ANALISIS PENURUNAN METODE RUNGE KUTTA ORDE TIGA DAN PENERAPANNYA PADA PENYELESAIAN MODEL *PREDATOR-PREY* DENGAN PEMANENAN

SKRIPSI

Oleh
HANA PUTRI PERTIWI
NIM. 15610123

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

ANALISIS PENURUNAN METODE RUNGE KUTTA ORDE TIGA DAN PENERAPANNYA PADA PENYELESAIAN MODEL *PREDATOR-PREY* DENGAN PEMANENAN

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Hana Putri Pertiwi
NIM. 15610123

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

ANALISIS PENURUNAN METODE RUNGE KUTTA ORDE TIGA DAN PENERAPANNYA PADA PENYELESAIAN MODEL *PREDATOR-PREY* DENGAN PEMANENAN

SKRIPSI

Oleh
Hana Putri Pertiwi
NIM. 15610123

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 02 Desember 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Mohammad Jamhuri, M.Si	Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004	NIDT. 19900511 20160801 1 057

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

ANALISIS PENURUNAN METODE RUNGE KUTTA ORDE TIGA DAN PENERAPANNYA PADA PENYELESAIAN MODEL PREDATOR-PREY DENGAN PEMANENAN

SKRIPSI

Oleh
Hana Putri Pertiwi
NIM. 15610105

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)
Tanggal 18 Desember 2019

Penguji Utama	: Dr. Usman Pagalay, M. Si.	: ....
Ketua Penguji	: Ari Kusumastuti, M. Si., M. Pd.	: ....
Sekretaris Penguji	: Mohammad Jamhuri, M. Si.	: ....
Anggota Penguji	: Muhammad Khudzaifah, M.Si.	: ....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Hana Putri Pertiwi

NIM : 15610123

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Penurunan Metode Runge Kutta Orde Tiga Dan Penerapannya Pada Penyelesaian Model *Predator-Prey* Dengan Pemanenan

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 02 Desember 2019
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
CB950AHF199947838
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Hana Putri Pertiwi
NIM.15610123

MOTO

"Kita memang dilahirkan untuk dapat berpikir visioner tapi kita tidak boleh khawatir dengan keadaan hidup kita, teruslah berusaha dan berdoa, karena setiap orang memiliki zona waktunya masing-masing"

Anonim

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Dulkolim dan Ibunda Kholifah tercinta, yang senantiasa dengan ikhlas dan istiqomah mendoakan, memberi dukungan, mendengarkan keluh kesah penulis, dan memberikan kasih sayang yang tak ternilai, serta kakak dan adik ku tersayang Fahri Rizal Alfikri dan Salsabila Akhmaliah yang selalu menjadi kebanggan bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis
5. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas sains dan teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak dan Ibu serta adik tercinta yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Sahabat-sahabat terbaik penulis, yang selalu menemani, membantu, dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Amiin*.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Desember 2019

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Pertiwi, Hana Putri, 2019. **Analisis Penurunan Metode Runge Kutta Orde Tiga dan Penerapannya Pada Penyelesaian Model *Predator-Prey* Dengan Pemanenan.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Mohammad Jamhuri, M.Si, (2) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Kata kunci: Metode Runge Kutta Orde Tiga, Penurunan, Model *Predator-Prey* dengan Pemanenan, Galat

Penelitian ini membahas tentang penurunan metode Runge Kutta orde tiga dan penyelesaiannya pada model *predator-prey* dengan pemanenan. Penurunan dilakukan dengan cara menurunkan $f(x,y)$ sebanyak dua kali kemudian mensubstitusikan hasil penurunan ke dalam deret taylor orde tiga. Setelah itu, k_2 dan k_3 diubah ke dalam bentuk deret Taylor dua variable orde dua dan disubstitusikan ke rumus Runge Kutta orde tiga. Dengan menyamakan hasil dua langkah sebelumnya, diperoleh sistem persamaan yang nantinya akan digunakan untuk menentukan nilai konstanta dari rumus metode Runge Kutta orde tiga. Hasil penurunan menunjukkan bahwa rumus metode Runge Kutta orde tiga memiliki versi yang tak hingga banyaknya. Oleh sebab itu, dalam penelitian ini diberikan dua rumus metode Runge Kutta orde tiga yang selanjutnya diterapkan pada model *predator-prey* dengan pemanenan untuk dicari penyelesaiannya. Hasil penyelesaian dari metode Runge Kutta orde tiga versi satu memiliki selisih dengan ode45 sebesar $x_{500} = 0{,}001201476934902$, $y_{500} = 0{,}002559463803293$, dan $z_{500} = 0{,}011311187950243$. Sedangkan untuk hasil penyelesaian metode Runge Kutta orde tiga versi dua memiliki selisih dengan ode45 sebesar $x_{500} = 0{,}008871873466780$, $y_{500} = 0{,}006792027670938$ dan $z_{500} = 0{,}010462413222829$. Selanjutnya, dari hasil iterasi dianalisis galat relatif hampirannya. Hasil analisis menunjukkan galat relatif hampiran dari ketiga versi mulai berbeda pada angka ke empat setelah koma. Berdasarkan pembahasan, disimpulkan bahwa kedua rumus metode Runge Kutta orde tiga yang diberikan dapat digunakan untuk menyelesaikan model *predator-prey* dengan pemanenan.

ABSTRACT

Pertiwi, Hana Putri. 2019. **On the Analysis of Derivation of the Third Order Runge Kutta Method and Its Application to Solution of the Predator-Prey Model with Harvesting**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (1) Mohammad Jamhuri, M.Si, (2) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Keyword: Third Order Runge Kutta Method, Derivation, Predator-Prey Model with Harvesting, Error

This study discusses the derivation of the third-order Runge Kutta method and its solution to the predator-prey model by harvesting. Derivation is done by deriving $f(x,y)$ twice then substituting the results of the derivation into the third-order Taylor series. After that, k_2 and k_3 are converted into the third-order taylor series for two variables and substituted to the third order Runge Kutta formula. By equating the results of the previous two steps, an equation system is obtained which will be used to determine the constant values of the formula of the third order Runge Kutta method. The result of the derivation shows that the formula of the third order Runge Kutta method has an infinite number of versions. Therefore, in this study two formulas of the three-order Runge Kutta formula were given which is then applied to the predator-prey model with harvesting to find a solution. The results of the third order Runge Kutta method version one have a difference with ode45 of $x_{500} = 0{,}001201476934902$, $y_{500} = 0{,}002559463803293$, dan $z_{500} = 0{,}011311187950243$. As the result of the solution the third order Runge Kutta method version two have a difference with ode45 of $x_{500} = 0{,}008871873466780$, $y_{500} = 0{,}006792027670938$ and $z_{500} = 0{,}010462413222829$. So even the results of the two versions when compared with ode45 the results are not much different. Furthermore, the results of the iteration are analyzed with a relative error. The results of the analysis showed that the relative error of the three versions began to differ in four decimal places. Based on the discussion, it was concluded that the two third order Runge Kutta formulas given could be used to solve the predator-prey model by harvesting.

ملخص

بيرتيوي، هناءبوتري. ٢٠١٩. **تحليل تراجع طريقة Runge Kutta من الدرجة الثالثة وتطبيقها في حل نموذج *Predator-Prey* مع الحصاد**. بحث جامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا ملك إبراهيم مالانج. المستشارون: (١) محمد جمهوري، ماجستير، (٢) محمد خذيفة، ماجستير.

الكلمات الرءيسية: الطريقة Runge Kutta على رتبة الثالثة، رفض، نموذج المفترس الفريسة مع الحصاد، خطأ

تناقش هذه الدرسة تراجع طريقة Runge Kutta من الدرجة الثالثة و حلها لنموذج الفراءس المفترسة عن طريق الحصاد. يتم استقاق عن طريق استقاق $f(x, y)$ مرتين ثم استبدال نتا ئج استقاق في سلسلة تايلور من رتبة الثالثة. بعد ذلك ، يتم تحويل k_2 و k_3 إلى سلسلة تايلور من متغيرين من الترتيب الثالث ويتم استبدالهما بصيغة Runge Kutta الترتيب الثالث. عن طريق معادلة نتائج الخطوتين السابقتين ، و هما الحصول على نظام المعادلة الذي سيتم استخدامه لتحديد القيم الثابتة لصيغة الطريقة *Runge Kutta* على رتبة الثالثة. تظهر نتيجة التراجع أن صيغة الثالثة Runge Kutta تحتوي على عدد غير محدود من الإصدارات. لذلك، في هذه الدراسة، تم تطبيق صيغتين لطريقة Runge Kutta من الرتبة الثالثة على نموذج المفترس الفريسة مع الحصاد لإيجاد حل. نتيجة طريقة Runge Kutta رتبة الثالثة من الإصدار الأول لديه فرق مع ode45 من $x_{500} = 0{,}001201476934902$، $y_{500} = 0{,}002559463803293$ $z_{500} = 0{,}011311187950243$ أما بالنسبة لنتائج الحل من الطريقة من الطريقة يحتوي Runge Kutta من الترتيب الثاني على اختلاف مع ode45 بقيمة $x_{500} = 0{,}008871873466780$، $y_{500} = 0{,}006792027670938$ و $z_{500} = 0{,}010462413222829$. وبالمثل، فإن نتائج الإصدارين عند المقارنة مع ode45 لا تختلف النتائج كثيرًا. علاوة على ذلك، يتم تحليل نتائج التكرار مع خطأ نسبي. أظهرت نتائج التحليل أن الخطأ النسبي للإصدارات الثلاثة بدأ يختلف في الرقم الرابع بعد الفاصلة. بناءً على النقاش، تم استنتاج أنه يمكن استخدام صيغتي Runge Kutta من الرتبة الثالثة لحل نموذج الفريسة المفترسة من خلال الحصاد.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu upaya makhluk hidup dalam memenuhi kelangsungan hidupnya adalah dengan cara memangsa makhluk hidup lainya. Model *predator-prey* adalah salah satu model bentuk interaksi antar makhluk hidup yang terdiri dari *prey* sebagai mangsa dan *predator* sebagai pemangsa. Model *predator-prey* dengan pemanenan terdiri dari dua mangsa dan satu pemangsa yang terbagi menjadi dua daerah yaitu daerah yang terlindungi dan daerah tak terlindung. Daerah yang terlindungi adalah daerah yang melarang terjadinya pemanenan sedangkan daerah tak terlindungi pemanenan boleh dilakukan. Pemanenan terjadi pada mangsa dan pemangsa di daerah tak terlindungi

Allah berfirman dalam Q.S an-Nahl ayat 14:

وَهُوَ الَّذِي سَخَّرَ الْبَحْرَ لِتَأْكُلُوا مِنْهُ لَحْمًا طَرِيًّا وَتَسْتَخْرِجُوا مِنْهُ حِلْيَةً تَلْبَسُونَهَا وَتَرَى الْفُلْكَ مَوَاخِرَ فِيهِ وَلِتَبْتَغُوا مِنْ فَضْلِهِ وَلَعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ

"*Dan Dia-lah, Allah yang menundukan lautan (untukmu), agar kamu dapat memakan daripadanya daging yang segar (ikan), dan kamu mengeluarkan dari lautan itu perhiasan yang kamu pakai; dan kamu melihat bahtera berlayar padanya, dan supaya kamu mencari keuntungan dari karunia-Nya, dan supaya kamu bersyukur.*"

Ayat ini menjelaskan bahawa Allah Swt telah menaklukan lautan agar mudah diarungi dan menjadikan didalamnya ikan kecil dan besar dan menjadikan dagingnya halal baik yang hidup atau mati. Allah ciptakan juga mutiara dan permata sehingga menjadi perhiasan yang bisa dipakai. Allah Swt memberi anugerah dengan menundukan lautan untuk membawa perahu mengarunginya untuk mengambil apa yang ada disana, untuk apa yang ada disini supaya kita mengetahui nikmat dan karunia-Nya (Abdullah, 2007).

Salah satu permasalahan dalam matematika adalah menemukan solusi dari suatu persamaan model matematika. Model *predator-prey* dengan pemanenan dapat dicari solusinya menggunakan metode numerik. Hasil solusi dari metode numerik berupa nilai hampiran dengan galat yang kecil. Beberapa metode numerik yang sering digunakan untuk menghitung solusi dari sistem persamaan differensial biasa yaitu, metode Euler, Heun, deret Taylor dan Runge Kutta. Karena model *predator-prey* berbentuk sistem persaman differensial biasa maka dapat diselesaikan secara numerik. Pada penelitian ini akan digunakan metode Runge Kutta untuk menyelesaikan model *predator-prey* dengan pemanenan.

Metode Runge Kutta merupakan metode numerik yang dapat menyelesaikan persamaan differensial yang menyangkut nilai awal dengan waktu yang bervariasi. Metode Runge Kutta termasuk metode satu langkah karena hanya memerlukan satu titik sebelumnya untuk mendapatkan nilai yang baru (Munir, 2010). Menurut Chapra (2002) metode Runge Kutta dikenal sebagai metode yang memiliki keakurasian lebih baik dibandingkan dengan metode satu langkah yang lain. Karena metode Runge Kutta memiliki orde sebanyak n maka harus menentukan orde yang akan digunakan. Pada penelitian ini akan digunakan metode Runge Kutta orde tiga.

Tetapi sebelum menggunakan metode Runge Kutta orde tiga maka kebenaran dari rumus metode Runge Kutta orde tiga harus diselidiki. Hal ini penting karena jika rumus sudah dipastikan benar maka hasilnya pun pasti benar.

Selain itu juga menambah pengetahuan tentang asal mula rumus itu terbentuk. Untuk mengetahuinya maka perlu dilakukan penurunan Runge Kutta orde tiga.

Dalam buku Chapra dan Canale (2010) yang berjudul "*Numerical Method for Engineer*" telah menjelaskan penurunan Runge Kutta orde dua dengan cara menurunkan deret Taylor sampai orde ke dua. Kemudian disamakan dengan hasil ekspansi deret Taylor dua variabel. Sedangkan pada jurnal Yang dan Jia (2017) yang berjudul "*Harvesting of a predator -prey model with reserve area for prey and in the presence of toxiticity*" menjelaskan tentang stabilitas model, jadi dalam jurnal ini model dianalisis secara dinamik.

Maka dalam penelitian ini penulis akan menjelaskan tentang bagaimana menurunkan Runge Kutta orde tiga dan bagaimana penerapannya dalam penyelesaian model *predator-prey* dengan pemanenan menggunakan metode Runge Kutta orde tiga. Berdasarkan uraian diatas maka judul yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah "Analisis Penurunan Runge Kutta Orde Tiga dan Penerapanya pada Penyelesaian Model *Predator-Prey* dengan Pemanenan".

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana penurunan metode Runge Kutta orde tiga ?
2. Bagaimana penyelesaian model *predator-prey* dengan pemanenan menggunakan metode Runge Kutta orde tiga?
3. Bagaimana analisis galat pada model *predator-prey* dengan pemanenan?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah diatas maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui penurunan metode Runge Kutta orde tiga.
2. Mengetahui solusi numerik model *predator-prey* dengan pemanenan menggunakan metode Runge Kutta orde tiga.
3. Mengetahui hasil analisis galat pada model *predator-prey* dengan pemanenan.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendapatkan hasil analisis penurunan metode Runge Kutta orde tiga versi satu dan dua.
2. Mendapatkan solusi numerik model *predator-prey* dengan pemanen menggunakan Runge Kutta orde tiga versi satu dan dua.
3. Mendapatkan hasil analisi galat pada model *predator-prey* dengan pemanenan.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini akan membahas tentang penurunan metode Runge Kutta orde tiga dan mencari solusi numeriknya. Agar penelitian tidak meluas maka ruang lingkup pembahasan dibatasi dengan beberapa batasan masalah sebagai berikut:

a. Penurunan dilakukan untuk metode Runge Kutta orde tiga saja.

b. Model matematika yang digunakan adalah

$$\frac{dx(t)}{dt} = r_1 x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \sigma_1 x(t) + \sigma_2 y(t) - ux(t)^2 - \frac{ax(t)z(t)}{b + x(t)} - q_1 Ex(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = r_2 y(t) + \sigma_1 x(t) - \sigma_2 y(t) - vy(t)^2$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\beta ax(t)z(t)}{b + x(t)} - dz(t) - wz(t) - q_2 Ez(t)$$

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur atau *library research*. Berikut ini langkah-langkah penurunan runge kutta orde tiga.

1. Penurunan Metode Runge Kutta Orde Tiga
   a. Menurunkan $f(x, y)$ sebanyak dua kali menggunakan aturan rantai.
   b. Substitusikan hasil penurunan ke deret Taylor orde tiga.
   c. Ubah k_2 dan k_3 ke dalam bentuk deret Taylor dua variabel berorde dua.
   d. Substitusikan hasilnya ke rumus Runge Kutta orde tiga.
   e. Samakan hasil langkah (b) dan (d) sehingga diperoleh sistem persamaan.
   f. Mencari semua nilai konstanta.
   g. Mensubstitusikan nilai konstanta yang di dapat ke rumus Runge Kutta orde tiga.
2. Penerapan dan Penyelesaian Model Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Tiga
   a. Menentukan kondisi awal dan nilai parameter.
   b. Menerapkan sistem persamaan ke dalam rumus Runge Kutta orde tiga.
   c. Substitusikan nilai parameter dan nilai awal pada sistem persamaan yang telah diterapkan ke dalam metode Runge Kutta orde tiga.

d. Menghitung solusi model *predator prey* dengan pemanenan.

e. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik.

3. Analisis Galat

a. Menganalisis galat dari metode numerik

b. Menghitung galat berdasarkan hasil iterasi numerik

c. Menginterpretasi hasil analisis galat

1.7 Sistematika Penelitian

Sistematika penulisan dari penelitian ini terdiri dari empat bab dengan masing-masing bab dibagi dalam subbab. Berikut ini sistematika yang digunakan.

Bab I Pendahuluan

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penelitian.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan tentang teori-teori yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian.

Bab III Pembahasan

Bab ini menjelaskan tentang penurunan metode Runge Kutta orde 3 dan penyelesaian solusi numerik menggunakan metode Runge Kutta orde 3.

Bab IV Penutup

Bab ini menjelaskan tentang kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan dan saran yang dapat dijadikan acuan bagi peneliti selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Metode Runge Kutta

Metode Runge Kutta adalah metode yang tidak memerlukan turunan dari fungsi dan berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi. Karena penyelesaian persamaan diffrensial biasa menggunakan deret Taylor memerlukan perhitungan turunan $f(x, y)$ maka tidak semua fungsi mudah dihitung turunannya. Semakin tinggi orde metode deret Taylor, semakin tinggi turunan fungsi yang harus dihitung. Karena permasalahan ini metode Runge Kutta dijadikan alternatif lain dari metode deret Taylor. (Munir, 2010)

Terdapat tiga sifat utama dari metode Runge Kutta adalah sebagai berikut (Djojoharjo, 2000):

1. Metode satu langkah: untuk mencapai y_{i+1} diperlukan keterangan yang tersedia pada titik sebelumnya yaitu x_i, y_i.
2. Mendekati ketelitian metode deret Taylor sampai suku dalam h^p, dimana nilai p berbeda untuk metode yang berbeda, dan p ini disebut derajat dari metode.
3. Tidak membutuhkan perhitungan turunan $f(x, y)$ tetapi hanya membutuhkan fungsi itu sendiri.

Bentuk umum runge-kutta yaitu:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)\, h$$

dimana $\phi(x_i, y_i, h)$ disebut sebagai fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan selama interval. Bentuk umum fungsi pertambahan dapat ditulis:

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n$$

Dimana a adalah konstanta dan k adalah

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + p_1h,\ y_i + q_{11}k_1h)$

$k_3 = f(x_i + p_2h,\ y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h)$

.
.
.

$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h)$

di mana p dan q adalah konstanta. Perhatikan bahwa k adalah hubungan perulangan. Artinya, k_1 muncul dalam persamaan untuk k_2, keduanya juga muncul dalam persamaan untuk k_3, dan seterusnya. Karena hubungan yang berurutan ini membuat metode Runge Kutta efisien untuk hitungan komputer (Chapra & Canale, 2010).

2.2 Deret Taylor

Andaikan f adalah suatu fungsi yang mempunyai turunan dari semua tingkatan pada x_0, maka deret Taylor untuk f di sekitar $x = x_0$ didefinisikan sebagai (Davis, 2012):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots +$$

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \cdots$$

Jika $f(x) = y(x + \Delta x)$ dan $f(x_0) = y(x)$ maka

$$y(x+\Delta x) = y(x) + y'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}y''(x)\Delta x^2 + \frac{1}{3!}y'''^{(x)}\Delta x^3 + \cdots$$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!}y''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{3!}y'''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^3 + \cdots$$

$$y_{i+1} = y_i + y_i'h + \frac{1}{2!}y_i''h^2 + \frac{1}{3!}y_i'''h^3 + \cdots$$

Pada kasus tertentu, deret Taylor disebut deret Maclaurin pada saat $x_0 = 0$ yang mana dapat disajikan sebagai

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k$$

$$= f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k + \cdots$$

2.2.1 Deret Taylor Dua Variabel

Ekspansi deret Taylor dari fungsi $f(x,t)$ disekitar titik (x_0, t_0) adalah (Primbs, 2014)

$$f(x,t) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0,t_0)(x - x_0) + f_t(x_0,t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}f_{xx}(x_0,t_0)(x - x_0)^2 + +f_{xt}(x_0,t_0)(x - x_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}f_{tt}(x_0,t_0)(t - t_0)^2 + \cdots$$

2.3 Aturan Rantai

Misalkan $z = f(x(t), y(t))$ adalah sebuah fungsi dari x dan y yang dapat diturunkan, dengan $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ adalah fungsi dari t yang dapat diturunkan

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

(Stewart, 2011).

2.4 Galat

Menganalisis galat sangat penting dalam perhitungan yang menggunakan metode numerik. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya, semakin teliti solusi numerik yang didapatkan (Munir, 2010).

