SIMULASI PERGERAKAN SISTEM PENDULUM GANDA

SKRIPSI

OLEH
MOHAMMAD FIRMAN BAYUSAKTI
NIM. 15610125

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SIMULASI PERGERAKAN SISTEM PENDULUM GANDA

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
MOHAMMAD FIRMAN BAYUSAKTI
NIM. 15610125

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SIMULASI PERGERAKAN SISTEM PENDULUM GANDA

SKRIPSI

Oleh
Mohammad Firman Bayusakti
NIM. 15610125

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 4 Desember 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Heni Widayani, M.Si	Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIDT. 19901006 2018021 2 229	NIP. 19650414 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SIMULASI PERGERAKAN SISTEM PENDULUM GANDA

SKRIPSI

Oleh
Mohammad Firman Bayusakti
NIM. 15610125

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 27 Desember 2019

Penguji Utama	:	Mohammad Jamhuri, M.Si	.....
Ketua Penguji	:	Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd	.....
Sekretaris Penguji	:	Heni Widayani, M.Si	.....
Anggota Penguji	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si	.....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Mohammad Firman Bayusakti

NIM : 15610125

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Simulasi Pergerakan Sistem Pendulum Ganda

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 5 Desember 2019
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
PAJAK MEMBANGUN BANGSA
TGL. 20
13224ACF308993368
ENAM RIBU RUPIAH
6000 DJP

M. Firman Bayusakti
NIM. 15610125

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTO

Do not dwell in the past, do not dream of the future, concentrate the mind on the present moment.

"Jangan tenggelam dalam masa lalu, jangan bermimpi di masa depan, konsentrasikan pikiran pada kejadian hari ini."

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Nur Salim dan Ibu Dyah Arsanti tercinta, yang dengan sabar selalu mendo'akan dengan ikhlas, memberi semangat, pengertian yang sedalam-dalamnya, dan dukungan-dukangan yang tiada henti demi kelancaran dan kesuksesan dalam menuntut ilmu. Tak lupa kepada adik tersayang, Zelda Kurnia Laily, serta teman-teman yang juga selalu memberi semangat, dukungan, dan menemani dalam pengerjaan tugas skripsi ini agar dapat terselesaikan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Heni Widayani, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak dan ibu serta adik tercinta yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Sahabat-sahabat terbaik penulis, yang selalu menemani, membantu, dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2015 khususnya teman-teman kelas matematika C yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terima kasih atas kenangan-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai mimpi.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materil.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Amiin*.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 5 Desember 2019

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR vii

DAFTAR ISI ix

DAFTAR GAMBAR xi

DAFTAR TABEL xii

ABSTRAK xiii

ABSTRACT xiv

ملخص xv

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Tujuan Masalah 3
1.4 Manfaat Penelitian 3
1.5 Batasan Masalah 4
1.6 Metode Penelitian 4
1.7 Sistematika Penulisan 5

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Pendulum 7
2.2 Pendulum Ganda 8
2.3 Metode *Lagrange* 10
2.4 Metode Runge-Kutta Orde 4 (RK 4) 10
2.5 Metode Deret Taylor 16
2.6 Titik Kesetimbangan 17
2.7 Kajian Keagamaan 18

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Kontruksi Model Pendulum Ganda 23

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.2 Lagrangian 27
3.3 Simulasi dan Interpretasi Pendulum Ganda Menggunakan ODE 45 41
3.3.1 Simulasi $l_1 > l_2, m_1 = m_2$ di sekitar Titik Kesetimbangan 43
3.3.2 Simulasi $l_1 = l_2, m_1 > m_2$ di sekita Titik Kesetimbangan..... 49

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan 55
4.2 Saran 56

DAFTAR RUJUKAN 57

LAMPIRAN-LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2. 1 Sistem Pendulum Tunggal 7
Gambar 2. 2 Sistem Pendulum Ganda 9
Gambar 3.1. 1 Sistem Pendulum Ganda Sederhana..... 23
Gambar 3.1. 2 Sistem Pendulum Pertama..... 25
Gambar 3.1. 3 Sistem Pendulum Kedua yang dipengaruhi Pendulum Pertama 26
Gambar 3.3. a 42
Gambar 3.3. b 42
Gambar 3.3.1. a 43
Gambar 3.3.1. b 43
Gambar 3.3.1. c 44
Gambar 3.3.1. d 44
Gambar 3.3.1. e 44
Gambar 3.3.1. f 47
Gambar 3.3.1. g 47
Gambar 3.3.1. h 47
Gambar 3.3.1. i 47
Gambar 3.3.1. j 47
Gambar 3.3.2. a 49
Gambar 3.3.2. b 49
Gambar 3.3.2. c 49
Gambar 3.3.2. d 49
Gambar 3.3.2. e 50
Gambar 3.3.2. f 52
Gambar 3.3.2. g 52
Gambar 3.3.2. h 52
Gambar 3.3.2. i 52
Gambar 3.3.2. j 53

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1. 1 Notasi Variabel dan Parameter dengan satuannya 24

Tabel 3.3.1. 1 Simulasi $l_1 > l_2, m_1 = m_2$ di sekitar Titik Kesetimbangan Pertama 44

Tabel 3.3.1. 2 Simulasi $l_1 > l_2, m_1 = m_2$ di sekitar Titik Kesetimbangan Kedua 48

Tabel 3.3.2. 1 Simulasi $l_1 = l_2, m_1 > m_2$ di sekitar Titik Kesetimbangan Pertama 50

Tabel 3.3.2. 2 Simulasi $l_1 = l_2, m_1 > m_2$ di sekitar Titik Kesetimbangan Kedua 53

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Bayusakti, Mohammad Firman. 2019. **Simulasi Pergerakan Sistem Pendulum Ganda**. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Heni Widayani, M.Si. (II) Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Kata Kunci: ODE 45, Pendulum Ganda, Analisis dinamik

.

Pendulum ganda merupakan suatu sistem fisis sederhana yang dibangun dari pendulum yang terikat pada pendulum lain. Untuk membangun model pendulum ganda akan digunakan koordinat kartesius untuk mengetahui posisi pendulum saat berosilasi dan dibatasi pada ruang dua dimensi $(x, y \in \mathbb{R})$. Setelah mengetahui koordinat kartesius dari pemdulum ganda maka akan dibangun fungsi lagrangian dari pendulum ganda tersebut, di mana fumgsi lagrangian merupakan selisih antara gaya kinetik dan potensial. Selanjutnya akan dicari titik kesetimbangan dari sistem pendulum ganda tersebut dan juga matriks Jacobi untuk mengetahui apakah titik kesetimbangan bersifat stabil atau tidak. Model yang diperoleh akan disimulasikan menggunakan metode ODE 45 dengan beberapa variasi nilai parameter dan nilai awal. Hasil simulasi menunjukkan bahwa massa dan panjang setiap pendulum sangat berpengaruh terhadap gerak pendulum ganda. Sistem pendulum ganda ini juga sensitif terhadap nilai awal.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Bayusakti, Mohammad Firman. 2019. **Simulation of Double Pendulum Movement System**. Thesis. Mathematics Department. Faculty of Science and Technology. Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisor: (I) Heni Widayani, M.Si. (II) Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Keywords: ODE 45, Double Pendulum, Dynamic Analysis

A double pendulum is a simple physical system built from a pendulum that is bound to another pendulum. To construct the double pendulum model, the Cartesian coordinates will be used to determine the position of the pendulum when oscillating and limited to two-dimensional space $(x, y \in R)$. After knowing the Cartesian coordinates of the double pemdulum the Lagrange function of the double pendulum will be constructed, where the Lagrange function is the difference between the kinetic and potential forces. Furthermore, the equilibrium point of the double pendulum system and the Jacobi matrix will be searched to find out whether the equilibrium point is stable or not. The model obtained will be simulated using the ODE 45 method with a variety of parameter values and initial values. The simulation results show that the mass and length of each pendulum greatly affect the motion of the double pendulum. This double pendulum system is also sensitive to initial values.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ملخص

بيوسكتي ، محمد فيرمان. ٢٠١٩. محاكاة نظام حركة البندول المزدوج. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا ملك إبراهيم مالانج. المشرف: (أنا) هاني ويداني ، ماجستير (الثاني) د. عثمان باجالي ، ماجستير

الكلمات المفتاحية: ODE 45 ، بندول مزدوج ، تحليل ديناميكي

البندول المزدوج هو نظام مادي بسيط مبني على بندول مرتبط بندول آخر. لإنشاء نموذج البندول المزدوج ، سيتم استخدام الإحداثيات الديكارتية لتحديد موضع البندول عند التذبذب وقصره على الفضاء ثنائي الأبعاد $(x, y \in R)$. بعد معرفة الإحداثيات الديكارتية من البيدم المزدوج، سيتم بناء الوظيفة اللاغرانية للبندول المزدوج، حيث تكون الوظيفة اللاغرانية هي الفرق بين القوى الحركية والقوى المحتملة. علاوة على ذلك، سيتم البحث في نقطة التوازن في نظام البندول المزدوج ومصفوفة جاكوبي لمعرفة ما إذا كانت نقطة التوازن مستقرة أم لا. سيتم محاكاة النموذج الذي تم الحصول عليه باستخدام أسلوب ODE 45 مع مجموعة متنوعة من قيم المعلمات والقيم الأولية. تظهر نتائج المحاكاة أن كتلة وطول كل بندول يؤثران بشكل كبير على حركة البندول المزدوج. نظام البندول المزدوج حساس أيضًا للقيم الأولية.

.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Suatu fenomena dapat dinyatakan dalam suatu model matematis berupa sistem persamaan diferensial. Penerapan model matematika pada ilmu lain seperti fisika, biologi, kimia, dan lain sebagainya banyak yang berbentuk sistem persamaan diferensial biasa. Pemodelan gerak pendulum sederhana merupakan salah satu contoh penerapan konsep model matematika pada masalah fisika. Pendulum sederhana adalah benda pejal dengan satu titik massa yang digantungkan pada tali ringan yang tidak dapat mulur. Dua buah pendulum sederhana yang digabungkan dan menjadi sebuah sistem pendulum baru disebut sebagai pendulum ganda yang mana model matematika yang diperoleh akan lebih kompleks dibanding pendulum tunggal.

Sistem pendulum ganda dibangun oleh dua benda pejal yaitu B_1dan B_2 yang memiliki massa masing-masing $m_1$dan m_2. Setiap benda dihubungkan dengan tali yang kuat dan ringan yakni L_1dan L_2 dengan panjang masing masing tali adalah l_1 dan l_2. Benda B_1terpasang pada ujung tali L_1 sedangkan ujung kawat lainnya terpasang pada suatu bidang yang tetap. Sementara benda B_2 terpasang pada ujung kawat L_2 sedangkan ujung lainnya terpasang pada benda pertama (B_1). Pergerakan yang terjadi pada benda B_1dan B_2 diasumsikan hanya dipengaruhi oleh gaya gravitasi. Terdapat empat parameter yang dipengaruhi oleh gaya gravitasi yakni l_1, l_2, m_1 dan m_2. Pendulum ganda diasumsikan hanya berosilasi pada bidang vertikal dengan sudut pergerakan terhadap garis normal

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

merupakan fungsi terhadap waktu yang dinotasikan dengan $\theta_1(t)$ untuk B_1 dan $\theta_2(t)$ untuk B_2.

Penelitian yang dilakukan oleh Mukul K. Gupta (2014) membahas mengenai *chaos* pada pergerakan pendulum disimulasikan secara numerik dengan melihat pengaruh massa benda dan panjang kawat. Penelitian tersebut menyimpulkan bahwa *chaos* akan cenderung meningkat dengan penambahan massa benda dan panjang kawat dari pendulum.

Tahun 2017, Abdalftah Elbori mengkaji tentang simulasi pendulum ganda. Dari penelitian tersebut diperoleh kesimpulan bahwa pendulum ganda merupakan sistem kompleks dengan banyak asumsi sehingga apabila terdapat pengaruh gaya gesek pada pendulum maka sistem pendulum tidak lagi konservatif. Nilai awal dan percepatan gravitasi menjadi faktor yang berpengaruh signifikan pada kondisi *chaos* pada pendulum.

Dalam kasus sederhana, pemodelan gerakan pendulum biasa maupun ganda mengabaikan gaya gesekan sehingga menghasilkan gerakan yang kontinu dengan amplitudo konstan. Keadaan ini disebut dengan gerak harmonik sederhana. Akan tetapi, pada kenyataannya pendulum yang berayun akan dipengaruhi oleh gaya gesekan dengan medium. Lebih lanjut, ada pula gerakan pendulum yang dipengaruhi oleh gaya eksternal. Gaya gesekan dan gaya eksternal ini akan menentukan cepat atau lambatnya pendulum berhenti bergerak (mencapai titik kesetimbangan). Oleh karena itu, diperlukan pengkajian terhadap gerak pendulum yang meliputi efek redaman dan gaya eksternal.

Berdasarkan paparan di atas, melatarbelakangi penulis untuk membahas dan mengkaji kontruksi model dan simulasi persamaan pendulum ganda. Kemudian

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

hasil yang didapat dari kontruksi model pendulum ganda akan disimulasikan dan diamati bagaimana gejala *chaos* pada pendulum ganda dengan berbagai faktor yang mempengaruhinya. Dengan demikian, pada penelitian ini penulis mengambil judul "**Simulasi Pergerakan Sistem Pendulum Ganda**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana kontruksi model persamaan pendulum ganda sederhana?
2. Bagaimana analisa dinamik dari pergerakan pendulum ganda sederhana?
3. Bagaimana simulasi pergerakan pendulum ganda sederhana?

1.3 Tujuan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui kontruksi model persamaan pendulum ganda sederhana.
2. Untuk menganalisa dinamika pergerakan pendulum ganda sederhana.
3. Untuk mendapatkan simulasi pergerakan pendulum ganda sederhana.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan dari penelitian ini diharapkan dapat menjelaskan bagaimana kontruksi model pendulum ganda sederhana dan analisis gelombang *chaos* pendulum ganda yang diperoleh dari simulasi setelahnya, serta dapat bermafaat untuk penelitian selanjutnya yang berkaitan dengan pendulum ganda. Lebih lanjut, penelitian ini diharapkan dapat dijadikan rujukan dalam

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

pengembangan pemodelan sistem pendulum ganda yang banyak diimplementasikan di bidang robotika, teknik sipil, arsitektur, dan bidang-bidang lain.

