dinyatakan sebagai berikut :

   $$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = g(t) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = h(t)$$

3. Syarat batas campuran

   Menurut Straus syarat batas campuran dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$u(0,t) = g(t) \quad \text{dan} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = h(t)$$

2.3Metode Pemisahan Variabel

Metode Pemisahan Variabel adalah teknik klasik yang efektif untuk menyelesaikan beberapa tipe dari persamaan diferensial parsial. Metode ini menggunakan penggantian persamaan diferensial parsial dengan seperangkat persamaan diferensial biasa, yang harus diselesaikan sesuai dengan kondisi awal dan syarat batas yang di berikan (Boyce dan Prima ,2009).

Metode Pemisahan variabel tidak dapat langsung menyelesaikan persamaan dengan syarat batas nonhomogen. Oleh karena itu, harus dilakukan suatu trasformasi persamaan menjadi kombinasi dari 2 fungsi linier.

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x) \tag{2.5}$$

dimana $v(x,t)$ merupakan fungsi baru yang tak diketahui dan $w(x)$ merupakan fungsi baru yang dipilih dengan tujuan untuk mempertahankan kenonhomogenan syarat batas dari persamaan. Fungsi $w(x)$ akan mengakibatkan fungsi $v(x,t)$ memiliki syarat batas homogen sehingga dapat diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel(Straus, 2010).

2.3.1Penyelesaian Metode Pemisahan Variabel

Persamaan dengan syarat batas homogen didefinisikan sebagai berikut ;

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{2.8}$$

dengan syarat batas

$$u(0,t) = 0 \qquad \text{dan} \qquad u(L,t) = 0 \tag{2.9}$$

Untuk menentukan penyelesaian $v(x,t)$ pertama diasumsikan $v(x,t) = F(x)T(t)$. selanjutnya dilakukan proses subtitusi bentuk diatas ke persamaan diferensial kemudian dipisahkan antara variabel x dan variabel t. sehingga diperoleh dua fungsi persamaan diferensial biasa (Wazwaz, 2009)

$$v(x,t) = F(x) \cdot T(t) \tag{2.10}$$

Kemudian diturunkan persamaan (2.10) yang bergantung pada t dan dua kali bergantung pada x kemudian didapatkan

$$\begin{aligned} v_t &= F(x)T_t(t), \\ v_{xx}(x,t) &= F_{xx}(x)T(t), \end{aligned} \tag{2.11}$$

Selanjutnya subtitusikan (2.11) ke persamaan (2.10)

$$F(x)T_t(t) \ = k\, F_{xx}(x)T(t) \tag{2.12}$$

Kemudian, bagi kedua ruas dengan $F(x)T(t)$ sehingga diperoleh

$$\frac{T_t(t)}{T(t)} = \frac{F_{xx}(x)}{F(x)}. \tag{2.13}$$

Maka, didapatkan pada ruas kiri persamaan (2.13) bergantung pada t dan pada ruas kanan persamaan (2.13) bergantung pada x. Selanjutnya pilih $-\lambda^2$untuk mendapatkan solusi trivial.

$$\frac{T_t(t)}{T(t)} = \frac{F_{xx}(x)}{F(x)} = -\lambda^2$$

Selanjutnya didapatkan

$$T_t(t) + k\, \lambda^2 T(t) = 0,$$

$$F_{xx}(x) + \lambda^2 F(x) = 0.$$

Pertama, selesaikan

$$T_t(t) + k\,\lambda^2 T(t) = 0, \tag{2.14}$$

Dengan menggunakan kaidah penyelesaian PDB orde satu maka, didapatkan solusi umum dari $T(t)$ adalah

$$T(t) = Ce^{-k\lambda^2 t} \tag{2.15}$$

Dimana C adalah konstanta.

Kedua, selesaikan

$$F_{xx}(x) + \lambda^2 F(x) = 0. \tag{2.16}$$

Persamaan (2.14) merupakan persamaan diferensial biasa linier ordo dua. Sehingga untuk menyelesaikan persamaan tersebut dapat siselesaikan menggunakan metode persamaan karakteristik. Ada 3 kasus untuk persamaan karakteristik yaitu (Zauderer, 2006)

1. Ketika $\lambda < 0$

   Jika $\lambda < 0$ maka persamaan karakterisktik dengan

$$m^2 - \lambda = 0$$

$$m_{1,2} = \pm\lambda$$

   Dimana

$$m_1 = \sqrt{\lambda}\text{dan}m_2 = \sqrt{-\lambda} \qquad \text{(memiliki akar real berbeda)}$$

   Sehingga solusi umumnya adalah

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda x}} + C_2 e^{-\lambda x}$$

2. Ketika $\lambda = 0$

   Jika $\lambda = 0$ maka persamaan karakterisktik dengan

$$m^2 - \lambda = 0$$

$$m^2 - 0 = 0$$

$$m_{1,2} = \pm 0$$

Dimana

$m_1 = \sqrt{0}$dan$m_2 = \sqrt{-0}$ (memiliki akar real kembar)

Sehingga solusinya adalah

$$X(x) = C_1 + xC_2$$

3. Ketika $\lambda > 0$

Jika $\lambda >$ 0 maka persamaan karakterisktik dengan

$$m^2 + \lambda = 0$$

dimana

$m_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$ (Memiliki akar kompleks)

Sehingga solusinya adalah

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}x$$

Dari ketiga kasus diatas solusi umum dari $F(x)$ adalah

$$F(x) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\text{x}$$

Karena memiliki akar yang berbentuk kompleks. Sehingga kita dapat solusi $F(x)$ adalah

$$F(x) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda^2}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda^2}x$$

Maka, didapatkan solusi $F(x)$ adalah

$$F(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) \qquad (2.17)$$

Selanjutnya, subtitusi syarat batas (2.9) untuk mencari nilai dari A, B dan λ. Didapatkan

$$F(0)T(0) = 0,$$
$$F(L)T(0) = 0 \tag{2.18}$$

Sehinngga menghasilkan nilai

$$F(0) = 0,$$
$$F(l) = 0 \tag{2.19}$$

Menggunakan $F(0) = 0$ maka, berdasarkan persamaan (2.17)

$$A = 0$$

Persamaan (217) manjadi

$$F(x) = B\sin(\lambda x)$$

2.3.2Masalah *Sturm-Lioville*

Banyak permasalaha fisika dan teknik yang harus diselesaikan menggunakan persamaan diferensial parsial orde dua menggunakan syarat batas. Permasalahan ini disebut dengan masalah nilai eigen *Sturm-Lioville*(Henner dkk.,2013).

Penyelesaian persamaan diferensial parsial orde dua yang diselesaikan menggunakan masalah nilai eigen *Sturm-Lioville*ini berlaku untuk semua macam syarat batas. Bentuk solusi yang sesuai untuk semua syarat batas adalah sebagai berikut

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, \phi(x)$$

Dimana $\phi(x)$ adalah fungsi eigen.

Kooefisien A_n didefinisikan sebagai

$$A_n = \frac{\int_x^L f(x)\phi(x)dx}{\int_x^L \phi(x)^2} \qquad n = 1,2,3 \ldots$$

Dimana $f(x)$ adalah nilai awal dari persamaan diferensial orde duaHenner dkk.,2013).