Misalkan e adalah nilai hampiran terhadap nilai sejati $\hat{e}$, maka selisih $\epsilon = \hat{e} - e$ disebut galat. Dalam praktik terkadang sulit dicari nilai sejati $\hat{e}$, karena itu galat ϵ sering dinormalkan terhadap solusi hampirannya, sehingga galat relatifnya dinamakan galat relatif hampiran. Galat relatif hampiran dirumuskan sebagai berikut:

$$|\varepsilon_{RA}| = \left|\frac{\varepsilon}{e}\right| = \left|\frac{\hat{e} - e}{e}\right|$$

dengan,

ε_{RA} : galat relatif hampiran

ϵ : galat

e : nilai hampiran terhadap nilai sejati $\hat{e}$

Menurut Munir (2010), perhitungan galat relatif hampiran masih mengandung kelemahan karena nilai ϵ tetap membutuhkan pengetahuan nilai $\hat{e}$. Oleh karena itu, perhitungan galat relatif hampiran menggunakan pendekatan lain. Pada perhitungan numerik yang menggunakan pendekatan lelaran (*iteration*), ε_{RA} dihitung dengan cara:

$$|\varepsilon_{RA}| = \left|\frac{e_{r+1} - e_r}{e_{r+1}}\right|, r = 0,1,2,3, \ldots$$

dengan,

ε_{RA} : galat relatif hampiran

e_{r+1} : nilai hampiran lelaran sekarang

e_r : nilai hampiran lelaran sebelumnya

2.5 Model *Predator-Prey* dengan Pemanenan

Model ini terdiri dari dua mangsa dan satu *predator* (z) dimana mangsa dibagi menjadi dua bagian yaitu ada mangsa yang di daerah tak terlindungi (x) dan mangsa di daerah yang terlindungi (y). Model ini tidak hanya dipengaruhi oleh pemanenan tetapi juga karena adanya racun akibat dari pencemaran lingkungan.

$$\frac{dx(t)}{dt} = r_1 x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \sigma_1 x(t) + \sigma_2 y(t) - ux(t)^2 - \frac{ax(t)z(t)}{b + x(t)} - q_1 E\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = r_2 y(t) + \sigma_1 x(t) - \sigma_2 y(t) - vy(t)^2$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\beta ax(t)z(t)}{b + x(t)} - dz(t) - wz(t) - q_2 Ez(t)$$

Perubahan banyaknya populasi x pada saat t tumbuh mengikuti laju pertumbuhan logistik sebesar r_1 dengan daya dukung x sebesar K. Berkurangnya populasi dipengaruhi karena adanya perpindahan mangsa di daerah tak terlindungi ke daerah yang dilindungi, adanya racun akibat pencemaran lingkungan, adanya penangkapan serta adanya interaksi antara x dan z yang menyebabkan populasi x berkurang akibat adanya laju penangkapan relatif akibat predasi sebesar $\frac{a}{b+x}$. Bertambahnya populasi x diakibatkan karena perpindahan mangsa di daerah yang terlindungi ke daerah tak terlindungi. Perubahan banyaknya populasi y bertambah karena laju pertumbuhan intrinstik y sebesar r_2 dan perpindahan mangsa di daerah tak terlindungi ke daerah terlindungi. Berkurangnya populasi dipengaruhi karena adanya racun akibat pencemaran lingkungan dan perpindahan mangsa dari daerah terlindungi ke daerah tak terlindungi. Perubahan banyaknya populasi z pada saat t berkurang karena adanya tingkat kematian z, infeksi *predator* oleh racun dan upaya penangkapan. Bertambahnya populasi z karena adanya interaksi antara z dan x dengan laju sebesar β (Yang & Jia, 2017).

Penerapan model *predator-prey* dengan pemanenan pada metode Runge Kutta orde tiga. Langkah pertama yaitu mensubstitusikan nilai parameter ke sistem persamaan. Lalu cari nilai k_1, k_2 dan k_3 dengan mensubstitusikan model ke rumus k_1, k_2 dan k_3. Selanjutnya masukan nilai y_0, h, k_1, k_2 dan k_3 untuk mencari nilai y_{i+1} sehingga diperoleh iterasi pertama. Gunakan iterasi sebelumnya untuk menghitung iterasi selanjutnya. Iterasi dilakukan hingga t yang di inginkan (Chapra & Canale, 2010).

2.6 Kajian Islam tentang Kerusakan Lingkungan

Allah Swt berfirman dalam Q.S ar-Rum: 41 yaitu

الْبَرِّ وَالْبَحْرِ بِمَا كَسَبَتْ أَيْدِي النَّاسِ لِيُذِيقَهُمْ بَعْضَ الَّذِي عَمِلُوا لَعَلَّهُمْ يَرْجِعُونَ۝ظَهَرَ الْفَسَادُ فِي

"*Telah nampak kerusakan di darat dan di laut disebabkan karena perbuatan tangan manusia, sehingga akibatnya Allah mencicipkan kepada mereka sebagian dari perbuatan mereka, agar mereka kembali.*"

Menurut Shihab (2002) makna dari ayat ini adalah sikap kaum musyrikin yanng mempersekutukan Allah, dan mengabaikan tuntunan-tuntunan agama berdampak buruk terhadap diri mereka, masyarkat dan lingkungan. Ini dijelaskan oleh ayat diatas yang menyatakan: *Telah nampak kerusakan di darat* seperti kekeringan, paceklik, hilangnya rasa aman, *dan di laut* seperti ketertengelaman, kekurangan hasil laut dan sungai, *disebabkan karena perbuatan tangan manusia* yang durhaka, *sehingga akibatnya Allah mencicipkan* yakni merasakan sedikit, *sebagian dari* akibat *perbuatan* dosa dan pelanggaran *mereka, agar mereka kembali* ke jalan yang benar.

"*Dan apabila ia berpaling (dari kamu), ia berjalan di bumi untuk mengadakan kerusakan padanya, dan merusak tanam-tanaman dan binatang ternak, dan Allah tidak menyukai al-fasad.*" (Q.S.al-Baqarah: 205)

Al-fasad adalah kekurangan dalam segala hal yang dibutuhkan makhluk. Ayat diatas menyebut darat dan laut sebagai tempat terjaadinya *fasad*. Ini berarti daratan dan lautan menjadi arena kerusakan, misalnya dengan terjadinya pembunuhan dan perampokan di kedua tempat itu, dan dapat juga berarti bahwa daran dan laut sendiri telah mengalami kerusakan, ketidakseimbangan serta kekurangan manfaat. Laut telah tercemar sehingga ikan mati dan hasil laut berkurang. Daratan semakin panas sehingga terjadi kemarau panjang. Alhasil, keseimbangan lingkungan menajadi kacau (Shihab, 2002).

Makna terakhir yang dikemukakan adalah bahwa alam raya telah diciptakan Allah dalam satu sistem yang sangan serasi dan sesuai dengan kehidupan manusia. Tetapi mereka melakukan kegiatan buruk yang merusak sehingga terjadi kepincangan dan ketidakseimbangan dalam sistem kerja alam. Allah swt. berfirman dalam surat at-Tin: 4-6.

"Sesungguhnya Kami telah menciptakan manusia dalam sebaik baiknya bentuk (fisik dan psikis), lalu Kami kembailkan dia ketempat yang serendah-rendahnya, kecuali orang-orang yang beriman."

Ayat diatas mengisyaratkan bahwa kerusakan yang tejadi dapat berdampak lebih buruk. Tetapi rahmat Allah masih menyentuh manusia, karena Dia baru saja *mencicipkan* bukan *menimpakan* kepada mereka. Disisi lain dampak tersebut baru akibat *sebagian* dosa mereka. Dosa yang lain boleh jadi diampuni Allah, dan boleh juga ditangguhkan siksanya ke hari yang lain (Shihab, 2002).

Dosa dan pelanggaran *(fasad)* yang dilakukan manusia mengakibatkan gangguan keseimbangan di darat dan di laut. Sebaliknya ketiadaan keseimbangaan darat dan laut mengakibatkan siksaan kepada manusia. Jadi semakin banyak perusakan terhadap lingkungan semakin besar pula dampak buruknya terhadap manusia. Semakin banyak dan beraneka ragam dosa manusia, semakin parah pula kerusakan lingkungan (Shihab, 2002).

Allah Swt memang menciptakan semua makhluk saling kait berkait. Dalam keterkaitan itu lahir keserasian dan keseimbangan dari yeng terkecil hingga terbesar, dan semua tunduk pada pengaturan Allah Swt bila terjadi gangguan pada keharmonisan dan keseimbangan itu, maka kerusakan yang terjadi pasti berdampak pada seluruh bagian alam (Shihab, 2002).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Penurunan Metode Runge Kutta Orde Tiga

Hal yang akan dibahas dalam sub bab ini adalah tentang penurunan metode Runge Kutta orde tiga. Tujuan dari penurunan ini adalah untuk mengetahui asal mula koefisien yang ada di metode Runge Kutta orde tiga. Bentuk umum persamaan differensial biasa orde satu adalah $y' = f(x, y)$ dimana $y' = \frac{dy}{dx}$, x merupakan variabel bebas dan y merupakan variabel terikat.

Metode Runge Kutta orde tiga untuk menyelesaikan masalah persamaan diferensal biasa di atas didefinisikan sebagai berikut.

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3)h \tag{3.1}$$

Dimana

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{3.2}$$

$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \tag{3.3}$$

$$k_3 = f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \tag{3.4}$$

Agar rumus di atas bisa digunakan maka harus ditentukan terlebih dahulu $a_1, a_2, a_3, p_1, p_2, q_{11}, q_{21}$ dan q_{22} dengan cara penurunan. Karena akan dilakukan penurunan metode Runge Kutta orde tiga maka deret Taylor dipotong sampai orde ketiga saja.

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + f'(x_i, y_i)\frac{h^2}{2!} + f''(x_i, y_i)\frac{h^3}{3!} + \cdots \tag{3.5}$$

Selanjutnya jabarkan $f'(x_i, y_i)$ dan $f''(x_i, y_i)$ maka akan diperoleh

$$f'(x_i, y_i) = f_x(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i) \tag{3.6}$$

$$f''(x_i,y_i) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(x_i,y_i)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f'(x_i,y_i)\right) f(x_i,y_i)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(f_x(x_i,y_i) + f(x_i,y_i)f_y(x_i,y_i)\right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}\left(f_x(x_i,y_i) + f(x_i,y_i)f_y(x_i,y_i)\right) f(x_i,y_i) \\
&= f_{xx}(x_i,y_i) + \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x_i,y_i)f_y(x_i,y_i)\right) + f(x_i,y_i)f_{xy}(x_i,y_i) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y}\left(f(x_i,y_i)f_y(x_i,y_i)\right) f(x_i,y_i) \\
&= f_{xx}(x_i,y_i) + f_x(x_i,y_i)f_y(x_i,y_i) + f(x_i,y_i)f_{xy}(x_i,y_i) \\
&\quad + f(x_i,y_i)f_{xy}(x_i,y_i) + f_y(x_i,y_i)f_y(x_i,y_i)f(x_i,y_i) \\
&\quad + f_{yy}(x_i,y_i)f^2(x_i,y_i) \\
&= f_{xx}(x_i,y_i) + f_x(x_i,y_i)f_y(x_i,y_i) + 2f(x_i,y_i)f_{xy}(x_i,y_i) \\
&\quad + f(x_i,y_i)f_y(x_i,y_i)f_y(x_i,y_i) + f_{yy}(x_i,y_i)f^2(x_i,y_i)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Untuk $f(x_i, y_i)$ dapat ditulis sebagai f. Kemudian substitusikan persamaan (3.6) dan persamaan (3.7) ke persamaan (3.5) maka

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + fh + \left(f_x + ff_y\right)\frac{h^2}{2} + \left(f_{xx} + f_x f_y + 2ff_{xy} + ff_y f_y + f_{yy}f^2\right)\frac{h^3}{6} \\
&= y_i + fh + \left(\frac{1}{2}f_x + \frac{1}{2}ff_y\right)h^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{6}f_{xx} + \frac{1}{6}f_x f_y + \frac{1}{3}ff_{xy} + \frac{1}{6}ff_y f_y + \frac{1}{6}f_{yy}f^2\right)h^3
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Selanjutnya ubah persamaan (3.3) ke deret Taylor dua variabel orde dua maka akan menjadi

$$\begin{aligned}
f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11}k_1 h) &= f(x_i,y_i) + p_1 h\, f_x(x_i,y_i) + q_{11}hf(x_i,y_i) \\
&\quad f_y(x_i,y_i) + \frac{1}{2}(p_1 h)^2 f_{xx}(x_i,y_i) + (p_1 q_{11})h^2 \\
&\quad f(x_i,y_i)f_{xy}(x_i,y_i) + \frac{1}{2}q_{11}^2 h^2 f_{yy}f^2
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Kemudian ubah persamaan (3.4) ke deret Taylor dua variabel orde dua maka akan menjadi

$$f(x_i+p_2h, y_i+(q_{21}k_1+q_{22}k_2)h) = f(x_i,y_i)+p_2h\, f_x(x_i,y_i)$$
$$+(q_{21}k_1+q_{22}k_2)h\, f_y(x_i,y_i)$$
$$+\frac{1}{2}(p_2h)^2 f_{xx}(x_i,y_i)$$
$$+(p_2h^2)(q_{21}k_1+q_{22}k_2)$$
$$f_{xy}(x_i,y_i)+\frac{1}{2}(q_{21}k_1+q_{22}k_2)^2$$
$$h^2 f_{yy}(x_i,y_i)$$

$$= f(x_i,y_i)+p_2h\, f_x(x_i,y_i)$$
$$+q_{21}k_1hf_y(x_i,y_i)$$
$$+q_{22}k_2h\, f_y(x_i,y_i)$$
$$+\frac{1}{2}(p_2h)^2 f_{xx}(x_i,y_i)$$
$$+p_2h^2q_{21}k_1f_{xy}(x_i,y_i)$$
$$+p_2h^2q_{22}k_2f_{xy}(x_i,y_i) \qquad (3.10)$$
$$+\frac{1}{2}q_{21}^2h^2k_1^2f_{yy}(x_i,y_i)$$
$$+h^2q_{21}k_1q_{22}k_2f_{yy}(x_i,y_i)$$
$$+\frac{1}{2}q_{22}^2k_2^2h^2f_{yy}(x_i,y_i)$$

Substitusikan persamaan (3.2) dan persamaan (3.9) sebagai k_2 ke persamaan (3.10)

$$f(x_i+p_2h, y_i+(q_{21}k_1+q_{22}k_2)h)$$
$$= f(x_i,y_i)+p_2h\, f_x(x_i,y_i)+q_{21}h\, f(x_i,y_i)f_y(x_i,y_i)$$
$$+\, q_{22}h\, f_y(x_i,y_i)$$
$$\cdot\left(f+p_1h\, f_x(x_i,y_i)+q_{11}hf(x_i,y_i)f_y(x_i,y_i)+\frac{1}{2}(p_1h)^2 f_{xx}(x_i,y_i)\right.$$
$$\left.+\,(p_1q_{11})h^2 f(x_i,y_i)f_{xy}(x_i,y_i)+\frac{1}{2}q_{11}^2h^2f_{yy}(x_i,y_i)f^2(x_i,y_i)\right)$$
$$+\frac{1}{2}(p_2h)^2 f_{xx}(x_i,y_i)$$
$$+\,p_2h^2q_{21}\, f(x_i,y_i)f_{xy}(x_i,y_i)+p_2h^2q_{22}\, f_{xy}(x_i,y_i)$$

$$\cdot\Big(f + p_1 h\, f_x(x_i, y_i) + q_{11} h f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i) + \frac{1}{2}(p_1 h)^2 f_{xx}(x_i, y_i)$$

$$+ (p_1 q_{11}) h^2 f(x_i, y_i) f_{xy}(x_i, y_i) + \frac{1}{2} q_{11}^2 h^2 f_{yy}(x_i, y_i) f^2(x_i, y_i)\Big)$$

$$+ \frac{1}{2} q_{21}^2 h^2 f^2(x_i, y_i) f_{yy}(x_i, y_i) + h^2 q_{21} q_{22}\, f(x_i, y_i) f_{yy}(x_i, y_i)$$

$$\cdot\Big(f + p_1 h\, f_x(x_i, y_i) + q_{11} h f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i) + \frac{1}{2}(p_1 h)^2 f_{xx}(x_i, y_i)$$

$$+ (p_1 q_{11}) h^2 f(x_i, y_i) f_{xy}(x_i, y_i) + \frac{1}{2} q_{11}^2 h^2 f_{yy}(x_i, y_i) f^2(x_i, y_i)\Big)$$

$$+ \frac{1}{2} q_{22}^2 h^2 f_{yy}(x_i, y_i) \cdot \Big(f + p_1 h\, f_x(x_i, y_i) + q_{11} h f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i)$$

$$+ \frac{1}{2}(p_1 h)^2 f_{xx}(x_i, y_i) + (p_1 q_{11}) h^2 f(x_i, y_i) f_{xy}(x_i, y_i)$$

$$+ \frac{1}{2} q_{11}^2 h^2 f_{yy}(x_i, y_i) f^2(x_i, y_i)\Big)^2$$

$$= f(x_i, y_i) + p_2 h\, f_x(x_i, y_i) + q_{21} h\, f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i) \tag{3.11}$$

$$+ q_{22} h f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i) + q_{22} p_1 h^2 f_x(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i)$$

$$+ q_{22} h^2 q_{11} f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i)$$

$$+ \frac{1}{2} q_{22} p_1^2 h^3 f_y(x_i, y_i) f_{xx}(x_i, y_i)$$

$$+ q_{22} p_1 q_{11} h^3 f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i) f_{xy}(x_i, y_i)$$

$$+ \frac{1}{2} q_{22} q_{11}^2 h^3 f^2(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i) f_{yy}(x_i, y_i)$$

$$+ p_2 q_{22} h^2 f(x_i, y_i) f_{xy}(x_i, y_i)$$

$$+ p_2 q_{22} h^3 p_1\, f_x(x_i, y_i) f_{xy}(x_i, y_i)$$

$$+ p_2 q_{22} h^3 q_{11} f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i) f_{xy}(x_i, y_i))$$

$$+\frac{1}{2}p_2q_{22}h^4p_1^2\, f_{xy}(x_i,y_i)f_{xx}(x_i,y_i)+p_2q_{22}h^4p_1q_{11}f(x_i,y_i)\left(f_{xy}\right)^2(x_i,y_i)$$

$$+\frac{1}{2}p_2q_{22}h^4q_{11}^2f^2(x_i,y_i)f_{yy}(x_i,y_i)f_{xy}(x_i,y_i)+\frac{1}{2}q_{21}^2h^2f^2(x_i,y_i)f_{yy}(x_i,y_i)$$

$$+h^2q_{21}q_{22}f^2(x_i,y_i)f_{yy}(x_i,y_i)$$

$$+h^3q_{21}q_{22}p_1f(x_i,y_i)f_{yy}(x_i,y_i)f_x(x_i,y_i)$$

$$+h^3q_{21}q_{22}q_{11}f^2(x_i,y_i)f_{yy}(x_i,y_i)f_y(x_i,y_i)$$

$$+\frac{1}{2}h^4q_{21}q_{22}p_1^2f(x_i,y_i)f_{yy}(x_i,y_i)f_{xx}(x_i,y_i)$$

$$+h^4q_{21}q_{22}p_1q_{11}f_{yy}(x_i,y_i)f_{xy}(x_i,y_i)+\frac{1}{2}h^4q_{21}q_{22}q_{11}^2f^3(x_i,y_i)\left(f_{yy}\right)^2(x_i,y_i)$$

$$+\frac{1}{2}q_{22}^2h^5q_{11}^3f^3(x_i,y_i)f_{yy}(x_i,y_i)f_y(x_i,y_i)$$

$$+\ q_{22}^2h^3p_1f(x_i,y_i)f_{yy}(x_i,y_i)f_x+q_{22}^2h^3q_{11}f^2(x_i,y_i)f_{yy}(x_i,y_i)f_y(x_i,y_i)$$

$$+\frac{1}{2}\ q_{22}^2h^4p_1^2f(x_i,y_i)f_{yy}(x_i,y_i)f_{xx}(x_i,y_i)+\frac{1}{2}q_{22}^2h^4q_{11}^2f^3(x_i,y_i)\left(f_{yy}\right)^2(x_i,y_i)$$

$$+\frac{1}{2}q_{22}^2h^5p_1^3f_x(x_i,y_i)f_{yy}(x_i,y_i)f_{xx}(x_i,y_i)$$

$$+\frac{1}{2}q_{22}^2h^4q_{11}^2f^2(x_i,y_i)f_{yy}(x_i,y_i)\left(f_y\right)^2(x_i,y_i)$$

$$+\frac{1}{8}\ q_{22}^2h^6\ p_1^4f_{yy}(x_i,y_i)(f_{xx})^2(x_i,y_i)+\frac{1}{2}q_{22}^2h^6p_1^4f_{yy}(x_i,y_i)(f_x)^2(x_i,y_i)$$

$$+\frac{1}{2}q_{22}^2h^6p_1q_{11}^3f^3(x_i,y_i)\left(f_{yy}\right)^2(x_i,y_i)f_{xy}(x_i,y_i)$$

$$+q_{22}^2h^4p_1q_{11}f_x(x_i,y_i)f_{yy}(x_i,y_i)f(x_i,y_i)f_y(x_i,y_i)$$

$$+q_{22}^2h^5p_1^2q_{11}f_x\ (x_i,y_i)f_{yy}(x_i,y_i)f(x_i,y_i)f_{xy}(x_i,y_i)$$

$$+\frac{1}{2}q_{22}^2h^5p_1q_{11}^2f^2(x_i,y_i)f_x(x_i,y_i)\left(f_{yy}\right)^2(x_i,y_i)$$

$$+\frac{1}{2}q_{22}^2h^5q_{11}p_1^2f(x_i,y_i)f_y(x_i,y_i)f_{yy}(x_i,y_i)f_{xx}(x_i,y_i)$$

$$+q_{22}^2h^5q_{11}^2p_1f^2(x_i,y_i)f_y\ (x_i,y_i)f_{yy}(x_i,y_i)f_{xy}(x_i,y_i)$$

$$+\frac{1}{2}q_{22}^2h^6p_1^3q_{11}f_{yy}(x_i,y_i)f_{xx}\,(x_i,y_i)f(x_i,y_i)f_{xy}(x_i,y_i)$$
$$+\frac{1}{4}q_{22}^2h^6p_1^2q_{11}^2f^2(x_i,y_i)(f_{yy})^2(x_i,y_i)f_{xx}(x_i,y_i)$$
$$+\frac{1}{2}q_{22}^2h^2f^2(x_i,y_i)f_{yy}(x_i,y_i)(x_i,y_i)$$