1.5 Batasan Masalah

Agar penulisan pada penelitian ini tidak meluas dan menyimpang dari pembahasan maka perlu diberikan suatu batasan masalah. Batasan masalah pada penulisan ini sebagai berikut:

1. Bandul pendulum merupakan benda pejal dengan kepadatan yang homogen.
2. Tali / kawat pada pendulum ganda tidak mulur dan bermassa cukup ringan, sehingga massa tali dapat diabaikan pada konstruksi model matematika.
3. Pergerakan pendulum hanya dipengaruhi oleh gaya gravitasi.
4. Pergerakan pendulum terjadi di bidang datar dua dimensi, tidak ada pergerakan ke luar atau ke dalam bidang pengamatan.
5. Pendulum ganda bersifat stabil menuju titik setimbang.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini termasuk ke dalam jenis penelitian kepustakaan (*library research*). Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku, jurnal, dan referensi lain yang terkait. Adapun langkah- langkah yang digunakan penulis dalam penelitian ini secara rinci dijabarkan sebagai berikut:

1. Mempelajari dan mamahami Persamaan *Lagrange*.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. Menkontruksi model pendulum ganda dengan cara mensubtitusikan sistem koordinat dari sistem pendulum ganda ke dalam Persamaan *Lagrange.*
3. Melakukan analisa dinamik dari model matematika sistem pendulum ganda.
4. Menentukan solusi numerik dari model pendulum ganda untuk mendapatkan ilustrasi mengenai bentuk solusi dari model matematika yang sudah diperoleh.
5. Memperhatikan perilaku dari beberapa simulasi pendulum ganda.
6. Menarik kesimpulan dari semua hasil dari tahap yang telah dilakukan.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penelitian ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab akan dibagi ke dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka terdiri dari teori-teori yang dapat mendukung pembahasan. Pada penelitian ini, teori yang digunakan yaitu tentang pendulum, Deret Taylor, Metode Euler, dan Analisis Galat.

Bab III Pembahasan

Pada Bab III Pembahasan, konstruksi model matematika dari sistem pendulum ganda akan dijabarkan secara detail. Setelah itu, akan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dilanjutkan dengan analisa dinamik dari model yang telah diperoleh. Simulasi numerik akan dilakukan di bagian akhir bab ini untuk mengilustrasikan hasil analisa dinamik yang telah diperoleh. Perilaku-perilaku yang menarik yang muncul akan dikaji sehingga dapat menjadi masalah terbuka untuk topik penelitian selanjutnya.

Bab IV Penutup

Penutup berisi kesimpulan mengenai hasil dari pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

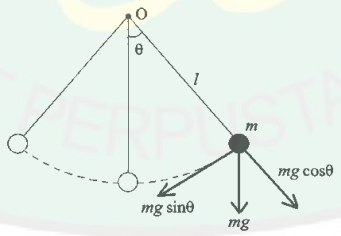
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Pendulum

Salah satu bentuk gerak osilasi adalah gerak pendulum matematis sederhana. Pendulum tersebut terdiri dari seutas tali yang dianggap tidak memiliki massa dan sebuah beban diikat di ujung bawah tali. Ujung atas tali dikaitkan pada posisi tetap (seperti paku). Beban bergantung bebas dan bergerak bolak-balik akibat pengaruh gaya gravitasi bumi. Sifat pendulum matematis sederhana adalah simpangan tidak boleh terlalu besar. Kalau simpangan sangat besar maka gaya yang bekerja pada benda tidak lagi berbanding lurus dengan simpangan. Gaya berbanding lurus simpangan hanya untuk simpangan kecil (Mikarjudin, 2016).

Bandul sederhana terdiri atas titik massa m yang digantung menggunakan seutas tali tak bermassa dengan ujung atasnya diikatkan dinding diam. Gerak benda terjadi pada bidang vertikal dan dikendalikan oleh gaya gravitasi. Asal sudut simpangan θ kecil maka gerak benda adalah getaran selaras sederhana.



Gambar 2. 1 Sistem Pendulum Tunggal

Pada gambar tersebut gaya - gaya yang bekerja pada bandul adalah gaya tegang tali T dan gaya gravitasi $m\ g$. Komponen radial $T = m\ g\ \cos(\theta)$ tidak

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

mengakibatkan percepatan pada titik massa. Komponen tangensial gaya gravitasi $m\,g\sin(\theta)$ selalu bekerja dengan arah menuju $\theta = 0$, berlawanan arah dengan simpangannya. Jadi, komponen gaya merupakan gaya pemulih dan persamaan gerak bandul ke arah tangensial ini dapat ditulis

$$F = -mg\sin(\theta) = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

Karena $s = l\theta$ maka $\frac{d^2s}{dt^2} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$ sehingga dapat ditulis menjadi

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\theta)$$

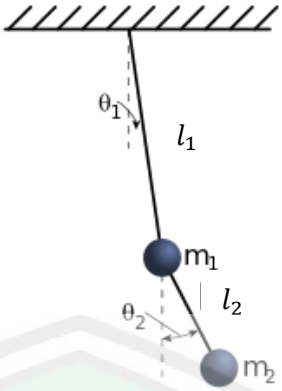
Suku persamaan kanan berbanding lurus dengan $\sin(\theta)$. Persamaan tersebut bukan merupakan persamaan linier seperti persamaan sebelumnya sehingga persamaan dari pendulum matematis ini tidak mengikuti getaran selaras sederhana. Namun, jika dipilih θ yang kecil maka dapat dilakukan pendekatan $\sin(\theta) \approx \theta$, dimana θ dalam radian. Dengan pendekatan ini, persamaan gerak bandul matematis menjadi

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

2.2 Pendulum Ganda

Dalam fisika dan matematika, di bidang sistem dinamik, pendulum ganda adalah pendulum dengan pendulum lain yang terpasang di ujungnya, dan merupakan suatu sistem fisik sederhana yang menunjukkan perilaku dinamis dengan sensitivitas yang kuat terhadap kondisi awal. Gerakan pendulum ganda diatur oleh satu suatu persamaan diferensial biasa yang digabungkan dan *chaos* .

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 2. 2 Sistem Pendulum Ganda

Beberapa varian pendulum ganda dapat dipertimbangkan; dua tali mungkin memiliki panjang dan massa yang sama atau tidak sama, mereka dapat berupa pendulum sederhana atau pendulum majemuk (juga disebut pendulum kompleks). Dalam analisis berikut, tungkai dianggap sebagai bandul majemuk identik dengan panjang *l* dan massa *m* , dan gerakan dibatasi pada dua dimensi.

Dalam pendulum majemuk, massa didistribusikan sepanjang talinya. Jika massa terdistribusi secara merata, maka pusat massa masing-masing tungkai berada di titik tengahnya, dan tungkai memiliki momen inersia $I = \frac{1}{12}ml^2$ pada titik itu.

Lebih mudah menggunakan sudut antara masing-masing tungkai dan vertikal sebagai koordinat umum yang mendefinisikan konfigurasi sistem. Sudut-sudut ini dilambangkan $\theta_1$dan θ_2. Posisi pusat massa masing-masing batang dapat ditulis dalam dua koordinat ini. Jika asal dari sistem koordinat Kartesius diambil pada titik penangguhan pendulum pertama, maka pusat massa pendulum ini adalah di:

$$x_1 = \frac{1}{2} sin\, \theta_1$$

$$y_1 = -\frac{1}{2} cos\theta_1$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pusat massa pendulum kedua adalah di :

$$x_2 = l(sin\theta_1 + \frac{1}{2}sin\theta_2)$$

$$y_2 = -l(cos\theta_1 + \frac{1}{2}cos\theta_2)$$

2.3 Metode *Lagrange*

Persamaan gerak partikel yang dinyatakan oleh persamaan *lagrange* dapat diperoleh dengan meninjau energi kinetik dan energi potensial partikel tanpa perlu meninjau gaya yang beraksi pada partikel. Energi kinetik partikel dalam koordinat kartesian adalah fungsi dari kecepatan, energi potensial partikel yang bergerak dalam medan gaya konservatif adalah fungsi konservatif adalah fungsi dari posisi. Jika didefinisikan *lagrange* sebagai selisih antara energi kinetik dan energi potensial dan digunakan untuk mengetahui besar gaya yang bekerja pada benda (Rafsenjani, dkk, 2013).

2.4 Metode Runge-Kutta Orde 4 (RK 4)

Dalam pembahasan metode Heun atau Runge Kutta Orde 2 (RK 2), kita menggunakan aturan trapesium untuk menaksirkan nilai integral $\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)dt$. Metode RK 4 diturunkan serupa, namun dengan menggunakan atura Simpson dengan lebar langkah $\frac{h}{2} = \frac{t_{k+1} - t_k}{2}$ untuk mendapatkan hampiran nilai integral tersebut, sehingga diperoleh hampiran.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \frac{h}{6}\ f(t_k, y_k) + 4f\left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}, y\left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right)\right)$$

$$+ f\big(t_{k+1}, y_k + h\, f(t_k, y_k)\big)$$

Suku galat dalam aturan Simpson dengan lebar $\frac{h}{2}$ adalah

$$y^{(4)}(\xi_k)\frac{h^5}{2880}$$

sehingga galat yang terakumulasi

$$\sum_{k=1}^{n} y^{(4)}(\xi_k)\frac{h^5}{2880} = ny^{(4)}(\xi)\frac{h^5}{2880} = \frac{t_n - t_0}{2h}y^{(4)}(\xi)\frac{h^5}{2880} = O(h^4)$$

Metode Runge Kutta pertama kali dikembangkan oleh Carl Runge dan Wiliam Kutta dalam rangka meniru hasil dari pendekatan deret Taylor tanpa melakukan diferensial analitik secara berulang. Metode Runge Kutta merupakan metode yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan dari fungsi (Acu, dkk, 2017).

Bentuk umum dari metode Runge Kutta adalah:

$$y_{i+1} = y_i + \varphi(x_i, y_i)h \tag{2.1}$$

dengan $\varphi(y_i, x_i)h$ adalah fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan rerata pada interval dan digunakan untuk mengekstrapolasi dari nilai lama y_i ke nilai baru y_{i+1} sepanjang interval h. Fungsi pertambahan dapat ditulis dalam bentuk umum:

$$\varphi = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n$$

dengan a adalah konstanta dan k adalah

$$k_1 = hf(x_r, y_r)$$

$$k_2 = hf(x_r + p_1h, y_rq_{11}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_r + p_2h, y_r + q_{21}k_1 + q_{22}k_2)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\vdots$

$$k_n = hf\left(x_r + p_{n-1}h, y_r + q_{n-1,2}k_1 + q_{n-1,2}k_2 + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}\right)$$

dengan p dan q konstan. Nilai k menunjukkan hubungan berurutan. Nilai k_1 muncul dalam persamaan untuk menghitung k_2, yang kedunya juga muncul dalam persaman untuk menghitung k_3 dan seterusnya. Hubungan berurutan ini membuat metode Runge Kutta menjadi efisien untuk hitungan komputer (Chapra dan Canale, 2010).

Metode Runge Kutta memiliki beberapa tipe bergantung pada nilai n yang digunakan. Pada penelitian ini menggunakan Runge Kutta orde empat yang berarti memiliki nilai $n = 4$. Metode ini, merupakan metode yang sering digunakan dalam ilmu komputasi karena memiliki tingkat ketelitian solusi yang lebih tinggi dibandingkan orde sebelumnya. Menurut Chapra dan Cande (2010) metode Runge-Kutta orde empat mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4)h \tag{2.2}$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1), \\ k_3 &= f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1 + q_{22}k_2), \\ k_4 &= f(x_i + p_3h, x_i + q_{31}k_1 + q_{32}k_2 + q_{33}k_3). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Persamaan (2.3) di atas memiliki 13 konstanta, antara lain yaitu $a_1, a_2, a_3, a_4, p_1, p_2, p_3, q_{11}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32}, q_{33}$. Nilai dari 13 konstanta tersebut dapat diperoleh dengan menjabarkan k_1, k_2, k_3 dan k_4 dalam bentuk deret Taylor. Dengan menjabarkan k_i yang hanya memiliki variabel y maka akan diperoleh:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$k_1 = f \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_i + q_{11}k_1) \\ &= f + hq_{11}ff_y + \frac{h^2q_{11}^2f^2f_{yy}}{2} + \frac{h^3q_{11}^3f^3f_{yy}}{6} + \cdots \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_i + q_{21}k_1 + q_{22}k_2) \\ &= f(h(q_{21} + q_{22})ff_y + h^2\left(q_1q_{22}ff_y^2 + \frac{1}{2}(q_{21} + q_{22})^2f^2f_{yy}\right) + h^3\left(\frac{1}{2}q_{11}^2q_{22}f^2f_yf_{yy} + q_{21}(q_{21} + q_{22})q_{22}f^2f_yf_{yy} + \frac{1}{6}(q_{21} + q_{22})^3f^3f_{yyy}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_i + q_{31}k_1 + q_{32}k_2 + q_{33}k_3) \\ &= f + h(q_{31} + q_{32} + q_{33})ff_y + h^2\left(q_{11}q_{32}ff_y^2 + (q_{21} + q_{22})q_{33}ff_y^2 + \frac{1}{2}(q_{31} + q_{32} + q_{33})f^2f_{yy}\right) + \\ &\quad h^3\left(\frac{1}{2}q_{11}^2q_{32}(q_{31} + q_{32} + q_{33})f^2f_yf_{yy} + \frac{q_{33}(q_{21}+q_{22})^2f^2f_yf_{yy}}{2} + (q_{31} + q_{32} + q_{33})\big(q_{11}q_{32} + q_{33}(q_{21} + q_{22})\big)f^2f_yf_{yy} + q_{33}q_{22}q_{11}ff_y^3 + \frac{1}{6}(q_{31} + q_{32} + q_{33})^3f^3f_{yyy}\right)\cdots \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (2.4), (2.5), (2.6) dan (2.7) ke dalam persamaan (2.3) akan diperoleh nilai parameter $a_1, a_2, a_3, a_4, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32}, q_{33}$. Selanjutnya penyelesaian menggunakan pendekatan deret Taylor, sehingga diperoleh:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$
\begin{aligned}
&q_{11} = p_1 \\
&q_{21} + q_{22} = p_2 \\
&q_{31} + q_{32} + q_{33} = p_3 \\
&a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \\
&a_2 q_{11} + a_3(q_{21} + q_{22}) + a_4(q_{31} + q_{32} + q_{33}) = \frac{1}{2} \\
&a_2 q_{11}^2 + a_3(q_{21} + q_{22})^2 + a_4(q_{31} + q_{32} + q_{33})^2 = \frac{1}{3} \\
&a_2 q_{11}^3 + a_3(q_{21} + q_{22})^3 + a_4(q_{31} + q_{32} + q_{33})^3 = \frac{1}{4} \\
&a_3 q_{22} q_{11} + a_4 q_{32} q_{11} + a_4 q_{33}(q_{21} + q_{22}) = \frac{1}{6} \\
&a_3 q_{22} q_{11}^2 a_4 q_{32} q_{11}^2 + a_4 q_{33}(q_{21} + q_{22})^2 = \frac{1}{12} \\
&a_3 q_{11} q_{22}(q_{21} + q_{22}) + \\
&a_4(q_{31} + q_{32} + q_{31})\big(q_{11} q_{32} + q_{33}(q_{21} + q_{22})\big) = \frac{1}{8} \\
&a_4 q_{33} q_{22} q_{11} = \frac{1}{24}.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Persamaan (2.8) memuat 11 persamaan dengan 13 parameter yang tidak diketahui. Jika digunakan tiga kondisi tambahan agar sistem tersebut dapat diselesaikan yaitu:

$$q_{11} = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2}, p_3 = 1 \tag{2.9}$$