2.4Kajian Al-qur'an

Allah berfirman dala al-qur'an surat An-Nur ayat 43artinya;

" Tidaklah kamu melihat bahwa Allah mengarak awan, kemudian mengumpulkan antara (bagian-bagian)nya, kemudian menjadikannya bertindih-tindih, maka kelihatanlah olehmu hujan keluar dari celah-celahnya dan Allah (juga) menurunkan (butiran-butiran) es dari langit, (yaitu) dari (gumpalan-gumpalan awan seperti) gunung-gunung, maka ditimpakan-Nya (butiran-butiran) es itu kepada siapa yang dikehendaki-Nya dan dipalingkan-Nya dari siapa yang dikehendaki-Nya. Kilauan kilat awan itu hampir-hampir menghilangkan penglihatan"

Allah SWT pemilik langit dan bumi, Allah maha pnguasa atas kedunya. Allah berhak menciptakan atau mematikan. Allah melakukan segala sesuatu sesuai dengan kehendak-NYA karena memang itu kekuasaan-NYA. Salah satu wujud kekuasaan Allah adalah siklus air hujan. Hujan merupakan anugerah yang diberikan Allah SWT bagi semua makhluk di alam semesta. Tetesan air yang turun dari langit menjadi sumber kehidupan bagi semua makhluk hidup. Berkat kekuasaan dari Allah, setiap saat miliaran liter air berpindah dari lautan menuju atmosfer lalu kembali lagi menuju daratan. Kehidupan pun bergantung pada siklus Hidrologi ini.

Proses terjadinya hujan terbagi menjadi 5 fase pembentukan yaitu, Fase pertama, Allah menggerakkan awan. Fase kedua, Allah mengumpulkan ke bagian bagiannya. Fase ketiga, Allah menjadikannya bertindih tindih. Fase keempat, maka kelihatan olehmu hujan keluar dari celahnya. Fase Kelima, Allah menurunkan butiran es dari langit. Allah menurunkan hujan kepada suatu kaum hanya sesuai aturan dan kehendak Allah yang bahaya dan manfaatnya hanya diketahui oleh Allah semata (Shihab,2002).

Ilmu pengetahuan terus berkembang beriringan dengan kemajuan tekhnologi yang ada oleh karena itu bekembang pula penelitian mengenai proses turunya hujan. Dalam penelitiannya Muharrom (2008) mengerucutkan kelima fase ini menjadi tiga fase yaitu Fase evaporasi dimana bahan baku pembuat hujan baik dari air laut atau dari tanah akan naik ke udara. Fase kondensasi dimana bahan baku pembuat hujan akan bereaksi secara kimiawi diudara untuk membentuk hujan. Fase Hujan dimana hujan turun berbentuk air sebagai hasil dari kondensasi yang terjadi.

Hujan turun bukan hanya semata mata menjadi suatu fenomena alam sebaliknya Allah menurunkan hujan dengan berbagai macam manfaatnya. Allah SWT menurunkan hujan dan udara dingin dari langit melalui awan tebal yang saling bertumpuk laksana gunung. Allah SWT menurunkan hujan kepada siapa saja yang ia kehendaki sebagai rahmat untuk mereka, mencegahnya dari siapa saja yang ia kehendaki, dan menunda hujan terhadap siapa pun yang ia kehendaki sebagai bentuk siksa atau rahmat.

Allah meletakkan suatu proses kimia yang sangat besar dan sangat berbahaya pada tempat yang sangat tinggi. Proses kimia ini dapat menciptakan kilatan cahaya yang sangat besar dimana manusia tidak akan kuat menahannya, hal ini menunjukkan betapa Allah mencitakan segala sesuatu begitu sempurna menurut aturan dan kehendaknya. Allah meletakkan proses ini agar manusia tak dapat menjangkaunya. Hal ini merupakan suatu bentuk kekuasaan Allah sehingga dapat membuat manusia beriman pada-Nya (Shihab,2002).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Solusi Analitik Persamaan Reaksi Difusi

Subbab ini akan mengkaji mengenai solusi persamaan diferensial parsial persamaan reaksi difusi secara analitik menggunakan metode pemisahan variabel. Persamaan yang diberikan merupakan persamaan reaksi difusi yang memiliki syarat batas nonhomogen (White & Subramanian, 2010:368) yaitu;

$$\frac{\partial c_A(z,t_1)}{\partial t_1} = D_{AB}\frac{\partial^2 c_A(z,t_1)}{\partial z^2} - kc_A(z,t_1) \tag{3.1}$$

dengan kondisi awal

$$c_A(z,0) = 0 \tag{3.2}$$

dan Syarat Batas

$$c_A(0,t_1) = 0.01 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial c_A}{\partial z}(0.1,t_1) = 0 \tag{3.4}$$

Keterangan :

$c_A(z,t_1)$	= Konsentrasi dari zat A (gas) (mol/m^3)
D_{AB}	= Koofisien difusi dari A ke B $(2 \cdot 10^{-9} m^2/s)$
z	= Jarak atau lintasan (meter)
t_1	= Waktu (detik)
k	= Laju Konstanta orde pertama $(2 \cdot 10^{-7}/s)$
L	= Ketinggian Wadah (10 cm) atau (0.1 m)
c_{A0}	= Konsentrasi zat A pada saat $z = 0$ yaitu 0.01 mol/m^3

Langkah Pertama,

Melakukan penskalaan pada persamaan (3.1) dengan tujuan mengurangi jumlah parameter dan mempermudah perhitungan solusi analitik. Penskalaan persamaan (3.1) menggunakan parameter sebagai berikut :

$$u(x,t) = \frac{c_A(z,t_1)}{c_{A0}}; \qquad x = \frac{z}{L}; \qquad t = \frac{D_{AB}t_1}{L^2}$$

Atau (3.5)

$$c_A(z,t_1) = u(x(z),t(t_1))c_{A0}; \qquad x(z) = \frac{z}{L}; \qquad t(t_1) = \frac{D_{AB}t_1}{L^2}$$

1. Penskalaan pada persamaan (3.1)

Diketahui

$$\frac{\partial c_A(z,t_1)}{\partial t_1} = D_{AB}\frac{\partial^2 c_A(z,t_1)}{\partial z^2} - kc_A(z,t_1)$$