Untuk $f(x_i,y_i)$ dapat dituliskan sebagai f. Kemudian substitusikan persamaan (3.2), (3.9) sebagai k_2 dan (3.11) sebagai k_3 ke persamaan (3.1) maka

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3)h$$

$$= y_i + a_1fh\Big[a_2h\Big(f + p_1h\,f_x + q_{11}h\,ff_y + \frac{1}{2}(p_1h)^2f_{xx} + (p_1q_{11})h^2ff_{xy}$$
$$+\frac{1}{2}q_{11}^2h^2f^2f_{yy}\Big)\Big]$$
$$+\Big[a_3h\Big(f + p_2h\,f_x + q_{21}hff_y + q_{22}hff_y + q_{22}p_1h^2f_xf_y$$
$$+ q_{22}h^2q_{11}ff_yf_y + \frac{1}{2}q_{22}p_1^2h^3f_yf_{xx} + q_{22}p_1q_{11}h^3ff_yf_{xy}$$
$$+\frac{1}{2}q_{22}q_{11}^2h^3f^2f_yf_{yy} + p_2q_{22}h^2ff_{xy} + p_2q_{22}h^3p_1f_xf_{xy}$$
$$+ p_2q_{22}h^3q_{11}ff_yf_{xy} + \frac{1}{2}p_2q_{22}h^4p_1^2f_{xy}f_{xx}$$
$$+ p_2q_{22}h^4p_1q_{11}f\left(f_{xy}\right)^2 + \frac{1}{2}p_2q_{22}h^4q_{11}^2f^2f_{yy}f_{xy}$$
$$+\frac{1}{2}q_{21}^2h^2f^2f_{yy} + h^2q_{21}q_{22}f^2f_{yy} + h^3q_{21}q_{22}p_1ff_{yy}\,f_x$$
$$+ h^3q_{21}q_{22}q_{11}f^2f_{yy}f_y + \frac{1}{2}h^4q_{21}q_{22}p_1^2ff_{yy}f_{xx}$$
$$+ h^4q_{21}q_{22}p_1q_{11}f_{yy}f_{xy} + \frac{1}{2}h^4q_{21}q_{22}q_{11}^2f^3\left(f_{yy}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}q_{22}^2h^5q_{11}^3f^3f_{yy}f_y + q_{22}^2h^3p_1ff_{yy}f_x + q_{22}^2h^3q_{11}f^2f_{yy}f_y$$
$$+\frac{1}{2}\,q_{22}^2h^4p_1^2ff_{yy}f_{xx} + \frac{1}{2}q_{22}^2h^4q_{11}^2f^3\left(f_{yy}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}q_{22}^2h^5p_1^3f_{xy}\,f_{yy}f_{xx} + \frac{1}{2}q_{22}^2h^4q_{11}^2f^2\,f_{yy}\left(f_y\right)^2\Big)\Big]$$

$$+a_3h\left(\frac{1}{8}\,q_{22}^2h^6\,p_1^4f_{yy}(f_{xx})^2+\frac{1}{2}q_{22}^2h^6p_1^4f_{yy}(f_x)^2+\frac{1}{2}q_{22}^2h^6p_1q_{11}^3f^3\left(f_{yy}\right)^2f_{xy}\right.$$

$$+q_{22}^2h^5p_1^2q_{11}f_x\,f_{yy}ff_{xy}+\frac{1}{2}q_{22}^2h^5p_1q_{11}^2f^2f_x\left(f_{yy}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}q_{22}^2h^5q_{11}p_1^2ff_yf_{yy}\,f_{xx}+q_{22}^2h^5q_{11}^2p_1f^2f_y\,f_{yy}f_{xy}$$

$$+\frac{1}{2}q_{22}^2h^6p_1^3q_{11}f_{yy}f_{xx}\,ff_{xy}+\frac{1}{4}q_{22}^2h^6p_1^2q_{11}^2f^2\left(f_{yy}\right)^2f_{xx}$$

$$\left.+\frac{1}{2}q_{22}^2h^2f^2f_{yy}\right)$$

$$=y_i+a_1fh+a_2fh+a_3fh+a_2p_1h^2f_x+a_3p_2h^2f_x+a_3q_{21}h^2ff_y$$

$$+a_3q_{22}h^2ff_y+a_2q_{11}h^2ff_y+\frac{1}{2}a_2p_1^2h^3f_{xx}+\frac{1}{2}a_3p_2^2h^3f_{xx}$$

$$+a_3q_{22}p_1h^3f_xf_y+a_3p_2q_{22}h^3ff_{xy}+a_3p_2q_{21}h^3ff_{xy}$$

$$+a_2p_1q_{11}h^3ff_{xy}+h^3ff_{xy}h^3ff_yf_y+\frac{1}{2}a_3q_{21}^2h^3f^2f_{yy}$$

$$+\frac{1}{2}a_3q_{22}^2h^3f^2f_{yy}+a_3q_{21}q_{22}h^3f^2f_{yy}+\frac{1}{2}a_2q_{11}^2h^3f^2f_{yy}+\cdots$$

$$=y_i+(a_1+a_2+a_3)\,fh+(a_2p_1+a_3p_2)\,h^2f_x+(a_3q_{21}+a_3q_{22}+a_2q_{11})\,h^2ff_y$$

$$+\left(\frac{1}{2}a_2p_1^2+\frac{1}{2}a_3p_2^2\right)\,h^3f_{xx}+(a_3q_{22}p_1)\,h^3f_xf_y$$

$$+(a_3p_2q_{22}+a_3p_2q_{21}+a_2p_1q_{11})\,h^3ff_{xy}+(a_3q_{22}q_{11})\,h^3ff_yf_y$$

$$+\left(\frac{1}{2}a_3q_{21}^2+\frac{1}{2}a_3q_{22}^2+a_3q_{21}q_{22}+\frac{1}{2}a_2q_{11}^2\right)\,h^3f^2f_{yy}+\cdots$$

$$= y_i + (a_1 f + a_2 f + a_3 f)\,h$$
$$+ \Big((a_2 p_1 f_x + a_3 p_2\, f_x)$$
$$+ (a_3 q_{21} f f_y + a_3 q_{22} f f_y + a_2 q_{11} f f_y)\Big)\,h^2$$
$$+ \Bigg(\left(\frac{1}{2} a_2 p_1^2 f_{xx} + \frac{1}{2} a_3 p_2^2\, f_{xx}\right) + (a_3 q_{22} p_1)\, f_x f_y$$
$$+ (a_3 p_2 q_{22}\, f f_{xy} + a_3 p_2 q_{21}\, f f_{xy} + a_2 p_1 q_{11}\, f f_{xy}) \tag{3.12}$$
$$+ (a_3 q_{22} q_{11}\, f f_y f_y)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} a_3 q_{21}^2 f^2 f_{yy} + \frac{1}{2} a_3 q_{22}^2 f^2 f_{yy} + a_3 q_{21} q_{22}\, f^2 f_{yy}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} a_2 q_{11}^2\, f^2 f_{yy}\right)\Bigg)\,h^3 + \cdots$$

Dengan menyamakan persamaan (3.8) dan persamaan (3.12) diperoleh

$$f = a_1 f + a_2 f + a_3 f \tag{3.13}$$

$$\frac{1}{2} f_x + \frac{1}{2} f f_y = (a_2 p_1 f_x + a_3 p_2 f_x)$$
$$+ (a_3 q_{21} f f_y + a_3 q_{22} f f_y + a_2 q_{11} f f_y) \tag{3.14}$$

$$\frac{1}{6}\, f_{xx} + \frac{1}{6} f_x f_y + \frac{1}{3} f f_{xy} + \frac{1}{6} f f_y f_y + \frac{1}{6} f_{yy} f^2$$
$$= \left(\frac{1}{2} a_2 p_1^2 f_{xx} + \frac{1}{2} a_3 p_2^2 f_{xx}\right) + a_3 q_{22} p_1 f_x f_y$$
$$+ (a_3 p_2 q_{22} f f_{xy} + a_3 p_2 q_{21} f f_{xy} + a_2 p_1 q_{11} f f_{xy}) \tag{3.15}$$
$$+ a_3 q_{22} q_{11} f f_y f_y$$
$$+ \left(\frac{1}{2} a_3 q_{21}^2 f^2 f_{yy} + \frac{1}{2} a_3 q_{22}^2 f^2 f_{yy} + a_3 q_{21} q_{22}\, f^2 f_{yy}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} a_2 q_{11}^2 f^2 f_{yy}\right)$$

Dari persamaan (3.13) dapat disederhanakan menjadi

$$f = (a_1 + a_2 + a_3)\, f \tag{3.16}$$

Dari persamaan (3.14) dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{1}{2} f_x + \frac{1}{2} f f_y = (a_2 p_1 + a_3 p_2) f_x + (a_3 q_{21} + a_3 q_{22} + a_2 q_{11}) f f_y \tag{3.17}$$

Dari persamaan (3.16) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} f_{xx} + \frac{1}{6} f_x f_y + \frac{1}{3} f f_{xy} + \frac{1}{6} f f_y f_y + \frac{1}{6} f_{yy} f^2 \\
= \left(\frac{1}{2} a_2 p_1^2 + \frac{1}{2} a_3 p_2^2\right) f_{xx} + (a_3 q_{22} p_1) f_x f_y \\
+ (a_3 p_2 q_{22} + a_3 p_2 q_{21} + a_2 p_1 q_{11}) f f_{xy} \\
+ (a_3 q_{22} q_{11}) f f_y f_y \\
+ \left(\frac{1}{2} a_3 q_{21}^2 + \frac{1}{2} a_3 q_{22}^2 + a_3 q_{21} q_{22} + \frac{1}{2} a_2 q_{11}^2\right) f^2 f_{yy}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Dari persamaan (3.16), (3.17) dan (3.18) maka akan diperoleh sebagai berikut.

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 \tag{1a}$$

$$a_2 p_1 + a_3 p_2 = \frac{1}{2} \tag{2a}$$

$$a_3 q_{21} + a_3 q_{22} + a_2 q_{11} = \frac{1}{2} \tag{3a}$$

$$\frac{1}{2} a_2 p_1^2 + \frac{1}{2} a_3 p_2^2 = \frac{1}{6}$$

$$a_2 p_1^2 + a_3 p_2^2 = \frac{1}{3} \tag{4a}$$

$$a_3 q_{22} p_1 = \frac{1}{6} \tag{5a}$$

$$a_3 p_2 q_{22} + a_3 p_2 q_{21} + a_2 p_1 q_{11} = \frac{1}{3} \tag{6a}$$

$$a_3 q_{22} q_{11} = \frac{1}{6} \qquad 7a)$$

$$\frac{1}{2} a_3 q_{21}^2 + \frac{1}{2} a_3 q_{22}^2 + a_3 q_{21} q_{22} + \frac{1}{2} a_2 q_{11}^2 = \frac{1}{6}$$

$$a_3 q_{21}^2 + a_3 q_{22}^2 + 2a_3 q_{21} q_{22} + a_2 q_{11}^2 = \frac{1}{3}$$

$$a_3 (q_{21} + q_{22})^2 + a_2 q_{11}^2 = \frac{1}{3} \qquad 8a)$$

Dari persamaan 5a dan 7a diperoleh $p_1 = q_{11}$ maka didapat

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 \qquad 1b)$$

$$a_2 q_{11} + a_3 p_2 = \frac{1}{2} \qquad 2b)$$

$$a_3 (q_{21} + q_{22}) + a_2 q_{11} = \frac{1}{2} \qquad 3b)$$

$$a_2 q_{11}^2 + a_3 p_2^2 = \frac{1}{3} \qquad 4b)$$

$$a_3 p_2 (q_{21} + q_{22}) + a_2 q_{11}^2 = \frac{1}{3} \qquad 5b)$$

$$a_3 (q_{21} + q_{22})^2 + a_2 q_{11}^2 = \frac{1}{3} \qquad 6b)$$

Dari persamaan 2b dan 3b diatas diperoleh $p_2 = (q_{21} + q_{22})$ dan dari persamaan 4b dan 6b diperoleh $p_2^2 = (q_{21} + q_{22})^2$maka didapat

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 \qquad 1c)$$

$$a_3 (q_{21} + q_{22}) + a_2 q_{11} = \frac{1}{2} \qquad 2c)$$

$$a_3 (q_{21} + q_{22})^2 + a_2 q_{11}^2 = \frac{1}{3} \qquad 3c)$$

Karena tersisa tiga persamaan dengan enam konstanta yang nilainya belum diketahui maka dapat dipilih sembarang nilai dari tiga konstanta untuk menentukan nilai konstanta lainya. Konstanta yang nilainya dipilih sembarang adalah q_{11}, q_{21} dan q_{22} maka dari persamaan 1c sampai 3c dapat dicari nilai a_1, a_2 dan a_3.

Dari persamaan 3c dapat dicari nilai a_2 maka

$$a_3(q_{21}+q_{22})^2 + a_2 q_{11}^2 = \frac{1}{3}$$

$$3a_3(q_{21}+q_{22})^2 + 3a_2 q_{11}^2 = 1$$

$$3a_2 q_{11}^2 = 1 - 3a_3(q_{21}+q_{22})^2$$

$$a_2 = \frac{1 - 3a_3(q_{21}+q_{22})^2}{3q_{11}^2} \tag{3.19}$$

Dari persamaan 2c dapat dicari nilai a_3 dengan mensubstitusikan persamaan (3.19) maka

$$a_3(q_{21}+q_{22}) + a_2 q_{11} = \frac{1}{2}$$

$$a_3(q_{21}+q_{22}) + \left(\frac{1 - 3a_3(q_{21}+q_{22})^2}{3q_{11}^2}\right) q_{11} = \frac{1}{2}$$

$$a_3(q_{21}+q_{22}) + \left(\frac{q_{11} - 3a_3 q_{11}(q_{21}+q_{22})^2}{3q_{11}^2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3q_{11}^2 a_3(q_{21}+q_{22}) + q_{11} - 3a_3 q_{11}(q_{21}+q_{22})^2}{3q_{11}^2} = \frac{1}{2}$$

$$6q_{11}^2 a_3(q_{21}+q_{22}) + 2q_{11} - 6a_3 q_{11}(q_{21}+q_{22})^2 = 3q_{11}^2$$

$$a_3(6q_{11}^2(q_{21}+q_{22}) - 6q_{11}(q_{21}+q_{22})^2) = 3q_{11}^2 - 2q_{11}$$

$$a_3 = \frac{3q_{11}^2 - 2q_{11}}{(6q_{11}^2(q_{21}+q_{22}) - 6q_{11}(q_{21}+q_{22})^2)} \tag{3.20}$$

Substitusikan persamaan (3.20) ke persamaan (3.19) maka

$$a_2 = \frac{1 - 3a_3(q_{21} + q_{22})^2}{3q_{11}^2}$$

$$= \frac{1 - 3(q_{21} + q_{22})^2 \left(\frac{3q_{11}^2 - 2q_{11}}{(6q_{11}^2(q_{21} + q_{22}) - 6q_{11}(q_{21} + q_{22})^2)} \right)}{3q_{11}^2}$$

$$= \frac{1 + \left(\frac{-9q_{11}^2(q_{21} + q_{22})^2 + 6q_{11}(q_{21} + q_{22})^2}{(6q_{11}^2(q_{21} + q_{22}) - 6q_{11}(q_{21} + q_{22})^2)} \right)}{3q_{11}^2}$$

$$= \frac{1}{3q_{11}^2} + \frac{(-9q_{11}^2(q_{21} + q_{22})^2) + 6q_{11}(q_{21} + q_{22})^2}{3q_{11}^2(6q_{11}^2(q_{21} + q_{22}) - 6q_{11}(q_{21} + q_{22})^2)}$$

$$= \frac{6q_{11}^2(q_{21} + q_{22}) - 6q_{11}(q_{21} + q_{22})^2 - 9q_{11}^2(q_{21} + q_{22})^2 + 6q_{11}(q_{21} + q_{22})^2}{3q_{11}^2(6q_{11}^2(q_{21} + q_{22}) - 6q_{11}(q_{21} + q_{22})^2)}$$

$$= \frac{6q_{11}^2(q_{21} + q_{22}) - 9q_{11}^2(q_{21} + q_{22})^2}{18q_{11}^4(q_{21} + q_{22}) - 18q_{11}^3(q_{21} + q_{22})^2}$$

$$= \frac{2q_{11}^2(q_{21} + q_{22}) - 3q_{11}^2(q_{21} + q_{22})^2}{6q_{11}^4(q_{21} + q_{22}) - 6q_{11}^3(q_{21} + q_{22})^2} \tag{3.21}$$

Dari persamaan 1c dapat dicari nilai a_1 dengan mensubstitusikan persamaan (3.20) dan (3.21)

$$a_1 = 1 - a_2 - a_3$$

$$= 1 - \frac{2q_{11}^2(q_{21} + q_{22}) - 3q_{11}^2(q_{21} + q_{22})^2}{6q_{11}^4(q_{21} + q_{22}) - 6q_{11}^3(q_{21} + q_{22})^2} - \frac{3q_{11}^2 - 2q_{11}}{(6q_{11}^2(q_{21} + q_{22}) - 6q_{11}(q_{21} + q_{22})^2)} \tag{3.22}$$

Dapat disimpulkan dari hasil paparan di atas bahwa $q_{11} = p_1,\ p_2 = q_{21} + q_{22}$ dan $p_2^2 = (q_{21} + q_{22})^2$. Dari persamaan (3.22) dapat dicari nilai a_1 sedangkan dari persamaan (3.21) dapat dicari nilai a_2 dan dari persamaan (3.20) dapat dicari nilai a_3. Agar didapat nilai a_1, a_2 dan a_3 maka dipilih sembarang nilai untuk q_{11}, q_{21} dan q_{22} dengan syarat $q_{11} \neq 0$ dan $q_{21} + q_{22} \neq 0$.

Selanjutnya akan dipilih nilai q_{11}, q_{22} dan q_{21} sehingga diperoleh nilai p_1, p_2, a_1, a_2 dan a_3. Kemudian setelah semua nilai konstanta didapat maka substitusikan hasilnya ke persamaan (3.1), (3.2), (3.3) dan (3.4).

1. Versi satu

Dipilih $q_{11} = \frac{1}{2}$, $q_{21} = -1$ dan $q_{22} = 2$ maka $q_{11} = p_1 = \frac{1}{2}$ dan $p_2 = q_{21} + q_{22} = 1$ maka diperoleh nilai a_1, a_2 dan a_3 sebagai berikut.

$$a_3 = \frac{3q_{11}^2 - 2q_{11}}{(6q_{11}^2(q_{21} + q_{22}) - 6q_{11}(q_{21} + q_{22})^2)}$$

$$= \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}}{6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1)^2}$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2}}{6 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1)^2}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} - 1}{\frac{3}{2} - 3}$$

$$= \frac{\frac{3-4}{4}}{\frac{3-6}{2}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$a_2 = \frac{2q_{11}^2(q_{21}+q_{22}) - 3q_{11}^2(q_{21}+q_{22})^2}{6q_{11}^4(q_{21}+q_{22}) - 6q_{11}^3(q_{21}+q_{22})^2}$$

$$= \frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot(1)^2}{6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot 1 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot(1)^2}$$

$$= \frac{2\cdot\frac{1}{4} - 3\cdot\frac{1}{4}}{6\cdot\frac{1}{16} - 6\cdot\frac{1}{8}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}{\frac{3}{8}-\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{2-3}{4}}{\frac{3-6}{8}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{3}{8}}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$a_1 = 1 - a_2 - a_3$$

$$= 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{6-4-1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}$$

Sehingga diperoleh metode Runge Kutta orde tiga yaitu,

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3\right)h \qquad (3.23)$$

Dengan

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$

$k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h)$

Metode Runge Kutta orde tiga versi satu pada persamaan (3.23) hasilnya sesuai dengan buku Chapra dan Canale tahun 2010.

2. Versi Dua

Dipilih $q_{11} = 1$, $q_{21} = 2$ dan $q_{22} = -\frac{1}{2}$ maka $q_{11} = p_1 = 1$ dan $p_2 = q_{21} + q_{22} = \frac{3}{2}$

$$a_3 = \frac{3q_{11}^2 - 2q_{11}}{(6q_{11}^2(q_{21} + q_{22}) - 6q_{11}(q_{21} + q_{22})^2)}$$

$$= \frac{3 \cdot (1)^2 - 2 \cdot 1}{6 \cdot (1)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - 6 \cdot 1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{3 - 2}{9 - 6 \cdot \frac{9}{4}}$$

$$= \frac{1}{9 - \frac{27}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{18 - 27}{2}}$$

$$= \frac{1}{-\frac{9}{2}}$$

$$= -\frac{2}{9}$$

$$a_2 = \frac{2q_{11}^2(q_{21} + q_{22}) - 3q_{11}^2(q_{21} + q_{22})^2}{6q_{11}^4(q_{21} + q_{22}) - 6q_{11}^3(q_{21} + q_{22})^2}$$

$$= \frac{2 \cdot (1)^2 \cdot \frac{3}{2} - 3 \cdot (1)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2}{6 \cdot (1)^4 \cdot \frac{3}{2} - 6 \cdot (1)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{3 - 3 \cdot \frac{9}{4}}{9 - 6 \cdot \frac{9}{4}}$$

$$= \frac{3 - \frac{27}{4}}{9 - \frac{27}{2}}$$

$$= \frac{\frac{12 - 27}{4}}{\frac{18 - 27}{2}}$$

$$= \frac{-\frac{15}{4}}{-\frac{9}{2}}$$

$$= \frac{15}{4} \cdot \frac{2}{9}$$

$$= \frac{5}{6}$$

$$a_1 = 1 - a_2 - a_3$$

$$= 1 - \frac{5}{6} - \left(-\frac{2}{9}\right)$$

$$= 1 - \frac{5}{6} + \frac{2}{9}$$

$$= \frac{18 - 15 + 4}{18}$$

$$= \frac{7}{18}$$

Sehingga diperoleh metode Runge Kutta orde tiga yaitu,

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{7}{18}k_1 + \frac{5}{6}k_2 - \frac{2}{9}k_3\right)h \tag{3.24}$$

Dengan

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$

$k_3 = f(x_i + \frac{3}{2}h, y_i + 2k_1 h - \frac{1}{2}k_2 h)$

Metode Runge Kutta orde tiga versi dua ini tidak bisa untuk memperkecil eror. Tapi hasil penyelesaian dari metode ini erornya harus terjadi pada angka ke empat setelah koma atau lebih. Karena pada metode Runge Kutta orde tiga eror mulai terjadi pada angka ke empat setelah koma.