Maka, terbentuk Runge Kutta orde empat sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \tag{2.10}$$

dimana

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right), \tag{2.11}$$

$$k_4 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_3\right).$$

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde dua menggunakan metode runge kutta, harus diubah terlebih dahulu menjadi sistem persamaan diferensial orde satu (Dafik, 1999). Sebuah persamaan orde dua sebagai berikut:

$$y'' = f(t, y, y') \text{ dengan nilai awal } y(t_0) = y_0 \text{ dan } y'(t_0) = x_0 \tag{2.12}$$

Persamaan (2.12) terlebih dahulu diubah menjadi sistem PDB orde satu yaitu:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, x) = x, \qquad y(t_0) = y_0$$

$$\frac{dx}{dt} = g(t, y, y') = g(t, y, x) \qquad x(t_0) = x_0. \tag{2.13}$$

sehingga formula metode Runge Kutta menjadi berikut:

$$y(i + h) = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$x(i + h) = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_i, y_i, x_i)$$

$$l_1 = g(t_i, y_i, x_i) \tag{2.14}$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}, x_i + \frac{hl_1}{2}\right)$$

$$l_2 = g\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}, x_i + \frac{hl_1}{2}\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2}, x_i + \frac{hl_2}{2}\right)$$

$$l_3 = g\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2}, x_i + \frac{hl_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3, x_i + hl_3)$$

$$l_4 = g(t_i + h, y_i + kh_3, x_i + hl_3)$$

Metode Runge Kutta orde empat ini yang dengan mereduksi masalah nilai batas.

2.5 Metode Deret Taylor

Ekspansi deret Taylor dari fungsi $y(x)$ analitik pada persekitaran $x = 0$ diberikan sebagi berikut

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k y(x)}{dx^k}\bigg|_{x=0} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k \tag{2.15}$$

di mana $y^k(x) = \frac{d^k y(x)}{dx^k}$ dan $Y(k)$ disebut koefisien Taylor ke-k dan didefinisikan sebagai

$$y(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k y(x)}{dx^k}\bigg|_{x=0} \tag{2.16}$$

Fungsi $y(x)$ dapat dinyatakan sebagai $y(x) = y_M(x) + R_M$, dimana $y_M(x)$ adalah aproksimasi orde-M yang diberikan oleh

$$y_M(x) = \sum_{k=0}^{M} Y(k)x^k \tag{2.17}$$

dan R_M adalah rumus sisanya diberikan oleh

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$R_M = \frac{1}{(M+1)!}\frac{d^{M+1}y(x)}{dx^{M+1}}\bigg|_{x=x_1} x^{M+1} \tag{2.18}$$

Untuk beberapa x_1 pada $0 < x_1 < x$. Jika turunan ke $(m+1)$ dari $y(x)$ terbatas dalam $x \in (0,1]$.

$$\left|\frac{d^{M+1}y(x)}{dx^{M+1}}\right| \leq K \tag{2.19}$$

Untuk konstanta K non-negatif tertentu, maka error maksimum untuk $y_M(x)$ dalam interval ini dapat dievaluasi berdasarkan rumus sisa seperti ini

$$e_{max} = \frac{K}{(M+1)!}$$ (Munawaroh, 2015)

2.6 Titik Kesetimbangan

Titik tetap dari suatu pemetaan $T: M \to M$, dengan M merupakan suatu himpunan sebarang, dan $m \in M$ yang dipetakan pada dirinya sendiri oleh pemetaan tersebut. Dengan kata lain dibuat titik tetap oleh pemetaan tersebut T dan dinotasikan sebagai berikut : $T(m) = m$ (Musta'ada, 2004:7).

Misalkan diberikan system otonomus

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(x,y,z) \\ \frac{dy}{dt} &= Y(x,y,z) \\ \frac{dz}{dt} &= Z(x,y,z) \end{aligned}\right\} \qquad 2.20$$

Titik (x^*, y^*, z^*) dengan $X(x^*, y^*, z^*) = 0, Y(x^*, y^*, z^*) = 0, Z(x^*, y^*, z^*) = 0$ disebut titik kritis persamaan 2.20. Titik kritis $E = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ ini merupakan solusi

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

persamaan (2.20) yang bernilai konstan sebab $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0, \frac{dz}{dt} = 0$ disebut dengan keadaan setimbang dan titik yang memenuhi disebut titik kesetimbangan (Sari, 2010:6).

2.7 Kajian Keagamaan

Peristiwa gerak pendulum ganda merupakan suatu peristiwa fisis dengan gerakan *chaos* di dalamnya. Gerakan *chaos* pada pendulum ganda dapat diredam sehingga gerak pendulum akan mulai terkontrol dan mendekati titik kesetimbanganya.

Manusia merupakan makhluk cipataan Allah yang diciptakan dalam keadaan sebaik-baiknya bentuk. Bentuk tubuhnya melebihi keindahan bentuk tubuh ciptaan yang lain. Manusia diciptakan dilengkapi dengan akal. Maka dengan keseimbangan sebaik-baik tubuh dan pedoman pada akalnya itu dapatlah dia hidup dipermukaan bumi ini menjadi pengatur. Dalam firman Allah pada surat al-Infithaar ayat 7 yang berbunyi:

ٱلَّذِى خَلَقَكَ فَسَوَّىٰكَ فَعَدَلَكَ ۝٧

"Yang telah menciptakan kamu, lalu menyempurnakan kejadianmu, lalu menjadikan (susunan tubuh) mu seimbang" (Q.S. al-Infithaar : 7).

Kata "yang telah menciptakan kamu" yaitu yang mengatur penciptaanmu dari setetes air mani. "lalu menyempurnakan kejadianmu" dalam rahim ibu,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

kemudian menjadikan dua tangan, dua kaki, sepasang mata, serta seluruh anggota tubuhmu (al-Qurthubi, 2009).

Dalam tafsir al-muyassar menjelaskan bahwa Allah telah menciptakan tubuh kalian dengan susunan yang sangat sempurna, dengan anggota tubuh yang lengkap, dan bentuk tubuh yang serasi. Dia menyusun kalian dalam bentuk yang sangat bagus dan menakjubkan. Dia memilihkan yang terbaik untuk bentuk kalian dan juga membedakan antara satu manusia dengan manusia yang lainnya dari segi bentuk, suara dan warna kulit.

Kata "seimbang" berarti menjadikan anggota tubuh manusia seimbang, serasi sehingga tampak harmonis, dapat juga berarti menjadikanmu memiliki kecenderungan untuk bersikap adil. Memang keadilan menjadi dambaan manusia. Di sisi lain jika terjadi gangguan pada jiwa atau kepribadian manusia, maka ketika itu kecenderungan tersebut sirna pada dirinya. Namun memahami kata *,,adalaka* dalam arti demikian, tidak sejalan dengan kandungan ayat berikutnya yang masih berbicara tentang pembentukkan fisik manusia, yakni Allah membentuk manusia dalam bentuk apa saja yang dikehendaki-Nya antara lain dalam bentuk cantik atau buruk, gagah atau jelek, pria atau wanita, tinggi atau pendek. Sehingga, dalam apapun bentuk yang dikehendaki-Nya (al-Mishbah, 2003).

Kata "seimbang" yakni menjadikanmu ciptaan yang lurus, sepadan dan seimbang dan dapat berarti menjadikan anggota tubuh manusia seimbang, seperti dikatakan (ini sesuatu yang lurus), qira'ah ini adalah qira'ah mayoritas ulama, dan qira'ah yang dipilih oleh Abu Ubaid dan Abu Hatim. Al Farra' dan Abu ubaid mengatakan dalilnya adalah firman Allah dalam QS. At-Tin : 4 (al-Qurthubi, 2009)

لَقَدْ خَلَقْنَا ٱلْإِنسَٰنَ فِىٓ أَحْسَنِ تَقْوِيمٍ ﴿٤﴾

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

"Sesungguhnya kami telah menciptakan manusia dalam bentuk yang sebaik- baiknya". (QS. At-Tin : 4).

Allah SWT dalam ayat ini menegaskan secara eksplisit bahwa manusia itu diciptakan dalam bentuk yang paling sempurna. Ar-Raghib Al Asfahani, seorang pakar bahasa al-Quran menyebutkan bahwa kata *taqwiim* pada ayat ini merupakan syarat tentang keistimewaan manusia dibanding binatang, yaitu dengan dikarunianya akal, pemahaman, dan bentuk fisik yang tegak dan lurus. Jadi *ahsani taqwiim* berarti bentuk fisik dan psikis yang sebaik-baiknya (Aam, 2004).

Kalau cermati, sesungguhnya kesempurnaan manusia bukan hanya sekedar pada bentuk fisik dan psikisnya saja. Kedudukan manusia diantara makhluk Allah lainnya pun menempati tempat tertinggi, melebihi kedudukan malaikat. Firman Allah dalam QS. al- Isra : 70 (Aam, 2004)

۞وَلَقَدْ كَرَّمْنَا بَنِيٓ ءَادَمَ وَحَمَلْنَٰهُمْ فِي ٱلْبَرِّ وَٱلْبَحْرِ وَرَزَقْنَٰهُم مِّنَ ٱلطَّيِّبَٰتِ وَفَضَّلْنَٰهُمْ عَلَىٰ كَثِيرٍ مِّمَّنْ خَلَقْنَا تَفْضِيلًا ٧٠

"Dan sesungguhnya kami telah memuliakan anak Adam (manusia) dan kami angkat mereka di darat dan dilaut, dan kami melebihkan mereka atas makhluk- makhluk yang Kami ciptakan, dengan kelebihan yang menonjol" (QS. al- Isra : 70) (Aam, 2004).

Dalam Tafsir Ibnu Kasir Juz 15 oleh Al-Imam Abu Fida Isma'il Ibnu Kasir Ad-Dimasyqi, Allah memberitahukan tentang pemuliaan dan penghormatan-Nya terhadap anak cucu Adam, yakni dalam penciptaan mereka dalam bentuk yank sebaik-baiknya dan paling sempurna.

(Yaitu) sesosok makhluk yang dapat berjalan tegak dengan berpijak pada kedua kakinya dan makan dengan kedua tangannya. Sedangkan makhluk lain dari

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

berbagai macam binatang berjalan dengan keempat kakinya dan makan dengan mulutnya. Selain itu, Allah juga memberikan pendengaran, penglihatan, dan hati yang dengannya ia dapat memahami, mengambil manfaat, dan membedakan banyak hal, mengetahui manfaat dan keistimewaan serta bahayanya dalam urusan agama dan juga duniawi. Dan Kami angkut mereka di daratan dengan menggunakan kendaraan binatang; kuda dan keledai. Sedangkan di lautan, Kami angkut dengan menggunakan kapal-kapal besar maupun kecil. Dan Kami karuniakan kepada mereka berbagai macam rizki yang baik-baik berupa tanam-tanaman, buah-buahan, daging, susu, dan beraneka macam makanan yang beraneka warna yang sangat lezat, juga pemandangan yang indah, pakaian yang bagus-bagus dengan berbagai macam jenis, warna, dan bentuknya, yang mereka buat untuk diri mereka sendiri atau mereka ambil dari daerah lain. Dan telah Kami lebihkan mereka atas makhluk lainnya, yakni hewan dan makhluk lainnya.

Manusia lebih utama daripada makhluk hidup lainnya, juga lebih utama daripada semua jenis makhluk. Ayat ini dapat dijadikan sebagai dalil yang menunjukkan keutamaan jenis manusia di atas jenis malaikat.

Abdur Razzaq mengatakan, telah menceritakan kepada kami Ma'mar, dari Zaid ibnu Aslam yang mengatakan bahwa para malaikat berkata, "Wahai Tuhan kami, Engkau telah memberikan kepada Nabi Adam dunia. Mereka dapat makan dari sebagian hasilnya dan bersenang-senang dengannya, sedangkan Engkau tidak memberikannya kepada kami. Maka berikanlah kepada kami Akhirat." Allah Swt. menjawab melalui firman-Nya, "Demi kebesaran dan keagungan-Ku, Aku tidak akan menjadikan kebaikan keturunan orang yang Aku ciptakan dengan kedua

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

tangan (kekusaan)-Ku sendiri seperti kebaikan makhluk yang Aku ciptakan dengan Kun (jadilah kamu!), maka jadilah dia."

Keseimbangan adalah kemampuan untuk mempertahankan keseimbangan tubuh ketika ditempatkan di berbagai posisi. Keseimbangan menurut O'Sullivan adalah kemampuan untuk mempertahankan pusat gravitasi pada bidang tumpu terutama ketika saat posisi tegak. Kemampuan tubuh untuk mempertahankan keseimbangan tubuh oleh aktivitas sehari-hari tidak dapat dipisahkan dari faktor lingkungan yang berperan dalam pembentukan keseimbangan (Irfan, 2012).