Subtitusi parameter yang diketahui pada persamaan (3.5) ke persamaan (3.1)

$$\frac{\partial u\big(x(z),t(t_1)\big)C_{A0}}{\partial t_1} = D_{AB}\frac{\partial^2 u\big(x(z),t(t_1)\big)c_{A0}}{\partial z^2} - ku(x,t)c_{A0}$$

$$c_{A0}\frac{\partial u\big(x(z),t(t_1)\big)}{\partial t}\frac{dt}{dt_1} = D_{AB}c_{A0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u\big(x(z),t(t_1)\big)}{\partial z}\right) - ku(x,t)c_{A0}$$

$$c_{A0}\frac{\partial u\big(x(z),t(t_1)\big)}{\partial t}\frac{D_{AB}}{L^2} = D_{AB}c_{A0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u\big(x(z),t(t_1)\big)}{\partial x}\frac{dx}{dz}\right) - ku(x,t)c_{A0}$$

$$\frac{c_{A0}D_{AB}}{L^2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_{AB}c_{A0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{1}{L}\right) - ku(x,t)c_{A0}$$

$$\frac{c_{A0}D_{AB}}{L^2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{D_{AB}c_{A0}}{L}\frac{\partial^2 u\big(x(z),t(t_1)\big)}{\partial z\partial x} - ku(x,t)c_{A0}$$

$$\frac{c_{A0}D_{AB}}{L^2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{D_{AB}c_{A0}}{L}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u\big(x(z),t(t_1)\big)}{\partial z}\right) - ku(x,t)c_{A0}$$

$$\frac{c_{A0}D_{AB}}{L^2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{D_{AB}c_{A0}}{L}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u\big(x(z),t(t_1)\big)}{\partial x}\frac{dx}{dz}\right) - ku(x,t)c_{A0}$$

$$\frac{c_{A0}D_{AB}}{L^2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{D_{AB}c_{A0}}{L}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{1}{L}\right) - ku(x,t)$$

$$c_{A0}\frac{c_{A0}D_{AB}}{L^2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{D_{AB}c_{A0}}{L^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - ku(x,t)c_{A0}$$

Kemudian, sederhanakan persamaan persamaan dengan mengalikan kedua ruas dengan $\frac{L^2}{c_{A0}D_{AB}}$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{kL^2}{D_{AB}}u(x,t)$$

Selanjutnya, subtitusi nilai dari k, L, D_{AB}

$$\frac{kL^2}{D_{AB}} = \frac{2.10^{-7}(0.1)^2}{2.10^{-9}} = 1$$

didapatkan penskalaan persamaan (3.1) adalah

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - u(x,t)$$

2. Penskalaan pada kondisi awal pada persaman (3.2)

Diketahui

$$c_A(z,0) = 0$$

Subtitusi parameter (3.5)

$$u(x,0) = 0$$

3. Penskalaan pada syarat batas pertama pada persamaan (3.3)

Diketahui

$$c_A(0,t_1) = 0$$

Subtitusi parameter (3.5)

$$c_{A0}u(0,t) = c_{A0}$$

$$u(0,t) = \frac{c_{A0}}{c_{A0}}$$

$$u(0,t) = 1$$

4. Penskalaan pada syarat batas kedua pada persamaan (3.4)

Diketahui

$$\frac{\partial c_{A0}(0.1, t_1)}{\partial z} = 0$$

Subtitusi parameter pada persamaan (3.5)

$$\left.\frac{\partial c_{A0}(0.1, t_1)}{\partial z}\right|_{z=0.1} = 0$$

$$c_{A0}\frac{\partial}{\partial z}u\big(x(z), t(t_1)\big)\Big|_{z=0.1} = 0$$

$$c_{A0}\frac{\partial}{\partial x}u(x(z), t(t_1))\left.\frac{dx}{dz}\right|_{z=0.1} = 0$$

$$c_{A0}\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x}u(x(z), t(t_1))\Big|_{z=0.1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x(z), t(t_1))\Big|_{z=0.1} = 0$$

Diketahui bahwa

$$x(z) = \frac{z}{L} = \frac{0.1}{0.1} = 1$$

Maka, didapakan

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0$$

Sehingga didapatkan penskalaan dari persamaan reaksi difusi adalah

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - u(x,t) \tag{3.6}$$

dengan kondisi awal

$$u(x,0) = 0 \tag{3.7}$$

dan syarat batas

$$u(0,t) = 1 \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \tag{3.9}$$

Langkah kedua, Mentransformasi hasil penskalaan persaamaan reaksi difusi.

Menurut White (2010) metode pemisahan variabel tidak dapat secara langsung diterapkan pada persamaan yang memiliki syarat batas nonhomogen. Metode pemisahan variabel mengharuskan adanya pentransformasian persamaan menjadi suatu bentuk jumlah dari dua fungsi. Fungsi pembantu $w(x)$ dan fungsi baru $v(x,t)$. Pentransformasian persamaan sebagai berikut;

$$u(x,t) = 0$$

$$(v+w)_t = (v+w)_{xx} - (v+w) \tag{3.10}$$

1. Subtitusi persamaan (3.10)pada persamaan (3.6) didapatkan

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{d^2 w}{dx^2} - v(x,t) - w(x)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{d^2 w}{dx^2} - v(x,t) - w(x)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v(x,t) + \frac{d^2 w}{dx^2} - w(x) \tag{3.11}$$

Untuk memperoleh persamaan yang diinginkan maka, dibutuhkan syarat dimana

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - w(x) = 0 \tag{3.12}$$

2. Subtitusi nilai awal pada transformasi (3.10) didapatkan

$$u(x,0) = v(x,0) + w(x)$$

$$v(x,0) = -\,w(x) \tag{3.13}$$

3. subtitusi syarat bataspertama pada transformasi (3.10) didapatkan

$$u(0,t) = 1$$

$$v(0,t) + w(0) = 1$$

$$v(0,t) = 1 - w(0) \tag{3.14}$$

4. subtitusi syarat batas kedua pada transformasi (3.10) didapatkan

$$u_x(0,t) = 1$$

$$v_x(1,t) + w'(1) = 1$$

$$v_x = 1 - w'(x) \tag{3.15}$$

Disimpulkan dari pensubtitusian persamaan diatas bahwa, persamaan (3.12)-(3.15) merupakan syarat yang harus terpenuhi untuk memperoleh solusi analitik fungsi $u(x,t)$ menggunakan metode pemisahan variabel.

Langkah Ketiga, Mencari solusi khusus untuk fungsi $w(x)$.

Diketahui

$$\frac{d^2w(x)}{dx} - w(x) = 0$$

Dengan syarat batas

$$w(0) = 1 \tag{3.16}$$
$$w'(1) = 0 \tag{3.17}$$

Menggunakan metode persamaan karakteristik. Misalkan $w = e^{St}$diperoleh

$$\frac{d^2w}{dx^2} = S^2e^{St}$$

Subtitusi nilai pada persaman $w(x)$ diperoleh

$$S^2e^{St} - e^{St}$$

$$e^{St}(S^2 - 1) = 0$$

Jika $e^{St} \neq 0$ maka,

$$(S^2 - 1) = 0$$

$$S^2 = 1$$

$$S = \pm 1$$

Sehingga, didapatkan S memiliki akar real berbeda. Menurut kaidah persamaan karakteristik maka, solusi umum persamaan $w(x)$ adalah

$$w(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Selanjutnya untuk mencari solusi khusus dari persamaan $w(x)$ cari nilai C_1 dan C_2 menggunakan syarat batas yang diberikan.