3.2 Penerapan dan Penyelesaian Model *Predator-Prey* dengan Pemanenan Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Tiga

Dalam subbab ini akan dibahas penerapan metode Runge Kutta pada Model *predator-prey* dengan pemanenan. Serta penyelesaian numerik model *predator-prey* dengan pemanenan menggunakan metode Runge Kutta orde tiga. Model ini disusun oleh Hang Yang dan Jianwen Jia (2017) dalam jurnalnya yang berjudul "*Harvesting of Predator-Prey Model with Reserve Area for Prey and in the Presence of Toxicity*". Dalam jurnalnya, model *predator-prey* dengan pemanenan didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= r_1 x(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \sigma_1 x(t) + \sigma_2 y(t) - ux^2(t) \\ &\quad - \frac{ax(t)z(t)}{b + x(t)} - q_1 E x(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= r_2 y(t) + \sigma_1 x(t) - \sigma_2 y(t) - vy^2(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= \frac{\beta a x(t) z(t)}{b + x(t)} - dz(t) - wz(t) - q_2 E\, z(t)\end{aligned} \qquad (3.25)$$

Nilai awal dan nilai parameter pada persamaan (3.25) diberikan pada Tabel 3.1 berikut ini.

Tabel 3.1 Nilai Parameter dan Nilai Awal

Variabel / Parameter	Keterangan	Nilai Parameter/ Variabel
$x(t)$	Populasi mangsa didaerah tak terlindungi terhadap waktu	4
$y(t)$	Populasi mangsa di daerah yang terlindungi terhadap waktu	4
$z(t)$	Populasi pemangsa terhadap waktu	3
r_1	Laju pertumbuhan intrinstik mangsa di daerah tak terlindungi	5
r_2	Laju pertumbuhan intrinstik mangsa di daerah yang terlindungi	1
K	Daya dukung lingkungan	4
σ_1	Tingkat perpindahan mangsa di daerah tak terlindungi ke daerah terlindungi	1
σ_2	Tingkat perpindahan mangsa di daerah yang terlindungi ke daerah tak terlindungi	1
a	Laju penangkapan relatif maksimum akibat predasi	0,94
b	Laju kelahiran mangsa	0,7
q_1	Koefisien penangkapan mangsa di daerah tak terlindungi	0,1
q_2	Koefisien penangkapan pemangsa didaerah tak terlindungi	0,2
E	Upaya penangkapan	0,8
β	Laju pertumbuhan pemangsa	0,998
u	Infeksi spesies mangsa didaerah tak terlindungi oleh zat racun	0,00001
v	Infeksi spesies mangsa didaerah yang terlindungi oleh zat racun	0,333
w	Infeksi pemangsa oleh racun	0,00003
d	Tingkat kematian	0,3

3.2.1 Penerapan dan Penyelesaian Model Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Tiga Versi Satu

Persamaan (3.25) disubstitusikan pada persamaan Runge Kutta orde tiga (3.23) sehingga menghasilkan persamaan (3.26) sampai (3.28).

$$x_{i+1} = x_i + \left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3\right) h \tag{3.26}$$

$$y_{i+1} = y + \left(\frac{1}{6}l_1 + \frac{2}{3}l_2 + \frac{1}{6}l_3\right) h \tag{3.27}$$

$$z_{i+1} = z_i + \left(\frac{1}{6}m_1 + \frac{2}{3}m_2 + \frac{1}{6}m_3\right) h \tag{3.28}$$

Dengan

$$k_1 = f(t_i, x_i, y_i, z_i)$$

$$= r_1 x_i \left(1 - \frac{x_i}{K}\right) - \sigma_1 x_i + \sigma_2 y_i - u x_i^2 - \frac{a x_i z_i}{b + x_i} - q_1 E x_i$$

$$l_1 = g(t_i, x_i, y_i, z_i)$$

$$= r_2 y_i + \sigma_1 x_i - \sigma_2 y_i - v y_i^2$$

$$m_1 = j(t_i, x_i, y_i, z_i)$$

$$= \frac{\beta a x_i z_i}{b + x_i} - d z_i - w z_i - q_2 E\, z_i$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1 h, y_i + \frac{1}{2}l_1 h, z_i + \frac{1}{2}m_1 h\right)$$

$$= r_1\left(x_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)\left(1 - \frac{\left(x_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)}{K}\right) - \sigma_1\left(x_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) + \sigma_2\left(y_i + \frac{1}{2}l_1 h\right)$$

$$-u\left(x_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)^2 - \frac{a\left(x_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)\left(z_i + \frac{1}{2}m_1 h\right)}{b + \left(x_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)} - q_1 E\left(x_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$l_2 = g\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1 h, y_i + \frac{1}{2}l_1 h, z_i + \frac{1}{2}m_1 h\right)$$

$$= r_2\left(y_i + \frac{1}{2}l_1h\right) + \sigma_1\left(x_i + \frac{1}{2}k_1h\right) - \sigma_2\left(y_i + \frac{1}{2}l_1h\right) - v\left(y_i + \frac{1}{2}l_1h\right)^2$$

$$m_2 = j\left(t_i + \frac{1}{2}h, x_i + \frac{1}{2}k_1h, y_i + \frac{1}{2}l_1h, z_i + \frac{1}{2}m_1h\right)$$

$$= \frac{\beta a\left(x_i + \frac{1}{2}k_1h\right)\left(z_i + \frac{1}{2}m_1h\right)}{b + \left(x_i + \frac{1}{2}k_1h\right)} - d\left(z_i + \frac{1}{2}m_1h\right) - w\left(z_i + \frac{1}{2}m_1h\right)$$
$$-q_2E\left(z_i + \frac{1}{2}m_1h\right)$$

$$k_3 = f(t_i + h, x_i - k_1h + 2k_2h, y_i - l_1h + 2l_2h, z_i - m_1h + 2m_2h)$$

$$= r_1(x_i - k_1h + 2k_2h)\left(1 - \frac{(x_i - k_1h + 2k_2h)}{K}\right) - \sigma_1(x_i - k_1h + 2k_2h)$$
$$+\sigma_2(y_i - l_1h + 2l_2h) - u(x_i - k_1h + 2k_2h)^2$$
$$-\frac{a(x_i - k_1h + 2k_2h)\,(z_i - m_1h + 2m_2h)}{b + (x_i - k_1h + 2k_2h)} - q_1E(x_i - k_1h + 2k_2h)$$

$$l_3 = g(t_i + h, x_i - k_1h + 2k_2h, y_i - l_1h + 2l_2h, z_i - m_1h + 2m_2h)$$

$$= r_2(y_i - l_1h + 2l_2h) + \sigma_1(x_i - k_1h + 2k_2h) - \sigma_2(y_i - l_1h + 2l_2h)$$
$$-v(y_i - l_1h + 2l_2h)^2$$

$$m_3 = j(t_i + h, x_i - k_1h + 2k_2h, y_i - l_1h + 2l_2h, z_i - m_1h + 2m_2h)$$

$$= \frac{\beta a(x_i - k_1h + 2k_2h)\,(z_i - m_1h + 2m_2h)}{b + (x_i - k_1h + 2k_2h)} - d(z_i - m_1h + 2m_2h)$$
$$-w(z_i - m_1h + 2m_2h) - q_2E(z_i - m_1h + 2m_2h)$$

Selanjutnya persamaan (3.25) akan diselesaikan dengan metode Runge Kutta orde tiga versi satu dengan $h = 0{,}1$. Untuk iterasi yang pertama dengan $t_0 = 0, x_0 = 4, y_0 = 4$ dan $z_0 = 3$ akan diperoleh hasil berikut.

$$k_1 = r_1x_0\left(1 - \frac{x_0}{K}\right) - \sigma_1x_0 + \sigma_2y_0 - ux_0^2 - \left(\frac{ax_0z_0}{b + x_0}\right) - q_1Ex_0$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot \left(1 - \frac{4}{4}\right) - 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 - 0{,}00001 \cdot 4^2 - \left(\frac{0{,}94 \cdot 4 \cdot 3}{0{,}7 + 4}\right) - 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 4$$

$$= -0{,}0016 - \frac{11{,}28}{4{,}7} - 0{,}32$$

$$= -0{,}3216 - 2{,}4$$

$$= -2{,}7216$$

$$l_1 = r_2 y_0 + \sigma_1 x_0 - \sigma_2 y_0 - v y_0^2$$

$$= 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 - 1 \cdot 4 - 0{,}333 \cdot 4^2$$

$$= 4 + 4 - 4 - 5{,}328$$

$$= -1{,}328$$

$$m_1 = \frac{\beta a x_0 z_0}{b + x_0} - d z_0 - w z_0 - q_2 E z_0$$

$$= \frac{0{,}998 \cdot 0{,}94 \cdot 4 \cdot 3}{0{,}7 + 4} - 0{,}3 \cdot 3 - 0{,}00003 \cdot 3 - 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 3$$

$$= \frac{11{,}25744}{4{,}7} - 0{,}9 - 0{,}00009 - 0{,}48$$

$$= 2{,}3952 - 1{,}38009$$

$$= 1{,}01511$$

$$k_2 = r_1\left(x_0 + \frac{1}{2}k_1 h\right)\left(1 - \frac{\left(x_0 + \frac{1}{2}k_1 h\right)}{K}\right) - \sigma_1\left(x_0 + \frac{1}{2}k_1 h\right) + \sigma_2\left(y_0 + \frac{1}{2}l_1 h\right)$$
$$-u\left(x_0 + \frac{1}{2}k_1 h\right)^2 - \frac{a\left(x_0 + \frac{1}{2}k_1 h\right)\left(z_0 + \frac{1}{2}m_1 h\right)}{b + \left(x_0 + \frac{1}{2}k_1 h\right)} - q_1 E\left(x_0 + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$= 5 \cdot \left(4 + \frac{1}{2} \cdot (-2{,}7216) \cdot 0{,}1\right)\left(1 - \frac{\left(4 + \frac{1}{2} \cdot (-2{,}7216) \cdot 0{,}1\right)}{4}\right)$$
$$-1 \cdot \left(4 + \frac{1}{2} \cdot (-2{,}7216) \cdot 0{,}1\right) + 1 \cdot \left(4 + \frac{1}{2}(-1{,}328) \cdot 0{,}1\right)$$
$$-0{,}00001\left(4 + \frac{1}{2} \cdot (-2{,}7216) \cdot 0{,}1\right)^2$$
$$-\frac{0{,}94\left(4 + \frac{1}{2} \cdot (-2{,}7216) \cdot 0{,}1\right)\left(3 + \frac{1}{2}(1{,}01511) \cdot 0{,}1\right)}{0{,}7 + \left(4 + \frac{1}{2} \cdot (-2{,}7216) \cdot 0{,}1\right)}$$
$$-0{,}1 \cdot 0{,}8\left(4 + \frac{1}{2} \cdot (-2{,}7216) \cdot 0{,}1\right)$$

$$= 5 \cdot (3{,}86392) \cdot \left(1 - \frac{3{,}86392}{4}\right) - 3{,}86392 + 3{,}9336$$
$$-0{,}00001 \cdot (3{,}86392)^2 - \frac{0{,}94\,(3{,}86392)\,(3{,}0507555)}{0{,}7 + 3{,}863992} - 0{,}08 \cdot 3{,}86392$$

$$= 0,657252791999999 - 3,86392 + 3,9336 - 0,001492987776640$$
$$-2,427869612102403 - 0,3091136$$

$$= -2,011543407879045$$

$$l_2 = r_2\left(y_0 + \frac{1}{2}l_1h\right) + \sigma_1\left(x_0 + \frac{1}{2}k_1h\right) - \sigma_2\left(y_0 + \frac{1}{2}l_1h\right) - v\left(y_0 + \frac{1}{2}l_1h\right)^2$$

$$= 1 \cdot \left(4 + \frac{1}{2}(-1,328) \cdot 0,1\right) + 1 \cdot \left(4 + \frac{1}{2} \cdot (-2,7216) \cdot 0,1\right)$$
$$-1 \cdot \left(4 + \frac{1}{2}(-1,328) \cdot 0,1\right) - 0,333 \cdot \left(4 + \frac{1}{2}(-1,328) \cdot 0,1\right)^2$$

$$= 3,9336 + 3,86392 - 3,9336 - 5,152578584$$

$$= -1,28865858368$$

$$m_2 = \frac{\beta a\left(x_0 + \frac{1}{2}k_1h\right)\left(z_0 + \frac{1}{2}m_1h\right)}{b + \left(x_0 + \frac{1}{2}k_1h\right)} - d\left(z_0 + \frac{1}{2}m_1h\right) - w\left(z_0 + \frac{1}{2}m_1h\right)$$
$$-q_2E\left(z_0 + \frac{1}{2}m_1h\right)$$

$$= \frac{0,998 \cdot 0,94 \cdot \left(4 + \frac{1}{2} \cdot (-2,7216) \cdot 0,1\right)\left(3 + \frac{1}{2}(1,01511) \cdot 0,1\right)}{0,7 + \left(4 + \frac{1}{2} \cdot (-2,72016) \cdot 0,1\right)}$$
$$-0,3\ \left(3 + \frac{1}{2}(1,01511) \cdot 0,1\right) - 0,00003\ \left(3 + \frac{1}{2}(1,01511) \cdot 0,1\right)$$
$$-0,2 \cdot 0,8\ \left(3 + \frac{1}{2}(1,01511) \cdot 0,1\right)$$

$$= 2,423013872878198 - 0,91522665 - 0,000091522665 - 0,48812088$$

$$= 1,019574820213198$$

$$k_3 = r_1(x_0 - k_1h + 2k_2h)\left(1 - \frac{(x_0 - k_1h + 2k_2h)}{K}\right) - \sigma_1(x_0 - k_1h + 2k_2h)$$
$$+\sigma_2(y_0 - l_1h + 2l_2h) - u(x_0 - k_1h + 2k_2h)^2$$
$$-\frac{a(x_0 - k_1h + 2k_2h)(z_0 - m_1h + 2m_2h)}{b + (x_0 - k_1h + 2k_2h)} - q_1E(x_0 - k_1h + 2k_2h)$$

$$= 5 \cdot (4 - (-2{,}7216) \cdot 0{,}1 + 2 \cdot (\ -2{,}011543407879045) \cdot 0{,}1)$$
$$\cdot \left(1 - \frac{(4 - (-2{,}7216) \cdot 0{,}1 + 2 \cdot (\ -2{,}011543407879045) \cdot 0{,}1)}{4}\right)$$
$$-1 \cdot (4 - (-2{,}7216) \cdot 0{,}1 + 2 \cdot (\ -2{,}011543407879045) \cdot 0{,}1)$$
$$+1 \cdot (4 - (-1{,}328) \cdot 0{,}1 + 2 \cdot (-1{,}28865858368) \cdot 0{,}1)$$
$$-0{,}00001 \cdot \ (4 - (-2{,}7216) \cdot 0{,}1 + 2 \cdot (-2{,}011543407879045) \cdot 0{,}1)^2$$
$$-\frac{0{,}94 \cdot (3{,}869851318424191 \cdot 3102403964042640)}{0{,}7 + 3.869851318424191}$$
$$-0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot (4 - (-2{,}72016) \cdot 0{,}1 + 2 \cdot (-2{,}01069936) \cdot 0{,}1)$$

$$= \ 0{,}629570058734145 - 3{,}869851318424191 + 3{,}875068283264 - 0{,}01497574922671 - \ 2{,}469553331156143 - 0{,}309588105473935$$

$$= \ -2{,}145851987978795$$

$$l_3 = r_2(y_0 - l_1h + 2l_2h) + \sigma_1(x_0 - k_1h + 2k_2h) - \sigma_2(y_0 - l_1h + 2l_2h) - v(y_0 - l_1h + 2l_2h)^2$$

$$= 1 \cdot (4 - (-1{,}328) \cdot 0{,}1 + 2 \cdot (-1{,}28865858368) \cdot 0{,}1)$$
$$+1 \cdot (4 - (-2{,}7216) \cdot 0{,}1 + 2 \cdot (\ -2{,}011543407879045) \cdot 0{,}1)$$
$$-1 \cdot (4 - (-1{,}328) \cdot 0{,}1 + 2 \cdot (\ -1{,}28865858368) \cdot 0{,}1)$$
$$-0{,}333 \cdot (4 - (-1{,}328) \cdot 0{,}1 + 2 \cdot (\ -1{,}28865858368) \cdot 0{,}1)^2$$

$$= \ 3{,}87506828326 + \ 3{,}869851318424191 - 3{,}87506828326 - 5{,}000379348586215$$

$$= \ -1{,}130528030162024$$

$$m_3 = \frac{\beta a(x_0 - k_1h + 2k_2h)(z_0 - m_1h + 2m_2h \,)}{b + (x_0 - k_1h + 2k_2h)} - d(z_0 - m_1h + 2m_2h \,) - w(z_0 - m_1h + 2m_2h) - q_2E(z_0 - m_1h + 2m_2h \,)$$

$$= \frac{0{,}998 \cdot 0{,}94 \cdot 3{,}869851318424191 \cdot 3{,}102403964042640}{0{,}7 + 3{,}869851318424191}$$
$$-0{,}3 \cdot (3 - (1{,}01511) \cdot 0{,}1 + 2 \cdot (\ 1{,}019574820213198) \cdot 0{,}1)$$
$$-0{,}00003 \cdot (3 - (1{,}01511) \cdot 0{,}1 + 2 \cdot (\ 1{,}019574820213198) \cdot 0{,}1)$$
$$-0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot (3 - (1{,}01511) \cdot 0{,}1 + 2 \cdot (\ 1{,}019574820213198) \cdot 0{,}1)$$

$$= \ 2{,}464614224493831 - 0{,}930721189212792 - \ 0{,}000093072118921279 19 - 0{,}496384634246822$$

$$= 1{,}037415328915295$$

Sehingga diperoleh

$$x_1 = x_0 + \left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3\right) \cdot h$$

$= 4 + (-0{,}4536 - 1{,}341028938586030 - 0.{,}57641997996466) \cdot 0{,}1$

$= 4\ - 0.215227093658250$

$= 3{,}784772906341750$

$$y_1 = y_0 + \left(\frac{1}{6}l_1 + \frac{2}{3}l_2 + \frac{1}{6}l_3\right) \cdot h$$

$= 4 + (\,-0{,}221333333333333 - 0{,}859105722453333 - \ 0{,}188421338360337) \cdot 0{,}1$

$= 4 - 0{,}126886039414700$

$= 3{,}873113960585300$

$$z_1 = z_0 + \left(\frac{1}{6}m_1 + \frac{2}{3}m_2 + \frac{1}{6}m_3\right)\ h$$

$= 3 + (0{,}169185 + 0{,}679716546808799 + 0{,}172902554819216) \cdot 0{,}1$

$= 3 +\ 0{,}102180410162801$

$= 3{,}102180410162801$

Untuk iterasi yang kedua dengan $t_1 = 0{,}1$, $x_1 =\ 3{,}784772906341750$, $y_1 =\ 3{,}873113960585300$ dan $z_1 = 3{,}102180410162801$ akan diperoleh hasil berikut.

$$k_1 = r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - \sigma_1 x_1 + \sigma_2 y_1 - u x_1^2 - \frac{a x_1 z_1}{b + x_1} - q_1 E x_1$$

$$\begin{aligned} &= 5 \cdot 3{,}784772906341750 \cdot \left(1 - \frac{3{,}784772906341750}{4}\right) \\ &\quad -1 \cdot 3{,}784772906341750 + 1 \cdot 3{,}873113960585300 \\ &\quad -0{,}00001 \cdot (3{,}784772906341750)^2 \\ &\quad - \frac{0{,}94 \cdot 3{,}784772906341750 \cdot 3{,}102180410162801}{0{,}7 + 3{,}784772906341750} \\ &\quad -0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}784772906341750 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &=\ 1{,}018232090985527 - 3{,}784772906341750 + 3{,}873113960585300 \\ &\quad -0{,}001432450595258 - 2{,}460901743618675 - 0{,}302781832507340 \end{aligned}$$