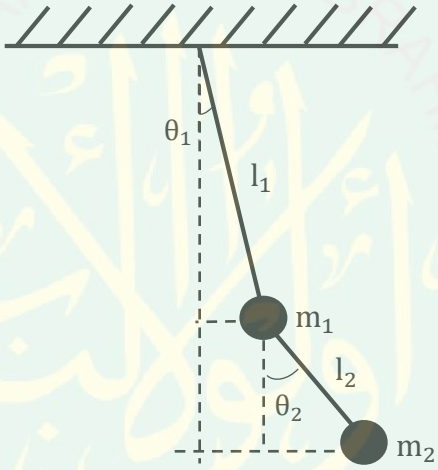
Tujuan dari tubuh mempertahankan keseimbangan adalah menyangga tubuh untuk melawan gravitasi dan faktor-faktor ekternal lain, mempertahankan pusat massa tubuh agar sejajar dan seimbang dengan bidang tumpu, serta menstabilisasi bagian tubuh ketika bagian tubuh lain bergerak. Kemampuan untuk menyeimbangkan massa tubuh dengan bidang tumpu akan membuat manusia mampu untuk beraktivitas secara efektif dan efisien (Irfan, 2012). Equilibrium adalah sebuah bagian penting dari pergerakan tubuh dalam menjaga tubuh tetap stabil sehingga manusia tidak jatuh walaupun tubuh berubah posisi.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Kontruksi Model Pendulum Ganda

Pendulum ganda merupakan pendulum dengan pendulum lain yang terpasang pada ujung lainnya yang terpasang pada ujungnya. Pendulum sendiri merupakan suatu sistem fisika sederhana yang menunjukan perilaku dinamis dengan sensitifitas yang kuat dan sifat-sifat *chaotic* didalamnya. Gerak osilasi pada pendulum sederhana diilustrasikan seperti gambar berikut :



Gambar 3.1. 1 Sistem Pendulum Ganda Sederhana

Pada pendulum ganda sederhana digunakan beberapa asumsi antara lain: gaya gesek udara diabaikan, massa jenis tali homogen dan massa benda yang pada pendulum 1 dan 2 terpusat ditengah. Secara ilustrasi, pendulum ganda pada gambar tersebut terdiri dari beberapa komponen utama, yaitu:

a. Poros pendulum ganda tetap (tidak bergerak).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

b. Pendulum 1 dengan talinya (l_1) terpasang pada suatu poros yang tetap dan tidak bergerak dan pada ujung lain pendulum terikat pada massa benda pertama (m_1).

c. Pendulum 2 dengan talinya (l_2) salah satu ujungmya bergantung pada massa benda pertama yang terikat pada pendulum 1 dan ujung lainya terikat pada massa benda kedua (m_2).

Adapun beberapa variabel dan parameter yang mempengaruhi pendulum ganda antara lain:

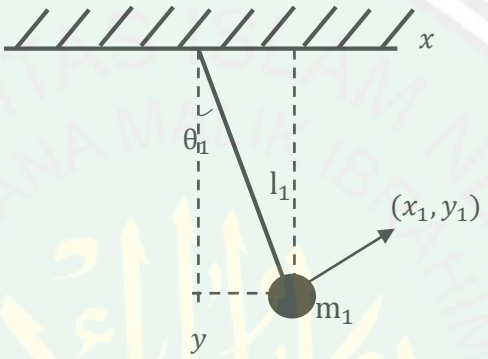
Tabel 3.1. 1 Notasi Variabel dan Parameter dengan satuannya

Notasi	Keterangan	Satuan (SI)
m_1	Massa pendulum 1	kg
m_2	Massa pendulum 2	kg
l_1	Panjag tali pendulum 1	m
l_2	Panjang tali pendulum 2	m
θ_1	Besar sudut pendulum 1	rad
θ_2	Besar sudut pendulum 2	rad
g	Gaya gravitasi	m/s^2

Dalam analisis pendulum ganda berikut, pendulum dianggap sebagai suatu sistem majemuk identik dengan panjang (l) dengan *massa* pada masing-masing tali diabaikan dan massa (m), dan gerak pendulum dibatasi pada dua dimensi. Dengan menggunakan pendekatan sudut antara masing-masing pendulum, masing masing sudut pada pendulum dilambangkan θ_1 dan θ_2. Posisi pusat massa tiap pendulum dapat dituliskan dengan koordinat Kartesius sebagai berikut.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pendulum pertama terdiri dari beberapa komponen yaitu massa pendulum (m_1), panjang tali (l_1), dan besar sudut (θ_1). Karena gerak osilasi pendulum diibatasi pada ruang dua dimensi $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ maka koordinat Kartesius dari pendulum pertama dengan dimisalkan poros pendulum sebagai titik pusat kartesius dan posisi pendulum dinotasikan sebagai x_1 dan y_1 sebagaimana seperti pada gambar dibawah ini



Gambar 3.1. 2 Sistem Pendulum Pertama

Maka dapat dituliskan koordinat kartesiusnya sebagai berikut:

$$\frac{x_1}{l_1} = \sin\theta_1$$

$$x_1 = l_1 sin\,\theta_1 \tag{1}$$

dan

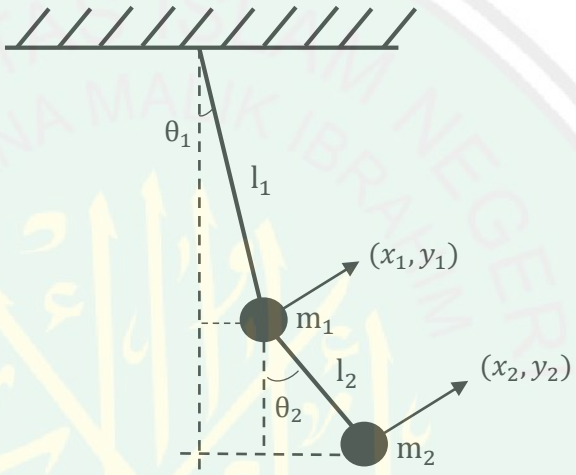
$$-\frac{y_1}{l_1} = cos\theta_1$$

$$y_1 = -l_1 \cos\theta_1 \tag{2}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Variabel y bernilai negatif karena gerak osilasi pada pendulum berada pada kuadran ke 3 atau kuadran ke 4.

Selanjutnya, pendulum kedua merupakan suatu sistem yang bergantung akibat pendulum pertama. Koordinat Kartesius pendulum kedua ditunjukkan oleh Gambar 3.3. Apabila posisi pendulum diotasikan sebagai x_2 dan y_2, maka titik kordinatnya:



Gambar 3.1. 3 Sistem Pendulum Kedua yang dipengaruhi Pendulum Pertama

$$\frac{x_2 - x_1}{l_2} = sin\theta_2$$

$$x_2 - x_1 = l_2 \sin\theta_2$$

$$x_2 = x_1 + l_2 sin\theta_2 \qquad (3)$$

dan

$$\frac{-y_2 - (-y_1)}{l_2} = cos\theta_2$$

$$-y_2 = -y_1 + l_2 cos\theta_2$$

$$y_2 = y_1 - l_2 cos\theta_2 \qquad (4)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Persamaan (1)(2)(3) dan (4) akan digunakan untuk mencari persamaan fungsi lagrangian dari pendulum ganda.

3.2 Lagrangian

Untuk medapatkan suatu model matematis dari karakteristik suatu sistem pendulum ganda dapat digunakan persamaan Lagrangian. Persamaan Lagrangian digunakan untuk mengetahui besar gaya yang bekerja pada benda. Persamaan gerak partikel yang dinyatakan oleh fungsi Lagrangian dapat diperoleh dengan meninjau energi kinetik dan energi potensial partikel tanpa meninjau gaya yang bereaksi pada partikel. Jika didefinisikan Lagragian sebagai selisih antara energi kinetik dengan energi potensial maka fungsi Lagragian dari pendulum ganda sebagai berikut:

$$L = T - V$$

keterangan:

L = Fungsi *Lagrangian*

T = Energi kinetik

V = Energi potensial

Pendulum ganda merupakan rangkaian dari dua pendulum dengan koordinat kartesius dari pendulum pertama (x_1, y_1) dan pendulum kedua (x_2, y_2). Koordinat kartesius kedua pendulum merupakan fungsi dari θ_1 dan θ_2 yang dituliskan sebagai:

$$x_1 = l_1 \sin\theta_1$$

$$y_1 = -\mathrm{l}_1 \cos\theta_1$$

$$x_2 = l_1 sin\theta_1 + l_2 sin\theta_2$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$y_2 = -l_1 cos\theta_1 - l_2 cos\theta_2$$

θ_1 merupakan notasi besar sudut pendulum 1 terhadap garis normal yang berubah-ubah disepanjang waktu (t) sehingga θ_1 adalah fungsi dari waktu. Demikian pula dengan θ_2.

Energi kinetik (T) yang akan bekerja pada fungsi Lagrangian di pendulum ganda dipengaruhi oleh massa (m) dan kecepatan (v) suatu benda saat bergerak. Sehingga energi kinetik diformulasikan :

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

Pendulum ganda memiliki dua massa benda yang bergerak dan pada ruang dua dimensi $(x, y) \in \mathbb{R}$ sehingga energi kinetik pada pendulum ganda adalah:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

Energi kinetik merupakan suatu fungsi yang bergantung terhadap kecepatan suatu benda. Kecepatan Suatu benda merupakan turunan pertama dari posisi terhadap waktu. Jika posisi benda berada di ruang dua dimensi (x, y), maka $V = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$. Posisi absis pendulum 1, adalah $x_1(\theta(t))$ dan posisi ordinatnya $y_1(\theta_1(t))$, sehingga :

$$\dot{x_1} = \frac{dx_1}{d\theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} = l_1 cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{d\theta_2} \cdot \frac{d\theta_2}{dt} = l_1 cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + l_2 cos\theta_2 \dot{\theta}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 cos\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 cos\theta_2$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\dot{y_1} = \frac{dy_1}{d\theta_1} \cdot \frac{d\theta_1}{dt} = l_1 sin\theta_1 \dot{\theta}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1$$

$$\dot{y}_2 = \frac{dy_2}{d\theta_2} \cdot \frac{d\theta_2}{dt} = l_1 \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 + l_2 sin\theta_2 \cdot \dot{\theta}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 sin\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 sin\theta_2$$

Kecepatan masing-masing pendulum dapat dihitung sebagai :

$$V_1 = (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \left(l_1 \dot{\theta}_1 \cos\theta_1\right)^2 + \left(l_1 \dot{\theta}_1 \sin\theta_1\right)^2$$

$$V_2 = (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2\theta_1 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2\theta_1$$

Karena $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ maka,

$$(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

dan

$$(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \left(l_1 \dot{\theta}_1 cos\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 cos\theta_2\right)^2 + \left(l_1 \dot{\theta}_1 sin\theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 sin\theta_2\right)^2$$

$$(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \left(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2\theta_1 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2\theta_2\right) + \left(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2\theta_1 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2\theta_2\right)$$

$$(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Sehingga dapat diperoleh energi kinetik sebagai berikut :

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \left(l_1^2 \dot{\theta}_1^2\right) + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Setelah diperoleh energi kinetik, akan dicari energi potensial yang berkerja pada pendulum ganda :

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

$$V = m_1 g(-l_1 \cos\theta_1) + m_2 g(-l_1 cos\theta_1 - l_2 cos\theta_2)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$V = -(m_1 + m_2)gl_1cos\theta_1 - m_2gl_2cos\theta_2$$

Sehingga fungsi Lagrangian diperoleh

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2}m_1\left(l_1^2\dot{\theta}_1^2\right) + \frac{1}{2}m_2(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$+ (m_1 + m_2)gl_1cos\theta_1 - m_2gl_2cos\theta_2$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta - \theta_2)$$

$$+ (m_1 + m_2)gl_1cos\theta_1 + mgl_2cos\theta_2$$

oleh karena itu, θ_1

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1} = m_1l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1\,l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right) = (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2\,)$$

$$- m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2)\left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1} = -l_1g(m_1 + m_2)sin\theta_1 - m_2l_1l_2\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2)$$

Persamaan diferensial Lagrangian untuk θ_1 adalah

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2\,) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) \qquad (3.1.1)$$

$$- l_1g(m_1 + m_2)sin\theta_1 = 0$$

Dari hasil fungsi lagrangian pada pendulum ganda (3.1.1) dapat dicek untuk validasi model satu pendulum karena pendulum ganda merupakan suatu sistem satu pendulum yang diberikan pendulum lain pada ujungnya. Maka dapat diasumsikan bahwa $m_2, l_2, \theta_2 = 0$ sehingga

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$(m_1 + 0)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 0_2 \cos(\theta_1 - 0) + 0 l_1 00^2 \sin(\theta_1 - 0)$$

$$- l_1 g(m_1 + 0_2)\sin\theta_1 = 0$$

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 - l_1 g m_1 \sin\theta_1 = 0$$

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g\cancel{m_1}\sin\theta_1}{\cancel{m_1} l_1}$$

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g sin\theta_1}{l_1}$$

Persamaan (3.1.1) ini sesuai dengan persamaan pada pendulum tunggal. Selanjutnya persamaan (3.1.1) dapat disederhanakan dengan cara membagi dengan l_1

$$(m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \qquad (3.1.2)$$

$$- g(m_1 + m_2) sin\theta_1 = 0$$

Cara yang sama juga digunakan untuk θ_2

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$- m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sin(\theta_1 - \theta_2) - l_2 m_2 g sin\theta_2$$

Persamaan diferensial Lagrangian untuk θ_2 adalah

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 m_2 g sin\theta_2 = 0$$

Persamaan tersebut dapat disederhanakan dengan cara membagi dengan l_2

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g sin\theta_2 = 0 \quad (3.1.3)$$

Setelah diperoleh suatu sistem baru dari fungsi lagrangian di persamaan pendulum ganda, selanjutnya akan dicari nilai kesetabilan lokal pada masing-masing sistem. Sistem pertama merupakan sebuah persamaan yang mengandung variabel $(\theta_1 . \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2)$ begitu juga dengan sistem yang ke dua. Sehingga dari persamaan tersebut dapat dicari suatu sistem baru yaitu

$$\ddot{\theta}_1 = f_1(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_2) \text{ dan } \ddot{\theta}_2 = f_2(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_1)$$

Mencari nilai $\ddot{\theta}_1$ dari sistem pertama:

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g(m_1 + m_2) sin\theta_1 = 0$$

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 = -\left(m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - g(m_1 + m_2) sin\theta_1\right)$$

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{\left(m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - g(m_1 + m_2) sin\theta_1\right)}{(m_1 + m_2) l_1}$$

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{\left(m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - g m_1 sin\theta_1 - g m_2 s\right.}{(m_1 + m_2) l_1} \quad (3.1.4)$$

Mencari nilai $\ddot{\theta}_2$ dari sistem kedua:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g sin\theta_2 = 0$$

$$m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 = -\left(m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g sin\theta_2\right)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{\left(m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g sin\theta_2\right)}{m_2 l_2}$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{\left(-\sin(\theta_1 - \theta_2)\, l_1 \dot{\theta}_1^2 - \sin(\theta_1) g - l_2 \ddot{\theta}_2\right)}{l_2} \qquad (3.1.5)$$

Setelah diperoleh persamaan (3.14) yang merupakan fungsi dari $\ddot{\theta}_1$ dari variabel $f_1(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_2)$ dan persamaan (3.15) yang merupakan fungsi dari variabel $f_2(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_1)$. Dari persamaan (3.14) dan (3.15) dapat disederhanakan agar tidak ada variabel turunan kedua pada masing masig persamaan dengan cara mensubtitusikan persamaan (3.14) ke persamaan (3.15) dan juga sebaliknya.