- Subtitusi syarat batas pertama pada persaman (3.16)

$$w(0) = C_1 e^0 + C_2 e^{-0}$$

$$1 = C_1 + C_2$$

$$C_1 = (1 - C_2)$$

- Subtitusi syarat batas kedua pada persaman (3.17)

$$w'(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$w'(1) = C_1 e^1 + C_2 e^{-1}$$

$$w(1) = C_1 e^1 - C_2 e^{-1}$$

$$0 = C_1 e^1 - C_2 e^{-1}$$

diketahui nilai C_1 adalah $1 - C_2$, didapatkan

$$0 = (1 - C_2)e^1 - C_2 e^{-1}$$

$$0 = e^1 - C_2 e^1 - C_2 e^{-1}$$

$$0 = e^1 - C_2(e^1 + e^{-1})$$

$$C_2 = \frac{e^1}{e^1 + e^{-1}}$$

$$C_2 = \frac{e^2}{e^2+1}$$

Sehingga, didapatkan C_1

$$C_1 = 1 - C_2$$

$$C_1 = 1 - \frac{e^2}{e^2+1}$$

dengan mensubtitusi nilai C_1 dan C_2 maka, didapatkan solusi khusus untuk $w(x)$ adalah

$$w(x) = \left(1 - \frac{e^2}{e^2+1}\right)e^{x} + \left(\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^{-x} \tag{3.18}$$

Dengan diketahui solusi analitik dari $w(x)$ maka, untuk memenuhi syarat transformasi pada persamaan (3.11)-(3.14) subtitusi fungsi $w(x)$. Sehingga, didapatkan fungsi $v(x,t)$ adalah

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - v(x,t) \tag{3.19}$$

Nilai awal fungsi $v(x,t)$ adalah

$$v(x,0) = -\left(\left(1 - \frac{e^2}{e^2+1}\right)e^{x} + \left(\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^{-x}\right) \tag{3.20}$$

Syarat batas $v(x,t)$ adalah

$$v(0,t) = 0 \tag{3.21}$$

$$v_x(1,t) = 0 \tag{3.22}$$

Langkah keempat, Menyelesaikan fungsi $v(x,t)$ yang memiliki syarat batas homogen dengan menggunakan metode pemisahan variabel.

Persamaan (3.19) merupakan persamaan diferensial parsial yang memiliki syarat batas homogen. Persamaan (3.19) akan diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel. Adapun langkah – langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Pemisahan variabel bebas$x$ dan t pada persaman (3.19)

Misalkan persamaan (3.15)

$$v(x,t) = X(x)\,T(t) \tag{3.23}$$

subtitusi permisalan (3.23) ke persamaan (3.19) sebagai bentuk diferensial yang bergantung pada variabel x dan t

$$X(x)T'(t) = X''(x)\,T(t) - X(x)\,T(t) \tag{3.24}$$

sederhanakan dengan membagi persamaan (3.24) dengan $X(x)T(t)$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} - 1$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{3.25}$$

Misalkan persamaan (3.25) dengan $-\lambda^2$. Pemisalan persamaan (3.22) dengan $-\lambda^2$ bertujuan utuk memperoleh suatu solusi tak nol atau non trivial dari persamaan (3.19).

$$\frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

Maka, didapatkan persamaan diferensial biasa yang bergantung pada masing-masing variabel x dan t

$$\frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = -\lambda^2 \tag{3.26}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \tag{3.27}$$

2. Menyelesaikan persamaan (3.27) untuk memperoleh solusi umum dari persamaan diferensial biasa yang bergantung pada variabel bebas x

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

kali kedua ruas dengan $X(x)$

$$X''(x) = -\lambda^2 X(x)$$

tambah kedua ruas dengan $\lambda^2 X(x)$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \tag{3.28}$$

Sehingga, didapatkan persamaan (3.28) adalah persamaan diferensial biasa ordo dua. Penyelesaian persamaan (3.28) dapat diselesaikan meggunakan metode persamaan karakterisik yaitu;

$$m^2 + \lambda^2 = 0$$

$$m^2 = -\lambda^2$$

$$m = \pm\sqrt{-\lambda^2}$$

Maka, nilai dari $m_{1,2}$adalah

$$m_1 = i\lambda \qquad \text{dan} \qquad m_2 = -i\lambda$$

Karena, $m_{1,2}$ memiliki akar yang kompleks maka solusi umum untuk persamaan (3.25) adalah

$$X(x) = C_1 e^{-i\,\lambda} + C_2 e^{i\,\lambda}$$

Menggunakan identitas euler (boyce & Prima,2019) didapatkan

$$\begin{aligned} e^{-i\lambda} &= \cos(\lambda x) - i\ \sin(\lambda x) \\ e^{i\lambda} &= \cos(\lambda x) + i\ \sin(\lambda x) \end{aligned} \tag{3.29}$$

subtitusi nilai $e^{-i\lambda}$ dan $e^{i\lambda}$ pada persamaan (3.29)

$$X(x) = C_2(\cos(\lambda x) - i\sin(\lambda x)) + C_3(\cos(\lambda x) - i\sin(\lambda x))$$

$$= (C_2 + C_3)\,(\cos(\lambda x)) + i(C_2 + C_3)(\sin(\lambda x))$$

Maka, didapatkan solusi persamaan (3.25)

$$X(x) = C_4 \sin\lambda x + C_5 \cos\ \lambda x \tag{3.30}$$

3. Mencari nilai C_4 , C_5 dan λ pada persamaa (3.30) dengan cara mensubtitusi syarat batas dari persamaan (3.19).

   Diketahui syarat batas persamaan (3.19) adalah

$$X(0)T(0) = 0 \tag{3.31}$$

$$X'(1)T(1) = 0 \tag{3.32}$$

Pertama subtitusi syarat batas (3.31) ke persamaan (3.30) didapatkan

$$X(0) = C_4 \sin\lambda x + C_5 \cos\lambda x$$

$$= C_4 \sin\lambda\, 0 + C_5 \cos\lambda\, 0$$

$$0 = C_5$$

Sehingga diperoleh $C_5 = 0$. Dengan demikian diperoleh solusi umum menjadi

$$X(x) = C_4 \sin(\lambda x)$$

Kedua subtitusi syarat batas kedua (3.32) ke persamaan (3.30) dengan diketahui nilai $C_5 = 0$

$$X'(1) = C_4 \sin(\lambda x)$$

$$X(1) = C_4\lambda \cos(\lambda x)$$

$$0 = C_4\lambda \cos(\lambda x)$$

Dengan begitu dapat di pilih untuk $C_4\lambda = 0$ atau $\cos(\lambda x) = 0$. Jika dipilih untuk untuk $C_4\lambda = 0$ maka, akan diperoleh solusi non trivial yang mengakibatkan solusi adalah nol. Maka, dipilih untuk $C_4\lambda = 1$ sebagai konstanta sembarang dan dipilh $\cos(\lambda x) = 0$ sehingga didapatkan

$$\cos\lambda = 0$$

maka, diperoleh

$$\lambda = \frac{1}{2}(2n-1)\pi \qquad\qquad n = 1,2,3 \ldots$$

sehingga solusi khusus untuk $X_n(x)$ adalah

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi x\right) \tag{3.33}$$

4. Menyelesaikan persamaan (3.26) untuk memperoleh solusi umum dari persamaan diferensial biasa yang bergantung pada variabel bebas t

Diketahui sebelumnya bahwa λ adalaah $\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)$ maka didapatkan

$$\frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = -\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)^2$$

kalikan kedua ruas dengan $T(t)$

$$T'(t) + 1 = -\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)^2 T(t)$$

kurangkan kedua ruas dengan 1 diperoleh

$$T'(t) = -1 - \left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)^2 T(t)$$

atau dapat ditulis menjadi

$$\frac{dT}{dt} = -1 - \left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)^2 T(t)$$

bagi kedua ruas dengan T

$$\frac{1}{T}dT = -1 - \left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)^2 dt$$

integralkan kedua ruas

$$\int \frac{1}{T}\, dT = \int -\left(1 + \left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)^2\right) dt$$

Maka, didapatkan

$$\ln T = -\left(1 + \left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)^2\right) t + \ln C$$

$$T = Ce^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)^2\right)t + C}$$

Sehingga, didapatkan solusi umum dari $T(t)$ adalah

$$T_n(t) = C_1 e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)^2\right)\mathrm{t}} \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{3.34}$$

5. Mencari solusi khusus persamaan $v(x,t)$

$$v_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$$

Subtitusi nilai $X_n(x)$ dan $T_n(t)$ untuk memperoleh solusi khusus $v(x,t)$

$$v_n(x,t) = C \sin\left(\frac{1}{2}(2\mathrm{n}-1)\pi x\right) e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)^2\right)\mathrm{t}} \tag{3.35}$$

Berdasarkan Prinsip superposisi atau prinsip linieritas bahwa kombinasi linier dari suatu persamaan diferensial yang linier dan homogen adalah juga merupakan solusi (Kreyzig, 2006). Maka, didapatkan solusi untuk $v(x,t)$ adalah

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C \sin\left(\frac{1}{2}(2\mathrm{n}-1)\pi x\right) e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)^2\right)\mathrm{t}} \tag{3.36}$$

Selanjutnya subtitusi nilai awal untuk mencari nilai C_n

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{1}{2}(2\mathrm{n}-1)\pi x\right) e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)^2\right)\mathrm{t}}$$

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{1}{2}(2\text{n}-1)\pi x\right)$$

$$-\left(\left(1-\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^x + \left(\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^{-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{1}{2}(2\text{n}-1)\pi x\right)$$

6. Mencari nilai koofisien C_n

Berdasarkan teorema masalah *Sturm-Lioville* yaitu, untuk setiap masalah persamaaan diferensial parsial yang memiliki masalah dengan syarat batas(Henner,2013), nilai koofisien dapat di cari dengan menggunakan rumus

$$C_n = \frac{\int_x^L f(x)\phi(x)dx}{\int_x^L \phi(x)^2 dx} \qquad n = 1,2,3 \ldots$$

dimana $f(x) = u(x,0)$ dan $\phi(x) = \sin\left(\frac{1}{2}(2\text{n}-1)\pi x\right)$ didapatkan

$$C_n = \frac{\int_0^1 -\left(\left(1-\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^x + \left(\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^{-x}\right)\sin\left(\frac{1}{2}(2\text{n}-1)\pi x\right)dx}{\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{2}(2\text{n}-1)\pi x\right)^2 dx}$$

Untuk menyelesaikan nilai C_n maka, dilakukan pemisalan berupa

$$k_1 = \int_0^1 -\left(\left(1-\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^x + \left(\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^{-x}\right)\sin\left(\frac{1}{2}(2\text{n}-1)\pi x\right)dx$$

Dan

$$k_2 = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{2}(2\text{n}-1)\pi x\right)^2$$

Selanjuntya

- Menyelesaikan k_1

$$k_1 = \int_0^1 -\left(\left(1-\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^x + \left(\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^{-x}\right)\sin\left(\frac{1}{2}(2\text{n}-1)\pi x\right)dx$$

Penyelesaian k_1

$$k_1 = \int_0^1 \left(\left(1 - \frac{e^2}{e^2+1}\right)e^x + \left(\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^{-x}\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)dx$$

Atau dapat ditulis menjadi

$$k_1 = \int_0^1 \left(\left(1 - \frac{e^2}{e^2+1}\right)e^x + \frac{e^{2-x}}{e^2+1}\right)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)dx$$

Menggunakan sifat kelinieran solusi Persamaan dapat ditulis menjadi

$$k_1 = \frac{1}{e^2+1}\int_0^1 (e^x + e^{2-x})\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)dx$$

$$k_1 = \frac{1}{e^2+1}\int_0^1 e^{-x}(e^{2x} + e^2)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)dx$$

Kemudian, Misalkan Persamaan dengan

$$u = \frac{x}{2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \rightarrow dx = 2\,du$$

Subtitusi Permisalan u pada persamaan didapatkan

$$k_1 = \frac{1}{e^2+1}\int_0^1 e^{-x}(e^{2x} + e^2)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)dx$$

$$k_1 = \frac{1}{e^2+1}\int_0^1 e^{-2u}(e^{4u} + e^2)\sin\big((2n-1)\pi u\big)2\,du$$

$$k_1 = \frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^{-2u}(e^{4u} + e^2)\sin\big((2n-1)\pi u\big)\,du$$

Selanjutnya, operasikan persamaan menggunakan sifat distributif didapatkan

$$k_1 = \frac{2}{e^2+1}\int_0^1 (e^{2u} + e^{2-2u})\sin\big((2n-1)\pi u\big)\,du$$

$$k_1 = \frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^{2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)\,du + \frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^{2-2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)\,du$$

$$k_1 = \frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^{2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)\,du + \frac{2e^2}{e^2+1}\int_0^1 e^{-2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)\,du$$

Selanjutanya, bagi persamaan menjadi dua bagian penyelesaiaan

$$\int_0^1 e^{2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)\,du \tag{3.37}$$

$$\int_0^1 e^{-2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)\,du \tag{3.38}$$

Pertama, selesaikan untuk persamaan (3.37)

$$\int_0^1 e^{2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)\,du$$

Selesaikan persamaan menggunakan aturan integral parsial yaitu

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

Misalkan

$$f = \sin\big((2n-1)\pi u\big) \qquad g' = e^{2u}$$

$$f' = \big((2n-1)\pi\big)\cos\big((2n-1)\pi u\big) \qquad g = \frac{e^{2u}}{2}$$

Subtitusi permisalan pada aturan pengintegralan didapatkan

$$\frac{e^{2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)}{2} - \int \frac{e^{2u}\big((2n-1)\pi\big)\cos\big((2n-1)\pi u\big)}{2}$$

Intergralkan kembali persamaan menggunakan aturan yang sama. Misalkan

$$f = \big((2n-1)\pi u\big)\cos\big((2n-1)\pi u\big) \qquad g' = \frac{e^{2u}}{2}$$

$$f' = -\big((2n-1)\pi\big)^2\sin\big((2n-1)\pi u\big) \qquad g = \frac{e^{2u}}{4}$$

Subtitusi permisalan pada aturan pengintegralan didapatkan

$$\frac{e^{2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)}{2}-\left(\frac{e^{2u}\big((2n-1)\pi u\big)\cos\big((2n-1)\pi u\big)}{4}-\int-\frac{e^{2u}\big((2n-1)\pi\big)^2\sin\big((2n-1)\pi u\big)}{4}\right)$$

Menggunakan sifat kelinieran solusi didapatkan

$$\frac{e^{2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)}{2}$$
$$-\left(\frac{e^{2u}\big((2n-1)\pi u\big)\cos\big((2n-1)\pi u\big)}{4}-\left(-\frac{\big((2n-1)\pi\big)^2}{4}\right)\int e^{2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)\right)$$

$$\frac{e^{2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)}{2}$$
$$-\left(\frac{e^{2u}\big((2n-1)\pi u\big)\cos\big((2n-1)\pi u\big)}{4}-\frac{4\pi^2n^2-4\pi^2n+\pi^2}{4}\int e^{2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)\right)$$

Sehingga didapatkan hasil interal persamaan (3.38) adalah

$$\frac{2e^{2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)-\pi(2n-1)e^{2u}\cos\big((2n-1)\pi u\big)}{4\pi^2n^2-4\pi^2n+\pi^2+4}$$

Kedua, selesaikan untuk persamaan (3.39)

$$\frac{2e^2}{e^2+1}\int_0^1 e^{-2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)\,du$$

Selesaikan persamaan menggunakan aturan integral parsial yaitu

$$\int fg' = fg-\int f'g$$

Misalkan

$$f=\sin\big((2n-1)\pi u\big) \qquad g'=e^{-2u}$$
$$f'=\big((2n-1)\pi\big)\cos\big((2n-1)\pi u\big) \qquad g=-\frac{e^{-2u}}{2}$$

Subtitusi permisalan pada aturan pengintegralan didapatkan

$$-\frac{e^{-2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)}{2}-\int-\frac{e^{-2u}\big((2n-1)\pi\big)\cos\big((2n-1)\pi u\big)}{2}$$

Intergralkan kembali persamaan menggunakan aturan yang sama. Misalkan

$$f=\big((2n-1)\pi\big)\cos\big((2n-1)\pi u\big) \qquad g'=-\frac{e^{2u}}{2}$$
$$f'=-\big((2n-1)\pi\big)^2\sin\big((2n-1)\pi u\big) \qquad g=\frac{e^{2u}}{4}$$

Subtitusi permisalan pada aturan pengintegralan didapatkan

$$-\frac{e^{-2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)}{2} - \left(\frac{e^{2u}\big((2n-1)\pi\big)\cos\big((2n-1)\pi u\big)}{4} - \int -\frac{e^{2u}\big((2n-1)\pi\big)^2\sin\big((2n-1)\pi u\big)}{4}\right)$$

Menggunakan sifat kelinieran solusi didapatkan

$$-\frac{e^{-2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)}{2} - \left(\frac{e^{2u}\big((2n-1)\pi\big)\cos\big((2n-1)\pi u\big)}{4} - \frac{-\big((2n-1)\pi\big)^2}{4}\int \frac{e^{2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)}{4}\right)$$

$$-\frac{e^{-2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)}{2} - \left(\frac{e^{2u}\big((2n-1)\pi\big)\cos\big((2n-1)\pi u\big)}{4} - \frac{4\pi^2n^2-4\pi^2n+\pi^2}{4}\int \frac{e^{2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)}{4}\right)$$

Sehingga, didapatkan hasil pengintegralan

$$\frac{-2e^{-2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)-\pi(2n-1)e^{-2u}\cos\big((2n-1)\pi u\big)}{4\pi^2n^2-4\pi^2n+\pi^2+4}$$

Selanjunya subtitusi hasil pengintegralan (3.37) dan (3.38) ke persamaan

$$k_1 = \frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^{2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)\,du + \frac{2e^2}{e^2+1}\int_0^1 e^{-2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)\,du$$

$$k_1 = \frac{2}{e^2+1}\left(\frac{2e^{2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)-\pi(2n-1)e^{2u}\cos\big((2n-1)\pi u\big)}{4\pi^2n^2-4\pi^2n+\pi^2+4}\right) + \frac{2e^2}{e^2+1}\left(\frac{-2e^{-2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)-\pi(2n-1)e^{-2u}\cos\big((2n-1)\pi u\big)}{4\pi^2n^2-4\pi^2n+\pi^2+4}\right)$$

$$k_1 = \frac{2\big(2e^{2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)-\pi(2n-1)e^{2u}\cos\big((2n-1)\pi u\big)\big)}{(e^2+1)(4\pi^2n^2-4\pi^2n+\pi^2+4)} - \frac{2e^2\big(2e^{-2u}\sin\big((2n-1)\pi u\big)-\pi(2n-1)e^{-2u}\cos\big((2n-1)\pi u\big)\big)}{(e^2+1)(4\pi^2n^2-4\pi^2n+\pi^2+4)}$$

Selanjunya, subtitusi permisalan dari u didapatkan

$$k_1 = \frac{2\left(2e^{2x}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) - \pi(2n-1)e^{2u}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\right)}{(e^2+1)(4\pi^2 n^2 - 4\pi^2 n + \pi^2 + 4)}$$

$$- \frac{2\left(e^2\left(-2e^{-x}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) - \pi(2n-1)e^{-x}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\right)\right)}{(e^2+1)(4\pi^2 n^2 - 4\pi^2 n + \pi^2 + 4)}$$

$$k_1 = \frac{2e^{-x}\left(2(e^x - e)(e^x + e)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) - \pi(2n-1)(e^{2x} + e^2)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right)\right)}{(e^2+1)(4\pi^2 n^2 - 4\pi^2 n + \pi^2 + 4)}$$

Subtitusi niai ketika $x = 1$

$$k_1 = \frac{2e^{-1}\left(2(e^1 - e)(e^1 + e)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) - \pi(2n-1)(e^1 + e^1)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi 1}{2}\right)\right)}{(e^2+1)(4\pi^2 n^2 - 4\pi^2 n + \pi^2 + 4)}$$

$$k_1 = \frac{2e\sin(\pi n) + e^2 + 1}{(e^2+1)(4\pi^2 n^2 - 4\pi^2 n + \pi^2 + 4)}$$

Ketika $x = 0$

$$k_1 = \frac{2e^{-0}\left(2(e^0 - e)(e^0 + e)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi 0}{2}\right) - \pi(2n-1)(e^0 + e^0)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi 0}{2}\right)\right)}{(e^2+1)(\pi^2(2n-1)^2 + 4)}$$

$$k_1 = -\frac{2\pi(2n-1)}{(e^2+1)(\pi^2(2n-1)^2 + 4)}$$

Sehingga, didapatkan hasil pengintegralan adalah

$$k_1 = -\frac{2\pi(2n-1)(2e\sin(\pi n) + e^2 + 1)}{(e^2+1)(4\pi^2 n^2 - 4\pi^2 n + \pi^2 + 4)}$$

Karena diketahui untuk setiap $\sin(\pi n) = 0$ maka, didapatkan

$$k_1 = -\frac{2\pi(2n-1)(e^2+1)}{(e^2+1)(4\pi^2 n^2 - 4\pi^2 n + \pi^2 + 4)}$$

$$k_1 = -\frac{2\pi(2n-1)}{(4\pi^2 n^2 - 4\pi^2 n + \pi^2 + 4)}$$

- Menyelesaikan k_2

$$k_2 = \int_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{2}(2\mathrm{n}-1)\pi x\right)^2$$

Atau

$$k_2 = \int_0^1 \sin^2\left(\frac{(2\text{n}-1)\pi x}{2}\right)^2$$

Misalkan

$$u = \frac{(2\text{n}-1)\pi x}{2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(2\text{n}-1)\pi}{2}$$

$$dx = \frac{2}{(2n-1)\pi} du$$

Sehingga didapat

$$k_2 = \int_0^1 \sin^2(u)^2\, dx$$

Kemudian, subtitusi dx

$$k_2 = \int_0^1 \sin^2(u)^2 \frac{2}{(2n-1)\pi} du$$

Menggunakan kelinieran solusi

$$k_2 = \frac{2}{(2n-1)\pi} \int_0^1 \sin^2(u)^2\, du$$

Menggunakan Identitas trigonometri didapat

$$k_2 = \frac{2}{(2n-1)\pi} \int_0^1 \frac{1-\cos(2u)}{2} du$$

$$k_2 = \frac{2}{(2n-1)\pi} \int_0^1 \frac{1}{2} - \frac{\cos(2u)}{2} du$$

$$k_2 = \frac{2}{(2n-1)\pi} \left(\int_0^1 \frac{1}{2}\, du - \int_0^1 \frac{\cos(2u)}{2} du \right)$$

$$k_2 = \frac{2}{(2n-1)\pi} \left(\frac{1}{2} \int_0^1 1\, du - \frac{1}{2} \int_0^1 \cos(2u)\, du \right)$$

$$k_2 = \frac{2}{(2n-1)\pi}\left(\frac{u}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(2u)\, du\right)$$

Untuk menyelesaikan pengintegralan misalkan

$$v = 2u$$

$$\frac{dv}{du} = 2$$

$$du = \frac{1}{2}\, dv$$

Sehingga didapakan

$$k_2 = \frac{2}{(2n-1)\pi}\left(\frac{u}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(v)\frac{1}{2}\, dv\right)$$

$$k_2 = \frac{2}{(2n-1)\pi}\left(\frac{u}{2} - \frac{1}{4}\int_0^1 \cos(v)\, dv\right)$$

Kemudian selesaikan integral

$$k_2 = \frac{2}{(2n-1)\pi}\left(\frac{u}{2} - \frac{1}{4}\sin(v)\right)$$

Selanjutnya subtitusi pemisalan v

$$k_2 = \frac{2}{(2n-1)\pi}\left(\frac{u}{2} - \frac{1}{4}\sin(2u)\right)$$

$$k_2 = \frac{2u}{2(2n-1)\pi} - \frac{\sin(2u)}{4(2n-1)\pi}$$

Selanjutnya subtitusi pemisalan u

$$k_2 = \frac{2\left(\frac{(2\mathrm{n}-1)\pi x}{2}\right)}{2(2n-1)\pi} - \frac{\sin\left(2\left(\frac{(2\mathrm{n}-1)\pi x}{2}\right)\right)}{4(2n-1)\pi}$$

$$k_2 = \frac{(2n-1)\pi x}{2(2n-1)\pi} - \frac{\sin((2n-1)\pi x)}{4(2n-1)\pi}$$

$$k_2 = \frac{x}{2} - \frac{\sin((2n-1)\pi x)}{4(2n-1)\pi}$$

Selanjutnya ketika $x = 0$

$$k_2 = \frac{x}{2} - \frac{\sin((2n-1)\pi x)}{4(2n-1)\pi}$$

$$k_2 = \frac{0}{2} - \frac{\sin(0)}{4(2n-1)\pi}$$

$$k_2 = 0$$

Selanjutnya ketika $x = 1$

$$k_2 = \frac{x}{2} - \frac{\sin((2n-1)\pi x)}{4(2n-1)\pi}$$

$$k_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sin((2n-1)\pi x)}{4(2n-1)\pi}$$

Karena diketahui untuk setiap $\sin(\pi n) = 0$ maka didapatkan solusi k_2 adalah

$$k_2 = \frac{1}{2}$$

Nilai dari k_1 dan k_2 sudah terselesaikan maka didapatkan untuk nilai C_n adalah

$$C_n = \frac{k_1}{k_2}$$

$$C_n = \frac{-\frac{2\pi(2n-1)}{(4\pi^2n^2-4\pi^2n+\pi^2+4)}}{\frac{1}{2}}$$

$$C_n = -\frac{2(2\pi(2n-1))}{(4\pi^2n^2 - 4\pi^2n + \pi^2 + 4)}$$

$$C_n = -\frac{4\pi(2n-1)}{(4\pi^2n^2 - 4\pi^2n + \pi^2 + 4)}$$

Dengan dimikian didapatkan solusi khusus untuk $v(x,t)$ pada persamaan (3.36) adalah

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4\pi(2n-1)}{(4\pi^2n^2 - 4\pi^2n + \pi^2 + 4)} \sin\left(\frac{1}{2}(2\mathrm{n}-1)\pi x\right) e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)^2\right)\mathrm{t}}$$

Langkah kelima, Menyelesaikan solusi khusus untuk persamaan reaksi difusi

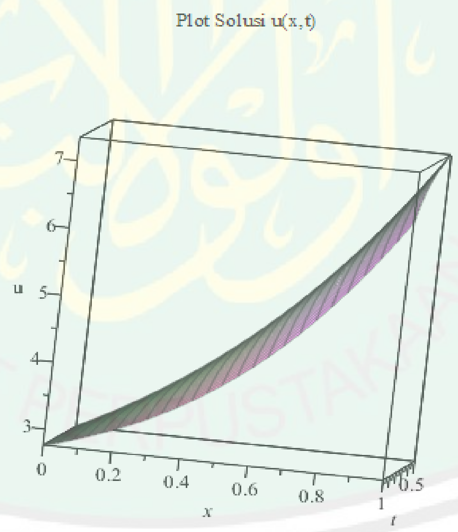
Setelah diketahui solusi khusus dari $v(x,t)$ dan $w(x,t)$ maka, dapat diketahui bahwa solusi khusus untuk $u(x,t)$ adalah

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4\pi(2-1)}{(4\pi^2 n^2 - 4\pi^2 n + \pi^2 + 4)} \sin\left(\frac{1}{2}(2\mathrm{n}-1)\pi x\right) e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)^2\right)\mathrm{t}} + \left(\left(1-\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^x + \left(\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^{-x}\right)$$

Langkah keenam, Mensimulasi persamaan reaksi difusi.

Mensimulasikan solusi persamaan reaksi difusi yang didapatkan dari penyelesaian metode pemisahan variabel dan teorema *Strum-Lioville*. Berikut diberikan plot solusi persamaan reaksi difusi



Gambar 3.1 Simulasi Persamaan Reaksi Difusi

Dari hasil solusi analitik persamaan reaksi difusi pada persamaan (3.58) didapatkan simulasi pada saat $0 < x < 1$ dan $0 < t < 0.5$ didapatkan zat u yang mengalami reaksi kimia berdifusi secara meluruh hingga menyebar sesuai dengan posisi (x) dan waktu (t).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Adapun Kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian ini adalah bahwa metode pemisahan variabel telah berhasil diterapkan dalam meyelesaikan persamaan reaksi difusi. Dari penelitian ini diperoleh solusi analitik dari persamaan reaksi difusi yaitu;

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4\pi(2-1)}{(4\pi^2 n^2 - 4\pi^2 n + \pi^2 + 4)} \sin\left(\frac{1}{2}(2\mathrm{n}-1)\pi x\right) e^{-\left(1+\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi\right)^2\right)\mathrm{t}}$$

$$+\left(\left(1-\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^x + \left(\frac{e^2}{e^2+1}\right)e^{-x}\right)$$

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, diharapkan dapat menemukan solusi dari persamaan diferensial parsial nonhomogen yang memiliki syarat batas nonhomogen meggunakan metode pemisahan variabel.

DAFTAR RUJUKAN

Boyce, W. E., DiPrima, R. C., & Meade, D. B. (1992). *Elementary differential equations and boundary value problems* . New York: Wiley.

Haberman, Richard. 2013. *Applied Partial Differential Equation with Fourier Series and Boundary Value Problems.* Fifth Edition. New Jersey, Canada

Holman.J.P. (1997). *Heat Transfer 8 th edition*. Mc Graw Hill Book Co., New York

Ingalls, Brian. 2012. *Mathematical Modelling in System Biology : An Introduction*. University of waterloo

Kreyzig. E. 2006. *Advanced Engineering Mathematics*. New York : John Wiley and Sons, Inc

Muharram, Ahmad Taufiq. 2008. Proses *Turunnya Hujan dalam Al-quran (telaah penafsiran Tantawi jauhar dalam Tafsir Jawasir Fi Tafsir Al-quran Karim).* Yogyakarta : UIN Sunan Kalijaga.

Shihab, M. Quraish. (2002). *Tafsir Al-Misbah*. Jakarta: Lentera Hati.

Strauss, W.A..2008.*Partia Differential Equation: An Introduction Second Edition*. New York: John Wiley & Sons,Inc.

Wazwaz,A,M.2009. *Partial Equation And Solitary Waves Theory*. Spinger: Berlin Heidelberg

Zauderer, E. 2006.*Partial Differential Equation of Applied Mathematics*. Edisi Ketiga. New Jersey:John Wiley & Sons, Inc

White, E Ralph and Subramanian, R Venkat. (2010). *Computational Method in Chemical Eingenerring With Maple*. Springer

LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran 1. Cek Keabsahan Solusi $v(x,t)$

restart;

>

$$a := \left(-\frac{4\,(2\,n-1)\,\pi \sin\left(\frac{1}{2}\,(2\,n-1)\,\pi\,x\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\,(2\,n-1)^2\,\pi^2\,t}\,\mathrm{e}^{-t}}{4\,\pi^2\,n^2-4\,\pi^2\,n+4+\pi^2} \right);$$

$$-\frac{4\,(2\,n-1)\,\pi \sin\left(\frac{1}{2}\,(2\,n-1)\,\pi\,x\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\,(2\,n-1)^2\,\pi^2\,t}\,\mathrm{e}^{-t}}{4\,\pi^2\,n^2-4\,\pi^2\,n+\pi^2+4}$$

$$b := \frac{\partial}{\partial t}\,a$$

$$\frac{(2\,n-1)^3\,\pi^3 \sin\left(\frac{1}{2}\,(2\,n-1)\,\pi\,x\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\,(2\,n-1)^2\,\pi^2\,t}\,\mathrm{e}^{-t}}{4\,\pi^2\,n^2-4\,\pi^2\,n+\pi^2+4} + \frac{4\,(2\,n-1)\,\pi \sin\left(\frac{1}{2}\,(2\,n-1)\,\pi\,x\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\,(2\,n-1)^2\,\pi^2\,t}\,\mathrm{e}^{-t}}{4\,\pi^2\,n^2-4\,\pi^2\,n+\pi^2+4}$$

$$c := \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,a$$

Lampiran 2. Cek Keabsahan Solusi $u(x,t)$

restart; >

$$k := \left(-\frac{4\,(2\,n-1)\,\pi \sin\left(\frac{1}{2}\,(2\,n-1)\,\pi\,x\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\,(2\,n-1)^2\,\pi^2\,t}\,\mathrm{e}^{-t}}{4\,\pi^2\,n^2-4\,\pi^2\,n+4+\pi^2} \right) + \left(\left(1+\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2+1}\right)\cdot \mathrm{e}^x + \left(\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2+1}\right)\cdot \mathrm{e}^x \right);$$

$$-\frac{4\,(2\,n-1)\,\pi \sin\left(\frac{1}{2}\,(2\,n-1)\,\pi\,x\right)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\,(2\,n-1)^2\,\pi^2\,t}\,\mathrm{e}^{-t}}{4\,\pi^2\,n^2-4\,\pi^2\,n+\pi^2+4} + \left(1+\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^2+1}\right)\mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}^2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^2+1}$$

$l := \frac{\partial}{\partial t} k$

$$\frac{(2n-1)^3 \pi^3 \sin\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi x\right) e^{-\frac{1}{4}(2n-1)^2 \pi^2 t} e^{-t}}{4\pi^2 n^2 - 4\pi^2 n + \pi^2 + 4} + \frac{4(2n-1)\pi \sin\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi x\right) e^{-\frac{1}{4}(2n-1)^2 \pi^2 t} e^{-t}}{4\pi^2 n^2 - 4\pi^2 n + \pi^2 + 4}$$

$m := \frac{\partial^2}{\partial x^2} k$

$$\frac{(2n-1)^3 \pi^3 \sin\left(\frac{1}{2}(2n-1)\pi x\right) e^{-\frac{1}{4}(2n-1)^2 \pi^2 t} e^{-t}}{4\pi^2 n^2 - 4\pi^2 n + \pi^2 + 4} + \left(1 + \frac{e^2}{e^2+1}\right) e^x + \frac{e^2 e^x}{e^2+1}$$

$z := l - (m - k)$

$$0$$

RIWAYAT HIDUP

Miya Rizkiya Ulkhak, Lahir di Kabupaten Pasuruan pada anggal 7 April 1997. Penulis Akrab di panggil Miya. Penulis tinggal di Nongkojajar, Kabupaten Pasuruan. Penulis merupakan anak terakhir dari tiga bersaudara dari pasangan bapak Samsul Ma'arif dan ibu Umi Mukaromah.

Penulis mulai menempuh pendidikan di SD Islam Sunan Drajat, Kabupaten Pasuruan. Penulis melanjutkan pendidikan tingkat SLTP di SMP Negeri 2 Kraton Pasuruan yang selanjutnya menempuh pendidikan SLTA di MA Negeri Kraton Pasuruan. Pada tahun 2015, penulis mulai menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada jurusan Matematika.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	:	Miya Rizkiya Ulkhak
NIM	:	15610126
Fakultas/Jurusan	:	Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi	:	Solusi Analitik Persamaan reaksi Difusi Menggunakan Metode Pemisahan Variable
Pembimbing I	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si
Pembimbing II	:	Dr. Elly Susanti, M.Sc

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	25 Maret 2019	Konsultasi Bab III	1.	
2	28 Mei 2019	Revisi Bab II		2.
3	13 Juni 2019	Konsultasi Agama Bab I & Bab II	3.	
4	18 Juli 2019	Revisi Bab III		4.
5	26 Juli 2019	ACC Agama Bab I & Bab II	5.	
6	27 Agustus 2019	ACC Bab I, II, III		6.
7	04 November 2019	Konsultasi Bab III & IV	7.	
8	21 November 2019	Konsultasi Agama Bab III		8.
9	21 November 2019	Konsultasi Keseluruhan	9.	
10	22 November 2019	ACC Keagamaan dan Keseluruhan		10.
11	22 November 2019	ACC Keseluruhan	11.	

Malang, 28 November 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001