$= \ -1{,}658542881492197$

$$l_1 = r_2 y_1 + \sigma_1 x_1 - \sigma_2 y_1 - v y_1^2$$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 3{,}873113960585300 + 1 \cdot\ 3{,}784772906341750 \\ &\quad -1 \cdot 3{,}873113960585300 - 0{,}333 \cdot (3.873113960585300)^2 \end{aligned}$$

$$= -1{,}210564006967938$$

$$m_1 = \frac{\beta a x_1 z_1}{b + x_1} - dz_1 - wz_1 - q_2 E\, z_1$$

$$= \frac{0{,}998 \cdot 0{,}94 \cdot\ 3{,}784772906341750 \cdot\ 3{,}102180410162801}{0{,}7 +\ 3{,}784772906341750}$$
$$-0{,}3 \cdot\ 3{,}102180410162801 - 0{,}00003 \cdot\ 3{,}102180410162801$$
$$-0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot\ 3{,}102180410162801$$

$$= 2{,}455979940131438 - 0{,}930654123048840 - 0{,}000093065412304884$$
$$-0{,}496348865626048$$

$$= 1{,}028883886044245$$

$$k_2 = r_1\left(x_1 + \frac{1}{2}k_1 h\right)\left(1 - \frac{\left(x_1 + \frac{1}{2}k_1 h\right)}{K}\right) - \sigma_1\left(x_1 + \frac{1}{2}k_1 h\right) + \sigma_2\left(y_1 + \frac{1}{2}l_1 h\right)$$
$$-u\left(x_1 + \frac{1}{2}k_1 h\right)^2 - \frac{a\left(x_1 + \frac{1}{2}k_1 h\right)\left(z_1 + \frac{1}{2}m_1 h\right)}{b + \left(x_1 + \frac{1}{2}k_1 h\right)} - q_1 E\left(x_1 + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$= 5 \cdot \left(3{,}784772906341750 + \frac{1}{2} \cdot (-1{,}658542881492197) \cdot 0{,}1\right)$$
$$\cdot \left(1 - \frac{\left(3{,}784772906341750 + \frac{1}{2} \cdot (-1{,}658542881492197) \cdot 0{,}1\right)}{4}\right)$$
$$-1 \cdot \left(3{,}784772906341750 + \frac{1}{2} \cdot (-1{,}658542881492197) \cdot 0{,}1\right)$$
$$+1 \cdot \left(3{,}873113960585300 + \frac{1}{2} \cdot (-1{,}210564006967938) \cdot 0{,}1\right)$$
$$-0{,}00001 \cdot \left(3{,}784772906341750 + \frac{1}{2} \cdot (-1{,}658542881492197) \cdot 0{,}1\right)^2$$
$$-\frac{0{,}94 \cdot 3{,}701845762267141 \cdot 3{,}153624604465013}{0{,}7 + 3{,}701845762267141}$$
$$-0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot \left(3{,}784772906341750 + \frac{1}{2} \cdot (-1{,}658542881492197) \cdot 0{,}1\right)$$

$$= 1{,}379651251816719 - 3{,}701845762267141 + 3{,}812585760236903$$
$$-0{,}001370366204762 - 2{,}492994656745768 - 0{,}296147660981371$$

$$= -1{,}300121434145420$$

$$l_2 = r_2\left(y_1 + \frac{1}{2}l_1 h\right) + \sigma_1\left(x_1 + \frac{1}{2}k_1 h\right) - \sigma_2\left(y_1 + \frac{1}{2}l_1 h\right) - v\left(y_1 + \frac{1}{2}l_1 h\right)^2$$

$$= 1 \cdot \left(3{,}873113960585300 + \frac{1}{2} \cdot (-1{,}210564006967938) \cdot 0{,}1 \right)$$
$$+1 \cdot \left(3{,}784772906341750 + \frac{1}{2} \cdot (-1{,}658542881492197) \cdot 0{,}1 \right)$$
$$-1 \cdot \left(3{,}873113960585300 + \frac{1}{2} \cdot (-1{,}210564006967938) \cdot 0{,}1 \right)$$
$$-0{,}333 \cdot \left(3{,}873113960585300 + \frac{1}{2} \cdot (-1{,}210564006967938) \cdot 0{,}1 \right)^2$$

$$= 3{,}812585760236903 + 3{,}701845762267141 - 3{,}812585760236903$$
$$-4{,}840424789660681$$

$$= -1{,}138579027393541$$

$$m_2 = \frac{\beta a \left(x_1 + \frac{1}{2}k_1 h\right)\left(z_1 + \frac{1}{2}m_1 h\right)}{b + \left(x_1 + \frac{1}{2}k_1 h\right)} - d\left(z_1 + \frac{1}{2}m_1 h\right) - w\left(z_1 + \frac{1}{2}m_1 h\right)$$
$$-q_2 E\left(z_1 + \frac{1}{2}m_1 h\right)$$

$$= \frac{0{,}998 \cdot 0{,}94 \cdot 3{,}701845762267141 \cdot 3{,}153624604465013}{0{,}7 + 3{,}701845762267141}$$
$$-0{,}3 \cdot \left(3{,}102180410162801 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}028883886044245 \cdot 0{,}1\right)$$
$$-0{,}00003 \cdot \left(3{,}102180410162801 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}028883886044245 \cdot 0{,}1\right)$$
$$-0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot \left(3{,}102180410162801 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}028883886044245 \cdot 0{,}1\right)$$

$$= 2{,}488008667432277 - 0{,}946087381339504 - 0{,}0000946087381339504 1$$
$$-0{,}504579936714402$$

$$= 1{,}037246740640237$$

$$k_3 = r_1(x_1 - k_1 h + 2k_2 h)\left(1 - \frac{(x_1 - k_1 h + 2k_2 h)}{K}\right)$$
$$-\sigma_1(x_1 - k_1 h + 2k_2 h) + \sigma_2(y_1 - l_1 h + 2l_2 h) - u(x_1 - k_1 h + 2k_2 h)^2$$
$$-\frac{a(x_1 - k_1 h + 2k_2 h)(z_1 - m_1 h + 2m_2 h)}{b + (x_1 - k_1 h + 2k_2 h)} - q_1 E(x_1 - k_1 h + 2k_2 h)$$

$$= 5 \cdot 3{,}690602907661886 \cdot \left(1 - \frac{3{,}690602907661886}{4}\right)$$
$$-1 \cdot 3{,}690602907661886 + 1 \cdot 3{,}766454555803386$$
$$-0{,}00001 \cdot (3{,}690602907661886)^2$$
$$-\frac{0{,}94 \cdot 3{,}690602907661886 \cdot 3{,}206741369686424}{0{,}7 + 3{,}690602907661886}$$
$$-0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}690602907661886$$

$$= 1{,}427327260756472 - 3{,}690602907661886 + 3{,}766454555803386$$
$$-0{,}001362054982204 - 2{,}533756915772537 - 0{,}295248232612951$$

$= -1{,}327188294469721$

$$l_3 = r_2(y_1 - l_1h + 2l_2h) + \sigma_1(x_1 - k_1h + 2k_2h) - \sigma_2(y_1 - l_1h + 2l_2h) \\ -v(y_1 - l_1h + 2l_2h)^2$$

$$= 1 \cdot 3{,}766454555803386 + 1 \cdot 3{,}690602907661886 \\ -1 \cdot 3{,}766454555803386 - 0{,}333 \cdot (3{,}766454555803386)^2$$

$$= 3{,}766454555803386 + 3{,}690602907661886 - 3{,}766454555803386 \\ -4{,}723997913670383$$

$$= -1{,}033395006008497$$

$$m_3 = \frac{\beta a(x_1 - k_1h + 2k_2h)(z_1 - m_1h + 2m_2h)}{b + (x_2 - k_1h + 2k_2h)} \\ -d(z_1 - m_1h + 2m_2h) - w(z_1 - m_1h + 2m_2h) \\ -q_2E(z_1 - m_1h + 2m_2h)$$

$$= \frac{0{,}998 \cdot 0{,}94 \cdot 3{,}690602907661886 \cdot 3{,}206741369686424}{0{,}7 + 3{,}690602907661886} \\ -0{,}3 \cdot 3{,}206741369686424 \\ -0{,}00003 \cdot 3{,}206741369686424 \\ +0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}206741369686424$$

$$= 2{,}528689401940992 - 0{,}962022410905927 - 0{,}0000962022410905927 3 \\ -0{,}513078619149828$$

$$= 1{,}053492169644146$$

Sehingga diperoleh

$$x_2 = x_1 + \left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3\right) h$$

$$= 3{,}784772906341750 + (-0{,}276423813582033 - 0{,}866747622763613 \\ - 0{,}221198049078287) \cdot 0{,}1$$

$$= 3{,}784772906341750 - 0{,}136436948542393$$

$$= 3{,}648335957799357$$

$$y_2 = y_1 + \left(\frac{1}{6}l_1 + \frac{2}{3}l_2 + \frac{1}{6}l_3\right) h$$

$$= 3{,}873113960585300 \\ +(-0{,}201760667827990 - 0{,}759052684929027 - 0{,}172232501001416) \\ \cdot 0{,}1$$

$$= 3{,}873113960585300 - 0{,}113304585375843$$

$$= 3{,}759809375209457$$

$$z_2 = z_1 + \left(\frac{1}{6}m_1 + \frac{2}{3}m_2 + \frac{1}{6}m_3\right)\, h$$

$$= 3{,}102180410162801 \\ +(0{,}171480647674041 + 0{,}691497827093491 + 0{,}175582028274024) \cdot 0{,}1$$

$$= 3{,}102180410162801 + 0{,}103856050304156$$

$$= 3{,}206036460466957$$

Untuk itersi yang ketiga dengan $t_2 = 0{,}3$, $x_2 = 3{,}648335957799357$, $y_2 = 3{,}759809375209457$ dan $z_2 = 3{,}206036460466957$ akan diperoleh hasil berikut.

$$k_1 = r_1 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K}\right) - \sigma_1 x_2 + \sigma_2 y_2 - u x_2^2 - \left(\frac{a x_2 z_2}{b + x_2}\right) - q_1 E x_2$$

$$= 5 \cdot 3{,}648335957799357 \cdot \left(1 - \frac{3{,}648335957799357}{4}\right) \\ -1 \cdot 3{,}648335957799357 + 1 \cdot 3{,}759809375209457 \\ -0{,}00001 \cdot (3{,}648335957799357)^2 \\ -\left(\frac{0{,}94 \cdot 3{,}648335957799357 \cdot 3{,}206036460466957}{0{,}7 + 3{,}648335957799357}\right) \\ -0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}648335957799357$$

$$= 1{,}603735712782095 - 3{,}648335957799357 + 3{,}759809375209457 \\ -0{,}001331035526097 - 2{,}528529607969280 - 0{,}291866876623949$$

$$= -1{,}106518389927131$$

$$l_1 = r_2 y_2 + \sigma_1 x_2 - \sigma_2 y_2 - v y_2^2$$

$$= 1 \cdot 3{,}759809375209457 + 1 \cdot 3{,}648335957799357 \\ -1 \cdot 3{,}759809375209457 - 0{,}333 \cdot (3{,}759809375209457)^2$$

$$= -1{,}059007499325647$$

$$m_1 = \frac{\beta a x_2 z_2}{b + x_2} - d z_2 - w z_2 - q_2 E z_2$$

$$= \frac{0{,}998 \cdot 0{,}94 \cdot 3{,}648335957799357 \cdot 3{,}206036460466957}{0{,}7 + 3{,}648335957799357} \\ -0{,}3 \cdot 3{,}206036460466957 - 0{,}00003 \cdot 3{,}206036460466957 \\ -0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}206036460466957$$

$$= 2{,}523472548753342 - 0{,}961810938140087 - 0{,}0000961810938140087 \\ -0{,}512965833674713$$

$$= 1{,}048599595844728$$

$$k_2 = r_1\left(x_2+\frac{1}{2}k_1h\right)\left(1-\frac{\left(x_2+\frac{1}{2}k_1h\right)}{K}\right)-\sigma_1\left(x_2+\frac{1}{2}k_1h\right)+\sigma_2\left(y_2+\frac{1}{2}l_1h\right)$$

$$-u\left(x_2+\frac{1}{2}k_1h\right)^2-\frac{a\left(x_2+\frac{1}{2}k_1h\right)\left(z_2+\frac{1}{2}m_1h\right)}{b+\left(x_2+\frac{1}{2}k_1h\right)}-q_1E\left(x_2+\frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$= 5\cdot\left(3{,}648335957799357+\frac{1}{2}\cdot(-1{,}106518389927131)\cdot 0{,}1\right)$$
$$\cdot\left(1-\frac{\left(3{,}648335957799357+\frac{1}{2}\cdot(-1{,}106518389927131)\cdot 0{,}1\right)}{4}\right)$$
$$-1\cdot\left(3{,}648335957799357+\frac{1}{2}\cdot(-1{,}106518389927131)\cdot 0{,}1\right)$$
$$+1\cdot\left(3{,}759809375209457+\frac{1}{2}\cdot(-1{,}059007499325647)\cdot 0{,}1\right)$$
$$-0{,}00001\left(3{,}648335957799357+\frac{1}{2}\cdot(-1{,}106518389927131)\cdot 0{,}1\right)^2$$
$$-\frac{0{,}94\cdot 3{,}593010038303\cdot 3{,}258466440259193}{0{,}7+3{,}593010038303}$$
$$-0{,}1\cdot 0{,}8\cdot\left(3{,}648335957799357+\frac{1}{2}\cdot(-1{,}106518389927131)\cdot 0{,}1\right)$$

$$= 1{,}827898772332342-3{,}593010038303+3{,}706859000243174$$
$$-0{,}001290972113535-2{,}563525445637099-0{,}287440803064240$$

$$= -0{,}910509486542358$$

$$l_2 = r_2\left(y_2+\frac{1}{2}l_1h\right)+\sigma_1\left(x_2+\frac{1}{2}k_1h\right)-\sigma_2\left(y_2+\frac{1}{2}l_1h\right)-v\left(y_2+\frac{1}{2}l_1h\right)^2$$

$$= 1\cdot\left(3{,}759809375209457+\frac{1}{2}\cdot(-1{,}059007499325647)\cdot 0{,}1\right)$$
$$+1\cdot\left(3{,}648335957799357+\frac{1}{2}\cdot(-1{,}106518389927131)\cdot 0{,}1\right)$$
$$-1\cdot\left(3{,}759809375209457+\frac{1}{2}\cdot(-1{,}059007499325647)\cdot 0{,}1\right)$$
$$-0{,}333\cdot\left(3{,}759809375209457+\frac{1}{2}\cdot(-1{,}059007499325647)\cdot 0{,}1\right)^2$$

$$= 3{,}706859000243174+3{,}593010038303-3{,}706859000243174$$
$$-4{,}575687614678714$$

$$= -0{,}982677576375713$$

$$m_2 = \frac{\beta a\left(x_2 + \frac{1}{2}k_1 h\right)\left(z_2 + \frac{1}{2}m_1 h\right)}{b + \left(x_2 + \frac{1}{2}k_1 h\right)} - d\left(z_2 + \frac{1}{2}m_1 h\right) - w\left(z_2 + \frac{1}{2}m_1 h\right)$$
$$-q_2 E\left(z_2 + \frac{1}{2}m_1 h\right)$$

$$= \frac{0{,}998 \cdot 0{,}94 \cdot 3{,}593010038303 \cdot 3.258466440259193}{0{,}7 + 3{,}593010038303}$$
$$-0{,}3 \cdot \left(3{,}206036460466957 + \left(\frac{1}{2} \cdot 1{,}048599595844728 \cdot 0{,}1\right)\right)$$
$$-0{,}00003 \cdot \left(3{,}206036460466957 + \left(\frac{1}{2} \cdot 1{,}048599595844728 \cdot 0{,}1\right)\right)$$
$$-0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot \left(3{,}206036460466957 + \left(\frac{1}{2} \cdot 1{,}048599595844728 \cdot 0{,}1\right)\right)$$

$$= 2{,}558398394745825 - 0{,}977539932077758 - 0{,}0000977539932077579$$
$$-0{,}521354630441471$$

$$= 1{,}059406078233389$$

$$k_3 = r_1(x_2 - k_1 h + 2k_2 h)\left(1 - \frac{(x_2 - k_1 h + 2k_2 h)}{K}\right)$$
$$-\sigma_1(x_2 - k_1 h + 2k_2 h) + \sigma_2(y_2 - l_1 h + 2l_2 h) - u(x_2 - k_1 h + 2k_2 h)^2$$
$$-\frac{a(x_2 - k_1 h + 2k_2 h)(z_2 - m_1 h + 2m_2 h)}{b + (x_2 - k_1 h + 2k_2 h)} - q_1 E(x_2 - k_1 h + 2k_2 h)$$

$$= 5 \cdot 3{,}576885899483598 \cdot \left(1 - \frac{3{,}576885899483598}{4}\right)$$
$$-1 \cdot 3{,}576885899483598 + 1 \cdot 3{,}669174609866879$$
$$-0{,}00001 \cdot (3{,}576885899483598)^2$$
$$-\frac{0{,}94 \cdot 3{,}576885899483598 \cdot 3{,}313057716529162}{0{,}7 + 3{,}576885899483598}$$
$$-0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}576885899483598$$

$$= 1{,}891788575012255 - 3{,}576885899483598 + 3{,}669174609866879$$
$$-0{,}001279411273792 - 2{,}604559468361730 - 0{,}286150871958688$$

$$= -0{,}907912466198675$$

$$l_3 = r_2(y_2 - l_1 h + 2l_2 h) + \sigma_1(x_2 - k_1 h + 2k_2 h) - \sigma_2(y_2 - l_1 h + 2l_2 h)$$
$$-v(y_2 - l_1 h + 2l_2 h)^2$$

$$= 1 \cdot 3{,}669174609866879 + 1 \cdot 3{,}576885899483598$$
$$-1 \cdot 3{,}669174609866879 - 0{,}333 \cdot (3{,}669174609866879)^2$$

$$= 3{,}669174609866879 + 3{,}576885899483598 - 3{,}669174609866879$$
$$-4{,}483126491791357$$

$$= -0{,}906240592307759$$

$$m_3 = \frac{\beta a(x_2 - k_1 h + 2k_2 h)(z_2 - m_1 h + 2m_2 h)}{b + (x_2 - k_1 h + 2k_2 h)}$$
$$-d(z_2 - m_1 h + 2m_2 h) - w(z_2 - m_1 h + 2m_2 h)$$
$$-q_2 E(z_2 - m_1 h + 2m_2 h)$$

$$= \frac{0{,}998 \cdot 0{,}94 \cdot 3{,}576885899483598 \cdot 3{,}313057716529162}{0{,}7 + 3{,}576885899483598}$$
$$-0{,}3 \cdot 3{,}313057716529162 - 0{,}00003 \cdot 3{,}313057716529162$$
$$-0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}313057716529162$$

$$= 2{,}599350349425006 - 0{,}993917314958749 - 0{,}0009939173149587486$$
$$-0{,}530089234644666$$

$$= 1{,}075244408090096$$

Sehingga diperoleh

$$x_3 = x_2 + \left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3\right) h$$

$$= 3{,}648335957799357$$
$$+(-0{,}184419731654522 - 0{,}607006324361572 - 0{,}151318744366446)$$
$$\cdot 0{,}1$$

$$= 3{,}648335957799357 - 0{,}094274480038254$$

$$= 3{,}554061477761103$$

$$y_3 = y_2 + \left(\frac{1}{6}l_1 + \frac{2}{3}l_2 + \frac{1}{6}l_3\right) h$$

$$= 3{,}759809375209457 - 0{,}176501249887608 - 0{,}655118384250475$$
$$-0{,}151040098717960$$

$$= 3{,}759809375209457 - 0{,}098265973285604$$

$$= 3{,}661543401923852$$

$$z_3 = z_2 + \left(\frac{1}{6}m_1 + \frac{2}{3}m_2 + \frac{1}{6}m_3\right) h$$

$$= 3{,}206036460466957 + 0{,}174766599307455 + 0{,}706270718822259$$
$$+0{,}179207401348349$$

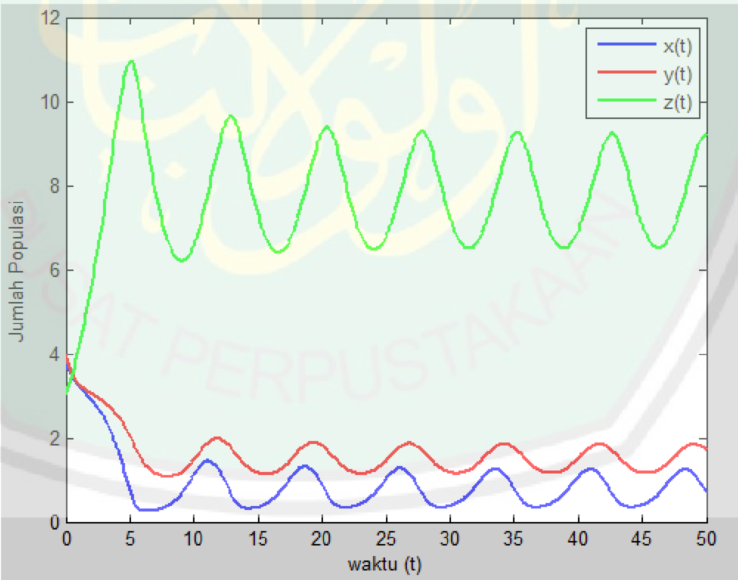
$$= 3{,}312060932414763$$

Tabel 3.2 Hasil Iterasi Metode Runge Kutta Orde Tiga Versi Satu Sampai $\boldsymbol{t = 0,3}$

i	t	x_{i+1}	y_{i+1}	z_{i+1}
0	0	4,000000000000000	4,000000000000000	3,000000000000000
1	0,1	3,784772906341750	3,873113960585300	3,102180410162801
2	0,2	3,648335957799357	3,759809375209457	3,206036460466957
3	0,3	3,554061477761103	3,661543401923852	3,312060932414763

Jadi pada saat $t = 0,1$ besar nilai $x_1 = 3,784772906341750$, $y_1 = 3,873113960585300$, dan $z_1 = 3,102180410162801$. Sedangkan pada saat $t = 0,2$ besar nilai $x_2 = 3,648335957799357$, $y_2 = 3,759809375209457$, $z_2 = 3,206036460466957$. Dan pada saat $t = 0,3$ nilai $x_3 = 0,3554061477761$ 103, $y_3 = 3,661543401923852$ dan $z_3 = 3,312060932414763$. Iterasi terus berulang hingga $t = 50$ atau iterasi ke 500.

Dibawah ini merupakan hasil simulasi numerik persamaan (3.11) menggunakan metode Runge Kutta orde tiga versi satu.



Gambar 3.1 Grafik Solusi Numerik Metode Runge Kutta Versi Satu untuk $\boldsymbol{\Delta t = 0,1}$

Pada Gambar 3.1 dapat dilihat jika iterasi dilakukan secara berulang hingga mencapat $t = 50$ atau iterasi yang ke-500 maka akan diperoleh penyelesaian $x_{500} =$

0,694371900568623, $y_{500} = 1{,}704203707443769$ dan $z_{500} = 9{,}231661905550761$. Dengan kata lain jumlah populasi mangsa di daerah tak terlindungi dan daerah yang terlindungi setelah 50 minggu secara berturut-turut adalah 1 ekor dan 2 ekor sedangkan untuk populasi pemangsa setelah 50 minggu adalah 9 ekor. Gambar 3.1 juga menunjukan bahwa ketiga populasi tetap bertahan dengan jumlah populasi yang berubah-ubah.