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{\left(m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - g m_1 sin\theta_1 - g m_2 sin\theta_2\right)}{(m_1 + m_2) l_1}$$

$$= \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2)\, l_1 m_1 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 \theta_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)\, sin\theta_2 g m_2 - g sim\, \theta_1 m_1 - g sin\theta_1 m_2}{l_1 (m_1 \cos(\theta_1 - \theta - 2)^2 - m_1 - m_2}$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{\left(-\sin(\theta_1 - \theta_2)\, l_1 \dot{\theta}_1^2 - \sin(\theta_1) g - l_2 \ddot{\theta}_2\right)}{l_2}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= -\frac{1}{l_2}\left(-\sin(\theta_1-\theta_2)\, l_1\dot{\theta}_1^2 \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(\theta_1-\theta_2)\,(\sin(\theta_1-\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)\, l_1 m_2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1-\theta_2) - \cos(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_2)\, g m_2 - g sin(\theta_1) m_1 - g sin(\theta_1) m_2)}{m_2\cos(\theta_1-\theta_2)^2 - m_1 - m_2} \right)$$

$$+ \sin(\theta_2) g$$

Persamaan tersebut dapat disederhanakan dengan permisalan. Misalkan

$$u = \dot{\theta}_1$$

$$v = \dot{\theta}_2$$

Sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial biasa orde dua tersebut dapat dituliskan kembali menjadi sistem persamaan diferensial biasa orde satu dengan empat persamaan sebagai berikut:

$$\dot{\theta}_1 = u$$

$$\dot{\theta}_2 = v$$

$$\dot{u} = \frac{\cos(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_1-\theta_2)\, m_2 u^2}{\cos(\theta_1-\theta_2)^2\, m_2 - m_1 - m_2} + \frac{\sin(\theta_1-\theta_2) l_2 m_2 v^2}{l_1(\cos(\theta_1-\theta_2)^2\, m_2 - m_1 - m_2)}$$

$$- \frac{g((\cos(\theta_1-\theta_2)\sin\theta_1 m_1 + sin\theta_1 m_2)}{l_1(\cos(\theta_1-\theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2)}$$

$$\dot{v} = \frac{-\sin(\theta_1-\theta_2)\, l_1(m_1+m_2)u^2}{l_2(\cos(\theta_1-\theta_2)^2\, m_2 - m_1 - m_2} \tag{3.16}$$

$$- \frac{\cos(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_1-\theta_2)\, m_2 v^2}{\cos(\theta_1-\theta_2)^2\, m_2 - m_1 - m_2} +$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\frac{g(m_1+m_2)(\cos(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_1)+\sin(\theta_2))}{l_2(\cos(\theta_1-\theta_2)^2\,m_2-m_1-m_2)}$$

Dari sistem persamaan pendulum ganda (3.15) di atas akan ditentukan titik kesetimbangan sistem, yakni kondisi ketika solusi sistem tidak berubah terhadap waktu.

Ketika persamaan $\dot{u}\ dan\ \dot{v}$ dikatakan setimbang dimana $\frac{du}{dt}=0$, dan $\frac{dv}{dt}=0$. Sehingga persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

persamaan $(\dot{u})$:

$$\dot{u}=\frac{m_2u^2\cos(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_1-\theta_2)}{m_2-m_1-m_2\cos(\theta_1-\theta_2)^2}+\frac{l_2m_2v^2\sin(\theta_1-\theta_2)}{l_1(m_2-m_1-m_2\cos(\theta_1-\theta_2)^2}$$
$$-\frac{g(\cos(\theta_1-\theta_2)\,\mathrm{m}_1\sin(\theta_1)+m_2\sin(\theta_2))}{l_1(\cos(\theta_1-\theta_2)^2\,m_2-m_1-m_2)}=0$$

dan persamaan $(\dot{v})$:

$$\dot{v}=\frac{l_1(m_1+m_2)u^2-\sin(\theta_1-\theta_2)}{m_2-m_1-m_2l_2(\theta_1-\theta_2)^2}-\frac{\mathrm{m}_2v^2\cos(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_1-\theta_2)}{m_2-m_1-m_2\cos(\theta_1-\theta_2)^2}$$
$$+\frac{g(m_1+m_2)(\cos(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_1)+\sin(\theta_2))}{l_2(\cos(\theta_1-\theta_2)^2\,m_2-m_1-m_2)}=0$$

Dari sistem persamaan pendulum ganda (3.15) di atas akan ditentukan titik kesetimbangan sistem, yakni kondisi ketika solusi sistem tidak berubah terhadap waktu.

Ketika persamaan $\dot{u}$ dan $\dot{v}$ dikatakan setimbang saat $\dot{\theta}_1=0$, $\dot{\theta}_2=0$, $\frac{du}{dt}=0$, dan $\frac{dv}{dt}=0$. Persamaan $\dot{\theta}_1=0$ dan $\dot{\theta}_2=0$ terpenuhi ketika $u=0$ dan $v=0$. Substitusi nilai $u=0$ dan $v=0$ menjadikan persamaan (3.16) dapat dituliskan sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\dot{u} = -\frac{g(\cos(\theta_1 - \theta_2)\,\mathrm{m}_1 \sin(\theta_1) + m_2 \sin(\theta_2))}{l_1(\cos(\theta_1 - \theta_2)^2\, m_2 - m_1 - m_2)} = 0$$

$$\dot{v} = \frac{-\sin(\theta_1 - \theta_2)}{m_2 - m_1 - m_2 l_2(\theta_1 - \theta_2)^2} + \frac{g(m_1 + m_2)(\cos(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2))}{l_2(\cos(\theta_1 - \theta_2)^2\, m_2 - m_1 - m_2)} = 0$$

Karena variabel g, m_1, m_2, l_1dan l_2 merupakan parameter yang bernilai positif maka untuk nilai kesetimbangannya untuk θ_1 dan θ_2 merupakan solusi dari sistem persamaan

$$\sin(\theta_2) = 0$$

$$\cos(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_1) = 0$$

Persamaan pertama terpenuhi ketika $\theta_2 = n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Persamaan kedua terpenuhi ketika $\theta_1 = n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Besar θ_1 dan θ_2 merupakan sudut yang dibentuk pendulum 1 dan 2 terhadap garis normal. Oleh karena itu, besar sudut θ_1 dan θ_2 dibatasi antara $[0,2\pi]$, sehingga n sebesar 0 dan 1.

Titik kesetimbangan pertama akan diperoleh karena sistem tersebut akan bernilai 0 ketika θ_1 dan θ_2 bernilai 0 juga sehingga titik kesetimbangan pertama yaitu $T_1^* = (\theta_1^*, \theta_2^*, u, v) = T_1^*(0,0,0,0)$. Untuk θ_2 bernilai 0 dan $\theta_1 = \pi$ maka titik kesetimbangan kedua yaitu $T_2^* = (\theta_1^{**}, \theta_2^{**}, u, v) = T_2^*(\pi, 0,0,0)$. Selanjutnya titik kesetimbangan yang ketiga diperoleh ketika θ_1 bernilai 0 dan $\theta_2 = \pi$ yaitu $T_3^* = (\theta_1^{***}, \theta_2^{***}, u, v) = T_3^*(0, \pi, 0,0)$. Untuk titik kesetimbangan keempat diperoleh $T_4^* = (\theta_1^{****}, \theta_2^{****}, u, v) = T_4^*(\pi, \pi, 0,0)$.

Setelah diperoleh empat titik kesetimbangan pada persamaan pendulum ganda, selanjutnya akan dicari turunan pertama dan kedua pada persamaan $\dot{u}, \dot{v}, \dot{\theta}_1$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dan persamaan ($\dot{\theta}_2$) terhadap variabel u dan v untuk membangun matriks Jacobian pada langkah selanjutnya.

Turunan pada persamaan ($\dot{u}$)

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial v} = \frac{2(um_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta))}{\cos(\theta_1 - \theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2}$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial v} = \frac{2\left(l_2 m_2 v \, sin\,(\theta_1 - \theta_2)\right)}{l_1(\cos(\theta_1 - \theta_2)^2\, m_2 - m_1 - m_2)}$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta_2} = 0$$

Turunan pada persamaan ($\dot{v}$)

$$\frac{\partial \dot{v}}{\partial u} = \frac{-2\left(u l_1 (m_1 + m_2) sin\,(\theta_1 - \theta_2)\right)}{l_2(\cos(\theta_1 - \theta_2)^2\, m_2 - m_1 - m_2)}$$

$$\frac{\partial \dot{v}}{\partial v} = -\frac{2(m_2 v\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) \sin\left(\theta_{!1} - \theta_2\right)\right)}{\cos(\theta_1 - \theta_2)^2\, m_2 - m_1 - m_2}$$

$$\frac{\partial \dot{v}}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{v}}{\partial \theta_2} = 0$$

Turunan pada persamaan $\dot{\theta}_1$

$$\frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial u} = 1$$

$$\frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial v} = 0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial \theta_2} = 0$$

Turunan pada persamaan $\dot{\theta}_2$

$$\frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial v} = 1$$

$$\frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial \theta_2} = 0$$

Sehingga dapat dibangun suatu matriks Jacobian sebagai berikut:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} & \frac{\partial \dot{u}}{\partial v} & \frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \dot{u}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \dot{v}}{\partial u} & \frac{\partial \dot{v}}{\partial v} & \frac{\partial \dot{v}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \dot{v}}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial u} & \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial v} & \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial u} & \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial v} & \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}$$

Maka,

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \frac{2(um_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta))}{\cos(\theta_1 - \theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2} & \frac{2\left(l_2 m_2 v \, sin\,(\theta_1 - \theta_2)\right)}{l_1(\cos(\theta_1 - \theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2)} & 0 & 0 \\ -\frac{2\left(ul_1(m_1 + m_2) sin\,(\theta_1 - \theta_2)\right)}{l_2(\cos(\theta_1 - \theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2)} & -\frac{2(m_2 v(\cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2))}{\cos(\theta_1 - \theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Setelah didapat matriks jacobian pada persamaan pendulum ganda diatas, selanjutnya akan dilinierisasi di sekitar titik kesetimbangan pertama hingga titik kesetimbangan keempat (T_1, T_2, T_3, T_4)

Linierisasi pada titik kesetimbangan pertama $T_1^* = (\theta_1^*, \theta_2^*, u, v) = T_1^*(0,0,0,0)$

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \frac{2(um_2\cos(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_1-\theta))}{\cos(\theta_1-\theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2} & \frac{2\left(l_2 m_2 v\, sin\,(\theta_1-\theta_2)\right)}{l_1(\cos(\theta_1-\theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2)} & 0 & 0 \\ -\frac{2\left(ul_1(m_1+m_2)sin\,(\theta_1-\theta_2)\right)}{l_2(\cos(\theta_1-\theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2)} & -\frac{2(m_2 v(\cos(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_1-\theta_2))}{\cos(\theta_1-\theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{K}_1^*) = \begin{bmatrix} \frac{2(0m_2\cos(0-0)\sin(0-0))}{\cos(0-0)^2 m_2 - m_1 - m_2} & \frac{2\left(l_2 m_2 0\, sin\,(0-0)\right)}{l_1(\cos(0-0)^2 m_2 - m_1 - m_2)} & 0 & 0 \\ -\frac{2\left(0(m_1+m_2)sin\,(0-0)\right)}{l_2(\cos(0-0)^2 m_2 - m_1 - m_2)} & -\frac{2(m_2 0(\cos(0-0)\sin(0-0))}{\cos(0-0)^2 m_2 - m_1 - m_2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{K}_1^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari titik kesetimbangan pertama yaitu $\lambda_1 = 0$

Dengan cara yang sama kita juga dapat mencari niai eigen dari titik kesetimbangan yang kedua dimana $T_2^* = (\theta_1^{**}, \theta_2^{**}, u, v) = T_2^*(\pi, 0,0,0)$, sehingga nilai eigenya sebagai berikut:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \frac{2(um_2\cos(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_1-\theta))}{\cos(\theta_1-\theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2} & \frac{2\left(l_2 m_2 v\, sin\,(\theta_1-\theta_2)\right)}{l_1(\cos(\theta_1-\theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2)} & 0 & 0 \\ -\frac{2\left(ul_1(m_1+m_2)sin\,(\theta_1-\theta_2)\right)}{l_2(\cos(\theta_1-\theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2)} & -\frac{2(m_2 v(\cos(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_1-\theta_2))}{\cos(\theta_1-\theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$J(K_2^*) = \begin{bmatrix} \frac{2(0m_2\cos(\pi-0)\sin(\pi-0))}{\cos(\pi-0)^2 m_2 - m_1 - m_2} & \frac{2(l_2 m_2 0\, sin\,(\pi-0))}{l_1(\cos(\pi-0)^2 m_2 - m_1 - m_2)} & 0 & 0 \\ -\frac{2(0l_1(m_1+m_2)sin\,(\pi-0))}{l_2(\cos(\pi-0)^2 m_2 - m_1 - m_2)} & -\frac{2(m_2 0(\cos(\pi-0)\sin(\pi-0))}{\cos(\pi-0)^2 m_2 - m_1 - m_2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J(K_2^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari titik kesetimbangan kedua yaitu $\lambda_2 = 0$

Begitu juga untuk mencari niai eigen dari titik kesetimbangan yang ketiga dimana $T_3^* = (\theta_1^{***}, \theta_2^{***}, u, v) = T_3^*(0, \pi, 0,0)$, sehingga nilai eigenya sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{2(um_2\cos(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_1-\theta))}{\cos(\theta_1-\theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2} & \frac{2(l_2 m_2 v\, sin\,(\theta_1-\theta_2))}{l_1(\cos(\theta_1-\theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2)} & 0 & 0 \\ -\frac{2(ul_1(m_1+m_2)sin\,(\theta_1-\theta_2))}{l_2(\cos(\theta_1-\theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2)} & -\frac{2(m_2 v(\cos(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_1-\theta_2))}{\cos(\theta_1-\theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J(K_3^*) = \begin{bmatrix} \frac{2(0m_2\cos(0-\pi)\sin(0-\pi))}{\cos(0-\pi)^2 m_2 - m_1 - m_2} & \frac{2(l_2 m_2 0\, sin\,(0-\pi))}{l_1(\cos(0-\pi)^2 m_2 - m_1 - m_2)} & 0 & 0 \\ -\frac{2(0l_1(m_1+m_2)sin\,(0-\pi))}{l_2(\cos(0-\pi)^2 m_2 - m_1 - m_2)} & -\frac{2(m_2 0(\cos(0-\pi)\sin(0-\pi))}{\cos(0-\pi)^2 m_2 - m_1 - m_2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J(K_3^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari titik kesetimbangan ketiga yaitu $\lambda_3 = 0$

Begitu juga untuk mencari niai eigen dari titik kesetimbangan yang keempat dimana $T_4^* = (\theta_1^{****}, \theta_2^{****}, u, v) = T_4^*(\pi, \pi, 0,0)$, sehingga nilai eigenya sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \frac{2(um_2\cos(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_1-\theta))}{\cos(\theta_1-\theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2} & \frac{2\left(l_2 m_2 v\, sin\,(\theta_1-\theta_2)\right)}{l_1(\cos(\theta_1-\theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2)} & 0 & 0 \\ -\frac{2\left(ul_1(m_1+m_2)sin\,(\theta_1-\theta_2)\right)}{l_2(\cos(\theta_1-\theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2)} & -\frac{2(m_2 v(\cos(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_1-\theta_2))}{\cos(\theta_1-\theta_2)^2 m_2 - m_1 - m_2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{K}_4^*) = \begin{bmatrix} \frac{2(0m_2\cos(\pi-\pi)\sin(\pi-\pi))}{\cos(\pi-\pi)^2 m_2 - m_1 - m_2} & \frac{2\left(l_2 m_2 0\, sin\,(\pi-\pi)\right)}{l_1(\cos(\pi-\pi)^2 m_2 - m_1 - m_2)} & 0 & 0 \\ -\frac{2\left(0l_1(m_1+m_2)sin\,(0-\pi)\right)}{l_2(\cos(\pi-\pi)^2 m_2 - m_1 - m_2)} & -\frac{2(m_2 0(\cos(\pi-\pi)\sin(\pi-\pi))}{\cos(\pi-\pi)^2 m_2 - m_1 - m_2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{K}_4^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari titik kesetimbangan keempat yaitu $\lambda_4 = 0$

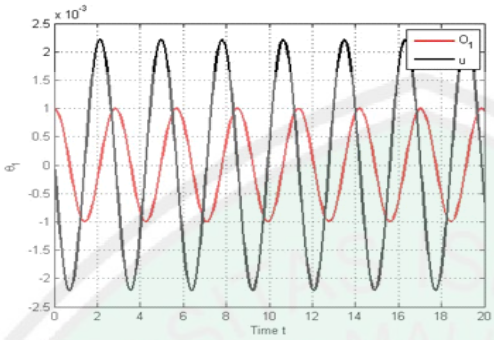
Dari hasil analisa dinamik, diperoleh empat titik setimbangan dengan semua nilai eigen bernilai nol untuk setiap titik. Hal ini berarti bahwa sifat kestabilan dari setiap titik kesetimbangan tidak dapat ditentukan karena perilaku sistem linier yang merupakan pendekatan dari sistem non linier pendulum berganda tidak dapat mewakili perilaku dari sistem non linier. Nilai eigen bernilai nol pada sistem linier tidak dapat menyimpulkan kestabilan dari sisten non linier. Pada bagian berikutnya, akan ditampilkan simulasi numerik dari sistem pendulum ganda agar perilaku dinamik dari solusi sistem dapat diketahui.

3.3 Simulasi dan Interpretasi Pendulum Ganda Menggunakan ODE 45

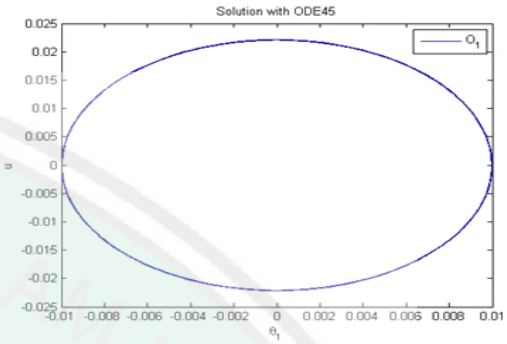
Dalam fisika dan matematika, di bidang sistem dinamik, pendulum ganda adalah pendulum dengan pendulum lain yang terpasang di ujungnya, dan merupakan suatu sistem fisik sederhana yang menunjukkan perilaku

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dinamis dengan sensitivitas yang kuat terhadap kondisi awal. Sebagai pembanding simulasi pendulum tunggal dimana simulsi ini akan digunakan sebagai pembanding pendulum ganda :



Gambar 3.3. a
Gerak Single Pendulum



Gambar 3.3. b
Kecepatan Sudut Single Pendulum

Kedua Gambar tersebut merupakan gambar *Single* pendulum tanpa redaman dengan nilai parameternya $g = 9.8$ dan $l = 2$ dalam satuan Internasional. Syarat awal diberikan $\theta_1(0) = 0.1$ seperti yang terlihat pada gambar tersebut, gerak pendulum tidak menuju titik kesetimbangan $(0,0)$. Pada gambar kedua menunjukan potret fase dari pendulum terhadap kecepatan sudut. Nampak bahwa *single* pendulum tersebut akan mencapai kecepatan maksimal saat nilai θ_1 berada pada titik paling kritis dan akan mencapai kecepatan minimum saat θ_1 berada pada titik setimbang pendulum. Selanjutnya akan disimulasiakan gerakan pendulum ganda dengan mengaitkan pendulum lain pada ujung pendulum pertama.

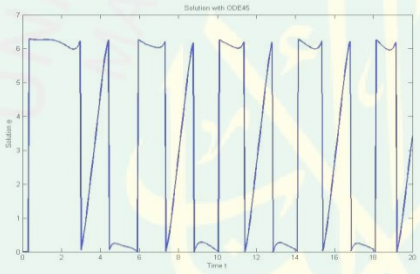
Pendulum ganda merupakan suatu sitem persamaan yang tidak setabil apabila tidak diberikan nilai kontrol pada sistemnya. Sehingga gerakan pendulum ganda tanpa diberikan redaman pada ruang hampa tidak beraturan dan sangat sensitif terhadap nilai awal.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

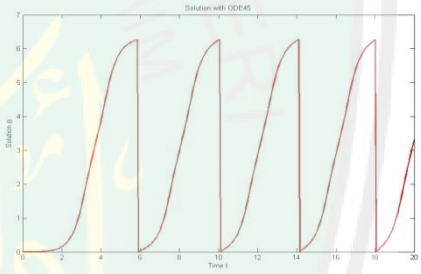
Runge-Kutta merupakan salah satu metode numerik untuk menyelesaikan PDB yang cukup populer dan sudah banyak teruji konvergensi, stabilitas, dan efesiensinya. Dalam penelitian ini digunakan metode Runge-Kutta orde 45. ODE 45 adalah salah satu metode numerik Runge kutte orde 45 yang akan digunakan untuk membantu mencari bentuk simulasi dari gerak pendulum ganda.

3.3.1 Simulasi $l_1 > l_2, m_1 = m_2$ di sekitar Titik Kesetimbangan

Berikut merupakan hasil gambar simulasi disekitar titik kesetimbangan pertama dengan menggunakan aplikasi matlab:

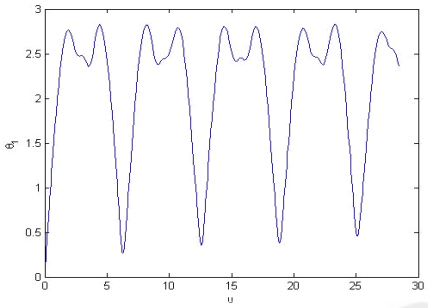


Gambar 3.3.1. a
Gerak Pendulum I disekitar Titik Kesetimbangan Pertama dengan Parameter $l_1 > l_2 \; dan \; m_1 = m_2$

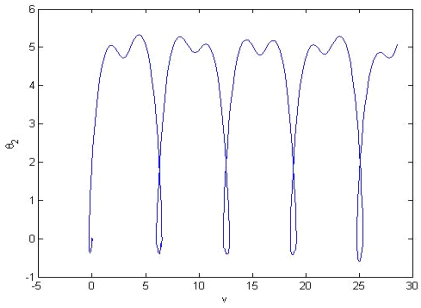


Gambar 3.3.1. b
Gerak Pendulum II disekitar Titik Kesetimbangan Pertama dengan Parameter $l_1 > l_2 \; dan \; m_1 = m_2$

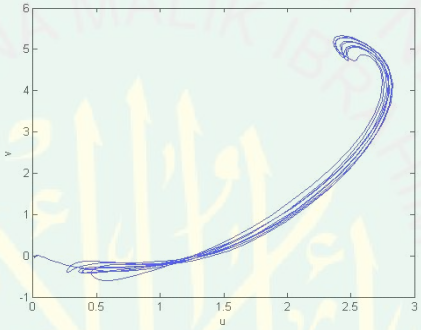
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.3.1. c
Kecepatan Sudut Pendulum I disekitar Titik Kesetimbangan Pertama dengan Parameter $l_1 > l_2\ dan\ m_1 = m_2$



Gambar 3.3.1. d
Kecepatan Sudut Pendulum II disekitar Titik Kesetimbangan Pertama dengan Parameter $l_1 > l_2\ dan\ m_1 = m_2$



Gambar 3.3.1. e
Perbandingan Kecepatan Sudut Pendulum 1 dengan Pendulum II disekitar Titik Kesetimbangan Pertama dengan Parameter $l_1 > l_2\ dan\ m_1 = m_2$

Tabel 3.3.1. 1 Simulasi $l_1 > l_2, m_1 = m_2$ di sekitar Titik Kesetimbangan Pertama

Waktu	Posisi pendulum I θ_1 (rad)	Posisi pendulum II θ_2 (rad)	Kecepatan sudut pendulum I	Kecepatan sudut pendulum II
0	0.1 rad	0 rad	0	0
5	0.2103 rad	5.911 rad	0.1917	-0.29
10	0.022 rad	6.252 rad	0.2399	-0.08828
15	5.994 rad	0.5764 rad	1.559	0.1844
20	3.423 rad	3.323 rad	2.976	3.855

Gambar 3.3.1.a menunjukan pergerakan pendulum ganda tanpa redaman pada ruang hampa pada suatu selang waktu dengan nilai parameternya $l_1 = 2, l_2 = 1, m_1 = 1, m_2 = 1$ dan $g = 9.8$ dengan syarat awal $u = 0.01, v = 0, \theta_1 = 0, \theta_2 =$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

0. Tampak bahwa pergerakan pendulum pertama pada gambar 3.3.1.b, pendulum pertama pada selang waktu $t = 0$ berada pada posisi 0.1 rad. Sedangkan pendulum kedua pada gambar 3.3.1.c pada selang waktu $t = 0$ berada pada posisi 0 rad. Hal tersebut sesuai dengan nilai awal yang diberikan. Sedangkan pada waktu $t = 5$ posisi pendulum 1 pada posisi 0.2103 rad dan pendulum 2 berada pada posisi 5.911 rad. Pendulum 1 berada pada kuadran 3 sebalah kiri nilai normal dan pendulum 2 berada pada kuadran 3 sebalah kanan niali normal. Pada selang waktu $t = 10$ pendulum 1 berada pada posisi 0.022 rad dan pendulum 2 berada pada posisi 6.252 rad. Pendulum 1 dan 2 berada pada kuadran 4 dan berada di sebelah kanan nilai normal. Pada selang waktu $t = 15$ pendulum 1 berada pada posisi 5.994 rad dan pendulum 2 berada pada posisi 0.5764 rad. Pendulum 1 dan 2 berada pada kuadran 4, pendulum pertama berada sebelah kanan nilai normal dan pendulum dua berada di sebelah kiri nilai normal. Sedangkan pada selang waktu $t = 20$ pendulum 1 berada pada posisi 3.423 rad dan pendulum 2 berada pada posisi 3.323 rad. Pendulum 1 dan 2 berada pada kuadran 2 dan berada di sebelah kanan nilai normal.

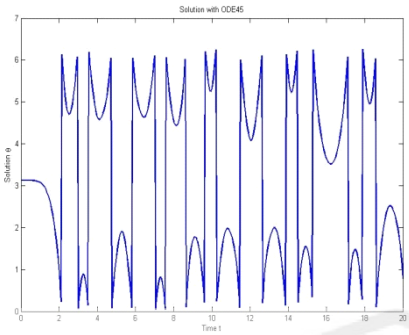
Untuk nilai awal dan nilai parameter yang sama dapat diketahui kecepatan maksimal dan minimum pendulum ganda. Pada gambar 3.3.1.d merupakan grafik yang menujukan kecepatan sudut pada pendulum satu terhadap θ_1. Pada waktu $t = 6.25$ merupakan kecepatan minimum dengan kecepatan sudutnya sebesar 0.266 rad. Sedangkan pendulum pertama akan mencapai kecepatan maksimalnya pada waktu $t = 4.419$ dengan kecepatan sudutnya sebesar 2.826 rad. Sedangkan perubahan kecepatan sudut pada pendulum dua akan ditunjukan pada gambar ke lima. Pada pendulum kedua akan mencapai kecepata minimumnya saat $t = 25.02$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dengan kecepatan sudutnya sebesar $-0.5998\,rad$ dan kecepatan maksimumnya saat $t = 4.398$ dengan kecepatan sudut sbesar $5.337\,rad$. Kecepatan bernilai negative pada pendulum kedua tersebut berarti gerak pendulum akan mengalami perlawanan dari gerak normal.