3.2.2 Penerapan dan Penyelesaian Model Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Tiga Versi Dua

Persamaan (3.25) disubstitusikan pada persamaan Runge Kutta orde tiga (3.24) menghasilkan persamaan (3.29) sampai (3.31).

$$x_{i+1} = x_i + \left(\frac{7}{18}k_1 + \frac{5}{6}k_2 - \frac{2}{9}k_3\right) h \tag{3.29}$$

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{7}{18}l_1 + \frac{5}{6}l_2 - \frac{2}{9}l_3\right) h \tag{3.30}$$

$$z_{i+1} = z_i + \left(\frac{7}{18}m_1 + \frac{5}{6}m_2 - \frac{2}{9}m_3\right) h \tag{3.31}$$

Dengan

$$k_1 = f(t_i, x_i, y_i, z_i)$$

$$= r_1 x_i \left(1 - \frac{x_i}{K}\right) - \sigma_1 x_i + \sigma_2 y_i - u x_i^2 - \frac{a x_i z_i}{b + x_i} - q_1 E x_i$$

$$l_1 = g(t_i, x_i, y_i, z_i)$$

$$= r_2 y_i + \sigma_1 x_i - \sigma_2 y_i - v y_i^2$$

$$m_1 = j(t_i, x_i, y_i, z_i)$$

$$= \frac{\beta a x_i z_i}{b + x_i} - d z_i - w z_i - q_2 E\, z_i$$

$$k_2 = f(t_i + h, x_i + k_1h, y_i + l_1h, z_i + m_1h)$$

$$= r_1(x_i + k_1h)\left(1 - \frac{(x_i + k_1h)}{K}\right) - \sigma_1(x_i + k_1h) + \sigma_2(y_i + l_1h)$$
$$-u(x_i + k_1h)^2 - \frac{a(x_i + k_1h)(z_i + m_1h)}{b + (x_i + k_1h)} - q_1E(x_i + k_1h)$$

$$l_2 = g(t_i + h, x_i + k_1h, y_i + l_1h, z_i + m_1h)$$

$$= r_2(y_i + l_1h) + \sigma_1(x_i + k_1h) - \sigma_2(y_i + l_1h) - v(y_i + l_1h)^2$$

$$m_2 = j(t_i + h, x_i + k_1h, y_i + l_1h, z_i + m_1h)$$

$$= \frac{\beta a(x_i + k_1h)(z_i + m_1h)}{b + (x_i + k_1h)} - d(z_i + m_1h) - w(z_i + m_1h)$$
$$-q_2E(z_i + m_1h)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{3}{2}h, x_i + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h, y_i + 2l_1h - \frac{1}{2}l_2h, z_i + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right)$$

$$= r_1\left(x_i + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)\left(1 - \frac{\left(x_i + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)}{K}\right)$$
$$-\sigma_1\left(x_i + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right) + \sigma_2\left(y_i + 2l_1h - \frac{1}{2}l_2h\right)$$
$$-u\left(x_i + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)^2$$
$$-\frac{a\left(x_i + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)\left(z_i + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right)}{b + \left(x_i + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)}$$
$$-q_1E\left(x_i + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$l_3 = g\left(t_i + \frac{3}{2}h, x_i + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h, y_i + 2l_1h - \frac{1}{2}l_2h, z_i + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right)$$

$$= r_2\left(y_i + 2l_1h - \frac{1}{2}l_2h\right) + \sigma_1\left(x_i + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)$$
$$-\sigma_2\left(y_i + 2l_1h - \frac{1}{2}l_2h\right) - v\left(y_i + 2l_1h - \frac{1}{2}l_2h\right)^2$$

$$m_3 = j\left(t_i + \frac{3}{2}h, x_i + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h, y_i + 2l_1h - \frac{1}{2}l_2h, z_i + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right)$$

$$= \frac{\beta a \left(x_i + 2k_1 h - \frac{1}{2}k_2 h\right)\left(z_i + 2m_1 h - \frac{1}{2}m_2 h\right)}{b + \left(x_i + 2k_1 h - \frac{1}{2}k_2 h\right)}$$
$$-d\left(z_i + 2m_1 h - \frac{1}{2}m_2 h\right) - w\left(z_i + 2m_1 h - \frac{1}{2}m_2 h\right)$$
$$-q_2 E\left(z_i + 2m_1 h - \frac{1}{2}m_2 h\right)$$

Penyelesaian persamaan (3.25) menggunakan metode Runge Kutta orde tiga versi satu telah selesai dilakukan. Selanjutnya akan dicoba menggunakan metode Runge Kutta orde tiga versi dua.

$$k_1 = r_1 x_0\left(1 - \frac{x_0}{K}\right) - \sigma_1 x_0 + \sigma_2 y_0 - u x_0^2 - \left(\frac{a x_0 z_0}{b + x_0}\right) - q_1 E x_0$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot \left(1 - \frac{4}{4}\right) - 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 - 0{,}00001 \cdot 4^2 - \left(\frac{0{,}94 \cdot 4 \cdot 3}{0{,}7 + 4}\right) - 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 4$$

$$= -0{,}0016 - \frac{11{,}28}{4{,}7} - 0{,}32$$

$$= -0{,}3216 - 2{,}4$$

$$= -2{,}7216$$

$$l_1 = r_2 y_0 + \sigma_1 x_0 - \sigma_2 y_0 - v y_0^2$$

$$= 1 \cdot 4 + 1 \cdot 4 - 1 \cdot 4 - 0{,}333 \cdot 4^2$$

$$= 4 + 4 - 4 - 5{,}328$$

$$= -1{,}328$$

$$m_1 = \frac{\beta a x_0 z_0}{b + x_0} - d z_0 - w z_0 - q_2 E z_0$$

$$= \frac{0{,}998 \cdot 0{,}94 \cdot 4 \cdot 3}{0{,}7 + 4} - 0{,}3 \cdot 3 - 0{,}00003 \cdot 3 - 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 3$$

$$= \frac{11{,}25744}{4{,}7} - 0{,}9 - 0{,}00009 - 0{,}48$$

$$= 2{,}3952 - 1{,}38009$$

$$= 1{,}01511$$

$$k_2 = r_1(x_0 + k_1h)\left(1 - \frac{(x_0 + k_1h)}{K}\right) - \sigma_1(x_0 + k_1h) + \sigma_2(y_0 + l_1h)$$
$$-u(x_0 + k_1h)^2 - \frac{a(x_0 + k_1h)(z_0 + m_1h)}{b + (x_0 + k_1h)} - q_1E(x_0 + k_1h)$$

$$= 5 \cdot (4 + (-2{,}7216) \cdot 0{,}1) \cdot \left(1 - \frac{(4 + (-2{,}7216) \cdot 0{,}1)}{4}\right)$$
$$-1 \cdot (4 + (-2{,}7216) \cdot 0{,}1) + 1 \cdot (4 + (-1{,}328) \cdot 0{,}1)$$
$$-0{,}00001 \cdot (4 + (-2{,}7216) \cdot 0{,}1)$$
$$- \frac{0{,}94 - 0{,}00001 \cdot (4 + (-2{,}7216) \cdot 0{,}1)(3 + 1{,}01511 \cdot 0{,}1)}{0{,}7 + -0{,}00001 \cdot (4 + (-2{,}7216) \cdot 0{,}1)}$$
$$-0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot -0{,}00001 \cdot (4 + (-2{,}7216) \cdot 0{,}1)$$

$$= 1{,}268211168 - 3{,}72784 + 3.86720 - 0{,}001389679106560$$
$$-2{,}454519711702682 - 0{,}2982272$$

$$= -1{,}346565422809242$$

$$l_2 = r_2(y_0 + l_1h) + \sigma_1(x_0 + k_1h) - \sigma_2(y_0 + l_1h) - v(y_0 + l_1h)^2$$

$$= 1 \cdot (4 + (-1{,}328) \cdot 0{,}1) + 1 \cdot (4 + (-2{,}7216) \cdot 0{,}1) - 1 \cdot (4 + (-1{,}328) \cdot 0{,}1)$$
$$-0{,}333 \cdot (4 + (-1{,}328) \cdot 0{,}1)$$

$$= 3{,}8672 + 3{,}72784 - 3{,}8672 - 4{,}98009353472$$

$$= -1{,}2522535347$$

$$m_2 = \frac{\beta a(x_0 + k_1h)(z_0 + m_1h)}{b + (x_0 + k_1h)} - d(z_0 + m_1h) - w(z_0 + m_1h) - q_2E(z_0 + m_1h)$$

$$= \frac{0{,}998 \cdot 0{,}94 \cdot (4 + (-2{,}7216) \cdot 0{,}1)(3 + 1{,}01511 \cdot 0{,}1)}{0{,}7 + (4 + (-2{,}7216) \cdot 0{,}1)}$$
$$-0{,}3 \cdot (3 + 1{,}01511 \cdot 0{,}1) - 0{,}00003 \cdot (3 + 1{,}01511 \cdot 0{,}1)$$
$$-0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot (3 + 1{,}01511 \cdot 0{,}1)$$

$$= 2{,}449610672279276 - 0{,}9304533 - 0{,}00009304533 - 0{,}49624176$$

$$= 1{,}022822566949276$$

$$k_3 = r_1\left(x_0 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)\left(1 - \frac{\left(x_0 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)}{K}\right)$$
$$-\sigma_1\left(x_0 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right) + \sigma_2\left(y_0 + 2l_1h - \frac{1}{2}l_2h\right)$$
$$-u\left(x_0 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)^2 - \frac{a\left(x_0 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)\left(z_0 + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right)}{b + \left(x_0 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)}$$
$$-q_1E\left(x_0 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$= 5 \cdot \left(4 + 2 \cdot (-2{,}7216) \cdot 0{,}1 - \frac{1}{2} \cdot (-1{,}346565422809242) \cdot 0{,}1\right)$$
$$\cdot \left(1 - \frac{\left(4 + 2 \cdot (-2{,}7216) \cdot 0{,}1 - \frac{1}{2} \cdot (-1{,}346565422809242) \cdot 0{,}1\right)}{4}\right)$$
$$-1 \cdot \left(4 + 2 \cdot (-2{,}7216) \cdot 0{,}1 - \frac{1}{2} \cdot (-1{,}346565422809242) \cdot 0{,}1\right)$$
$$+1 \cdot \left(4 + 2 \cdot (-1{,}328) \cdot 0{,}1 - \frac{1}{2} \cdot (-1{,}2522535347 \cdot 0{,}1)\right)$$
$$-0{,}00001 \cdot \left(4 + 2 \cdot (-2{,}7216) \cdot 0{,}1 - \frac{1}{2} \cdot (-1{,}346565422809242) \cdot 0{,}1\right)^2$$
$$-\frac{0{,}94 \cdot 3{,}523008271140462 \cdot 3{,}151880871652536}{0{,}7 + 3{,}523008271140462}$$
$$-0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot \left(4 + 2 \cdot (-2{,}7216) \cdot 0{,}1 - \frac{1}{2} \cdot (-1{,}346565422809242) \cdot 0{,}1\right)$$

$$= 2{,}100557257547176 - 3{,}523008271140462 + 3{,}797012676736$$
$$-0{,}001241158727852 - 2{,}471663697412929 - 0{,}281840661691237$$

$$= -0{,}380183854689304$$

$$l_3 = r_2\left(y_0 + 2l_1h - \frac{1}{2}l_2h\right) + \sigma_1\left(x_0 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right) - \sigma_2\left(y_0 + 2l_1h - \frac{1}{2}l_2h\right)$$
$$-v\left(y_0 + 2l_1h - \frac{1}{2}l_2h\right)^2$$

$$= 1 \cdot \left(4 + 2 \cdot (-1{,}328) \cdot 0{,}1 - \frac{1}{2} \cdot (-1{,}25225353472 \cdot 0{,}1)\right)$$
$$+1 \cdot \left(4 + 2 \cdot \left(-2{,}7216 \cdot 0{,}1 - \frac{1}{2} \cdot (-1{,}346565422809242) \cdot 0{,}1\right)\right)$$
$$-1 \cdot \left(4 + 2 \cdot (-1{,}328) \cdot 0{,}1 - \frac{1}{2} \cdot (-1{,}25225353472 \cdot 0{,}1)\right)$$
$$-0{,}333 \cdot \left(4 + 2 \cdot (-1{,}328) \cdot 0{,}1 - \frac{1}{2} \cdot (-1{,}25225353472 \cdot 0{,}1)\right)^2$$

$$= 3{,}797012676736 + 3{,}523008271140462 - 3{,}797012676736$$
$$-4{,}800962654008863$$

$$= -1{,}277954382868402$$

$$m_3 = \frac{\beta a\left(x_0 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)\left(z_0 + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right)}{b + \left(x_0 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)} - d\left(z_0 + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right)$$
$$-w\left(z_0 + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right) - q_2E\left(z_0 + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right)$$

$$= \frac{0{,}998 \cdot 0{,}94 \cdot 3{,}523008271140462 \cdot 3{,}151880871652536}{0{,}7 + 3{,}523008271140462}$$
$$-0{,}3 \cdot \left(3 + 2 \cdot 1{,}01511 \cdot 0{,}1 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}022822566949276\right)$$
$$-0{,}00003 \cdot \left(3 + 2 \cdot 1{,}01511 \cdot 0{,}1 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}022822566949276\right)$$
$$-0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot -0{,}00003 \cdot \left(3 + 2 \cdot 1{,}01511 \cdot 0{,}1 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}022822566949276\right)$$

$$= 2{,}466720370018103 - 0{,}945564261495761 - 0{,}0009455642614957608 - 0{,}504300939464406$$

$$= 1{,}016760612631787$$

Sehingga diperoleh

$$x_1 = x_0 + \left(\frac{7}{18} k_1 + \frac{5}{6} k_2 - \frac{2}{9} k_3\right) h$$

$$= 4 + (-1{,}0584 - 1{,}122137852341035 + 0{,}084485301042068) \cdot 0{,}1$$

$$= 4 - 0{,}209605255129897$$

$$= 3{,}790394744870103$$

$$y_1 = y_0 + \left(\frac{7}{18} l_1 + \frac{5}{6} l_2 - \frac{2}{9} l_3\right) h$$

$$= 4 + (-0{,}516444444444445 - 1{,}043544612266667 + 0{,}283989862859645) \cdot 0{,}1$$

$$= 4 - 0.127599919385147$$

$$= 3{,}872400080614853$$

$$z_1 = z_0 + \left(\frac{7}{18} m_1 + \frac{5}{6} m_2 - \frac{2}{9} m_3\right) h$$

$$= 3 + (0{,}394765 + 0{,}852352139124397 - 0{,}225946802807064) \cdot 0{,}1$$

$$= 3 + 0{,}102117033631733$$

$$= 3{,}102117033631733$$

Untuk iterasi yang kedua dengan $t_1 = 0{,}1, x_1 = 3{,}790394744870103, y_1 = 3{,}872400080614853$ dan $z_1 = 3{,}102117033631733$ akan diperoleh hasil berikut.

$$k_1 = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - \sigma_1 x_1 + \sigma_2 y_1 - u x_1^2 - \frac{a x_1 z_1}{b + x_1} - q_1 E x_1$$

$$= 5 \cdot 3{,}790394744870103\left(1 - \frac{3{,}790394744870103}{4}\right)$$
$$-1 \cdot 3{,}790394744870103 + 1 \cdot 3{,}872400080614853$$
$$-0{,}00001 \cdot (3{,}790394744870103)^2$$
$$- \frac{0{,}94 \cdot 3{,}790394744870103 \cdot 3{,}102117033631733}{0{,}7 + 3{,}790394744870103}$$
$$-0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}790394744870103$$

$$= 0{,}993108321926897 - 3{,}790394744870103 + 3{,}872400080614853$$
$$-0{,}001436709232194 - 2{,}461421287903832 - 0{,}303231579589608$$

$$= -1{,}690975919053988$$

$$l_1 = r_2 y_1 + \sigma_1 x_1 - \sigma_2 y_1 - v y_1^2$$

$$= 1 \cdot 3{,}872400080614853 + 1 \cdot 3{,}790394744870103$$
$$-1 \cdot 3{,}872400080614853 - 0{,}333 \cdot (3{,}872400080614853)^2$$

$$= -1{,}203100889117089$$

$$m_1 = \frac{\beta a x_1 z_1}{b + x_1} - d z_1 - w z_1 - q_2 E\, z_1$$

$$= \frac{0{,}998 \cdot 0{,}94 \cdot 3{,}790394744870103 \cdot 3{,}102117033631733}{0{,}7 + 3{,}790394744870103}$$
$$-0{,}3 \cdot 3{,}102117033631733 - 0{,}00003 \cdot 3{,}102117033631733$$
$$-0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}102117033631733$$

$$= 2{,}456498445328025 - 0{,}930635110089520 - 0{,}000093063511008952$$
$$-0{,}496338725381077$$

$$= 1{,}029431546346418$$

$$k_2 = r_1(x_1 + k_1 h)\left(1 - \frac{(x_1 + k_1 h)}{K}\right) - \sigma_1(x_1 + k_1 h) + \sigma_1(y_1 + l_1 h)$$
$$-u(x_1 + k_1 h)^2 - \frac{a(x_1 + k_1 h)(z_1 + m_1 h)}{b + (x_1 + k_1 h)} - q_1 E(x_1 + k_1 h)$$

$$= 5 \cdot 3{,}621297152964705 \cdot \left(1 - \frac{3{,}621297152964705}{4}\right)$$
$$-1 \cdot 3{,}621297152964705 + 1 \cdot 3{,}752089991703144$$
$$-0{,}00001 \cdot (3{,}621297152964705)^2$$
$$- \frac{0{,}94 \cdot 3{,}621297152964705 \cdot 3.205060188266375}{0{,}7 + 3{,}621297152964705}$$
$$-0{,}1 \cdot 3{,}621297152964705$$

$$= 1{,}714244427235679 - 3{,}621297152964705 + 3{,}752089991703144$$
$$-0{,}001311379307007 - 2{,}524724967657803 - 0{,}289703772237176$$

$$= -0{,}970702853227868$$

$$l_2 = r_2(y_1 + l_1h) + \sigma_1(x_1 + k_1h) - \sigma_2(y_1 + l_1h) - v(y_1 + l_1h)^2$$

$$\begin{aligned}&= 1 \cdot (\,3{,}872400080614853 + (-1{,}203100889117089) \cdot 0{,}1) + 1\\ &\quad \cdot (\;3{,}790394744870103 + (\,-1{,}690975919053988) \cdot 0{,}1)\\ &\quad -1 \cdot (\,3{,}872400080614853 + (-1{,}203100889117089) \cdot 0{,}1)\\ &\quad -0{,}333 \cdot (\,3{,}872400080614853 + (-1{,}203100889117089) \cdot 0{,}1)^2\end{aligned}$$

$$= -1{,}066736555879650$$

$$m_2 = \frac{\beta a(x_1 + k_1h)(z_1 + m_1h)}{b + (x_1 + k_1h)} - d(z_1 + m_1h) - w(z_1 + m_1h) - q_2E(z_1 + m_1h)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{0{,}998 \cdot 0{,}94 \cdot 3{,}621297152964705 \cdot 3{,}205060188266375}{0{,}7 + 3{,}621297152964705}\\ &\quad -0{,}3 \cdot (3{,}102117033631733 + 1{,}029431546346418 \cdot 0{,}1)\\ &\quad -0{,}00003 \cdot (3{,}102117033631733 + 1{,}029431546346418 \cdot 0{,}1)\\ &\quad -0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot (3{,}102117033631733 + 1{,}029431546346418 \cdot 0{,}1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 2{,}519675517722488 - 0{,}961518056479912 - 0{,}000096151805647991 25\\ &\quad -0{,}5128098840\end{aligned}$$

$$= \;1{,}045251679314307$$

$$\begin{aligned}k_3 &= r_1\left(x_1 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)\left(1 - \frac{\left(x_1 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)}{K}\right)\\ &\quad -\sigma_1\left(x_1 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right) + \sigma_2\left(y_1 + 2l_1h - \frac{1}{2}l_2h\right)\\ &\quad -u\left(x_1 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)^2 - \frac{a\left(x_1 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)\left(z_1 + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right)}{b + \left(x_1 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)}\\ &\quad -q_1E\left(x_1 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 5 \cdot 3{,}5007347037207 \cdot \left(1 - \frac{3{,}5007347037207}{4}\right)\\ &\quad -1 \cdot 3{,}5007347037207 + 1 \cdot 3{,}685116730585418\\ &\quad -0{,}00001 \cdot (3{,}5007347037207)^2\\ &\quad -\frac{0{,}94 \cdot 3{,}5007347037207 \cdot 3{,}255740758935302}{0{,}7 + 3{,}5007347037207}\\ &\quad -0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}5007347037207\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 2{,}184744186310430 - 3{,}5007347037207 + \;3{,}685116730585418\\ &\quad -0{,}001225514346583 - 2{,}550419471138243 \;- 0{,}280058776297656\end{aligned}$$

$$= \;-0{,}462577548607334$$

$$l_3 = r_2\left(y_1 + 2l_1h - \frac{1}{2}l_2h\right) + \sigma_1\left(x_1 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right) - \sigma_2\left(y_1 + 2l_1h - \frac{1}{2}l_2h\right)$$
$$-v\left(y_1 + 2l_1h - \frac{1}{2}l_2h\right)^2$$

$$= 1 \cdot 3{,}685116730585418 + 1 \cdot 3{,}5007347037207$$
$$-1 \cdot 3{,}685116730585418 - 0{,}333 \cdot (3{,}685116730585418)^2$$

$$= 3{,}685116730585418 + 3{,}5007347037207 - 3{,}685116730585418$$
$$-4{,}522168410907506$$

$$= -1{,}021433707186806$$

$$m_3 = \frac{\beta a\left(x_1 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)\left(z_1 + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right)}{b + \left(x_1 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)} - d\left(z_1 + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right)$$
$$-w\left(z_1 + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right) - q_2E\left(z_1 + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right)$$

$$= -\frac{0{,}998 \cdot 0{,}94 \cdot 3{,}5007347037207 \cdot 3{,}255740758935302}{0{,}7 + 3{,}5007347037207}$$
$$-0{,}3 \cdot 3{,}255740758935302 - 0{,}00003 \cdot 3{,}255740758935302$$
$$-0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}255740758935302$$

$$= 2{,}545348035 - 0{,}9767227095 - 0{,}00009767227095 - 0{,}5209187784$$

$$= 1{,}047580210862960$$

Sehingga diperoleh

$$x_2 = x_1 + \left(\frac{7}{18}k_1 + \frac{5}{6}k_2 - \frac{2}{9}k_3\right)h$$

$$= 3{,}790394744870103$$
$$+(-0{,}657601746298773 - 0{,}808919044356557 + 0{,}102795010801630)$$
$$\cdot 0{,}1$$

$$= 3{,}790394744870103 - 0.136372577985370$$

$$= 3{,}654022166884734$$

$$y_2 = y_1 + \left(\frac{7}{18}l_1 + \frac{5}{6}l_2 - \frac{2}{9}l_3\right)h$$

$$= 3{,}872400080614853$$
$$+(-0{,}467872567989979 - 0{,}888947129899709 + 0{,}226985268263735)$$
$$\cdot 0{,}1$$

$$= 3{,}872400080614853 - 0{,}1129730146$$

$$= 3{,}759416637652258$$

$$z_2 = z_1 + \left(\frac{7}{18}m_1 + \frac{5}{6}m_2 - \frac{2}{9}m_3\right)\ h$$

$$= 3{,}102117033631733$$
$$+(0{,}400334490245829 + 0{,}871043066095256 - 0{,}232795602413991) \cdot 0{,}1$$

$$= 3{,}102117033631733 + \ 0{,}103858195392709$$

$$= \ 3{,}205975229024443$$

Untuk iterasi yang ketiga dengan $t_2 = 0{,}3$, $x_2 = 3{,}654022166884734$, $y_2 = 3{,}759416637652258$ dan $z_2 = 3{,}205975229024443$ akan diperoleh hasil berikut.

$$k_1 = r_1 x_2 \left(1 - \frac{x_2}{K}\right) - \sigma_1 x_2 + \sigma_2 y_2 - u x_2^2 - \left(\frac{a x_2 z_2}{b + x_2}\right) - q_1 E x_2$$

$$= 5 \cdot 3{,}654022166884734 \cdot \left(1 - \frac{3{,}654022166884734}{4}\right)$$
$$-1 \cdot 3{,}654022166884734$$
$$+1 \cdot \ 3.759416637652258 - 0{,}00001 \cdot (3{,}654022166884734)^2$$
$$-\left(\frac{0{,}94 \cdot 3{,}654022166884734 \cdot 3{,}205975229024443}{0{,}7 + 3{,}654022166884734}\right)$$
$$-0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}654022166884734$$

$$= 1{,}580263339317414 \ - 3{,}654022166884734 + 3{,}759416637652258$$
$$-0{,}001335187799609 - 2{,}529114886894850 - 0{,}292321773350779$$

$$= -1{,}137114037960299$$

$$l_1 = r_2 y_2 + \sigma_1 x_2 - \sigma_2 y_2 - v y_2^2$$

$$= 1 \cdot \ 3{,}759416637652258 + 1 \cdot \ 3{,}654022166884734 - 1 \cdot \ 3{,}759416637652258$$
$$-0{,}333 \cdot (\ 3{,}759416637652258)^2$$

$$= \ 3{,}759416637652258 + \ 3{,}654022166884734 - 3{,}759416637652258$$
$$-4{,}706360080667051$$

$$= -1{,}052337913782318$$

$$m_1 = \frac{\beta a x_2 z_2}{b + x_2} - d z_2 - w z_2 - q_2 E z_2$$

$$= \frac{0{,}998 \cdot 0{,}94 \cdot \ 3{,}654022166884734 \cdot 3{,}205975229024443}{0{,}7 + \ 3{,}654022166884734}$$
$$-0{,}3 \cdot 3{,}205975229024443 - 0{,}00003 \cdot 3{,}205975229024443$$
$$-0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}205975229024443$$

$$= 2{,}524056657121061 - 0{,}961792568707333 - 0{,}0000961792568707332 8$$
$$-0{,}512956036643911$$

$$= 1{,}049211872512946$$

$$k_2 = r_1(x_2 + k_1h)\left(1 - \frac{(x_2 + k_1h)}{K}\right) - \sigma_1(x_2 + k_1h) + \sigma_2(y_2 + l_1h)$$
$$-u(x_2 + k_1h)^2 - \frac{a(x_2 + k_1h)(z_2 + m_1h)}{b + (x_2 + k_1h)} - q_1E(x_2 + k_1h)$$

$$= 5 \cdot 3{,}540310763088704 \cdot \left(1 - \frac{3{,}540310763088704}{4}\right)$$
$$-1 \cdot 3{,}540310763088704 + 1 \cdot 3{,}654182846274026$$
$$-0{,}00001 \cdot (3{,}540310763088704)^2$$
$$-\frac{0{,}94 \cdot 3{,}540310763088704 \cdot 3.310896416275737}{0{,}7 + 3{,}540310763088704}$$
$$-0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}540310763088704$$

$$= 2{,}034303441391369 - 3{,}540310763088704 + 3{,}654182846274026$$
$$-0{,}001253380029924 - 2{,}598466645615885 - 0{,}283224861047096$$

$$= -0{,}734769362116214$$

$$l_2 = r_2(y_2 + l_1h) + \sigma_1(x_2 + k_1h) - \sigma_2(y_2 + l_1h) - v(y_2 + l_1h)^2$$

$$= 1 \cdot (\, 3{,}759416637652258 + (\, -1{,}052337913782318) \cdot 0{,}1)$$
$$+1 \cdot \left(3.654022166884734 + (-1{,}137114037960299 \cdot 0{,}1)\right)$$
$$-1 \cdot (\, 3{,}759416637652258 + (\, -1{,}052337913782318) \cdot 0{,}1)$$
$$-0{,}333(\, 3{,}759416637652258 + (\, -1{,}052337913782318) \cdot 0{,}1)^2$$

$$= 3{,}654182846274026 + 3{,}540310763088704 - 3{,}654182846274026$$
$$-4{,}446566407243114$$

$$= -0{,}906255644154410$$

$$m_2 = \frac{\beta a(x_2 + k_1h)(z_2 + m_1h)}{b + (x_2 + k_1h)} - d(z_2 + m_1h) - w(z_2 + m_1h) - q_2E(z_2 + m_1h)$$

$$= \frac{0{,}998 \cdot 0{,}94 \cdot 3{,}540310763088704 \cdot 3{,}362309701829765}{0{,}7 + 3{,}540310763088704}$$
$$-0{,}3 \cdot 3{,}362309701829765 - 0{,}00003 \cdot 3{,}362309701829765$$
$$-0{,}2 \cdot 0{,}83{,}362309701829765$$

$$= 2{,}593269712324654 - 0{,}993268924882721$$
$$-0{,}0000993268924882721\,21 - 0{,}529743426604118$$

$$= 1{,}070158033945327$$

$$k_3 = r_1\left(x_2 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)\left(1 - \frac{\left(x_2 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)}{K}\right)$$
$$-u\left(x_2 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)^2 - \frac{a\left(x_2 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)\left(z_2 + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right)}{b + \left(x_2 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)}$$
$$-q_1E\left(x_2 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$= 5 \cdot 3{,}463337827398485 \cdot \left(1 - \frac{3{,}463337827398485}{4}\right)$$
$$-0{,}00001 \cdot (3{,}463337827398485)^2$$
$$-\frac{0{,}94 \cdot 3{,}463337827398485 \cdot 3{,}362309701829765}{0{,}7 + 3{,}463337827398485}$$
$$-0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}463337827398485$$

$$= 2{,}323303003630854 - 3{,}463337827398485 + 3{,}594261837103515$$
$$-0{,}001199470890669 - 2{,}629170624366367 - 0{,}277067026191879$$

$$= -0{,}453210108113031$$

$$l_3 = r_2\left(y_2 + 2l_1h - \frac{1}{2}l_2h\right) + \sigma_1\left(x_2 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right) - \sigma_2\left(y_2 + 2l_1h - \frac{1}{2}l_2h\right)$$
$$-v\left(y_2 + 2l_1h - \frac{1}{2}l_2h\right)^2$$

$$= 1 \cdot 3{,}594261837103515 + 1 \cdot 3{,}463337827398485$$
$$-1 \cdot 3{,}594261837103515 - 0{,}333 \cdot (3{,}594261837103515)^2$$

$$= 3{,}594261837103515 + 3{,}463337827398485 - 3{,}594261837103515$$
$$-4{,}301933145168358$$

$$= -0{,}838595317769873$$

$$m_3 = \frac{\beta a\left(x_2 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)\left(z_2 + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right)}{b + \left(x_2 + 2k_1h - \frac{1}{2}k_2h\right)} - d\left(z_2 + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right)$$
$$-w\left(z_2 + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right) - q_2E\left(z_2 + 2m_1h - \frac{1}{2}m_2h\right)$$

$$= \frac{0{,}998 \cdot 0{,}94 \cdot 3{,}463337827398485 \cdot 3{,}362309701829765}{0{,}7 + 3{,}463337827398485}$$
$$-0{,}3 \cdot 3{,}362309701829765 - 0{,}00003 \cdot 3{,}362309701829765$$
$$-0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 3{,}362309701829765$$

$$= 2{,}623912283117635 - 1{,}008692910548930 - 0{,}000100869291054893$$
$$-0{,}537969552292763$$

$$= 1{,}077148950984888$$

Sehingga diperoleh

$$x_3 = x_2 + \left(\frac{7}{18}k_1 + \frac{5}{6}k_2 - \frac{2}{9}k_3\right) h$$

$$= 3{,}654022166884734 + (-0{,}442211014762338 - 0{,}612307801763512 + 0{,}100713357358451) \cdot 0{,}1$$

$$= 3{,}654022166884734 - 0{,}095380545916740$$

$$= 3{,}558641620967994$$

$$y_3 = y_2 + \left(\frac{7}{18}l_1 + \frac{5}{6}l_2 - \frac{2}{9}l_3\right) h$$

$$= 3{,}759416637652258 + (-0{,}409242522026457 - 0{,}755213036795342 + 0{,}186354515059972) \cdot 0{,}1$$

$$= 3{,}759416637652258 - 0{,}097810104376183$$

$$= 3{,}661606533276075$$

$$z_3 = z_2 + \left(\frac{7}{18}m_1 + \frac{5}{6}m_2 - \frac{2}{9}m_3\right) h$$

$$= 3{,}205975229024443 + (0{,}408026839310590 + 0{,}891798361621106 - 0{,}239366433552197) \cdot 0{,}1$$

$$= 3{,}205975229024443 + 0{,}106045876737950$$

$$= 3{,}312021105762392$$

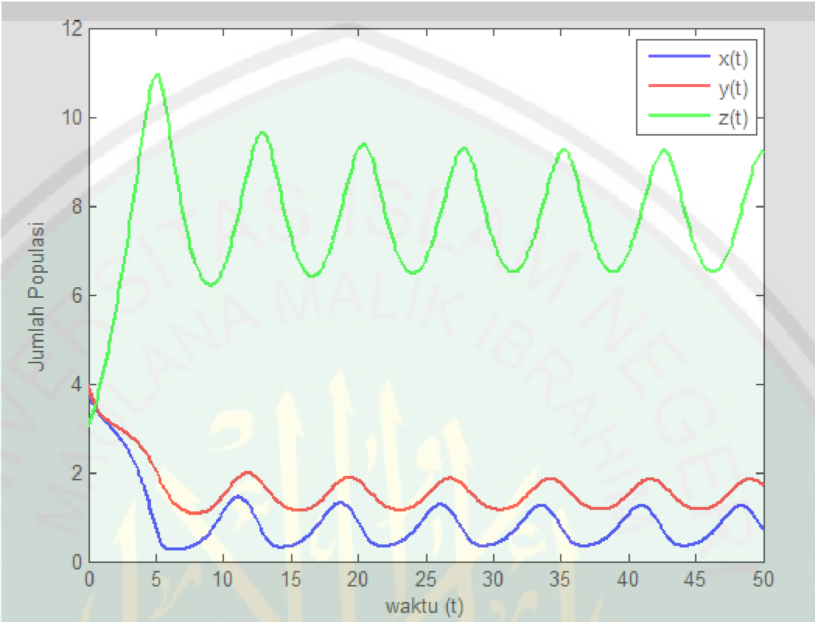
Tabel 3.3 Hasil Iterasi Metode Runge Kutta Orde Tiga Versi Dua Sampai $t = 0{,}3$

i	t	x_{i+1}	y_{i+1}	z_{i+1}
0	0	4,000000000000000	4,000000000000000	3,000000000000000
1	0,1	3,790394744870103	3,872400080614853	3,102117033631733
2	0,2	3,654022166884734	3,759416637652258	3,205975229024443
3	0,3	3,558641620967994	3,661606533276075	3,312021105762392

Jadi pada saat $t = 0{,}1$ besar nilai $x_1 = 3{,}790394744870103$, $y_1 = 3{,}872400080614853$, dan $z_1 = 3{,}102117033631733$. Sedangkan pada saat $t = 0{,}2$ besar nilai $x_2 = 3{,}654022166884734$, $y_2 = 3{,}759416637652258$, $z_2 = 3{,}205975229024443$. Dan untuk $t = 0{,}3$ besar nilai $x_3 = 3{,}55864162096994$,

$y_3 = 3{,}661606533276075$ dan $z_3 = 3{,}312021105762392$. Iterasi terus berulang hingga $t = 50$ atau iterasi ke 500.

Dibawah ini merupakan hasil simulasi numerik persamaan (3.11) menggunakan metode Runge Kutta orde tiga versi dua.



Gambar 3.2 Grafik Solusi Numerik Metode Runge Kutta Versi Dua untuk $\Delta \boldsymbol{t} = \mathbf{0,1}$

Pada Gambar 3.2 dapat dilihat jika iterasi dilakukan secara berulang hingga mancapai $t = 50$ atau iterasi yang ke 500 maka akan diperoleh penyelesaian $x_{500} = 0{,}686701504036745$, $y_{500} = 1{,}699971143576124$ dan $z_{500} = 9{,}23251068027817$. Dengan kata lain jumlah populasi mangsa didaerah tak terlindungi dan daerah yang terlindungi setelah 50 minggu secara berturut-turut adalah 1 ekor dan 2 ekor, sedangkan untuk populasi pemangsa setelah 50 minggu adalah 9 ekor. Gambar 3.2 juga menunjukan bahwa ketiga populasi tetap bertahan dengan jumlah populasi yang berubah-ubah.

3.2.3 Perbandingan Solusi Numerik

Tabel 3.4 Perbandingan Solusi $\boldsymbol{x(t)}$ Menggunakan Program

i	t	Program Runge Kutta Orde Tiga Versi Satu	Program Runge Kutta Orde Tiga Versi Dua	Program ode45
0	0	4,000000000000000	4,000000000000000	4,000000000000000
1	0,1	3,784772906341750	3,790394744870103	3,786474212993679
2	0,2	3,648335957799357	3,654022166884734	3,649446087424332
3	0,3	3,554061477761103	3,558641620967994	3,555978591520925
4	0,4	3,483882656132787	3,487315492035649	3,484995136631678
5	0,5	3,428155493341822	3,430661720101776	3,429053206657356
6	0,6	3,381424191538641	3,383242455059416	3,382171248472817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
500	50	0,694371900568623	0,686701504036745	0,695573377503525

Tabel 3.5 Perbandingan Solusi $\boldsymbol{y(t)}$ Menggunakan Program

i	t	Program Runge Kutta Orde Tiga Versi Satu	Program Runge Kutta Orde Tiga Versi Dua	Program ode45
0	0	4,000000000000000	4,000000000000000	4,000000000000000
1	0,1	3,873113960585300	3,872400080614853	3,872694377979289
2	0,2	3,759809375209457	3,759416637652258	3,759593865503718
3	0,3	3,661543401923852	3,661606533276075	3,661223871286328
4	0,4	3,577337446948707	3,577762600412572	3,577254862579945
5	0,5	3,505440841886927	3,506100775243235	3,505425369677179
6	0,6	3,443984781301762	3,444772368690221	3,443999144302535
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
500	50	1,704203707443769	1,699971143576124	1,706763171247062

Tabel 3.6 Perbandingan Solusi $\boldsymbol{z(t)}$ Menggunakan Program

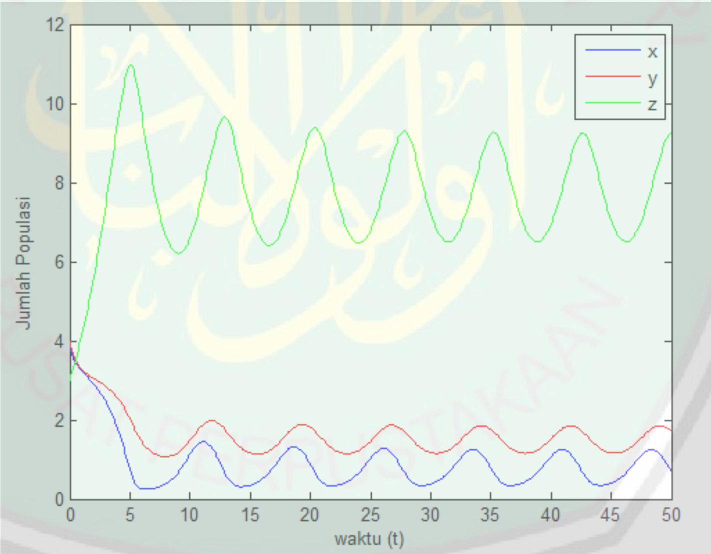
i	t	Program Runge Kutta Orde Tiga Versi Satu	Program Runge Kutta Orde Tiga Versi Dua	Program ode45
0	0	3,000000000000000	3,000000000000000	3,000000000000000
1	0,1	3,102180410162801	3,102117033631733	3,102148231844017
2	0,2	3,206036460466957	3,205975229024443	3,206011518407197
3	0,3	3,312060932414763	3,312021105762392	3,312037441963486
4	0,4	3,420581314501819	3,420565472160149	3,420577053433100
5	0,5	3,531829396505049	3,531834609746296	3,531833455785757
6	0,6	3,645979688378156	3,646001756192110	3,645990490463185
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
500	50	9,231661905550761	9,232510680278175	9,242973093501004

Tabel 3.7 Selisih Penyelesaian Metode Runge Kutta Versi Satu dengan ode45

i	t	$x(t)$	$y(t)$	$z(t)$
1	0,1	0,001701306651929	0,000419582606011	0,00003217831878
2	0,2	0,001110129624975	0,000215509705739	0,00002494205976
3	0,3	0,001917113759822	0,000319530637524	0,00002349045127
4	0,4	0,001112480498891	0,000082584368762	0,00000426106872
5	0,5	0,000897713315533	0,000015472209748	0,00000405928071
6	0,6	0,000747056934176	0,000014363000773	0,00001080208503
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
500	50	0,001201476934902	0,002559463803293	0,011311187950243

Tabel 3.8 Selisih Penyelesaian Metode Runge Kutta Versi Dua dengan ode45

i	t	$x(t)$	$y(t)$	$z(t)$
1	0,1	0,003920531876424	0,000294297364435	0,000031198212283
2	0,2	0,004576079460402	0,000177227851460	0,000036289382754
3	0,3	0,002663029447069	0,000382661989747	0,000016336201094
4	0,4	0,002320355403971	0,000507737832626	0,000011581272951
5	0,5	0,001608513444420	0,000675405566056	0,000001153960539
6	0,6	0.001071206586599	0,000773224387686	0,000011265728925
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
500	50	0,008871873466780	0,006792027670938	0,010462413222829



Gambar 3.3 Grafik Solusi Numerik Runge Kutta Orde Tiga Menggunakan ode45 untuk $\Delta t = 0,1$

Pada Gambar 3.3 dapat dilihat jika iterasi dilakukan secara berulang hingga $t = 50$ atau iterasi yang ke-500 maka akan diperoleh $x_{500} = 0{,}695573377503525$, $y_{500} = 1{,}706763171247062$ dan $z_{500} = 9{,}242973093501004$. Ternyata hasilnya tidak jauh berbeda dengan program Runge Kutta versi satu dan dua.

Jadi dapat disimpulkan dari Gambar 3.1 sampai 3.3 bahwa populasi mangsa di daerah tak terlindungi akan tetap ada selama populasi mangsa di daerah yang terlindungi tidak punah. Jika daerah yang terlindungi tidak ada maka pemanenan yang berlebih akan mengakibatkan kepunahan. Selain itu juga dengan tidak adanya pemangsa di daerah yang terlindungi maka populasi mangsa akan tetap ada. Bahkan pemanenan yang terus menerus terhadap mangsa dan pemangsa di daerah tak terlindungi tidak mengakibatkan kepunahan dari kedua spesies.

3.3 Analisis Galat Pada Model *Predator-Prey* dengan Pemanenan

Karena model *predator-prey* dengan pemanenan tidak mempunyai solusi eksak maka analisis galatnya menggunakan pendekatan iterasi. Sehingga galat yang digunakan pada penelitian ini adalah galat relatif hampiran. Galat relatif hampiran hanya membutuhkan nilai iterasi sekarang dan nilai iterasi sebelumnya. Galat relatif hampiran dirumuskan sebagai berikut.

1. Galat Relatif Hampiran x

$$\varepsilon_{x_{RA}} = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}$$

2. Galat Relatif Hampiran y

$$\varepsilon_{y_{RA}} = \frac{y_{i+1} - y_i}{y_{i+1}}$$

3. Galat Relatif Hampiran z

$$\varepsilon_{z_{RA}} = \frac{z_{i+1} - z_i}{z_{i+1}}$$

3.3.1 Analisis Galat Metode Runge Kutta Orde Tiga Versi Satu

Berdasarkan Tabel 3.2 menunjukan hasil iterasi $x(t), y(t)$ dan $z(t)$ metode Runge Kutta orde tiga versi satu, diperoleh hasil galat relatif hampiran sebagai berikut.

$$\varepsilon_{x_{RA1}} = \frac{x_1 - x_0}{x_1}$$

$$= \frac{3{,}784772906341750 - 4}{3{,}784772906341750}$$

$$= 0{,}056866580633574$$

$$\varepsilon_{x_{RA2}} = \frac{x_2 - x_1}{x_2}$$

$$= \frac{3{,}648335957799357 - 3{,}784772906341750}{3{,}648335957799357}$$

$$= 0{,}037397035284188$$

$$\varepsilon_{x_{RA3}} = \frac{x_3 - x_2}{x_3}$$

$$= \frac{3{,}554061477761103 - 3{,}648335957799357}{3{,}554061477761103}$$

$$= 0{,}026525843919178$$

$$\varepsilon_{y_{RA1}} = \frac{y_1 - y_0}{y_1}$$

$$= \frac{3{,}873113960585300 - 4}{3{,}873113960585300}$$

$$= 0{,}032760729662477$$

$$\varepsilon_{y_{RA2}} = \frac{y_2 - y_1}{y_2}$$

$$= \frac{3{,}759809375209457 - 3{,}873113960585300}{3{,}759809375209457}$$

$$= -0{,}030135726061785$$

$$\varepsilon_{y_{RA3}} = \frac{y_3 - y_2}{y_3}$$

$$= \frac{3,661543401923852 - 3,759809375209457}{3,661543401923852}$$

$$= -0,026837309434588$$

$$\varepsilon_{z_{RA1}} = \frac{z_1 - z_0}{z_1}$$

$$= \frac{3,102180410162801 - 3}{3,102180410162801}$$

$$= 0,032938255243975$$

$$\varepsilon_{z_{RA2}} = \frac{z_2 - z_1}{z_2}$$

$$= \frac{3,206036460466957 - 3,102180410162801}{3,206036460466957}$$

$$= 0,032393908049639$$

$$\varepsilon_{z_{RA3}} = \frac{z_3 - z_2}{z_3}$$

$$= \frac{3,312060932414763 - 3,206036460466957}{3,312060932414763}$$

$$= 0,032011630858043$$

Berdasarkan Tabel 3.3 menunjukan hasil iterasi $x(t), y(t)$ dan $z(t)$ metode Runge Kutta orde tiga versi dua, diperoleh hasil galat relatif hampiran sebagai berikut.

$$\varepsilon_{x_{RA1}} = \frac{x_1 - x_0}{x_1}$$

$$= \frac{3,784772906341750 - 4}{3,784772906341750}$$

$$= 0,056866580633574$$

$$\varepsilon_{x_{RA2}} = \frac{x_2 - x_1}{x_2}$$

$$= \frac{3,648335957799357 - 3,784772906341750}{3,648335957799357}$$

$$= 0,037397035284188$$

$$\varepsilon_{x_{RA3}} = \frac{x_3 - x_2}{x_3}$$

$$= \frac{3,554061477761103 - 3,648335957799357}{3,554061477761103}$$

$$= 0,026525843919178$$

$$\varepsilon_{y_{RA1}} = \frac{y_1 - y_0}{y_1}$$

$$= \frac{3,873113960585300 - 4}{3,873113960585300}$$

$$= 0,032760729662477$$

$$\varepsilon_{y_{RA2}} = \frac{y_2 - y_1}{y_2}$$

$$= \frac{3,759809375209457 - 3,873113960585300}{3,759809375209457}$$

$$= 0,030135726061785$$

$$\varepsilon_{y_{RA3}} = \frac{y_3 - y_2}{y_3}$$

$$= \frac{3,661543401923852 - 3,759809375209457}{3,661543401923852}$$

$$= 0,026837309434588$$

$$\varepsilon_{z_{RA1}} = \frac{z_1 - z_0}{z_1}$$

$$= \frac{3,102180410162801 - 3}{3,102180410162801}$$

$$= 0,032938255243975$$

$$\varepsilon_{z_{RA2}} = \frac{z_2 - z_1}{z_2}$$

$$= \frac{3,206036460466957 - 3,102180410162801}{3,206036460466957}$$

$$= 0,032393908049639$$

$$\varepsilon_{z_{RA3}} = \frac{z_3 - z_2}{z_3}$$

$$= \frac{3,312060932414763 - 3,206036460466957}{3,312060932414763}$$

$$= 0,032011630858043$$

Berikut ini adalah hasil perhitungan galat relatif hampiran dari model *predator-prey* dengan pemanenan.

Tabel 3.9 Galat Relatif Hampiran x

$\varepsilon_{x_{RA}}$	Runge Kutta Orde Tiga Versi Satu	Runge Kutta Orde Tiga Versi Dua	ode45
1	0,056866580633574	0,055299057021323	0,056391718256943
2	0,037397035284188	0,037321223505777	0,037547650324671
3	0,026525843919178	0,026802515138008	0,026284605910248
4	0,020143853440293	0,020453018688799	0,020368308162936
5	0,016255727868587	0,016513948781925	0,016314103807346
6	0,013820005759738	0,014015922793664	0,013861497464302
⋮	⋮	⋮	⋮
500	0,072685052880552	0,073255287882592	0,073096946383518

Tabel 3.10 Galat Relatif Hampiran y

$\varepsilon_{y_{RA}}$	Runge Kutta Orde Tiga Versi Satu	Runge Kutta Orde Tiga Versi Dua	ode45
1	0,032760729662477	0,032951119907240	0,032872622932651
2	0,030135726061785	0,030053450801652	0,030083172949432
3	0,026837309434588	0,026712347022352	0,026868063160210
4	0,023538722925613	0,023434739033226	0,023473029440744
5	0,020510003821111	0,020439180092981	0,020490949122497
6	0,017844463459544	0,017803326312772	0,017835726084968
⋮	⋮	⋮	⋮
500	0,015421684578292	0,015653341445533	0,015514276695609

Tabel 3.11 Galat Relatif Hampiran $\boldsymbol{z}$

$\varepsilon_{z_{RA}}$	Runge Kutta Orde Tiga Versi Satu	Runge Kutta Orde Tiga Versi Dua	ode45
1	0,032938255243975	0,032918498085220	0,032928223995053
2	0,032393908049639	0,032395195836966	0,032396417157846
3	0,032011630858043	0,032018478551796	0,032012296181481
4	0,031725713295274	0,031732872029843	0,031731374494452
5	0,031498713418410	0,031504628580029	0,031501033031555
6	0,031308537520648	0,031312970777351	0,031310294137088
⋮	⋮	⋮	⋮
500	0,001541164605418	0,001286898304512	0,001585170325500

Agar dapat lebih mudah melihat perbedaan galat relatif hampiran metode Runge Kutta orde tiga versi satu, metode Runge Kutta orde tiga versi dua dan ode45 maka dapat dicari nilai rata-rata galat relatif hampiranya. Nilai rata-rata galat relatif hampiran dapat dirumuskan seperti berikut.

1. Nilai Rata-Rata Galat Relatif Hampiran x

$$\bar{\varepsilon}_{x_{RA}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{x_i}}{n}$$

2. Nilai Rata-Rata Galat Relatif Hampiran y

$$\bar{\varepsilon}_{y_{RA}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{y_i}}{n}$$

3. Nilai Rata-Rata Galat Relatif Hampiran z

$$\bar{\varepsilon}_{z_{RA}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{z_i}}{n}$$

Dimana

$\bar{\varepsilon}_{x_{RA}}$: Nilai Rata-Rata Galat Relatif x

$\bar{\varepsilon}_{y_{RA}}$: Nilai Rata-Rata Galat Relatif y

$\bar{\varepsilon}_{z_{RA}}$: Nilai Rata-Rata Galat Relatif z

$\sum_{s=1}^{n} \varepsilon_{x_{RA_s}}$: Jumlah seluruh galat relatif x

$\sum_{s=n}^{n} \varepsilon_{y_{RA_s}}$: Jumlah seluruh galat relatif y

$\sum_{s=1}^{n} \varepsilon_{z_{RA_s}}$: Jumlah seluruh galat relatif z

n : Jumlah seluruh frekuensi

Tabel 3.12 Nilai Rata-Rata Galat Relatif Hampiran

Variabel	Runge Kutta Orde Tiga Versi Satu	Runge Kutta Orde Tiga Versi Dua	ode45
x	0,037503198865027	0,037510426125772	0,037617751842528
y	0,013774093206861	0,013775722939646	0,013816916000535
z	0,011858642641460	0,011856483610284	0,011886363320853

Dapat dilihat dari Tabel 3.12 bahwa galat relatif hampiran x dari ketiga versi mulai berbeda pada angka ke-4 setelah koma. Hasil galat relatif hampiran x antara Runge Kutta versi satu dan dua mulai berbeda pada angka ke-5 setelah koma dimana angka dari Runge Kutta versi satu lebih kecil dari Runge Kutta versi dua. Untuk galat relatif hampiran y dari ketiga versi mulai berbeda pada angka ke-4. Sedangkan hasil galat relatif hampiran y antara Runge Kutta versi satu dan dua mulai berbeda pada angka ke-6 setelah koma dimana angka dari Runge Kutta versi satu lebih kecil dari Runge Kutta versi dua. Untuk galat relatif hampiran z dari ketiga versi mulai berbeda pada angka ke-4 setelah koma. Sedangkan hasil galat relatif hampiran z antara Runge Kutta versi satu dan Runge Kutta versi dua mulai berbeda pada angka ke-5 setelah koma dimana angka dari Runge Kutta versi satu lebih besar dari Runge Kutta versi dua.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang dipaparkan pada bab tiga maka dapat disimpulkan sebagai berikut.

1. Metode Runge Kutta orde tiga memiliki versi yang tak hingga banyaknya. Untuk nilai q_{11}, q_{21} dan q_{22} dapat dipilih sembarang asalkan nilai $q_{11} \neq 0$ dan $q_{21} + q_{22} \neq 0$. Dari hasil penelitian ini diberikan dua rumus yaitu, metode Runge Kutta orde tiga versi satu dengan $y_{i+1} = \left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3\right)h$ dimana $k_1 = f(x_i, y_i)$, $k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$ dan $k_3 = f(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h)$. Sedangkan untuk metode Runge Kutta orde tiga versi dua yaitu $y_{i+1} = \left(\frac{7}{18}k_1 + \frac{5}{6}k_2 - \frac{2}{9}k_3\right)h$ dimana $k_1 = f(x_i, y_i)$, $k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$ dan $k_3 = f\left(x_i + \frac{3}{2}h, y_i + 2k_1 h + \frac{1}{2}k_2 h\right)$.
2. Solusi numerik model *predator-prey* dengan pemanenan menggunakan metode Runge Kutta orde tiga versi satu diperoleh penyelesaian $x_{500} = 0{,}694371900568623$, $y_{500} = 1{,}704203707443769$ dan $z_{500} = 9{,}231661905550761$. Sedangkan untuk metode Runge Kutta orde tiga versi dua didapat nilai $x_{500} = 0{,}686701504036745$, $y_{500} = 1{,}699971143576124$, dan $z_{500} = 9{,}22510680278175$. Ternyata hasil iterasi dari kedua versi tersebut tidak jauh berbeda dengan hasil program ODE45. Pada program ODE45 didapat nilai $x_{500} = 0{,}695573377503525$, $y_{500} = 1{,}706763\ 171247062$ dan $z_{500} = 9{,}242973093501004$.

3. Galat relatif hampiran x dan y dari metode Runge Kutta orde tiga versi satu, metode Runge Kutta orde tiga versi dua dan ode45 mulai berbeda pada angka ke-4 setelah koma. Sedangkan galat relatif hampiran z ketiga versi mulai berbeda pada angka ke-5 setelah koma.

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya disarankan untuk menganalisis penurunan metode Runge Kutta yang berorde lebih tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

Abdullah. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Chapra, S. C. 2002. *Numerical Methods For Engineers with Software and Programming Applications.* Fourt Edition. New York: The Mc-Graw-Hill Companies, Inc.

Chapra, S., & Canale, R. 2010. *Numerical Methods For Enginers Sixth Edition.* New York: Mc Graw Hill Companies, Inc.

Davis, A. B. 2012. *Calculus Early Transcedental 10th Edition.* USA: Laurie Rosatone.

Djojoharjo, H. 2000. *Metode Numerik.* Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

Munir, R. 2010. *Metode Numerik.* Bandung: Informatika.

Primbs, J. 2014. *A Factor Model Approach To Derivative Pricing.* Fullerton, USA: CRC Press.

Shihab, M. 2002. *Tafsir Al Mishbah Vol.7.* Jakarta: Lentera Hati.

Stewart, J. 2011. *Kalkulus Edisi 5.* Jakarta: Salemba Teknika.

Yang, H., & Jia, J. 2017. Harvesting of a Predator Prey Model with Reserve Area for Prey and in the Presence of Toxicity. *Appl. Math. Comput*, 693-708.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

1. Program MATLAB untuk Penyelesaian Model *Predator-Prey* dengan Pemanenan Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Tiga Versi Satu

```
clc,clear all,clf
format long
disp('>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>')
disp('Penerapan Metode Runge-Kutta Pada Model Predator Prey dengan
Pemanenan')
disp('>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>')
disp('                                                          ')

%parameter
h=0.1;
t=0:h:50;
r1=5;
r2=1;
K=4;
sigma1=1;
sigma2=1;
a=0.94;
b=0.7;
q1=0.1;
q2=0.2;
E=0.8;
beta=0.998;
u=0.0001;
v=0.333;
w=0.00003;
d=0.3;

F = @(x,y,z) r1*x*(1-x/K) - sigma1*x + sigma2*y - u*x^2 -
    a*x*z/(b+x) - q1*E*x;
G = @(x,y,z) r2*y + sigma1*x - sigma2*y - v*y^2;
H = @(x,y,z) beta*a*x*z/(b+x) - d*z - w*z - q2*E*z;

%nilai awal
x(1)=4;
y(1)=4;
z(1)=3;

mt = length(t);
my = mt;
mz = mt;
```

```
for i = 1:mx-1
    k1 = F(x(i), y(i),z(i));
    l1 = G(x(i), y(i),z(i));
    m1 = H(x(i), y(i),z(i));

    k2 = F(x(i)+(1/2)*k1*h, y(i)+(1/2)*l1*h, z(i)+(1/2)*m1*h);
    l2 = G(x(i)+(1/2)*k1*h, y(i)+(1/2)*l1*h, z(i)+(1/2)*m1*h);
    m2 = H(x(i)+(1/2)*k1*h, y(i)+(1/2)*l1*h, z(i)+(1/2)*m1*h);

    k3 = F(x(i)-k1*h+2*k2*h, y(i)-l1*h+2*l2*h, z(i)-m1*h+2*m2*h);
    l3 = G(x(i)-k1*h+2*k2*h, y(i)-l1*h+2*l2*h, z(i)-m1*h+2*m2*h);
    m3 = H(x(i)-k1*h+2*k2*h, y(i)-l1*h+2*l2*h, z(i)-m1*h+2*m2*h);


    x(i+1) = x(i) + ((1/6)*k1+(2/3)*k2+(1/6)*k3)*h;
    y(i+1) = y(i) + ((1/6)*l1+(2/3)*l2+(1/6)*l3)*h;
    z(i+1) = z(i) + ((1/6)*m1+(2/3)*m2+(1/6)*m3)*h;
end

figure(1)
plot(t,x,'-b','LineWidth',2)
hold on
plot(t,y,'-r','LineWidth',2)
hold on
plot(t,z,'-g','LineWidth',2)
xlabel('t','FontSize',10),ylabel('x(t)''y(t)''z(t)','FontSize',10)
legend('x(t)','y(t)','z(t)')
title('Grafik Solusi Numerik Model Predator prey dengan
pemanenan')

%Galat Relatif
for i=1:length(t)-1

    galat_x(i)=abs((x(i+1)-x(i))/(x(i+1)));
    galat_y(i)=abs((y(i+1)-y(i))/(y(i+1)));
    galat_z(i)=abs((z(i+1)-z(i))/(z(i+1)));
end

disp('   iterasi     x(t)       y(t)       z(t)         ')
disp([     t'          x'         y'        z' ])

disp('   iterasi      galat_x       galat_y       galat_z         ')
disp([     t(1:mt-1)'         galat_x'   galat_y'   galat_z' ])
```

2. **Program MATLAB untuk Penyelesaian Model *Predator-Prey* dengan Pemanenan Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Tiga Versi Dua**

```
clc,clear all,clf
format long
disp('>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>')
disp('Penerapan Metode Runge-Kutta Pada Model Predator Prey dengan
Pemanenan')
disp('>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>>')
disp('                                                         ')

%parameter
h=0.1;
t=0:h:50;
r1=5;
r2=1;
K=4;
sigma1=1;
sigma2=1;
a=0.94;
b=0.7;
q1=0.1;
q2=0.2;
E=0.8;
beta=0.998;
u=0.0001;
v=0.333;
w=0.00003;
d=0.3;

F = @(x,y,z) r1*x*(1-x/K) - sigma1*x + sigma2*y - u*x^2 -
    a*x*z/(b+x) - q1*E*x;
G = @(x,y,z) r2*y + sigma1*x - sigma2*y - v*y^2;
H = @(x,y,z) beta*a*x*z/(b+x) - d*z - w*z - q2*E*z;

%nilai awal
x(1)=4;
y(1)=4;
z(1)=3;

mt = length(t);
my = mt;
mz = mt;

for i = 1:mt-1
    k1 = F(x(i), y(i),z(i));
    l1 = G(x(i), y(i),z(i));
    m1 = H(x(i), y(i),z(i));
```

```
    k2 = F(x(i)+(1)*k1*h, y(i)+(1)*l1*h, z(i)+(1)*m1*h);
    l2 = G(x(i)+(1)*k1*h, y(i)+(1)*l1*h, z(i)+(1)*m1*h);
    m2 = H(x(i)+(1)*k1*h, y(i)+(1)*l1*h, z(i)+(1)*m1*h);

    k3 = F(x(i)+2*k1*h-1/2*k2*h, y(i)+2*l1*h-1/2*l2*h,
       z(i)+2*m1*h-1/2*m2*h);
    l3 = G(x(i)+2*k1*h-1/2*k2*h, y(i)+2*l1*h-1/2*l2*h,
       z(i)+2*m1*h-1/2*m2*h);
    m3 = H(x(i)+2*k1*h-1/2*k2*h, y(i)+2*l1*h-1/2*l2*h,
       z(i)+2*m1*h-1/2*m2*h);

    x(i+1) = x(i) + ((7/18)*k1+(5/6)*k2-(2/9)*k3)*h;
    y(i+1) = y(i) + ((7/18)*l1+(5/6)*l2-(2/9)*l3)*h;
    z(i+1) = z(i) + ((7/18)*m1+(5/6)*m2-(2/9)*m3)*h;
end

figure(1)
plot(t,x,'-b','LineWidth',2)
hold on
plot(t,y,'-r','LineWidth',2)
hold on
plot(t,z,'-g','LineWidth',2)
xlabel('t','FontSize',10),ylabel('x(t)''y(t)''z(t)','FontSize',10)
legend('x(t)','y(t)','z(t)')
title('Grafik Solusi Numerik Model Predator prey dengan
pemanenan')

%Galat Relatif
for i=1:length(t)-1

    galat_x(i)=abs((x(i+1)-x(i))/(x(i+1)));
    galat_y(i)=abs((y(i+1)-y(i))/(y(i+1)));
    galat_z(i)=abs((z(i+1)-z(i))/(z(i+1)));
end

disp('   iterasi     x(t)      y(t)      z(t)         ')
disp([     t'         x'        y'        z' ])

disp('   iterasi     galat_x     galat_y     galat_z         ')
disp([     t(1:mt-1)'         galat_x'   galat_y'   galat_z' ])
```

3. Program MATLAB ODE45 untuk Penyelesaian Model *Predator-Prey* dengan Pemanenan

```
function f=RK3(t,n)

r1=5;
r2=1;
K=4;
sigma1=1;
sigma2=1;
a=0.94;
b=0.7;
q1=0.1;
q2=0.2;
E=0.8;
beta=0.998;
u=0.0001;
v=0.333;
w=0.00003;
d=0.3;

%x=n(1);y=n(2);z=n(3)
f=[r1*n(1)*(1-n(1)/K) - sigma1*n(1) + sigma2*n(2) - u*n(1)^2 -
a*n(1)*n(3)/(b+n(1)) - q1*E*n(1); r2*n(2) + sigma1*n(1) -
sigma2*n(2) - v*n(2)^2;beta*a*n(1)*n(3)/(b+n(1)) - d*n(3) - w*n(3)
- q2*E*n(3)];


clc,clear

[t,Y]=ode45(@RK3,[0:0.1:50],[4,4,3]);
x=Y(:,1);
y=Y(:,2);
z=Y(:,3);
format long

figure(1),clf
plot(t,x,'b',t,y,'r',t,z,'g')
legend('x','y','z');
xlabel('waktu (t)','FontSize',10),ylabel('Jumlah
Populasi','FontSize',10)

%Galat Relatif
for i=1:length(t)-1

    galat_x(i)=abs((x(i+1)-x(i))/(x(i+1)));
    galat_y(i)=abs((y(i+1)-y(i))/(y(i+1)));
    galat_z(i)=abs((z(i+1)-z(i))/(z(i+1)));
end
```

RIWAYAT HIDUP

Hana Putri Pertiwi, lahir di Cirebon pada tanggal 18 April 1997 dan biasa dipanggil Hana. Penulis tinggal di Perum Gebang Permai Desa Gebang Ilir, Kabupaten Cirebon, Jawa Barat. Dia merupakan anak kedua dari tiga bersaudara pasangan Bapak Dulkolim dan Ibu Khalifah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SD Negeri Tersana Baru, Kabupaten Cirebon, Jawa Barat dan lulus tahun 2009. Setelah itu melanjutkan pendidikan ke SMP Negeri 6 Cirebon, Jawa Barat dan lulus tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMK Farmasi Muhammadiyah Cirebon, Jawa Barat dan lulus pada tahun 2015. Pada tahun yang sama, dia melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang jurusan Matematika Murni. Dia pernah menjadi anggota Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) pada periode 2016/2017.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Hana Putri Pertiwi
NIM : 15610123
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Analisis Penurunan Metode Runge Kutta Orde Tiga Dan Penerapannya Pada Penyelesaian Model *Predator-Prey* Dengan Pemanenan
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	29 Juni 2019	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	03 Juli 2019	Konsultasi Agama Bab I & Bab II	2.
3.	03 Juli 2019	Konsultasi Bab III	3.
4.	22 Juli 2019	Revisi Agama Bab I & Bab II	4.
5.	22 Juli 2019	ACC Bab I, Bab II & Bab III	5.
6.	13 Mei 2019	ACC Agama Bab I & Bab II	6.
7.	30 Oktober 2019	Konsultasi Bab III & Bab IV	7.
8.	31 Oktober 2019	Konsultasi Agama Bab I & Bab II	8.
9.	19 November 2019	Revisi Bab III & Bab IV	9.
10.	14 November 2019	Revisi Agama Bab I & Bab II	10.
11.	02 Desember 2019	ACC Keseluruhan	11.
12.	02 Desember 2019	ACC Agama Keseluruhan	12.

Malang, 02 Desember 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001