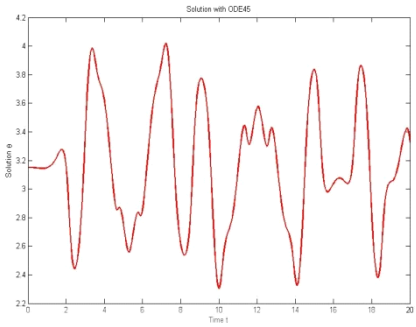
Gambar 3.3.1.e menunjukan grafik perbadingan antara perubahan kecepatan pendulum satu dan dua terhadap u dan v. Pada gambar tersebut nampak bahwa saat pendulum satu mencapai kecepatan maksimum pendulum dua tidak mencapai kecepatan maksimumnya. Begitu pula sebaliknya dan untuk kecepatan minimumnya juga. Sedangkan dengan parameter sama akan tetapi dengan nilai awal berbeda diperoleh simulasinya sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



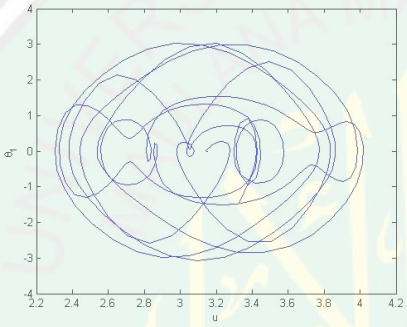
Gambar 3.3.1. f

Gerak Pendulum I disekitar Titik Kesetimbangan Kedua dengan Parameter $l_1 > l_2\ dan\ m_1 = m_2$



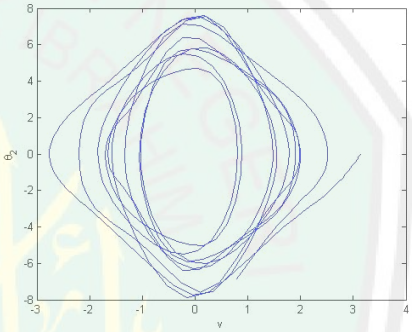
Gambar 3.3.1. g

Gerak Pendulum II disekitar Titik Kesetimbangan Kedua dengan Parameter $l_1 > l_2\ dan\ m_1 = m_2$



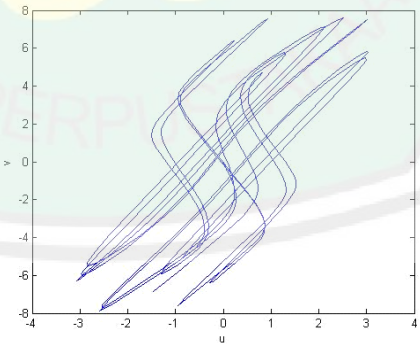
Gambar 3.3.1. h

Kecepatan Sudut Pendulum I disekitar Titik Kesetimbangan Kedua dengan Parameter $l_1 > l_2\ dan\ m_1 = m_2$



Gambar 3.3.1. i

Kecepatan Sudut Pendulum II disekitar Titik Kesetimbangan Kedua dengan Parameter $l_1 > l_2\ dan\ m_1 = m_2$



Gambar 3.3.1. j

Perbandingan Kecepatan Sudut Pendulum I dan Pendulum II disekitar Titik Kesetimbangan Kedua dengan Parameter $l_1 > l_2\ dan\ m_1 = m_2$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Tabel 3.3.1. 2 Simulasi $l_1 > l_2, m_1 = m_2$ di sekitar Titik Kesetimbangan Kedua

Waktu	Posisi pendulum I θ_1 (rad)	Posisi pendulum II θ_2 (rad)	Kecepatan sudut pendulum I	Kecepatan sudut pendulum II
0	3.132 rad	3.152 rad	-0.4633	0
5	1.3 rad	2.749 rad	-0.01655	0.1515
10	5.328 rad	2.303 rad	0.7218	2.404
15	1.482 rad	3.836 rad	0.8605	2.632
20	0.784 rad	3.326 rad	1.151	2.6

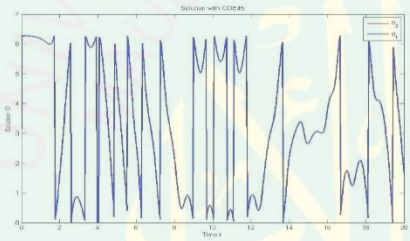
Selanjutnya akan dicari simulasi dari pendulum ganda disekitar nilai awal yang kedua $u = \pi + 0.01, v = \pi - 0.01, \theta_1 = 0, \theta_2 = 0$ dan nilai parameter yang sama seperti sebelumnya. Tampak bahwa pergerakan pendulum pertama pada gambar 3.3.1.g, pendulum pertama pada selang waktu $t = 0$ berada pada posisi 3.132 rad. Sedangkan pendulum kedua pada gambar 3.3.1.h pada selang waktu $t = 0$ berada pada posisi 3.152 rad. Sedangkan pada waktu $t = 5$ posisi pendulum 1 pada posisi 1.3 rad dan pendulum 2 berada pada posisi 2.749 rad. Pada selang waktu $t = 10$ pendulum 1 berada pada posisi 5.328 rad dan pendulum 2 berada pada posisi 2.303 rad. Pada selang waktu $t = 15$ pendulum 1 berada pada posisi 1.482 rad dan pendulum 2 berada pada posisi 3.836 rad. Sedangkan pada selang waktu $t = 20$ pendulum 1 berada pada posisi 0.784 rad dan pendulum 2 berada pada posisi 3.326 rad.

Untuk nilai awal dan nilai parameter yang sama dapat diketahui kecepatan maksimal dan minimum pendulum ganda. Pada gambar 3.3.1.i merupakan grafik yang menunjukkan kecepatan sudut pada pendulum satu terhadap θ_1. pada pendulum satu akan mencapai kecepatan minimum saat simpangan sudut pada pergerakan pendulum cenderung kecil. Contohnya pada waktu $t = 0$ maka

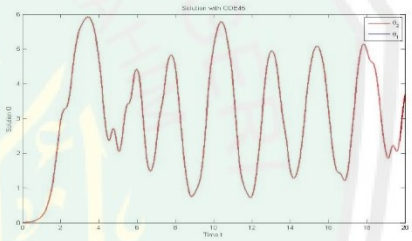
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

simpangan sudut pada pendulum 1 sebesar $0.01\ rad$ dari titik normal sehingga kecepatan sudut saat waktu tersebut juga cenderung kecil. Sedangkan kecepatan maksimum akan dicapai saat simpangan sudut pada pendulum mencapai nilai ekstrim pada selang waktu $t = 2.969$ dengan kecepatan sudut sebesar $3.025\ rad$ hal tersebut juga berlaku untuk pendulum kedua seperti yang tertera pada gambar 3.3.1.j.

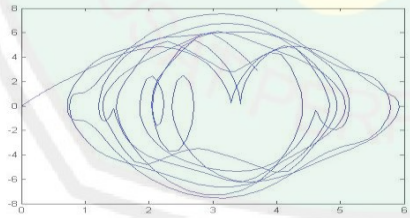
3.3.2 Simulasi $l_1 = l_2, m_1 > m_2$ di sekitar Titik Kesetimbangan



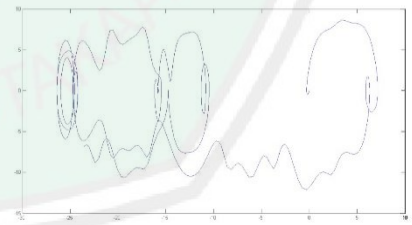
Gambar 3.3.2. a
Gerak Pendulum I disekitar Titik Kesetimbangan Pertama dengan Parameter $l_1 = l_2\ dan\ m_1 > m_2$



Gambar 3.3.2. b
Gerak Pendulum II disekitar Titik Kesetimbangan Pertama dengan Parameter $l_1 = l_2\ dan\ m_1 > m_2$

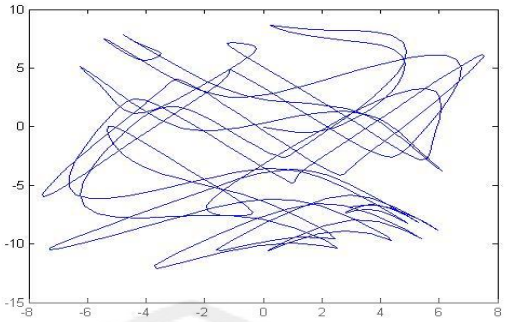


Gambar 3.3.2. c
Kecepatan sudut Pendulum I disekitar Titik Kesetimbangan Pertama dengan Parameter $l_1 = l_2\ dan\ m_1 > m_2$



Gambar 3.3.2. d
Kecepatan sudut Pendulum II disekitar Titik Kesetimbangan Pertama dengan Parameter $l_1 = l_2\ dan\ m_1 > m_2$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.3.2. e

Perbandingan Kecepatan sudut Pendulum I dan Pendulum II disekitar Titik Kesetimbangan Pertama dengan Parameter $l_1 = l_2\ dan\ m_1 > m_2$

Tabel 3.3.2. 1 Simulasi $l_1 = l_2, m_1 > m_2$ di sekitar Titik Kesetimbangan Pertama

Waktu	Posisi pendulum I θ_1 (rad)	Posisi pendulum II θ_2 (rad)	Kecepatan sudut pendulum I	Kecepatan sudut pendulum II
0	$0.1\ rad$	$0\ rad$	0	-0.02945
5	4.671 rad	$2.092\ rad$	-1.589	-9.255
10	$0.2741\ rad$	5.065 rad	3.027	-3.41
15	$2.674\ rad$	$4.295\ rad$	3.948	0.6555
20	1.598 rad	3.696 rad	2.926	-6.822

Gambar 3.3.2.a menunjukan pergerakan pendulum ganda pada suatu selang waktu dengan nilai parameternya $l_1 = 1, l_2 = 1, m_1 = 2, m_2 = 1$ dan $g = 9.8$ dengan syarat awal $u = 0.01, v = 0, \theta_1 = 0, \theta_2 = 0$. Tampak bahwa pergerakan pendulum pertama pada gambar 3.3.2.b, pendulum pertama pada selang waktu $t = 0$ berada pada posisi $0.1\ rad$. Sedangkan pendulum kedua pada gambar 3.3.2.c pada selang waktu $t = 0$ berada pada posisi $0\ rad$. Hal tersebut sesuai dengan nilai awal yang diberikan. Sedangkan pada waktu $t = 5$ posisi pendulum 1 pada posisi $4.671\ rad$ dan pendulum 2 berada pada posisi $2.092\ rad$. Pada selang waktu $t = 10$ pendulum 1 berada pada posisi $0.2741\ rad$ dan pendulum 2 berada pada posisi $5.065\ rad$. Pada selang waktu $t = 15$ pendulum 1 berada pada posisi $2.674\ rad$

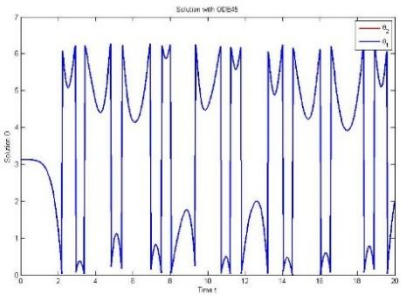
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dan pendulum 2 berada pada posisi $4.295\ rad$. Sedangkan pada selang waktu $t = 20$ pendulum 1 berada pada posisi $1.598\ rad$ dan pendulum 2 berada pada posisi $3.696\ rad$.

Untuk nilai awal dan nilai parameter yang sama dapat diketahui besar kecepatan sudut maksimal dan minimum pendulum ganda. Pada gambar 3.3.2.d merupakan grafik yang menunjukkan kecepatan sudut pada pendulum satu terhadap θ_1. Pada waktu $t = 3.174$ merupakan kecepatan minimum dengan kecepatan sudutnya sebesar $-7{,}54\ rad$. Sedangkan pendulum pertama akan mencapai kecepatan maksimalnya pada waktu $t = 3.163$ dengan kecepatan sudutnya sebesar $7.548\ rad$. Sedangkan perubahan kecepatan sudut pada pendulum dua akan ditunjukan pada gambar ke 3.3.2.e. Pada pendulum kedua akan mencapai kecepata minimumnya dengan kecepatan sudutnya sebesar $-12{,}09\ rad$ dan kecepatan maksimumnya sebesar $8.62\ rad$. Kecepatan bernilai negatif pada pendulum kedua tersebut berarti gerak pendulum akan mengalami perlawanan dari gerak normal.

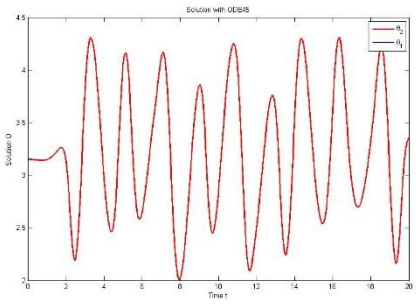
Gambar terakhir menunjukan grafik perbadingan antara perubahan kecepatan pendulum satu dan dua terhadap u dan v. Pada gambar 3.3.2.f tersebut nampak bahwa saat pendulum satu mencapai kecepatan maksimum pendulum dua tidak mencapai kecepatan maksimumnya. Begitu pula sebaliknya dan untuk kecepatan minimumnya juga. Sedangkan dengan parameter sama akan tetapi dengan nilai awal berbeda diperoleh simulasinya sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



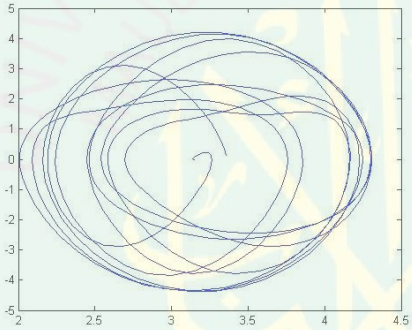
Gambar 3.3.2. f

Gerak Pendulum I disekitar Titik Kesetimbangan Kedua dengan Parameter $l_1 = l_2\ dan\ m_1 > m_2$



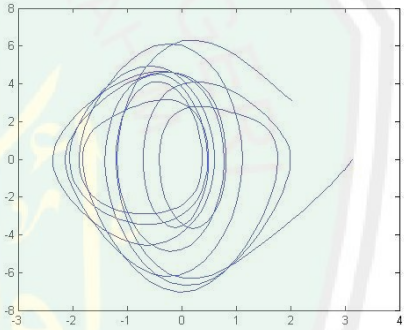
Gambar 3.3.2. g

Gerak Pendulum II disekitar Titik Kesetimbangan Kedua dengan Parameter $l_1 = l_2\ dan\ m_1 > m_2$



Gambar 3.3.2. h

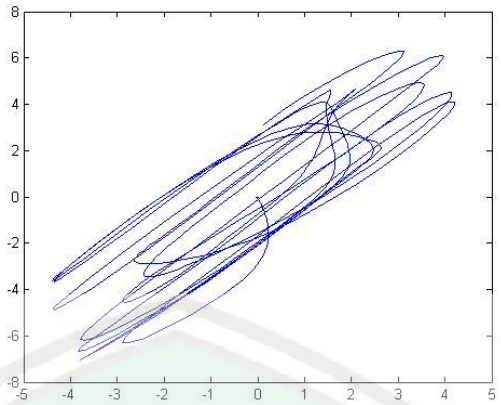
Kecepatan Sudut Pendulum I disekitar Titik Kesetimbangan Kedua dengan Parameter $l_1 = l_2\ dan\ m_1 > m_2$



Gambar 3.3.2. i

Kecepatan Sudut Pendulum II disekitar Titik Kesetimbangan Kedua dengan Parameter $l_1 = l_2\ dan\ m_1 > m_2$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.3.2. j

Perbandingan Kecepatan sudut Pendulum I dan Pendulum II disekitar Titik Kesetimbangan Kedua dengan Parameter $l_1 = l_2\ dan\ m_1 > m_2$

Tabel 3.3.2. 2 Simulasi $l_1 = l_2, m_1 > m_2$ di sekitar Titik Kesetimbangan Kedua

Waktu	Posisi pendulum I θ_1 (rad)	Posisi pendulum II θ_2 (rad)	Kecepatan sudut pendulum I	Kecepatan sudut pendulum II
0	3.132 rad	3.152 rad	-0.005652	0
5	0.9487 rad	4.039 rad	2.015	2.894
10	4.559 rad	2.828 rad	2.098	1.139
15	4.745 rad	3.108 rad	-2.171	-2.609
20	2.017 rad	3.355 rad	0.1319	3.114

Selanjutnya akan dicari simulasi dari pendulum ganda disekitar syarat awal yang kedua $u = \pi + 0.01, v = \pi - 0.01, \theta_1 = 0, \theta_2 = 0$ dan nilai parameter yang sama seperti sebelumnya. Tampak bahwa pergerakan pendulum pertama pada gambar 3.3.2.g, pendulum pertama dan kedua pada selang waktu $t = 0$ berada pada posisi $3.132\ rad$ dan $3.152\ rad$. Sedangkan pada waktu $t = 5$ posisi pendulum 1 pada posisi $0.9487\ rad$ dan pendulum 2 berada pada posisi $4.039\ rad$. Pada selang waktu $t = 10$ pendulum 1 berada pada posisi $4.559\ rad$ dan pendulum 2 berada pada posisi $2.828\ rad$. Pada selang waktu $t = 15$ pendulum 1 berada pada posisi $4.745\ rad$ dan pendulum 2 berada pada posisi $3.108\ rad$. Sedangkan pada selang

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

waktu $t = 20$ pendulum 1 berada pada posisi $2.017\ rad$ dan pendulum 2 berada pada posisi $3.355\ rad$.

Untuk nilai awal dan nilai parameter yang sama dapat diketahui kecepatan maksimal dan minimum pendulum ganda. Pada gambar 3.3.2.i merupakan grafik yang menujukan kecepatan sudut pada pendulum satu terhadap θ_1. pada pendulum satu akan mencapai kecepatan minimum saat simpangan sudut pada pergerakan pendulum cenderung kecil. Contohnya pada waktu $t = 0$ maka simpangan sudut pada pendulum 1 sebesar $0.01\ rad$ dari titik normal sehingga kecepatan sudut saat waktu tersebut juga cenderung kecil. Sedangkan kecepatan maksimum akan dicapai saat simpangan sudut pada pendulum mencapai nilai ekstirm pada selang waktu $t = 2.969$ dengan kecepatan sudut sebesar $3.025\ rad$ hal tersebut juga berlaku untuk pendulum kedua seperti yang teretera pada gambar 3.3.2.j. Sehingga semakin besar besar sudut pendulum akan berdampak terhadap kecepatan sudut pendulum yang semakin besar pula dan pendulum ganda merupakan suatu sistem yang sensitif terhadap nilai awal dan parameternya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil kontruksi model pendulum ganda menggunakan fungsi lagrangian yang dibatasi pada ruang dua dimensi telah sebelumnya, diperoleh sistem persamaan diffrensial biasa orde satu sebagai berikut:

$$\dot{\theta}_1 = u$$

$$\dot{\theta}_2 = v$$

$$\dot{u} = \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_1 - \theta_2)\, m_2 u^2}{\cos(\theta_1 - \theta_2)^2\, m_2 - m_1 - m_2} + \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2) l_2 m_2 v^2}{l_1(\cos(\theta_1 - \theta_2)^2\, m_2 - m_1 - m_2)}$$

$$\dot{v} = \frac{-\sin(\theta_1 - \theta_2)\, l_1(m_1 + m_2)u^2}{l_2(\cos(\theta_1 - \theta_2)^2\, m_2 - m_1 - m_2} - \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_1 - \theta_2)\, m_2 v^2}{\cos(\theta_1 - \theta_2)^2\, m_2 - m_1 - m_2} +$$

$$\frac{g(m_1 + m_2)(\cos(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2))}{l_2(\cos(\theta_1 - \theta_2)^2\, m_2 - m_1 - m_2)}$$

Simulasi numerik model pendulum ganda menggunakan metode ODE 45 dengan menggunakan nilai awal $m_1 = 1, m_2 = 1, L_1 = 2$ dan $l_2 = 1$ disekitar nilai kesetimbang yang tertera pada grafik simulasi pada Gambar 3.3.1.1 (a) sampai Gambar 3.3.1.5. Dari grafik tersebut diperoleh hasil simpangan sudut dari kedua pendulum dan perpindahan posisi dari pendulum tersebut.

Hasil dari simulasi pendulum ganda diperoleh kesimpulan bahwa pendulum ganda merupakan suatu sistem yang sensitif terhadap kondisi awal. Semakin besar sudut pendulum saat berayun akan berdampak terhadap kecepatan sudut pendulum yang semakin besar pula.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

4.2 Saran

Penelitian ini mendapatkan simulasi pendulum ganda tanpa redaman mengguakan metode ODE 45 dengan bantuan aplikasi matlab. Selanjutnya untuk mengetahui simulasi gerak pendulum ganda terbaik untuk menggunakan metode lain dengan orde lebih tinggi dan diberikan nilai redaman pada sistemnya beserta gaya-gaya eksternal yang bekerja pada pendulum supaya modelnya faktualis. Selanjutnya dibandingkan untuk mendapatkan kesimpulan untuk perbandingan kelebihan dan kekurangan masing-masing metode serta mengetahui metode yang paling efisien.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR RUJUKAN

Aam, A. 2004. *Tafsir Kontemporer*. Bandung: Khasanah Intelektual.

Acu, Y., Pahlanop, B. and Antasari, A. 2017. Model Sederhana Gerak Osilator dengan Massa Berubah Terhadap Waktu Menggunakan Metode Runge Kutta. *Jurnal Positron*, VII(2): 42–47.

Al-Imam Abu Fida Isma'il Ibnu Kasir Ad-Dimasyqi. 2003. Tafsir Ibnu Kasir Juz 15. Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Argo, B. D. (2010). Metode Numerik. Malang: UB Press.

Chapra, S.C. 2006. Applied Numerical Methods with Matlab. Second Edition. London: McGraw-Hill. Inc.

Conte, S. D. dan Boor, C.1993. Dasar- Dasar Analisis Numerik. Jakarta: Erlangga.

Djojodiharjo, H. (1983). Metode Numerik. Jakarta: Erlangga

Elbori, A & Abdalsmd, L. 2017. *Simulation of Simple Pendulum International*. Journal of Software Engineering and Simulation, Volume 3:01-13.

Gupta, K Mukul, dkk. (2014). *Mass and length dependent chaotic behavior of a double pendulum*. IFAC Proceeding Volumes 47 (1), 297-301.

Hoffman, J. D., & Frankel, S. (2001). Numerikal methods for engineers and scientists. CRC press.

Imam, A.Q. 2009. *Tafsir Al-Qurtubi*. Jakarta: Pustak Azzam.

Munir, R. (2006). Metode Numerik. Bandung: Informatika.

Rafsenjani, H., Vantri P, K, Agustina E. dan Asty P. dkk. 2013. *Metode Lagrange dan Mekanika Hamiltonan.* Makalah Kajian Sains Fisika I. Surabaya: SPS-UNESA. Awal Juni.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran 1

- **Fungsi Sistem Pendulum Ganda Menggunakan Aplikasi MATLAB**

```
function dydt = vdp1(t,y)
global m1 m2 l1 l2 g
O1=y(1); O2=y(2); u=y(3); v=y(4);
dO1=u;
dO2=v;
du=cos(O1-O2)*sin(O1-O2)*m2*u^2/((cos(O1-O2))^2*m2-m1-
m2)+sin(O1-O2)*l2*m2*v^2/(l1*((cos(O1-O2))^2*m2-m1-m2))-
g*(cos(O1-O2)*sin(O2)*m2+sin(O1)*m1+sin(O1)*m2)/(l1*((cos(O1-
O2))^2*m2-m1-m2));
dv=-sin(O1-O2)*l1*(m1+m2)*u^2/(l2*((cos(O1-O2))^2*m2-m1-m2))-
cos(O1-O2)*sin(O1-O2)*m2*v^2/((cos(O1-O2))^2*m2-m1-
m2)+g*(m1+m2)*(cos(O1-O2)*sin(O1)+sin(O2))/(l2*((cos(O1-
O2))^2*m2-m1-m2));
dydt = [dO1; dO2; du; dv];
end
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Lampiran 2

- **Gerak Pendulum menggunakan Metode ODE 45 dalam MATLAB**

```
clc; clear all; close all;
global m1 m2 l1 l2 g
%m1=2; m2=1; l1=1; l2=1; g=9.8;
%NA=[0.01;0.01;0; 0];
%m1=2; m2=1; l1=2; l2=1; g=9.8;
%m1=2; m2=1; l1=1; l2=2; g=9.8;
m1=2; m2=1; l1=1; l2=1; g=9.8;
%m1=1; m2=1; l1=1; l2=2; g=9.8;
%m1=1; m2=1; l1=1; l2=1; g=9.8;
%m1=1; m2=2; l1=2; l2=1; g=9.8;
%m1=1; m2=2; l1=1; l2=2; g=9.8;
L=l1+l2;
NA=[0.01;0.0;0; 0];
%NA=[0.01;0.01;0; 0];
%NA=[pi+0.01;pi-0.01;0; 0];
%NA=[0;pi;0; 0];
%NA=[0-0.01; pi+0.01; 0;0];
%NA=[0.00;0.01;0; 0];
Time=0:0.04:20;
[t,Sol] = ode45(@vdp1,Time,NA);
O1=Sol(:,1);
O2=Sol(:,2);
u=Sol(:,3);
v=Sol(:,4);
figure(1);
%subplot(2,1,1);
%plot(t,O1,'b-',t,O2,'r-','LineWidth',2); grid on;
plot(t,mod(Sol(:,1),2*pi),'r-',t,mod(Sol(:,2),2*pi),'b-
','LineWidth',2);
title('Solution with ODE45');
xlabel('Time t');
ylabel('Solution O');
legend('\theta_2','\theta_1');
figure(3);
%plot(mod(O1,2*pi),u)
plot(O1,u)
%plot(mod(O1,2*pi),u,'LineWidth',2)
figure(4);
%plot(mod(O1,2*pi),u)
plot(O2,v)
%plot(mod(O2,2*pi),v,'LineWidth',2)
figure(6);
%plot(mod(u,2*pi),mod(v,2*pi),'LineWidth',2)
plot(u,v)
% subplot(2,1,2);
% plot(t,u,'r-',t,v,'b-','LineWidth',2); grid on;
% figure(3)
% plot(mod(y(:,1),2*pi),mod(y(:,2),2*pi));
for i=1:length(O1)
    X1=l1*sin(O1(i)); Y1=-l1*cos(O1(i));
    X2=X1+l2*sin(O2(i)); Y2=Y1-l2*cos(O2(i));
    figure(2);
Batas1=min(0,X1):0.001:max(0,X1);
Batas2=min(X1,X2):0.001:max(X1,X2);
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
Tali1=Batas1*Y1/X1;
Tali2=(-Y2+Y1)*Batas2/(-X2+X1)+(X1*Y2-X2*Y1)/(-X2+X1);
 plot(Batas1,Tali1,'k-','LineWidth',1);hold on;
 plot(Batas2,Tali2,'k-','LineWidth',1);
 plot(X1,Y1,'bo','LineWidth',2);
 plot(X2,Y2,'ro','LineWidth',2); hold off;
axis([-5 5 -5 5]); axis square;
drawnow;
end
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

RIWAYAT HIDUP

Mohammad Firman Bayusakti, pria yang lahir pada tanggal 20 Mei 1997 di Kabupaten Bojonegoro. Putra sulung dari dua bersaudara pasangan Bapak Nur Salim dan Ibu Dyah Santi. Memiliki seorang adik perempuan bernama Zelda Kurnia Laily.

Pria yang akrab dipanggil Bayu ini menuntaskan sekolah dasar di SD Negeri 1 Baureno pada tahun 2009. Kemudian melanjutkan sekolahnya di SMP Negeri 1 Baureno dan lulus pada tahun 2012. Setelah itu melanjutkan sekolah di SMA Negeri 4 Bojonegoro dan lulus pada tahun 2015. Kemudian pada tahun tersebut, ia melanjutkan pendidikan kejenjang universitas di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Jurusan yang diambilnya adalah Matematika.

Dia mulai belajar berorganisasi sejak duduk dibangku SMA yaitu menjadi pengurus OSIS SMA. Selain itu dia juga bergabung kegiatan ekstrakurikuler basket. Saat kuliah, ia juga cukup aktif mengikuti kegiatan jurusan dan pernah menjadi pengurus inti komunita SEMATA (Serambi Matematika) pada periode 2017/ 2018. Dia juga sering menjadi asisten laboratorium dalam mata kuliah praktikum Pemodelan pada tahun 2018 sampai 2019.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Mohammad Firman Bayusakti
NIM : 15610125
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Simulasi Pergerakan Sistem Pendulum Ganda
Pembimbing I : Heni Widayani, M.Si
Pembimbing II : Dr. Usman Pagalay, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	16 April 2019	Konsultasi Judul, Bab I & Bab II	1.
2.	28 Mei 2019	Revisi Bab I & Bab II Konsultasi Bab III	2.
3.	9 September 2019	Revisi Bab III	3.
4.	23 September 2019	Konsultasi Agama Bab I & Bab II	4.
5.	10 Oktober 2019	Revisi Bab III	5.
6.	14 Oktober 2019	ACC Agama Bab I & Bab II	6.
7.	28 Oktober 2019	Revisi Bab I & Bab II	7.
8.	11 November 2019	Konsultasi Agama Bab III	8.
9.	18 November 2019	Revisi Bab III & Konsultasi Bab IV	9.
10.	27 November 2019	Revisi Bab III & Bab IV	10.
11.	2 Desember 2019	ACC Keseluruhan	11.
12.	3 Desember 2019	ACC Agama Keseluruhan	12.

Malang, 4 Desember 2019

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG