

**PENYELESAIAN PERSAMAAN KDV (KORTEWEG DE VRIES)
MENGUNAKAN METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL**

SKRIPSI

**OLEH
HELLIYATUS SAADAH
NIM. 16610038**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**PENYELESAIAN PERSAMAAN KDV (KORTEWEG DE VRIES)
MENGUNAKAN METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Hellyatus Saadah
NIM. 16610038**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2020**

**PENYELESAIAN PERSAMAAN KDV (KORTEWEG DE VRIES)
MENGUNAKAN METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL**

SKRIPSI

Oleh
Helliyatus Saadah
NIM. 16610038

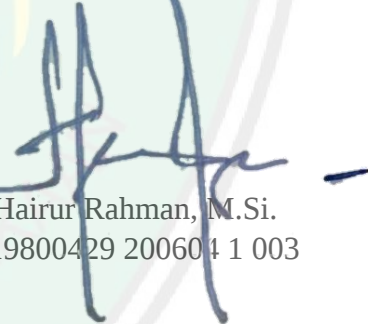
Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal, 28 Maret 2020

Pembimbing I,



Mohammad Jamhuri, M.Si.
NIP. 19810502 200501 1 004

Pembimbing II,



Dr. Hairur Rahman, M.Si.
NIP. 19800429 200604 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 19650414 200312 1 001

**PENYELESAIAN PERSAMAAN KDV (KORTEWEG DE VRIES)
MENGUNAKAN METODE TRANSFORMASI DIFERENSIAL**

SKRIPSI

Oleh
Helliyatus Saadah
NIM. 16610038

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal, 25 April 2020

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si

Ketua Penguji : Heni Widayani, M.Si

Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si

Anggota Penguji : Dr. Hairur Rahman, M.Si

.....


.....


.....


.....


Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Hellyatus Saadah

NIM : 16610038

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penyelesaian Persamaan KdV (Korteweg de Vries
menggunakan Metode Transformasi Diferensial

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai tulisan saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Maret 2020
Yang membuat pernyataan



Hellyatus Saadah
NIM. 16610038

MOTTO

Kebahagiaan yang sesungguhnya yaitu ketika kita menjadi alasan orang tua kita
bahagia.



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Jusak (Alm) dan Ibunda Hosna tercinta, yang selalu menjadi alasan penulis bertahan dan berjuang sampai saat ini. Ibunda yang selalu mendoakan, memberikan semangat, nasihat dan kasih sayang yang tiada tara. Serta kedua kakak tersayang Hozaimah dan Ulfatul Jamilah dan seluruh keluarga yang selalu memberikan dukungan kepada penulis.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini yang berjudul “Penyelesaian Persamaan KdV (Korteweg de Vries) menggunakan Metode Transformasi Diferensial”, sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas bimbingan dan arahan baik secara langsung maupun tidak langsung dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen wali yang telah memberikan arahan dan bimbingan sejak semester awal.
5. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi dan pengalaman berharga kepada penulis.

6. Dr. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
7. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terimakasih atas segala ilmu yang diberikan dan atas segala bimbingannya.
8. Ayahanda Jusak (Alm) dan Ibunda Hosna serta kakak-kakak tercinta yang selalu mendoakan, memberikan semangat, dukungan dan motivasi yang luar biasa kepada penulis.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2016, khususnya Aminah, Amel, Winda, Qumah, Dana, Ilmi, Weka, Lisa yang berjuang bersama-sama untuk mewujudkan mimpi dan menemani baik suka maupun duka selama pendidikan.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu yang telah memberikan bantuan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materil.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 28 Maret 2020

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR..... viii

DAFTAR ISI..... x

DAFTAR TABEL xii

DAFTAR GAMBAR..... xiii

ABSTRAK xiv

ABSTRACT xv

ملخص xvi

BAB I PENDAHULUAN

1.1	Latar Belakang	1
1.2	Rumusan Masalah	4
1.3	Tujuan Penelitian.....	4
1.4	Manfaat Penelitian.....	4
1.5	Batasan Masalah.....	5
1.6	Metode Penelitian.....	5
1.7	Sistematika Penulisan.....	6

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1	Persamaan Korteweg de-Vriess.....	7
2.2	Deret Taylor	13
2.3	Metode Transformasi Diferensial.....	15
2.4	Kajian Islam tentang Istiqomah.....	17

BAB III PEMBAHASAN

3.1	Metode Transformasi Diferensial pada Persamaan KdV	21
3.2	Penyelesaian Persamaan KdV dengan Nilai Awal Pertama.....	31

3.3	Penyelesaian Persamaan KdV dengan Nilai Awal Kedua	39
-----	--	----

BAB IV PENUTUP

4.1	Kesimpulan.....	52
4.2	Saran.....	52

DAFTAR RUJUKAN	53
-----------------------------	-----------

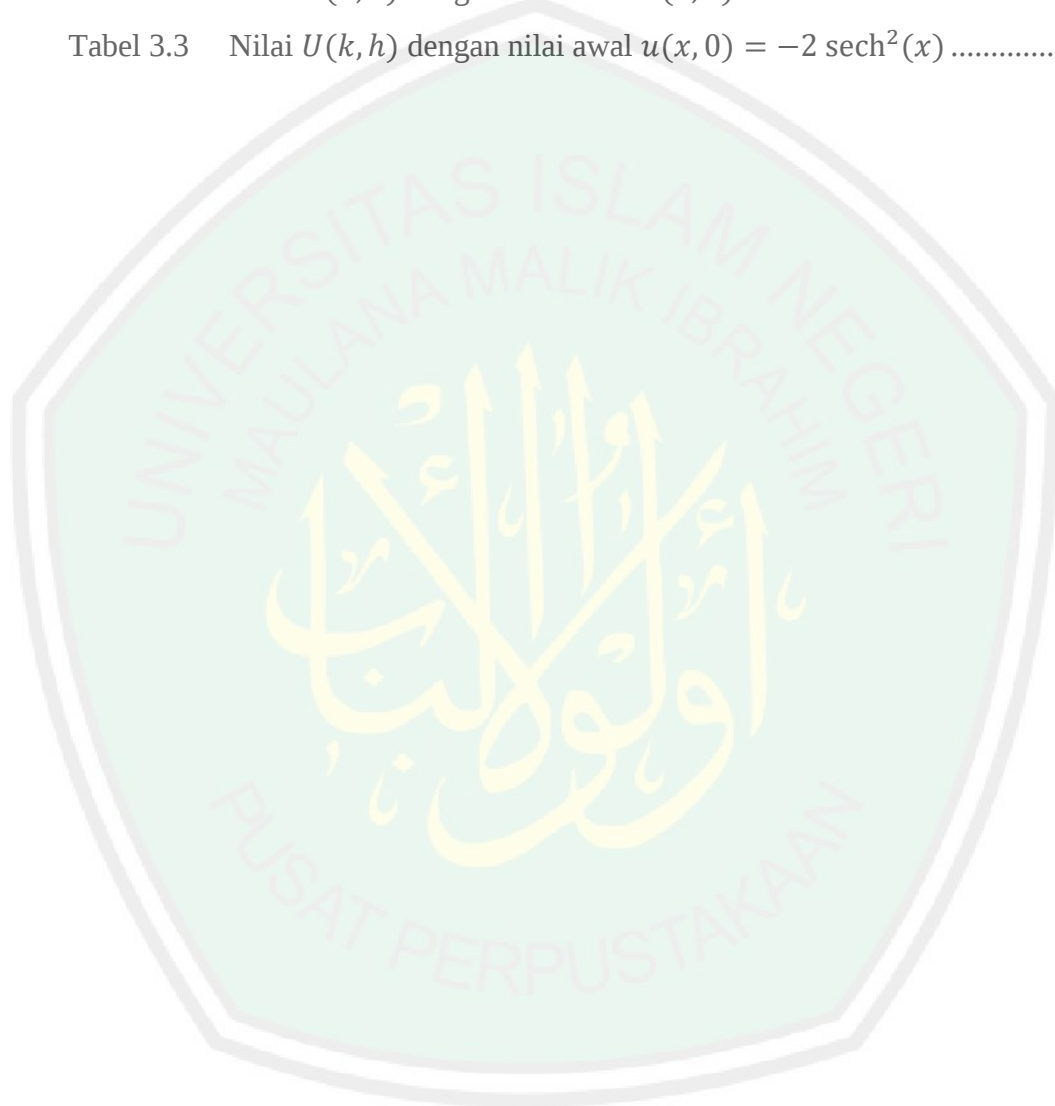
DAFTAR RIWAYAT HIDUP

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI



DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Transformasi Diferensial Dua Dimensi	16
Tabel 3.1	Transformasi Persamaan KdV	24
Tabel 3.2	Nilai $U(k, h)$ dengan nilai awal $u(x, 0) = 6x$	36
Tabel 3.3	Nilai $U(k, h)$ dengan nilai awal $u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2(x)$	43



DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Simulasi saat $t = 0$	39
Gambar 3.2	Simulasi saat $t = 0.01$	39
Gambar 3.3	Simulasi saat $t = 0,02$	39
Gambar 3.4	Simulasi saat $t = 0,026$	39
Gambar 3.5	Simulasi saat $t = 0$	50
Gambar 3.6	Simulasi saat $t = 1$	50
Gambar 3.7	Simulasi saat $t = 2$	51
Gambar 3.8	Simulasi saat $t = 3$	51

ABSTRAK

Saadah, Hellyatus, 2020. **Penyelesaian Persamaan KdV (Korteweg de Vries) menggunakan Metode Transformasi Diferensial**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Mohammad Jamhuri, M.Si, (2) Dr. Hairur Rahman, M.Si.

Kata kunci: Metode Transformasi Diferensial, Persamaan KdV, Deret Taylor.

Penelitian ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial parsial nonlinier yaitu persamaan KdV. Penyelesaian persamaan tersebut dilakukan dengan menggunakan metode transformasi diferensial parsial yang merupakan metode semi-numerik-analitik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial linier dan nonlinier. Metode transformasi diferensial merupakan metode yang menggunakan teori ekspansi deret pangkat pada bentuk transformasinya untuk menentukan solusi. Solusi analitik dari persamaan KdV dihasilkan dengan mencari fungsi dari deret u_n . Pada penelitian ini digunakan dua nilai awal pada persamaan KdV yang diberikan. Pada nilai awal pertama solusi analitik diperoleh dengan menggunakan formula pada jumlah deret geometri tak hingga sedangkan pada nilai awal kedua solusi analitik diperoleh dengan menggunakan ekspansi binomial dan deret Maclaurin $\tanh(x)$ yang diturunkan satu kali terhadap x . Kemudian solusi analitik tersebut disimulasikan menggunakan software Maple. Disimpulkan bahwa metode transformasi diferensial pada penelitian ini merupakan salah satu metode yang mampu menghasilkan solusi analitik untuk persamaan KdV.

ABSTRACT

Saadah, Hellyatus. 2020. **The Solving of KdV (Korteweg de Vries) Equation by Differential Transformation Method**. Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Tecnology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of malang, Advisors: (1) Mohammad Jamhuri, M.Si, (2) Dr. Hairur Rahman, M.Si.

Keyword: Differential Transformation Method, KdV Equation, Taylor Series.

This study discusses the solution of nonlinear partial differential equations, namely the KdV equation. The solution of the equation is done by using the partial differential transformation method which is a semi-numerical-analytical method, it can be used to solve both ordinary differential equations and linear and nonlinear partial differential equations. Differential transformation method is a method that uses the theory of rank expansion in the form of transformation to determine solutions. The Analytic solution of the KdV equation is generated by determining the function of the series u_n . In this study two initial values in the given KdV equation were used. At the first initial value, the analytic solution is obtained using infinite geometry series formula while at the second initial value, the analytic solution is obtained by using binomial expansion and Maclaurin series $\tanh(x)$ which is reduced once to x . Then the analytic solution is simulated using Maple software. It was concluded that the differential transformation method in this study was categorized as one method that produced an analytic solution to the KdV equation.

ملخص

السعادة، حلية، 2020. الحل المعادلات KdV (Korteweg de Vries) بالطريقة التحول

التفاضل. بحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية

الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشارون : (1) مُجَدِّد جمهوري ، الماجستير ،

(2) الدكتور. هير الرحمن ، الماجستير.

الكلمات الرئيسية : طريقة المعادلة التفاضلية، معادلة KdV، سلسلة تايلور.

البحث يناقش خلاص المعادلة KdV هي المعادلة غير الخطية. خلاص تلك المعادلة بالطريقة التحول التفاضل هما لطريق بين العددية والتحليلية يستخدم ليخلص معادلة تفاضلية عادية أو معادلة تفاضلية جزئية خطية وغير خطية. الطريقة التحول التفاضل هي الطريقة يستخدم نظرية التوسع رتبة في التحول ليجد نتائج. نتائج تحليلية من المعادلة KdV ينتج بإبحث عن القواعد من السلسلة u_n . في هذا البحث يستخدم أول نتيجتان من المعادلة KdV التي يعطى. في نتيجة الأول حل تحليلية يوجد بالإستخدام القواعد من عدد لا نهائي من السلاسل الهندسية وفي نتيجة الأخرى حل تحليلية يوجد بالإستخدام توسع ذي الحدين و سلسلة مكلاورين $\tanh(x)$ التي خفضت واحدا ب (x) . ثم ذلك حل تحليلية يتم اختبار بالتطبيق Maple . يختتم يعني الطريقة التحول التفاضل في هذا البحث هي أحد من الطرائق التي تنتج حل تحليلية للمعادلة KdV .

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Gelombang merupakan suatu gejala terjadinya perambatan yang melewati suatu medium dimana setelah gejala terjadi maka keadaan medium akan kembali ke keadaan semula (Trisnobudi, 2005). Dalam perambatannya gelombang memiliki kecepatan yang berbeda, dimana gelombang linier dikategorikan sebagai gelombang yang cepat rambatnya tidak dipengaruhi amplitudo atau amplitudonya sangat kecil. Sedangkan gelombang nonlinier dikategorikan sebagai gelombang yang cepat rambatnya dipengaruhi oleh amplitudo atau amplitudonya sangat besar. Salah satu contoh gelombang nonlinier yang sering kita temui dalam kehidupan sehari-hari adalah gelombang permukaan air atau sering disebut dengan gelombang soliton.

Gelombang soliton didefinisikan sebagai gelombang yang dapat mempertahankan bentuk dan kecepatan setelah terjadi interaksi dengan gelombang soliton lainnya juga dengan gelombang yang terlokalisasi (Verdults, 2011). Maksud dari gelombang yang terlokalisasi adalah gelombang yang memiliki puncak dan ekor menurun secara eksponensial menuju nol. Untuk mempermudah memahami permasalahan gelombang soliton maka dapat dilakukan dengan cara memodelkan secara matematis. Salah satu persamaan yang memiliki solusi pada gelombang soliton yaitu persamaan Korteweg de-Vries (KdV). Persamaan KdV telah menjadi salah satu persamaan penting yang mendasari yang mendasari teori soliton.

Persamaan KdV adalah sebuah model matematika yang menggambarkan perambatan gelombang air pada lorong (*chanel*) yang tidak terlalu lebar (Daxois dan Michel, 2010). Persamaan KdV pertama kali di kemukakan Diederik Johannes Korteweg dan Gustav de Vries pada tahun 1895. Mereka menurunkan suatu persamaan diferensial parsial nonlinier yang mengkonfirmasi eksistensi gelombang yang ditemukan oleh John Scott Russel. Persamaan KdV memiliki sifat-sifat diantaranya yaitu Linier nondispersif dan Linier dispersif. Ada banyak metode yang dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan KdV ini, salah satunya yaitu metode transformasi diferensial. Metode transformasi diferensial atau *differential transform method* (DTM) merupakan metode semi-numerik-analitik yang dapat digunakan untuk mencari solusi persamaan diferensial parsial linier maupun nonlinier.

Persamaan KdV merupakan persamaan nonlinier yang tentu dapat dicari solusinya, baik secara analitik maupun secara numerik. Hal ini sesuai dalam pandangan Islam yang menyatakan bahwa semua permasalahan yang sulit, memiliki manfaat dan ada penyelesaiannya. Sebagaimana firman Allah yang tertuang dalam potongan surat Al-Baqarah ayat 185 berikut:

... يُرِيدُ اللَّهُ بِكُمُ الْيُسْرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ الْعُسْرَ ... ١٨٥

Artinya: "...Allah menghendaki kemudahan bagimu, dan tidak menghendaki kesukaran bagimu...".

Pada ayat tersebut, Allah menyiratkan bahwa setiap permasalahan terdapat jalan keluarnya, hal ini dikarenakan Allah tidak ingin menyusahkan hambaNya. Sesuai dengan ayat tersebut, maka persamaan-persamaan nonlinier yang tergolong sukar akan dapat ditemukan solusinya, seperti halnya persamaan KdV.

Persamaan KdV merupakan salah satu contoh dari persamaan nonlinier, dimana diperlukan suatu metode alternatif untuk memperoleh solusi yang diinginkan. Salah satu metode yang dapat digunakan yaitu metode transformasi diferensial yang dianggap sebagai suatu cara yang cukup efisien untuk menemukan solusi perkiraan masalah nilai awal.

Metode transformasi diferensial (DTM) pertama kali diperkenalkan oleh Zhou (1986) dalam menyelesaikan masalah nilai awal linier dan nonlinier pada ruang bahasan tentang lintasan listrik. Persamaan diferensial parsial dan nilai awal yang diberikan ditransformasikan berdasarkan sifat-sifat transformasi diferensial. Metode transformasi diferensial merupakan tahapan yang dilakukan secara berulang-ulang untuk menghasilkan solusi dalam bentuk ekspansi deret Taylor dari fungsi solusi analitik. Penelitian terkait penerapan metode transformasi diferensial telah dilakukan oleh Farshid, (2011), yang menerapkan metode transformasi diferensial dalam menyelesaikan sistem persamaan linier dan nonlinier dari persamaan diferensial biasa. Fatoorehchi dan Abolghasemi (2015) menerapkan metode transformasi diferensial sebagai alat komputasi baru untuk transformasi Laplace yang mana dapat menunjukkan efisiensi dan kesederhanaan dari metode ini. Serta Ahmad, dkk (2017) yang menerapkan metode transformasi diferensial pada penyelesaian model SIS dan model SI. Metode transformasi diferensial dapat diterapkan langsung pada persamaan diferensial linier dan nonlinier tanpa memerlukan linierisasi, diskritisasi atau perturbasi.

Penelitian tentang persamaan KdV telah banyak dilakukan, diantaranya (Song dan Tao, 2008) menggunakan HAM (*Homotopy Analysis Method*) untuk mencari solusi dari persamaan KdV dan penelitian yang dilakukan oleh (Akdi,

2013) mengenai analisis persamaan KdV menggunakan ADM (*Adomain Decomposition Method*).

Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, maka penulis tertarik untuk menyelesaikan persamaan KdV menggunakan *Differential Transform Method* (DTM) dengan menggunakan nilai awal seperti pada penelitian sebelumnya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah “Bagaimana penyelesaian persamaan Korteweg de-Vries menggunakan metode transformasi diferensial”

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dalam penelitian ini yaitu untuk menyelesaikan persamaan Korteweg de-Vries menggunakan metode transformasi diferensial.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah memperoleh selesaian dari persamaan Korteweg de-Vriess dengan menggunakan metode transformasi diferensial dan verifikasi hasil yang diperoleh dapat digunakan sebagai rujukan untuk penelitian selanjutnya.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. Persamaan KdV yang digunakan berdasarkan (Kangalgil dan Ayaz, 2008).

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 6u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3}$$

2. Nilai awal pertama yang digunakan pada persamaan KdV mengikuti (Saadi, 2010).

$$u(x, 0) = 6x$$

3. Nilai awal kedua yang digunakan pada persamaan KdV mengikuti (Jafari, 2010).

$$u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2(x)$$

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu sebagai berikut:

1. Mentransformasikan persamaan KdV menggunakan sifat-sifat pada metode transformasi diferensial.
2. Mentransformasikan nilai awal yang diberikan dengan menggunakan sifat-sifat yang ada pada DTM, dimana untuk kondisi awal $u(x, 0)$ di transformasikan ke dalam bentuk $U(k, 0)$.
3. Menjalankan beberapa iterasi dengan menstutitusikan $U(k, 0)$ untuk mencari nilai $U(k, h)$ dengan $k = 0, 1, 2, \dots$ dan $h = 0, 1, 2, \dots$.

4. Menstutitusikan $U(k, h)$ ke dalam persamaan berikut:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^k t^h.$$

5. Memverifikasi solusi eksak dari dari persamaan KdV.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika yang digunakan dalam penelitian ini menggambarkan secara umum topik bahasan di setiap bab dan sub-bab yang terdiri dari empat bab yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan tersusun atas latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka akan memaparkan kajian-kajian yang menjadi landasan masalah yang akan dibahas di bab berikutnya yaitu persamaan Korteweg de-Vriess (KdV), deret Taylor, *Differential Transform Method* (DTM) dan penyelesaian suatu permasalahan dalam perspektif Al-Qur'an.

Bab III Pembahasan

Bab ini berisikan tentang rumusan masalah dan hasil penelitian yaitu menyelesaikan persamaan Korteweg de-Vriess dengan menggunakan metode transformasi diferensial.

Bab IV Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dan hasil penelitian yang telah dikerjakan dan berisi saran-saran yang sesuai dengan hasil penelitian.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Korteweg de-Vriess

Soliton pertama kali dikemukakan oleh John Scot Russel tahun 1834. Russel melakukan percobaan untuk mengukur hubungan antara kecepatan perahu yang ditarik kuda dan daya dorongnya. Jumlah massa air kanal di depan perahu membentuk suatu gelombang “tunggal” yang merambat dengan kecepatan konstan dan gelombang tersebut masih tetap melaju dengan kecepatan konstan dan mempertahankan bentuk awalnya sejauh lebih dari dua mil merupakan hasil yang diamati. Kemudian penemuan ini dianalisis lebih lanjut mengenai gelombang tersebut (Russel, 1844).

Penjelasan teoritis tentang gelombang yang ditemukan oleh John Scot Russel adalah penurunan suatu persamaan diferensial parsial nonlinier yang mengkonfirmasi eksistensi gelombang soliton. Hal ini dikemukakan oleh Diederik Johannes Korteweg dan Gustav de Vries tahun 1895 yang kemudian persamaan ini dikenal dengan persamaan Korteweg de-Vries (Oktavia dan Syafwan, 2018). Zabusky dan Kruskal pada tahun 1965 menemukan kembali Persamaan KdV dan mereka menggunakan nama soliton pada gelombang yang diamati oleh John Scot Russel.

Persamaan KdV memiliki sifat-sifat yaitu efek nonlinier cenderung untuk melokalisasi gelombang dan dispersi cenderung membuat gelombang menyebar. Akan ada situasi dimana terjadi keseimbangan antara efek nonlinier dan dispersi jika kedua efek tersebut berlaku pada persamaan KdV. Efek dispersi akan lebih

dominan apabila nilai awal sangat kecil. Akibatnya gelombang cenderung untuk menyebar sampai mencapai keseimbangan. Begitu juga sebaliknya, efek dispersi akan lebih dominan pada efek nonlinier apabila nilai awal terlalu besar. Sehingga cenderung untuk melokalisasi gelombang sampai mencapai keseimbangan (Oktavia, 2018).

Persamaan ini diturunkan berdasarkan fungsi hidrodinamika untuk fluida ideal, yaitu fluida yang mempunyai sifat tak rasional, tak kompresibel dan inviscid. Persamaan ini disebut dengan persamaan Korteweg de-Vries. Persamaan KdV dapat diturunkan dari persamaan hidrodinamika berikut.

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \left(\frac{c^2}{\rho} \right) \nabla \rho = 0 \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Dimana operator ∇ adalah operator dell yang di definisikan oleh

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k},$$

(Anton dkk, 2012).

Dan $\mathbf{v}$ adalah medan kecepatan, dan ρ adalah tekanan. Pada permukaan air dangkal, $\mathbf{v}$ dapat diasumsikan sebagai kecepatan hidrodinamika dari gelombang air tersebut (kecepatan massa). Dengan menggunakan persamaan potensial dari suatu medan kecepatan, yaitu $\mathbf{v} = \nabla \Phi$. Sehingga dengan mengintegralkan persamaan (2.1), diperoleh

$$\partial_t \Phi + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{c^2(\rho - \rho_0)}{2\rho} + \frac{c^2 z}{\rho} = 0 \quad (2.2)$$

dimana ρ_0 adalah konstanta yang akan ditetapkan selanjutnya. Asumsikan bahwa medan kecepatan $\mathbf{v}$ adalah fungsi kontinu, maka $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, sehingga diperoleh persamaan Laplace berikut.

$$\Delta\Phi = 0 \quad (2.3)$$

Selanjutnya, kita terapkan kondisi pelengkap

$$\begin{cases} \partial_t \eta + \partial_x \eta \partial_x \Phi + \partial_y \eta \partial_y \Phi - \partial_z \Phi = 0 \\ \partial_t \Phi + \frac{(\nabla \Phi)^2}{2} + \frac{c^2}{\rho} \eta = 0 \\ z = \eta(x, y, t) \\ \partial_z \Phi|_{z=-\rho_0} = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Definisikan parameter-parameter $\mu = \frac{v_0}{c} \ll 1$, dan $\varepsilon = \frac{\rho_0}{l} \ll 1$, dimana l adalah skala linear karakteristik untuk perturbasi, dan v_0 adalah amplitudo dari kecepatan partikel pada gelombang. Kita lakukan *scaling* dengan variabel *scaling* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{l}, & y' &= \frac{y}{l}, & z' &= \frac{z}{\rho_0}, & t' &= \frac{c_0 t}{l}, \\ \Phi' &= \frac{\Phi}{v_0 l}, & \eta' &= \frac{c_0 \eta}{v_0 \rho_0}, & c_0 &= \sqrt{g \rho_0}. \end{aligned}$$

Dari Persamaan Laplace $\Delta\phi = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} \Delta\phi' v_0^2 l^2 = 0 &\rightarrow \Delta\phi' = 0 \rightarrow \partial_{z'}^2 \phi' + \partial_{x'}^2 \phi' + \partial_{y'}^2 \phi' = 0 \\ &\rightarrow \partial_{z'}^2 \phi' (\partial_{zz'})^2 + \partial_{x'}^2 \phi' (\partial_{xx'})^2 + \partial_{y'}^2 \phi' (\partial_{yy'})^2 = 0 \\ &\rightarrow \frac{1}{\rho_0^2} \partial_{z'}^2 \phi' + \frac{1}{l^2} (\partial_{x'}^2 \phi' + \partial_{y'}^2 \phi') = 0 \\ &\rightarrow \partial_{z'}^2 \phi' + \frac{\rho_0^2}{l^2} (\partial_{x'}^2 \phi' + \partial_{y'}^2 \phi') = 0 \rightarrow \partial_{z'}^2 \phi' + \varepsilon^2 (\partial_{x'}^2 \phi' + \partial_{y'}^2 \phi') \\ &= 0, \quad \text{kondisi ke - 1.} \end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi ke-2 pada persamaan (2.4) , diperoleh

$$\begin{aligned}
 \partial_t \phi + \frac{(\nabla \phi)^2}{2} + \left(\frac{c^2}{\rho}\right) \eta &= 0 \leftrightarrow v_0 l \partial_{t'} \phi' \partial_{t'} t' + (\nabla \phi)(\nabla \phi) \frac{1}{2} + \left(\frac{c^2}{\rho}\right) \eta = 0 \\
 &\leftrightarrow c_0 v_0 \partial_{t'} \phi' + \frac{1}{2} (\nabla \phi')(\nabla \phi') v_0^2 l^2 + \left(\frac{c^2}{\rho}\right) \eta = 0 \\
 &\leftrightarrow c_0 v_0 \partial_{t'} \phi' + \frac{v_0^2 l^2}{2} \left[(\partial_{x'}^2 \phi')^2 + (\partial_{y'}^2 \phi')^2 + (\partial_{z'}^2 \phi')^2 \right] + \left(\frac{c^2}{\rho}\right) \eta \\
 &= 0 \\
 &\leftrightarrow c_0 v_0 \partial_{t'} \phi' \\
 &\quad + \frac{v_0^2 l^2}{2} \left[(\partial_{x'}^2 \phi')^2 (\partial_{x'}^2 x')^2 + (\partial_{y'}^2 \phi')^2 (\partial_{y'}^2 y')^2 + (\partial_{z'}^2 \phi')^2 (\partial_{z'}^2 z')^2 \right] \\
 &\quad + \left(\frac{c^2}{\rho}\right) \frac{v_0 \rho_0}{c_0} \eta' = 0 \\
 &\leftrightarrow c_0 v_0 \partial_{t'} \phi' + \frac{v_0^2}{2} \left[(\partial_{x'}^2 \phi')^2 + (\partial_{y'}^2 \phi')^2 \right] + \frac{v_0^2 l^2}{2 \rho_0^2} (\partial_{z'}^2 \phi')^2 \\
 &\quad + \frac{c^2 v_0 \rho_0}{\rho c_0} \eta' = 0 \\
 &\leftrightarrow \frac{c_0 v_0}{c} \partial_{t'} \phi' + \frac{v_0^2}{2c} \left[(\partial_{x'}^2 \phi')^2 + (\partial_{y'}^2 \phi')^2 \right] + \frac{v_0^2 l^2}{2c \rho_0^2} (\partial_{z'}^2 \phi')^2 \\
 &\quad + \frac{c v_0 \rho_0}{\rho c_0} \eta' = 0 \\
 &\leftrightarrow \partial_{t'} \phi' + \frac{\mu}{2} \left[(\partial_{x'}^2 \phi')^2 + (\partial_{y'}^2 \phi')^2 \right] + \frac{\mu}{2 \varepsilon^2} (\partial_{z'}^2 \phi')^2 + \eta' = 0 \\
 &\leftrightarrow \partial_{t'} \phi' + \frac{\mu}{2} \left[(\partial_{x'}^2 \phi')^2 + (\partial_{y'}^2 \phi')^2 \right] + \frac{\mu}{2 \varepsilon^2} (\partial_{z'}^2 \phi')^2 + \eta' |_{z'=\mu \eta'} \\
 &= 0, \quad \text{kondisi ke - 2.}
 \end{aligned}$$

$$z' = \mu\eta'$$

$$= \frac{v_0}{c} \frac{c_0\eta}{v_0\rho_0}$$

$$= \frac{\eta}{c}$$

$$z' = \frac{z}{\rho_0} \rightarrow \frac{z}{\rho_z} = \frac{\eta}{c}$$

$$z' = \frac{z}{\rho_0} \rightarrow \frac{z}{\rho_z} = \frac{\eta}{c}$$

$$\rightarrow \eta = \frac{zc}{\rho_z}$$

$$\rightarrow \eta = z$$

$$\leftrightarrow \eta(x, y, t) = z, \text{ kondisi ke-3 persamaan (2.4).}$$

Berdasarkan kondisi ke-4 pada persamaan (2.4) $\partial_z \phi|_{z=-\rho_0} = 0$, maka

$$\partial_{z'} \phi' \partial_z^2 z' v_0 l|_{z' \rho_0 = -\rho_0} = 0$$

$$\leftrightarrow \frac{v_0 l}{\rho_0} \partial_{z'} \phi'|_{z=-l} = 0$$

$$\leftrightarrow \partial_{z'} \phi'|_{z=-l} = 0, \quad \text{kondisi ke-3.}$$

Sehingga kondisi ke-1, kondisi ke-2, dan kondisi ke-3 dapat kita tuliskan sebagai berikut

$$\begin{cases} \partial_{z'}^2 \Phi' + \varepsilon^2 (\partial_{x'}^2 \Phi' + \partial_{y'}^2 \Phi') = 0 \\ \partial_{t'} \Phi' + \frac{\mu}{2} [(\partial_{x'} \Phi')^2 + (\partial_{y'} \Phi')^2] + \frac{\mu}{2\varepsilon^2} (\partial_{z'} \Phi')^2 + \eta'|_{z'=\mu\eta'} = 0 \\ \Phi'|_{z'=-1} = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Dengan mengekspansikan Φ terhadap z' diperoleh

$$\begin{cases} \partial_{t'} \varphi' + \frac{\mu}{2} (\nabla \varphi')^2 + \eta' = O(\varepsilon^4, \mu^2, \varepsilon^2 \mu) \\ \partial_{t'} \eta' + \mu \nabla \varphi' \cdot \nabla \eta' + \mu \eta' \Delta \varphi' + \Delta \varphi' + \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta^2 \varphi' = O(\varepsilon^4, \mu^2, \varepsilon^2 \mu) \end{cases} \quad (2.6)$$

dimana $\varphi' = \Phi'|_{z'=0}$. Dengan mendefinisikan variable $\psi = \varphi + \frac{\rho_0^2 \Delta \varphi}{3}$, dimana $\varphi = v_0 l \varphi' - c_0 t$. Persamaan di atas tereduksi menjadi

$$\begin{cases} \partial_t \psi + \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + c^2 + \frac{2c_0 \beta \Delta \rho}{\rho_0} = 0 \\ \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \nabla \psi) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

dimana $\beta = \frac{c_0 \rho_0^2}{6}$ dan $\rho = \rho_0 + \eta(t, x, y)$. Pada persamaan ini, β adalah parameter dispersif, dan persamaan terakhir, misalnya untuk gelombang pada permukaan fluida dapat diartikan “ketinggian tingkat fluida adalah tingkat kedalaman dimana fluida terkandung dan ketinggian perturbasi yang ditetapkan oleh persamaan permukaan”.

Jika potensi φ , maka

$$\mathbf{v}(t, x, y) = \nabla \varphi(t, x, y)$$

dan menerapkan gradient ke persamaan (2.7), maka diperoleh

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + c^2 \nabla \frac{\rho}{\rho_0} + 2c_0 \beta \nabla \Delta \frac{\rho}{\rho_0} &= 0 \\ \partial_t \rho + \nabla(\rho \mathbf{v}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Asumsikan bahwa $\frac{v_0}{c}$, $\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ dan $\frac{\delta}{\lambda}$ sangat kecil, ε^2 (disini, $\delta = \left(\frac{|\beta|}{c_0}\right)^{\frac{1}{2}}$) merupakan panjang dispersif yang efektif, dan λ adalah karakter panjang gelombang karakteristik, kemudian

$$c^2(\rho) = c_0^2 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}, \text{ dan } \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Dari persamaan (2.8) dapat ditulis

$$\rho(t, x) = \rho(x) + \varphi(t, x) \quad (2.9)$$

Dimana

$$\begin{aligned}\rho(v) &= \pm c(v) d_v \rho, \\ c(v) &= c_0 + \frac{(\gamma - 1)v}{2},\end{aligned}\tag{2.10}$$

Kemudian dengan mempertimbangkan gelombang merambat ke arah positif dari sumbu x , maka fungsi $\varphi(t, x)$ memenuhi persamaan

$$\partial_t \varphi + c_0 \partial_x \varphi = 0$$

substitusikan persamaan (2.9) ke persamaan (2.8), menggunakan persamaan (2.10), maka

$$\partial_t v + \left(c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v \right) \partial_x v + \beta \partial_x^3 v = 0\tag{2.11}$$

Dengan

$$\xi = x - c_0 t, \text{ dan } u = \frac{\gamma + 1}{2} v$$

Maka persamaan (2.11) dapat kita tulis

$$\partial_t u + u \partial_\xi u + \beta \partial_\xi^3 u = 0\tag{2.12}$$

(Belashov dan Vladimirov, 2006).

2.2 Deret Taylor

Jika fungsi u mempunyai lebih dari satu variabel bebas, misalkan $u(x, t)$, ekspansi deret Taylor menjadi:

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & u(x_0, t_0) + (x - x_0) \frac{\partial u(x_0, t_0)}{\partial x} + (t - t_0) \frac{\partial u(x_0, t_0)}{\partial t} \\
& + \frac{1}{2!} \left[(x - x_0)^2 \frac{\partial^2 u(x_0, t_0)}{\partial x^2} + 2(x - x_0)(t - t_0) \frac{\partial^2 u(x_0, t_0)}{\partial x \partial t} \right. \\
& \left. + (t - t_0)^2 \frac{\partial^2 u(x_0, t_0)}{\partial t^2} \right] \\
& + \frac{1}{3!} \left[(x - x_0)^3 \frac{\partial^3 u(x_0, t_0)}{\partial x^3} + 3(x - x_0)^2(t - t_0) \frac{\partial^3 u(x_0, t_0)}{\partial x^2 \partial t} \right. \\
& \left. + 3(x - x_0)(t - t_0)^2 \frac{\partial^3 u(x_0, t_0)}{\partial x \partial t^2} + (t - t_0)^3 \frac{\partial^3 u(x_0, t_0)}{\partial t^3} \right] + \dots
\end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^h} \right]_{x=x_0}^{t=t_0} (x - x_0)^k (t - t_0)^h \quad (2.13)$$

dengan (x_0, t_0) adalah titik pusat

Pada kasus tertentu, ketika $(x_0, t_0) = (0, 0)$, deret Taylor menjadi deret Maclaurin seperti berikut:

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^h} \right]_{x=0}^{t=0} x^k t^h \quad (2.14) \\
= & u(0, 0) + x \frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} + t \frac{\partial u(0, 0)}{\partial t} \\
& + \frac{1}{2!} \left[x^2 \frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial x^2} + 2xt \frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial x \partial t} + t^2 \frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial t^2} \right] \\
& + \frac{1}{3!} \left[x^3 \frac{\partial^3 u(0, 0)}{\partial x^3} + 3x^2 t \frac{\partial^3 u(0, 0)}{\partial x^2 \partial t} + 3xt^2 \frac{\partial^3 u(0, 0)}{\partial x \partial t^2} \right. \\
& \left. + t^3 \frac{\partial^3 u(0, 0)}{\partial t^3} \right] + \dots
\end{aligned}$$

2.3 Metode Transformasi Diferensial

Metode transformasi diferensial merupakan metode semi-numerik-analitik yang membentuk deret Taylor dengan cara yang sepenuhnya berbeda. Persamaan diferensial yang diberikan dan kondisi awal ditransformasikan dalam persamaan *recurrence* yang kemudian menghasilkan koefisien-koefisien deret pangkat. Metode ini sangat berguna untuk mendapatkan solusi eksak dan solusi pendekatan dari persamaan diferensial linier maupun nonlinier tanpa adanya linierisasi atau perturbasi (Al-Sawalha & Noorani, 2008).

Berdasarkan rumus deret Taylor dimensi 2, yaitu

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^h} \right]_{x=0}^{t=0} (x - x_0)^k (t - t_0)^h \quad (2.15)$$

Apabila diasumsikan bahwa fungsi $u(x, t)$ analitik disekitar 0, maka dapat diambil pusat dari deret Taylor di $x_0 = 0, t_0 = 0$, sehingga diperoleh

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^h} \right]_{x=0}^{t=0} x^k t^h \quad (2.16)$$

Koefisien dari $x^k t^h$ pada persamaan (2.16) adalah fungsi dari $k, h \in \mathbb{N}$. Nilai dari koefisien ini ditentukan secara unik berdasarkan fungsi $u(x, t)$. Dengan demikian kita dapat memahami koefisien ini sebagai hasil dari sebuah transformasi yang memetakan fungsi $u(x, t)$ pada fungsi $U(k, h)$.

misalkan:

$$U(k, h) = \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^h} \right]_{x=0}^{t=0} \quad (2.17)$$

Dengan demikian, kita dapat menuliskan rumus (2.16) sebagai,

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^k t^h \quad (2.18)$$

Sehingga dapat dikatakan bahwa $U(k, h)$ merupakan koefisien-koefisien dari setiap suku deret pangkat. Metode transformasi diferensial bertujuan untuk mencari koefisien-koefisien tersebut, sehingga akan mudah untuk mencari solusi analitik yang berupa fungsi $u(x, t)$ yang terekspansi dalam bentuk deret pangkat tersebut.

Berikut adalah sifat-sifat transformasi diferensial dua dimensi berdasarkan (Kangalgil dan Ayaz, 2008).

Tabel 2.1 Transformasi Diferensial Dua Dimensi

Sifat 1	Jika $w(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h)$
Sifat 2	Jika $w(x, y) = \lambda u(x, y)$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $W(k, h) = \lambda U(k, h)$, λ adalah konstanta
Sifat 3	Jika $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $W(k, h) = (k + 1)U(k + 1, h)$
Sifat 4	Jika $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $W(k, h) = (h + 1)U(k, h + 1)$
Sifat 5	Jika $w(x, y) = \frac{\partial^{r+s} u(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $W(k, h) = (k + 1)(k + 2) \cdots (k + r)(h + 1)(h + 2) \cdots (h + s)U(k + r, h + s)$

Tabel 2.1 Tabel Tranformasi Diferensial

Sifat 6	Jika $w(x, y) = u(x, y)v(x, y)$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)V(k-r, s)$
Sifat 7	Jika $w(x, y) = x^m y^n$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $W(k, h) = \delta(k-m, h-n) = \delta(k-m)(h-n)$ $\delta(k-m)(h-n) = \begin{cases} 1, & k=m, h=n \\ 0, & k \text{ dan } h \text{ lainnya} \end{cases}$
Sifat 8	Jika $w(x, y) = u(x, y)v(x, y) \frac{\partial^2 c(x, y)}{\partial x^2}$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+2)(k-r-t+1) U(r, h-s-p)V(t, s)C(k-r-t+2, p)$
Sifat 9	Jika $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1)U(r+1, h-s)V(k-r+1, s)$
Sifat 10	Jika $w(x, y) = u(x, y) \frac{\partial v^2(x, y)}{\partial x^2}$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+2)(k-r+1)U(r, h-s)V(k-r+2, s)$
Sifat 11	Jika $w(x, y) = u(x, y)v(x, y)z(x, y)$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{q=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} U(r, h-s-p)V(q, s)Z(k-r-q, p)$

2.4 Kajian Islam tentang Istiqomah

Konsisten atau istiqomah dalam Islam merupakan sifat yang sangat mulia, hal ini dikarenakan orang-orang yang menjalankan kekonsistenan akan memiliki rasa sabar yang sangat tinggi. Sedangkan balasan kesabaran adalah surga. Dalam surat al-Fushshilat ayat 30 yang berbunyi:

إِنَّ الَّذِينَ قَالُوا رَبُّنَا اللَّهُ ثُمَّ اسْتَقَامُوا تَتَنَزَّلُ عَلَيْهِمُ الْمَلَائِكَةُ أَلَّا تَخَافُوا وَلَا تَحْزَنُوا وَأَبْشِرُوا بِالْجَنَّةِ الَّتِي كُنتُمْ تُوعَدُونَ

Artinya : *Sesungguhnya orang-orang yang mengatakan, "Tuhan kami ialah Allah", kemudian mereka meneguhkan pendirian mereka, maka malaikat akan turun kepada mereka (dengan mengatakan), "Janganlah kamu merasa takut dan janganlah kamu merasa sedih; dan bergembiralah kamu dengan (memperoleh) surga yang telah dijanjikan Allah kepadamu.*

Pada ayat tersebut, Allah menerangkan bagaimana mulianya orang yang teguh pendirian. Dalam tafsir Ibn Katsir (*Sesungguhnya orang-orang yang mengatakan, "Tuhan kami ialah Allah", kemudian mereka meneguhkan pendirian mereka*) yakni mereka ikhlas dalam beramal hanya karena Allah Swt., yaitu dengan menaati apa yang telah diperintahkan oleh Allah Swt. kepada mereka. (*Maka malaikat akan turun kepada mereka*) Mujahid, As-Saddi, Zaid ibnu Aslam, dan anaknya mengatakan bahwa yang dimaksud ialah disaat mereka menjelang kematiannya, para malaikat turun dengan mengatakan: (*Janganlah kamu merasa takut*) yaitu Mujahid, Ikrimah, dan Zaid ibnu Aslam mengatakan bahwa makna yang dimaksud ialah janganlah kamu takut dalam menghadapi kehidupan masa mendatang di akhirat. (*Dan janganlah kamu merasa sedih*) menggambarkan terhadap urusan dunia yang kamu tinggalkan, seperti urusan anak, keluarga, harta benda, dan utang; karena sesungguhnya Kami akan menggantikanmu dalam

mengurusnya. *(Dan bergembiralah kamu dengan (memperoleh) surga yang telah dijanjikan Allah kepadamu)* yaitu para malaikat menyampaikan berita gembira tentang lenyapnya semua keburukan dan akan memperoleh semua kebaikan (Muhammad, 2007).

Di dalam tafsir Al-Qurthubi *(sesungguhnya orang-orang yang mengatakan tuhan kami ialah Allah, kemudian ia meneguhkan pendirian mereka)* dari Ibnu Abbas RA, “ayat ini turun berkaitan dengan Abu Bakar RA. Yakni, orang-orang musyrik mengatakan bahwa Allah adalah tuhan kami, para malaikat adalah anak –anaknya. Mereka adalah pemberi syafa’at kami di hadapan Allah SWT, artinya orang-orang musyrik tidak istiqamah (konsisten) untuk teguh mengatakan bahwa Tuhan kami adalah Allah SWT. Di dalam Sunan At-Tirmidzi disebutkan dari Anas bin Malik bahwa Rasulullah SAW membaca “*sesungguhnya orang-orang yang mengatakan tuhan kami ialah Allah, kemudian ia meneguhkan pendirian mereka*” Rasulullah SAW bersabda, “*banyak orang berikrar akan keesaan Allah dan kemudian kafir. Siapa yang wafat dalam keimanan, dia termasuk orang-orang yang istiqamah*” (Al-Qurthubi, 2009).

Diriwayatkan tentang makna istiqamah yang terdapat pada ayat ini dari Rasulullah SAW, Abu Bakar RA, Umar RA, Utsman RA, dan Ali RA. Di dalam *Shahih Muslim* dari Sufyan bin Abdillah AtsT-Tsaqafi, dia berkata “Ya Rasulullah, katakanlah kepadaku tentang islam sebuah perkatan yang tidak akan aku tanyakan kepada orang setelahmu, dalam riwayat lain, orang selainmu.” Rasulullah SAW memegang lidahnya dan berkata, ‘*Ini*’(maksudnya menjaga lisan). Dalam memaknai ayat di atas, seperti sahabat abu Bakar RA berkata, “Mereka konsisten dalam beragama, tidak melakukan perbuatan dosa dan

mencampuradukkan keimanan mereka dengan kesalahan.” Umar RA berkata, “Mereka adalah orang-orang yang istiqamah, demi Allah, dalam sebuah jalan untuk mentaati-Nya dan tidak bersuara bagaimana suara rubah.” Utsman RA berkata, “Kemudian mengikhlaskan amal hanya untuk Allah SWT.” Ali RA berkata, “Kemudian melaksanakan perintah-perintah Allah SWT yang wajib.” Ada beberapa pendapat, konsisten dalam kesunyian dan konsisten dalam keramaian, ada juga yang mengatakan, konsisten dalam perbuatan sebagaimana konsisten dalam perkataan (Al-Qurthubi, 2009).

Penjelasan kekonsistenan dalam tafsir surat al-Fushshilat tersebut, sesuai dengan karakteristik gelombang soliton yang konsisten. Gelombang tersebut akan mempertahankan bentuk dan kecepatan ketika berinteraksi dengan gelombang soliton yang lain. Keadaan mempertahankan bentuk dan kecepatan inilah yang merupakan wujud dari teguh pendirian dalam surat al-Fushshilat. Namun, pada kenyataannya, dalam menjalankan konsistensi diperlukan kesabaran yang cukup tinggi, hal ini dikarenakan sulitnya mempertahankan konsistensi tersebut. Demikian halnya dalam pencarian solusi persamaan KdV yang menerangkan gelombang soliton.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Metode Transformasi Diferensial pada Persamaan KdV

Persamaan gelombang yang digunakan dalam penelitian ini adalah persamaan KdV yaitu:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \varepsilon u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \mu \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \quad -\infty < x < \infty, t > 0, \quad (3.1)$$

dengan nilai awal yang diberikan:

$$u(x, 0) = f(x).$$

Langkah pertama yaitu mentransformasikan persamaan (3.1) berdasarkan sifat-sifat yang terdapat pada Tabel (2.1) transformasi diferensial dua dimensi. Berdasarkan persamaan (2.7), jika $u(x, t)$ adalah bentuk asal maka bentuk transformasinya adalah $U(k, h)$.

Akan dibuktikan bahwa jika $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $(h + 1)U(k, h + 1)$.

Bukti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^h} \right]_{x=0}^{t=0} x^k t^h \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^h} \right]_{x=0}^{t=0} \frac{\partial}{\partial t} x^k t^h \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^h} \right]_{x=0}^{t=0} h x^k t^{h-1} \\ &= 0 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^h} \right]_{x=0}^{t=0} h x^k t^{h-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k! (h+1)!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^h} \right]_{x=0}^{t=0} (h+1) x^k t^h \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} (h+1) \frac{1}{k! (h+1)!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^h} \right]_{x=0}^{t=0} x^k t^h \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} (h+1) U(k, h+1) x^k t^h.
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa jika $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $(h+1)U(k, h+1)$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa jika $u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k+1-r)U(r, h-s)U(k+1-r, s)$.

Aturan perumuman *Leibniz*.

Misalkan $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dan $f(x)$, $g(x)$ adalah fungsi-fungsi yang terdiferensialkan n -kali, maka turunan ke- n dari $(fg)(x) = f(x)g(x)$ adalah

$$\frac{d^n}{dx^n} (fg)(x) = (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Bukti:

Berdasarkan Aturan perumuman *Leibniz*, diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) &= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{\partial^r u(x, t)}{\partial x^r} \left(\frac{\partial^{k-r}}{\partial x^{k-r}} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] \right) \\
&= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{\partial^r u(x, t)}{\partial x^r} \left(\frac{\partial^{k-r+1} u(x, t)}{\partial x^{k-r+1}} \right) \\
\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial t^h} \left(u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^h}{\partial t^h} \left[\sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{\partial^r u(x, t)}{\partial x^r} \left(\frac{\partial^{k-r+1} u(x, t)}{\partial x^{k-r+1}} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \frac{\partial^h}{\partial t^h} \left[\frac{\partial^r u(x, t)}{\partial x^r} \left(\frac{\partial^{k-r+1} u(x, t)}{\partial x^{k-r+1}} \right) \right] \\
&= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} \sum_{q=0}^h \binom{h}{q} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \left[\frac{\partial^r u(x, t)}{\partial x^r} \right] \frac{\partial^{h-q}}{\partial t^{h-q}} \left(\frac{\partial^{k-r+1} u(x, t)}{\partial x^{k-r+1}} \right) \\
&= \sum_{r=0}^k \sum_{q=0}^h \binom{k}{r} \binom{h}{q} \frac{\partial^{q+r} u(x, t)}{\partial x^r \partial t^q} \left[\frac{\partial^{k-r+1+h-q} u(x, t)}{\partial x^{k-r+1} \partial t^{h-q}} \right] \\
&= \sum_{r=0}^k \sum_{q=0}^h \binom{k}{r} \binom{h}{q} r! q! (k+1-r)! (h-q)! U(r, q) U(k+1-r, h-q) \\
&= \sum_{r=0}^k \sum_{q=0}^h k! h! (k+1-r) U(r, q) U(k+1-r, h-q).
\end{aligned}$$

substitusi $q = h - s$, maka diperoleh:

$$\sum_{r=0}^k \sum_{q=0}^h k! h! (k+1-r) U(r, h-s) U(k+1-r, s).$$

Terbukti bahwa jika $u \frac{\partial u}{\partial x}$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k+1-r) U(r, h-s) U(k+1-r, s)$.

Kemudian akan dibuktikan bahwa jika $\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3}$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3, h)$.

Bukti:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^h} \right]_{x=0}^{t=0} x^k t^h \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{k+h} u(x, t)}{\partial x^k \partial t^h} \right]_{x=0}^{t=0} \frac{\partial^3}{\partial x^3} (x^k t^h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} k \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{(k+1)+h} u(x, t)}{\partial x^{k+1} \partial t^h} \right]_{x=0}^{t=0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^{k-1} t) \\
&= 0 + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} k(k-1) \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{(k+2)+h} u(x, t)}{\partial x^{k+2} \partial t^h} \right]_{x=0}^{t=0} \frac{\partial}{\partial x} (x^{k-2} t^h) \\
&= 0 + \sum_{k=3}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{(k+3)+h} u(x, t)}{\partial x^{k+3} \partial t^h} \right]_{x=0}^{t=0} x^{k-3} t^h \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} (k+3)(k+2)(k+1) \frac{1}{(k+3)! h!} \left[\frac{\partial^{(k+3)+h} u(x, t)}{\partial x^{k+3} \partial t^h} \right]_{x=0}^{t=0} x^k t^h \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} (k+1)(k+2)(k+3) U(k+3, h) x^k t^h.
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa jika $\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3}$ adalah bentuk asal, maka bentuk transformasinya adalah $(k+1)(k+2)(k+3) U(k+3, h)$.

Tabel 3.1 Transformasi Persamaan KdV

Bentuk asal	Bentuk Transformasi
$u(x, t)$	$U(k, h)$
$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$	$(h+1)U(k, h+1)$
$u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$	$\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h k! h! (k+1-r)U(r, h-s)U(k+1-r, s)$
$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3}$	$(k+1)(k+2)(k+3) U(k+3, h)$

Kemudian bentuk-bentuk transformasi tersebut disubstitusikan kedalam persamaan (3.1), diperoleh:

$$\begin{aligned} & (h+1)U(k, h+1) \\ &= \varepsilon \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k+1-r)U(r, h-s)U(k+1-r, s) \\ & \quad - \mu(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3, h), \end{aligned}$$

sehingga dapat dinyatakan:

$$\begin{aligned} U(k, h+1) &= \frac{\varepsilon \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k+1-r)U(r, h-s)U(k+1-r, s)}{(h+1)} \\ & \quad - \frac{\mu(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3, h)}{(h+1)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Langkah kedua yaitu mentransformasikan persamaan nilai awal $u(x, 0) = f(x)$ ke dalam bentuk $U(k, 0)$ menggunakan definisi transformasi diferensial pada persamaan (2.2).

$$U(k, 0) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k(f(x))}{dx^k} \right]_{x=0}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

sehingga didapatkan nilai:

$$U(0, 0) = \frac{1}{0!} \left[\frac{d^0(f(x))}{dx^0} \right]_{x=0} = f(0)$$

$$U(1, 0) = \frac{1}{1!} \left[\frac{d^1(f(x))}{dx^1} \right]_{x=0} = f'(0)$$

$$U(2, 0) = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2(f(x))}{dx^2} \right]_{x=0} = \frac{1}{2!} f''(0)$$

$$U(3, 0) = \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3(f(x))}{dx^3} \right]_{x=0} = \frac{1}{3!} f'''(0)$$

⋮

Langkah ketiga yaitu menjalankan iterasi dengan menggunakan persamaan (3.2) dan mensubstitusikan nilai $U(k, 0)$ yang diperoleh dari tahap kedua untuk memperoleh nilai $U(k, h)$ yang lain dengan $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ dan $h = 0, 1, 2, 3, \dots$.

a. Untuk $h = 0$ dan $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
 U(0,1) &= \frac{\varepsilon((1)U(0,0)U(1,0))}{1} - \frac{\mu(1)(2)(3)U(3,0)}{1} \\
 &= \frac{\varepsilon(f(0)f'(0))}{1} - \frac{6\mu\left(\frac{1}{3!}f^{(3)}(0)\right)}{1} \\
 &= \varepsilon(f(0)f'(0)) - \mu(f^{(3)}(0)). \\
 U(1,1) &= \frac{\varepsilon((2)U(0,0)U(2,0) + (1)U(1,0)(1,0))}{1} - \frac{\mu(2)(3)(4)U(4,0)}{1} \\
 &= \frac{\varepsilon\left(2f(0)\left(\frac{1}{2!}f''(0)\right) + 1(f'(0))(f'(0))\right)}{1} - \frac{24\mu\left(\frac{1}{4!}f^{(4)}(0)\right)}{1} \\
 &= \varepsilon\left(f(0)\left(f''(0)\right) + 1(f'(0))^2\right) - \mu(f^{(4)}(0)). \\
 U(2,1) &= \frac{\varepsilon((3)U(0,0)U(3,0) + (2)U(1,0)(2,0) + (1)U(2,0)U(1,0))}{1} \\
 &\quad - \frac{\mu(3)(4)(5)U(5,0)}{1} \\
 &= \varepsilon\left(3f(0)\frac{1}{3!}f^{(3)}(0) + 2f'(0)\left(\frac{1}{2!}f''(0)\right) \right. \\
 &\quad \left. + 1\left(\left(\frac{1}{2!}f''(0)\right)f'(0)\right)\right) - \frac{\mu 60\left(\frac{1}{5!}f^{(5)}(0)\right)}{1}
 \end{aligned}$$

$$= \varepsilon \left(3f(0) \frac{1}{3!} f^{(3)}(0) + 2f'(0) \frac{1}{2!} (f''(0)) + \frac{1}{2!} f''(0) f'(0) \right) - \mu \left(f^{(5)}(x) \right)$$

$$= \varepsilon \left(\frac{1}{2} f(0) f^{(3)}(0) + \left(\frac{3}{2} f'(0) f''(0) \right) \right) - \frac{1}{2} \mu \left(f^{(5)}(0) \right).$$

$$\begin{aligned} U(3,1) &= \frac{\varepsilon}{1} \left((4)U(0,0)U(4,0) + (3)U(1,0)(3,0) + (2)U(2,0)U(2,0) \right. \\ &\quad \left. + (1)U(3,0)U(1,0) \right) - \frac{\mu(4)(5)(6)U(6,0)}{1} \\ &= \varepsilon \left((4)f(0) \frac{1}{4!} f^{(4)}(0) + (3)f'(0) \frac{1}{3!} f^{(3)}(0) + (2) \frac{1}{2!} f''(0) \frac{1}{2!} f''(0) \right. \\ &\quad \left. + (1) \frac{1}{3!} f^{(3)}(0) f'(0) \right) - 120\mu \left(\frac{1}{6!} f^{(6)}(0) \right) \\ &= \varepsilon \left(\frac{1}{6} f(0) f^{(4)}(0) + \frac{1}{2} f'(0) f^{(3)}(0) + \frac{1}{2} (f''(0))^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} f^{(3)}(0) f'(0) \right) - \frac{\mu}{6} f^{(6)}(0) \\ &= \varepsilon \left(\frac{1}{6} f(0) f^{(4)}(0) + \frac{2}{3} f'(0) f^{(3)}(0) + \frac{1}{2} (f''(0))^2 \right) - \frac{\mu}{6} f^{(6)}(0). \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh rumus umum untuk skema dengan $h = 0$,

$k = 0, 1, \dots$

$$U(k, 1) = \varepsilon \sum_{r=0}^k (k+1-r) f^{(r)}(0) f^{(k+1-r)}(0) - \frac{(k+3)!}{k!} \mu f^{(k+3)}(0).$$

b. Untuk $h = 1$ dan $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$U(0,2) = \frac{\varepsilon((1)U(0,1)U(1,0) + (1)U(0,0)U(1,1))}{2} - \frac{\mu(1)(2)(3)U(3,1)}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon}{2} \left(1 \left(\varepsilon f(0) f'(0) - \mu f^{(3)}(0) \right) f'(0) \right. \\
&\quad \left. + (f(0)) \left(\varepsilon \left(f(0) (f''(0)) + 1 (f'(0))^2 \right) - \mu (f^{(4)}(0)) \right) \right) \\
&\quad - \frac{6\mu}{2} \left(\varepsilon \left(\frac{1}{6} f(0) f^{(4)}(0) + \frac{2}{3} f'(0) f^{(3)}(0) + \frac{1}{2} (f''(0))^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\mu}{6} f^{(6)}(0) \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \left(1 \left(\varepsilon f(0) f'(0) - \mu f^{(3)}(0) \right) f'(0) \right. \\
&\quad \left. + (f(0)) \left(\varepsilon \left(f(0) (f''(0)) + 1 (f'(0))^2 \right) - \mu (f^{(4)}(0)) \right) \right) \\
&\quad - \left(3\mu \left(\varepsilon \left(\frac{1}{6} f(0) f^{(4)}(0) + \frac{2}{3} f'(0) f^{(3)}(0) + \frac{1}{2} (f''(0))^2 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\mu}{6} f^{(6)}(0) \right) \right) \\
&= \frac{\varepsilon^2}{2} f(0) (f'(0))^2 - \frac{\varepsilon\mu}{2} \mu f'(0) f^{(3)}(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} (f(0))^2 f''(0) + \frac{\varepsilon^2}{2} f(0) (f'(0))^2 \\
&\quad - \frac{\varepsilon\mu}{2} f(0) f^{(4)}(0) - \frac{\varepsilon\mu}{2} f(0) f^{(4)}(0) - 2\varepsilon\mu (f'(0) f^{(3)}(0)) \\
&\quad - \frac{3\varepsilon\mu}{2} (f''(0))^2 + \frac{\varepsilon\mu}{2} f^{(6)}(0).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(1,2) &= \frac{\varepsilon}{2} \left((2)U(0,1)U(2,0) + (1)U(1,1)U(1,0) + (2)U(0,0)U(2,1) \right. \\
&\quad \left. + (1)U(1,0)U(1,1) \right) - \frac{\mu(2)(3)(4)U(4,1)}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon}{2} \left(2 \left(\varepsilon \left(f(0) f'(0) \right) - \mu \left(f^{(3)}(0) \right) \right) \left(\frac{1}{2!} f''(0) \right) \right. \\
&\quad + \left(\varepsilon \left(f(0) \left(f''(0) \right) + 1 \left(f'(0) \right)^2 \right) - \mu \left(f^{(4)}(0) \right) \right) \left(f'(0) \right) \\
&\quad + f(0) \left(\varepsilon \left(\frac{1}{2} f(0) f^{(3)}(0) + \left(\frac{3}{2} f'(0) f''(0) \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \mu \left(f^{(5)}(0) \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + f'(0) \left(\varepsilon \left(f(0) \left(f''(0) \right) + 1 \left(f'(0) \right)^2 \right) - \mu \left(f^{(4)}(0) \right) \right) \right) \\
&\quad - 12 \mu \left(\frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{24} f^{(5)}(0) f(0) + \frac{5}{24} f'(0) f^{(4)}(0) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{5}{24} f''(0) f^{(3)}(0) \right) - \frac{\mu}{24} f^{(7)}(0) \right) \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh rumus umum untuk skema dengan $h = 2$,
 $k = 0, 1, \dots$

$$\begin{aligned}
 U(k, 2) = & \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{r=0}^k \sum_{l=0}^r (k+1-r)(r+1-l) f^{(l)}(0) f^{(r+1-l)}(0) f^{(k+1-r)}(0) \\
 & - \frac{\varepsilon\mu}{2} \sum_{r=0}^k (k+1-r) \frac{(r+3)!}{r!} \mu f^{(r+3)}(0) f^{(k+1-r)}(0) \\
 & + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{r=0}^k \sum_{l=0}^{k+1-r} (k+1-r)(k-r-l \\
 & + 2) f^{(l)}(0) f^{(k-r-l+2)}(0) f^{(r)}(0) \\
 & - \frac{\varepsilon\mu}{2} \sum_{r=0}^k (k+1-r) \frac{(k+1-r+3)!}{(k+1-r)!} \mu f^{(k-r+4)}(0) f^{(r)}(0) \\
 & - \frac{(k+3)!}{2k!} \mu \varepsilon \sum_{r=0}^{k+3} (k+4-r) f^{(r)}(0) f^{(k+4-r)}(0) \\
 & + \frac{(k+6)!}{2k!} \mu^2 f^{(k+6)}(0).
 \end{aligned}$$

Langkah selanjutnya yaitu mensubstitusikan nilai $U(k, h)$ pada persamaan berikut,

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^k t^h,$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & t^0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^k(0) \right) \\
 & + t \left(\varepsilon \sum_{r=0}^k (k+1-r) f^{(r)}(0) f^{(k+1-r)}(0) - \frac{(k+3)!}{k!} \mu f^{(k+3)}(0) \right) \\
 & + t^2 \left(\frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{r=0}^k \sum_{l=0}^r (k+1-r)(r+1 \right. \\
 & \quad \left. - l) f^{(l)}(0) f^{(r+1-l)}(0) f^{(k+1-r)}(0) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\varepsilon \mu}{2} \sum_{r=0}^k (k+1-r) \frac{(r+3)!}{r!} \mu f^{(r+3)}(0) f^{(k+1-r)}(0) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{r=0}^k \sum_{l=0}^{k+1-r} (k+1-r)(k-r-l \right. \\
 & \quad \left. + 2) f^{(l)}(0) f^{(k-r-l+2)}(0) f^{(r)}(0) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\varepsilon \mu}{2} \sum_{r=0}^k (k+1-r) \frac{(k+1-r+3)!}{(k+1-r)!} \mu f^{(k-r+4)}(0) f^{(r)}(0) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{(k+3)!}{2k!} \mu \varepsilon \sum_{r=0}^{k+3} (k+4-r) f^{(r)}(0) f^{(k+4-r)}(0) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(k+6)!}{2k!} \mu^2 f^{(k+6)}(0) \right) + \dots
 \end{aligned}$$

3.2 Penyelesaian Persamaan KdV dengan Nilai Awal Pertama

Persamaan KdV adalah

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 6u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \quad (3.3)$$

dengan nilai awal yang diberikan:

$$u(x, 0) = 6x$$

Langkah pertama yaitu mentransformasikan persamaan (3.3) berdasarkan sifat-sifat transformasi diferensial dua dimensi sehingga diperoleh bentuk transformasi dari persamaan (3.3) yaitu,

$$U(k, h+1) = \frac{6 \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k+1-r)U(r, h-s)U(k+1-r, s)}{(h+1)} - \frac{\mu(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3, h)}{(h+1)}.$$

Langkah kedua yaitu mentransformasikan nilai awal $u(x, 0) = 6x$ ke dalam bentuk $U(k, 0)$ menggunakan definisi transformasi diferensial pada persamaan (2.2).

$$U(k, 0) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k(6x)}{dx^k} \right]_{x=0}, k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

sehingga didapatkan nilai

$$U(0, 0) = \frac{1}{0!} \left[\frac{d^0(6x)}{dx^0} \right]_{x=0} = 0$$

$$U(1, 0) = \frac{1}{1!} \left[\frac{d^1(6x)}{dx^1} \right]_{x=0} = 1$$

$$U(2, 0) = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2(6x)}{dx^2} \right]_{x=0} = 0$$

$$U(3, 0) = \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3(6x)}{dx^3} \right]_{x=0} = 0$$

⋮

Langkah ketiga yaitu menjalankan iterasi dengan mensubstitusikan nilai-nilai $U(k, 0)$ kedalam persamaan (3.3) untuk memperoleh nilai $U(k, h)$ yang lain dengan $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ dan $h = 0, 1, 2, 3, \dots$.

a. Untuk $h = 0$ dan $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} U(0,1) &= \frac{6((1)U(0,0)U(1,0))}{1} - \frac{(1)(2)(3)U(3,0)}{1} \\ &= \frac{6((0)(6))}{1} - \frac{6(0)}{1} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(1,1) &= \frac{6((2)U(0,0)U(2,0) + (1)U(1,0)(1,0))}{1} - \frac{(2)(3)(4)U(4,0)}{1} \\ &= \frac{6(2(0)(0) + 1(6)(6))}{1} - \frac{24(0)}{1} \\ &= 216. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(2,1) &= \frac{6((3)U(0,0)U(3,0) + (2)U(1,0)(2,0) + (1)U(2,0)U(1,0))}{1} \\ &\quad - \frac{(3)(4)(5)U(5,0)}{1} \\ &= \frac{6(3(0)(0) + 2(6)(0) + 1(0)(6))}{1} - \frac{60(0)}{1} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(3,1) &= \frac{6}{1}((4)U(0,0)U(4,0) + (3)U(1,0)(3,0) + (2)U(2,0)U(2,0) \\ &\quad + (1)U(3,0)U(1,0)) - \frac{(4)(5)(6)U(6,0)}{1} \\ &= \frac{6(4(0)(0) + 3(6)(0) + 2(0)(0) + 1(0)(6))}{1} - \frac{120(0)}{1} = 0. \end{aligned}$$

$\vdots$

b. Untuk $h = 1$ dan $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} U(0,2) &= \frac{6((1)U(0,1)U(1,0) + (1)U(0,0)U(1,1))}{2} - \frac{(1)(2)(3)U(3,1)}{2} \\ &= \frac{6(1(0)(6) + 1(0)(216))}{2} - \frac{6(0)}{2} = 0. \end{aligned}$$

$$U(1,2) = \frac{6}{2}((2)U(0,1)U(2,0) + (1)U(1,1)U(1,0) + (2)U(0,0)U(2,1) \\ + (1)U(1,0)U(1,1)) - \frac{(2)(3)(4)U(4,1)}{2}$$

$$= 3(2(0)(0) + 1(216)(6) + 2(0)(0) + 1(216)(6)) - \frac{24(0)}{2}$$

$$= 3(1296 + 1296) - 0$$

$$= 7776.$$

$$U(2,2) = \frac{6}{2}((3)U(0,1)U(3,0) + (3)U(0,0)U(3,1) + (2)U(1,1)U(2,0) \\ + (2)U(1,0)U(2,1) + (1)U(2,1)U(1,0) + (1)U(2,0)(1,1)) \\ - \frac{(3)(4)(5)U(5,1)}{2}$$

$$= 3(3(0)(0) + 3(0)(0) + 2(216)(0) + 2(6)(0) + 1(0)(6) \\ + 1(0)(216)) - \frac{60(0)}{2}$$

$$= 0.$$

$$U(3,2) = \frac{6}{2}((4)U(0,1)U(4,0) + (4)U(0,0)U(4,1) + (3)U(1,1)U(3,0) \\ + (3)U(1,0)U(3,1) + (2)U(2,1)U(2,0) + (2)U(2,0)(2,1) \\ + (1)U(3,1)U(1,0) + (1)U(3,0)U(1,1)) - \frac{(4)(5)(6)U(6,1)}{2}$$

$$= 3(4(0)(0) + 4(0)(0) + 3(216)(0) + 3(6)(0) + 2(0)(0) \\ + 2(0)(0) + 1(0)(6) + 1(0)(216)) - \frac{120(0)}{2}$$

$$= 0.$$

⋮

c. Untuk $h = 2$ dan $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$U(0,3) = \frac{6((1)U(0,2)U(1,0) + (1)U(0,1)U(1,1) + (1)U(0,0)U(1,2))}{3}$$

$$- \frac{(1)(2)(3)U(3,2)}{3}$$

$$= \frac{6(1(0)(6) + 1(0)(216) + 2(0)(7776))}{3} - \frac{6(0)}{3}$$

$$= 0.$$

$$U(1,3) = \frac{6}{3}((2)U(0,2)U(2,0) + (2)U(0,1)U(2,1) + (2)U(0,0)U(2,2)$$

$$+ (1)U(1,2)U(1,0) + (1)U(1,1)U(1,1) + (1)U(1,0)U(1,2))$$

$$- \frac{(2)(3)(4)U(4,2)}{3}$$

$$= 2(2(0)(0) + 2(0)(0) + 2(0)(0) + 1(7776)(6) + 1(216)(216)$$

$$+ 1(6)(7776)) - \frac{24(0)}{2}$$

$$= 2(0 + 0 + 0 + 46656 + 46656 + 46656) - 0$$

$$= 279936.$$

$$U(2,3) = \frac{6}{3}((3)U(0,2)U(3,0) + (3)U(0,1)U(3,1) + (3)U(0,0)U(3,2)$$

$$+ (2)U(1,2)U(2,0) + (2)U(1,1)U(2,1) + (2)U(1,0)U(2,2)$$

$$+ (1)U(2,2)U(1,0) + (1)U(2,1)U(1,1) + (1)U(2,0)U(1,2))$$

$$- \frac{(3)(4)(5)U(5,0)}{3}$$

$$= 2(3(0)(0) + 3(0)(0) + 3(0)(0) + 2(7776)(0) + 2(216)(0)$$

$$+ 2(6)(0) + 1(0)(6) + 1(0)(216) + 1(0)(7776)) - \frac{60(0)}{2}$$

$$= 2(0) - 0 = 0.$$

$$\begin{aligned}
U(3,3) &= \frac{6}{3} \left((4)U(0,2)U(4,0) + (4)U(0,1)U(4,1) + (4)U(0,0)U(4,2) \right. \\
&\quad + (3)U(1,2)U(3,0) + (3)U(1,1)U(3,1) + (3)U(1,0)U(3,2) \\
&\quad + (2)U(2,2)U(2,0) + (2)U(2,1)U(2,1) + (2)U(2,0)U(2,2) \\
&\quad + (1)U(3,2)U(1,0) + (1)U(3,1)U(1,1) + (1)U(3,0)U(1,2)) \\
&\quad - \frac{(4)(5)(6)U(6,0)}{3} \\
&= 2(4(0)(0) + 4(0)(0) + 4(0)(0) + 3(7776)(0) + 3(216)(0) \\
&\quad + 3(6)(0) + 2(0)(0) + 2(0)(0) + 2(0)(0) + 1(0)(6) \\
&\quad + 1(0)(216) + 1(0)(7776)) - \frac{120(0)}{2} \\
&= 2(0) - 0 = 0.
\end{aligned}$$

⋮

Dengan melakukan cara yang sama untuk $h = 3, 4, 5, \dots$ dan $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ diperoleh $U(k, h)$.

Tabel 2.2 Nilai $U(k, h)$ dengan nilai awal $u(x, 0) = 6x$

$\begin{matrix} h \\ k \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5	6	...
0	0	0	0	0	0	0	0	...
1	6	6^3	6^5	6^7	6^9	6^{11}	6^{13}	...
2	0	0	0	0	0	0	0	...
3	0	0	0	0	0	0	0	...
4	0	0	0	0	0	0	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Langkah selanjutnya yaitu mensubstitusikan nilai $U(k, h)$ kedalam persamaan:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^k t^h,$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U(0,0)x^0t^0 + U(1,0)xt^0 + U(0,1)x^0t + U(2,0)x^2t^0 + U(1,1)xt \\ &\quad + U(0,2)x^0t^2 + U(3,0)x^3t^0 + U(2,1)x^2t + U(1,2)xt^2 \\ &\quad + U(0,3)x^0t^3 + U(4,0)x^4t^0 + U(3,1)x^3t + U(2,2)x^2t^2 \\ &\quad + U(1,3)xt^3 + U(0,4)x^0t^4 + \dots \\ u(x, t) &= 6x + 216xt + 7776xt^2 + 279936xt^3 + \dots \\ &= 6x + 6^3xt + 6^5xt^2 + 6^7xt^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

maka persamaan (3.4) dapat ditulis

$$u(x, t) = 6x + 6^3xt + 6^5xt^2 + 6^7xt^3 + \dots \quad (3.5)$$

dari persamaan (3.5) diperoleh rasio sebesar

$$r = \frac{6^3xt}{6x} = \frac{6^5xt^2}{6^3xt} = \frac{6^7xt^3}{6^5xt^2} = \dots = 6^2t.$$

dengan menggunakan rumus jumlah deret pada geometri,

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}, \text{ dimana } r < 1$$

maka persamaan (3.5) menjadi

$$\begin{aligned} S_{\infty} &= \frac{6x}{1-6^2t} \\ &= \frac{6x}{1-36t}, \text{ dengan } 0 \leq t < \frac{1}{36} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Langkah selanjutnya yaitu membuktikan bahwa solusi yang dihasilkan merupakan solusi analitik dari persamaan (3.3). Pembuktian dilakukan dengan mensubstitusikan persamaan (3.6) ke persamaan (3.3),

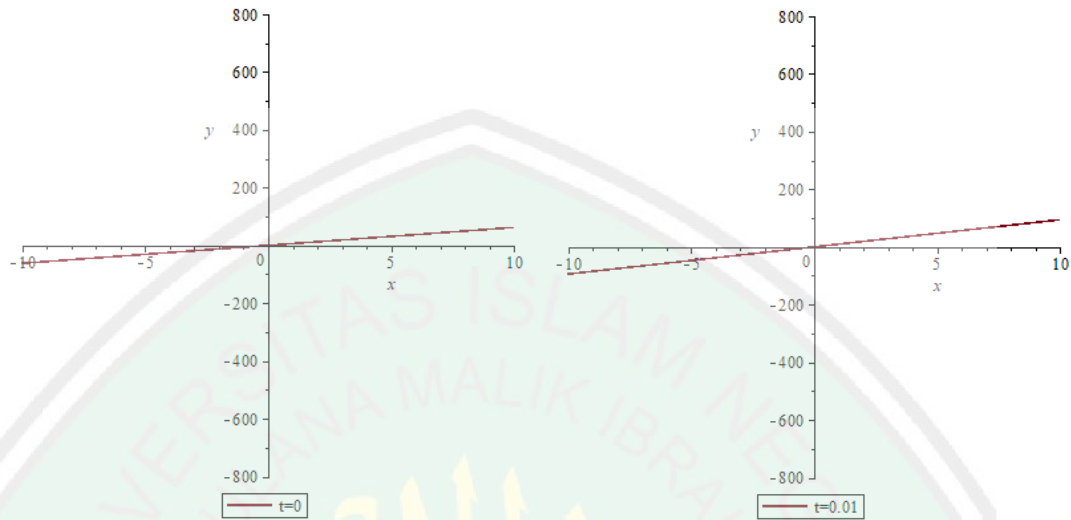
$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - 6u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{6x}{1-36t} \right) - 6 \left(\frac{6x}{1-36t} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{6x}{1-36t} \right) + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{6x}{1-36t} \right) \\
&= \frac{216x}{(1-36t)^2} - \frac{36x}{1-36t} \left(\frac{6}{1-36t} \right) + 0 \\
&= \frac{216x}{(1-36t)^2} - \frac{216x}{(1-36t)^2} + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa persamaan (3.6) merupakan solusi dari persamaan (3.3). selanjutnya akan dibuktikan bahwa persamaan (3.6) memenuhi nilai awal pertama,

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{6x}{1-36t} \\
u(x, 0) &= \frac{6x}{1-36(0)} \\
&= \frac{6x}{1-0} \\
&= 6x.
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa persamaan (3.6) memenuhi nilai awal pertama pada persamaan (3.3).

Berikut, plot solusi $u(x, t) = \frac{6x}{1-36t}$, dengan $0 \leq t < \frac{1}{36}$ dari persamaan KdV untuk nilai $u(x, 0) = 6x$



Gambar 3.1 Simulasi saat $t = 0$

Gambar 3.2 Simulasi saat $t = 0,01$



Gambar 3.3 Simulasi saat $t = 0,02$

Gambar 3.4 Simulasi saat $t = 0,026$

Berdasarkan **Gambar 3.1-3.4** dapat kita lihat bahwa saat t berjalan mulai dari $t = 0$ sampai $t < \frac{1}{36}$ gambar tersebut semakin melandai seiring berjalannya waktu mendekati solusi stabil.

3.3 Penyelesaian Persamaan KdV dengan Nilai Awal Kedua

Persamaan KdV adalah

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = 6u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \quad (3.7)$$

dengan nilai awal yang diberikan:

$$u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2(x)$$

Langkah pertama yaitu mentransformasikan persamaan (3.7) berdasarkan sifat-sifat transformasi diferensial dua dimensi sehingga diperoleh bentuk transformasi dari persamaan (3.7) yaitu

$$U(k, h+1) = \frac{6 \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k+1-r) U(r, h-s) U(k+1-r, s)}{(h+1)} - \frac{\mu(k+1)(k+2)(k+3) U(k+3, h)}{(h+1)}.$$

Langkah kedua yaitu mentransformasikan nilai awal $u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2(x)$ ke dalam bentuk $U(k, 0)$ menggunakan definisi transformasi diferensial pada persamaan (2.2).

$$U(k, 0) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k (-2 \operatorname{sech}^2(x))}{dx^k} \right]_{x=0}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

sehingga didapatkan nilai

$$U(0, 0) = \frac{1}{0!} \left[\frac{d^0 (-2 \operatorname{sech}^2(x))}{dx^0} \right]_{x=0} = -2$$

$$U(1, 0) = \frac{1}{1!} \left[\frac{d^1 (-2 \operatorname{sech}^2(x))}{dx^1} \right]_{x=0} = 0$$

$$U(2, 0) = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 (-2 \operatorname{sech}^2(x))}{dx^2} \right]_{x=0} = 2$$

$$U(3,0) = \frac{1}{3!} \left[\frac{d^3(-2 \operatorname{sech}^2(x))}{dx^3} \right]_{x=0} = 0$$

⋮

Langkah ketiga yaitu menjalankan iterasi dengan mensubstitusikan nilai-nilai $U(k, 0)$ kedalam persamaan (3.7) untuk memperoleh nilai $U(k, h)$ yang lain dengan $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ dan $h = 0, 1, 2, 3, \dots$.

a. Untuk $h = 0$ dan $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} U(0,1) &= \frac{6((1)U(0,0)U(1,0))}{1} - \frac{(1)(2)(3)U(3,0)}{1} \\ &= \frac{6((-2)(0))}{1} - \frac{6(0)}{1} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(1,1) &= \frac{6((2)U(0,0)U(2,0) + (1)U(1,0)(1,0))}{1} - \frac{(2)(3)(4)U(4,0)}{1} \\ &= \frac{6(2(-2)(2) + 1(0)(0))}{1} - \frac{24\left(-\frac{4}{3}\right)}{1} \\ &= -48 + 32 = -16. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(2,1) &= \frac{6((3)U(0,0)U(3,0) + (2)U(1,0)(2,0) + (1)U(2,0)U(1,0))}{1} \\ &\quad - \frac{(3)(4)(5)U(5,0)}{1} \\ &= \frac{6(3(-2)(0) + 2(0)(2) + 1(2)(0))}{1} - \frac{60(0)}{1} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(3,1) &= \frac{6}{1}((4)U(0,0)U(4,0) + (3)U(1,0)(3,0) + (2)U(2,0)U(2,0) \\ &\quad + (1)U(3,0)U(1,0)) - \frac{(4)(5)(6)U(6,0)}{1} \\ &= \frac{6\left(4(-2)\left(-\frac{4}{3}\right) + 3(0)(0) + 2(2)(2) + 1(0)(0)\right)}{1} - \frac{120\left(\frac{34}{45}\right)}{1} \end{aligned}$$

$$= 112 - \frac{272}{3} = \frac{64}{3}.$$

⋮

b. Untuk $h = 1$ dan $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$U(0,2) = \frac{6((1)U(0,1)U(1,0) + (1)U(0,0)U(1,1))}{2} - \frac{(1)(2)(3)U(3,1)}{2}$$

$$= \frac{6(1(0)(0) + 1(-2)(-16))}{2} - \frac{6\left(\frac{64}{3}\right)}{2}$$

$$= 32.$$

$$U(1,2) = \frac{6}{2}((2)U(0,1)U(2,0) + (1)U(1,1)U(1,0) + (2)U(0,0)U(2,1)$$

$$+ (1)U(1,0)U(1,1)) - \frac{(2)(3)(4)U(4,1)}{2}$$

$$= 3(2(0)(-2) + 1(-16)(0) + 2(-2)(0) + 1(0)(-16)) - \frac{24(0)}{2}$$

$$= 0.$$

$$U(2,2) = \frac{6}{2}((3)U(0,1)U(3,0) + (3)U(0,0)U(3,1) + (2)U(1,1)U(2,0)$$

$$+ (2)U(1,0)U(2,1) + (1)U(2,1)U(1,0) + (1)U(2,0)(1,1))$$

$$- \frac{(3)(4)(5)U(5,1)}{2}$$

$$= 3\left(3(0)(0) + 3(-2)\left(\frac{64}{3}\right) + 2(-16)(2) + 2(0)(0) + 1(0)(0)\right.$$

$$\left. + 1(2)(-16)\right) - \frac{60\left(-\frac{272}{15}\right)}{2}$$

$$= -128.$$

⋮

Dengan melakukan cara yang sama untuk $h = 2, 3, 4, 5, \dots$ dan $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ diperoleh $U(k, h)$:

Tabel 3.3 Nilai $U(k, h)$ dengan nilai awal $u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2(x)$

$\begin{matrix} h \\ k \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5	...
0	-2	0	32	0	$-\frac{1024}{3}$	0	...
1	0	-16	0	$\frac{1024}{3}$	0	$-\frac{69632}{15}$	...
2	2	0	-128	0	$\frac{8704}{3}$	0	...
3	0	$\frac{64}{3}$	0	$-\frac{8704}{9}$	0	$\frac{1015808}{45}$	...
4	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{554}{3}$	0	$\frac{63488}{9}$	0	...
5	0	$-\frac{272}{15}$	0	$\frac{63488}{45}$	0	$-\frac{11321344}{225}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Langkah selanjutnya yaitu mensubstitusikan nilai $U(k, h)$ kedalam persamaan:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^k t^h,$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u(x, t) = & U(0,0)x^0t^0 + U(1,0)xt^0 + U(0,1)x^0t + U(2,0)x^2t^0 + U(1,1)xt \\ & + U(0,2)x^0t^2 + U(3,0)x^3t^0 + U(2,1)x^2t + U(1,2)xt^2 \\ & + U(0,3)x^0t^3 + U(4,0)x^4t^0 + U(3,1)x^3t + U(2,2)x^2t^2 \\ & + U(1,3)xt^3 + U(0,4)x^0t^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, t) = & -2 + 32t^2 - 16xt + 2x^2t - \frac{1024}{3}t^4 + \frac{1024}{3}xt^3 - 128x^2t^2 \\ & + \frac{64}{3}x^3t - \frac{4}{3}x^4 + \frac{139264}{45}t^6 - \frac{69632}{15}xt^5 + \frac{8704}{3}x^2t^4 \\ & - \frac{8704}{9}x^3t^3 + \frac{554}{3}x^4t^2 - \frac{272}{15}x^5t + \frac{34}{45}x^6 - \frac{812664}{315}t^8 \\ & + \frac{1625928}{315}xt^7 - \frac{2031616}{45}x^2t^6 + \frac{1015808}{45}x^3t^5 + \frac{63488}{9}x^4t^4 \\ & + \frac{63488}{45}x^5t^3 - \frac{7936}{45}x^6t^2 + \frac{3968}{315}x^7t - \frac{124}{315}x^8 + \dots \end{aligned}$$

Untuk seluruh suku dengan jumlah pangkat variabel sama dengan 0 diperoleh,

$$\begin{aligned} U(0,0)x^0t^0 &= -2 \\ &= -2(1) \\ &= -2 \cdot \frac{1 \cdot 2^2(2^2 - 1)B_2}{2!} \cdot \binom{0}{0}. \end{aligned}$$

Untuk seluruh suku dengan jumlah pangkat variabel sama dengan 2 diperoleh,

$$\begin{aligned} U(0,2)x^0t^2 + U(1,1)xt + U(2,0)x^2t^0 &= 32t^2 - 16xt + 2x^2 \\ &= 2(16t^2 - 8xt + x^2) \\ &= -2 \cdot \frac{3 \cdot 16(16 - 1) \left(-\frac{1}{30}\right)}{4!} \cdot \left(\binom{2}{2} 16t^2 - \binom{2}{1} 4xt + \binom{2}{0} x^2 \right) \\ &= -2 \cdot \frac{3 \cdot 2^4(2^4 - 1)B_4}{4!} \cdot \left(\binom{2}{2} 4^2t^2 - \binom{2}{1} 4^1xt + \binom{2}{0} 4^0x^2 \right). \end{aligned}$$

Untuk seluruh suku dengan jumlah pangkat variabel sama dengan 4 diperoleh,

$$\begin{aligned}
 & U(0,4)x^0t^4 + U(1,3)xt^3 + U(2,2)x^2t^2 + U(3,1)x^3t + U(4,0)x^4t^0 \\
 &= -\frac{1024}{3}t^4 + \frac{1024}{3}xt^3 - 128x^2t^2 + \frac{64}{3}x^3t - \frac{4}{3}x^4 \\
 &= -\frac{4}{3}(256t^4 - 256xt^3 + 96x^2t^2 - 16x^3t + x^4) \\
 &= -2 \cdot \frac{5 \cdot 64(64 - 1) \left(\frac{1}{42}\right)}{6!} \cdot (256t^4 - 256xt^3 + 96x^2t^2 - 16x^3t + x^4) \\
 &= -2 \cdot \frac{5 \cdot 2^6(2^6 - 1)B_6}{6!} \\
 &\quad \cdot \left(\binom{4}{4} 4^4 t^4 - \binom{4}{3} 4^3 x t^3 + \binom{4}{2} 4^2 x^2 t^2 - \binom{4}{1} 4^1 x^3 t + \binom{4}{0} 4^0 x^4 \right).
 \end{aligned}$$

Untuk seluruh suku dengan jumlah pangkat variabel sama dengan 6 diperoleh,

$$\begin{aligned}
 & U(0,6)x^0t^6 + U(1,5)xt^5 + U(2,4)x^2t^4 + U(3,3)x^3t^3 + U(4,2)x^4t^2 \\
 &\quad + U(5,1)x^5t + U(6,0)x^6 \\
 &= \frac{139264}{45}t^6 - \frac{69632}{15}xt^5 + \frac{8704}{3}x^2t^4 - \frac{8704}{3}x^3t^3 + \frac{554}{3}x^4t^2 \\
 &\quad - \frac{272}{15}x^5t + \frac{34}{45}x^6 \\
 &= \frac{34}{45} \cdot (4096t^6 - 6144xt^5 + 3840x^2t^4 - 1280x^3t^3 + 240x^4t^2 - 24x^5t \\
 &\quad + x^6) \\
 &= -2 \cdot \frac{7 \cdot 256(256 - 1) \left(-\frac{1}{30}\right)}{8!} \\
 &\quad \cdot (4096t^6 - 6144xt^5 + 3840x^2t^4 - 1280x^3t^3 + 240x^4t^2 \\
 &\quad - 24x^5t + x^6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \cdot \frac{7 \cdot 2^8 (2^8 - 1) B_8}{8!} \\
&\quad \cdot \left(\binom{6}{6} 4^6 t^6 - \binom{6}{5} 4^5 x t^5 + \binom{6}{4} 4^4 x^2 t^4 - \binom{6}{3} 4^3 x^3 t^3 \right. \\
&\quad \left. + \binom{6}{2} 4^2 x^4 t^2 - \binom{6}{1} 4^1 x^5 t + \binom{6}{0} 4^0 x^6 \right).
\end{aligned}$$

Untuk seluruh suku dengan jumlah pangkat variabel sama dengan 8 diperoleh,

$$\begin{aligned}
&U(0,8)x^0t^8 + U(1,7)xt^7 + U(2,6)x^2t^6 + U(3,5)x^3t^5 + U(4,4)x^4t^4 + U(5,3)x^5t^3 \\
&\quad + U(6,2)x^6t^2 + U(7,1)x^7t + U(8,0)x^8 \\
&= -\frac{812664}{315}t^8 - \frac{1625928}{315}xt^7 - \frac{2031616}{45}x^2t^6 + \frac{1015808}{45}x^3t^5 \\
&\quad + \frac{63488}{9}x^4t^4 + \frac{63488}{45}x^5t^3 - \frac{7936}{45}x^6t^2 + \frac{3968}{315}x^7t - \frac{124}{315}x^8 \\
&= -\frac{124}{315}(65536t^8 - 131072xt^7 + 114688x^2t^6 - 57344x^3t^5 + 17920x^4t^4 \\
&\quad - 3584x^5t^3 + 448x^6t^2 - 32x^7t + x^8) \\
&= -\frac{2728}{525}\left(\frac{5}{66}\right)(65536t^8 - 131072xt^7 + 114688x^2t^6 - 57344x^3t^5 \\
&\quad + 17920x^4t^4 - 3584x^5t^3 + 448x^6t^2 - 32x^7t + x^8) \\
&= -2 \cdot \frac{9 \cdot 2^{10} (2^{10} - 1) B_{10}}{10!} \\
&\quad \cdot \left(\binom{8}{8} 4^8 t^8 - \binom{8}{7} 4^7 x t^7 + \binom{8}{6} 4^6 x^2 t^6 - \binom{8}{5} 4^5 x^3 t^5 \right. \\
&\quad \left. + \binom{8}{4} 4^4 x^4 t^4 - \binom{8}{3} 4^3 x^5 t^3 + \binom{8}{2} 4^2 x^6 t^2 - \binom{8}{1} 4^1 x^7 t \right. \\
&\quad \left. + \binom{8}{0} 4^0 x^8 \right).
\end{aligned}$$

Maka $u(x, t)$ dapat ditulis:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & -2 \cdot \frac{1 \cdot 2^2(2^2 - 1)B_2}{2!} \cdot \binom{0}{0} - 2 \cdot \frac{3 \cdot 2^4(2^4 - 1)B_4}{4!} \\
 & \cdot \left(\binom{2}{2} 4^2 t^2 - \binom{2}{1} 4^1 x t + \binom{2}{0} 4^0 x^2 \right) - 2 \cdot \frac{5 \cdot 2^6(2^6 - 1)B_6}{6!} \\
 & \cdot \left(\binom{4}{4} 4^4 t^4 - \binom{4}{3} 4^3 x t^3 + \binom{4}{2} 4^2 x^2 t - \binom{4}{1} 4^1 x^3 t + \binom{4}{0} 4^0 x^4 \right) \\
 & - 2 \cdot \frac{7 \cdot 2^8(2^8 - 1)B_8}{8!} \\
 & \cdot \left(\binom{6}{6} 4^6 t^6 - \binom{6}{5} 4^5 x t^5 + \binom{6}{4} 4^4 x^2 t^4 - \binom{6}{3} 4^3 x^3 t^3 \right. \\
 & \left. + \binom{6}{2} 4^2 x^4 t^2 - \binom{6}{1} 4^1 x^5 t + \binom{6}{0} 4^0 x^6 \right) - 2 \cdot \frac{9 \cdot 2^{10}(2^{10} - 1)B_{10}}{10!} \\
 & \cdot \left(\binom{8}{8} 4^8 t^8 - \binom{8}{7} 4^7 x t^7 + \binom{8}{6} 4^6 x^2 t^6 - \binom{8}{5} 4^5 x^3 t^5 \right. \\
 & \left. + \binom{8}{4} 4^4 x^4 t^4 - \binom{8}{3} 4^3 x^5 t^3 + \binom{8}{2} 4^2 x^6 t^2 - \binom{8}{1} 4^1 x^7 t \right. \\
 & \left. + \binom{8}{0} 4^0 x^8 \right) + \dots \\
 = & -2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} \cdot \frac{(n+1)2^{n+2}(2^{n+2} - 1)B_{n+2} \cdot 4^h (-1)^{n-h}}{(n+2)!} \cdot x^{n-h} t^h,
 \end{aligned}$$

dimana B merupakan bilangan bernouli.

Berdasarkan deret Maclaurin,

$$\tanh(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1},$$

diturunkan satu kali terhadap x , maka dapat diperoleh:

$$\operatorname{sech}^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \cdot \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-2},$$

misalkan $x = 4t - x$, maka:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sech}^2(4t - x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n - 1) \cdot \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_{2n}}{(2n)!} (4t - x)^{2n-2} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \cdot \frac{2^{2n+2}(2^{2n+2} - 1)B_{2n+2}}{(2n + 2)!} (4t - x)^{2n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \\
 &\quad \cdot \frac{(2n + 1) \cdot 2^{2n+2}(2^{2n+2} - 1)B_{2n+2}}{(2n + 2)!} \cdot 4^k (-1)^{2n-k} t^k x^{2n-k} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\
 &\quad \cdot \frac{(n + 1) \cdot 2^{n+2}(2^{n+2} - 1)B_{n+2}}{(n + 2)!} \cdot 4^k (-1)^{n-k} t^k x^{n-k}.
 \end{aligned}$$

Sehingga $u(x, t)$ dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} \cdot \frac{(n + 1) 2^{n+2} (2^{n+2} - 1) B_{n+2} \cdot 4^h (-1)^{n-h}}{(n + 2)!} \\
 &\quad \cdot x^{n-h} t^h \\
 &= -2 \operatorname{sech}^2(4t - x)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Langkah selanjutnya yaitu membuktikan bahwa solusi yang dihasilkan merupakan solusi analitik dari persamaan (3.7). Pembuktian dilakukan dengan mensubstitusikan persamaan (3.8) ke persamaan (3.7),

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - 6u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (-2 \operatorname{sech}^2(4t - x)) \\
&\quad - 6(-2 \operatorname{sech}^2(4t - x)) \frac{\partial}{\partial x} (-2 \operatorname{sech}^2(4t - x)) \\
&\quad + \frac{\partial^3}{\partial x^3} (-2 \operatorname{sech}^2(4t - x)) \\
&= 16 \operatorname{sech}(4t - x)^2 \tanh(4t - x) \\
&\quad + (12 \operatorname{sech}^2(4t - x))(-4 \operatorname{sech}(4t - x)^2 \tanh(4t - x)) \\
&\quad - 16 \operatorname{sech}(4t - x)^2 \tanh(4t - x)^3 \\
&\quad - 32 \operatorname{sech}(4t - x)^2 \tanh(4t - x)(-1 + \tanh(4t - x)^2) \\
&= 16 \operatorname{sech}(4t - x)^2 \tanh(4t - x) - 48 \operatorname{sech}(4t - x)^4 \tanh(4t - x) \\
&\quad - 16 \operatorname{sech}(4t - x)^2 \tanh(4t - x)^3 \\
&\quad - 32 \operatorname{sech}(4t - x)^2 \tanh(4t - x)(-1 + \tanh(4t - x)^2) \\
&= \frac{16 \sinh(4t - x)}{\cosh(4t - x)^3} - \frac{48 \sinh(4t - x)}{\cosh(4t - x)^5} - \frac{16(\cosh(4t - x)^2 - 1) \sinh(4t - x)}{\cosh(4t - x)^5} \\
&\quad + \frac{32 \sinh(4t - x)}{\cosh(4t - x)^5} \\
&= \frac{16 \sinh(4t - x)}{\cosh(4t - x)^3} - \frac{16 \sinh(4t - x)}{\cosh(4t - x)^5} - \frac{16(\cosh(4t - x)^2 - 1) \sinh(4t - x)}{\cosh(4t - x)^5} \\
&= \frac{16 \sinh(4t - x) \cosh(4t - x)^2 - 16 \sinh(4t - x)}{\cosh(4t - x)^5} \\
&\quad - \frac{16(\cosh(4t - x)^2 - 1) \sinh(4t - x)}{\cosh(4t - x)^5} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa persamaan (3.8) merupakan solusi dari persamaan (3.7).

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa persamaan (3.8) memenuhi nilai awal kedua,

$$u(x, t) = -2 \operatorname{sech}^2(4t - x)$$

$$u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2(4(0) - x)$$

$$= -2 \operatorname{sech}^2(-x)$$

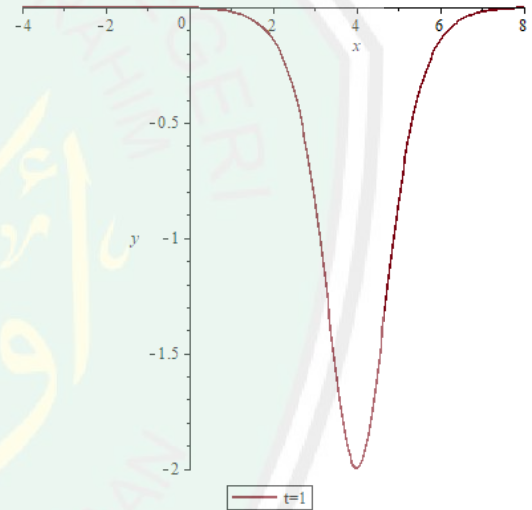
$$= -2 \operatorname{sech}^2(x).$$

Terbukti bahwa persamaan (3.8) memenuhi nilai awal kedua pada persamaan (3.7).

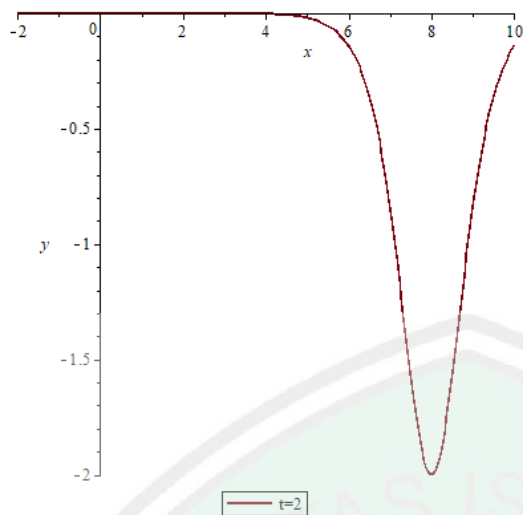
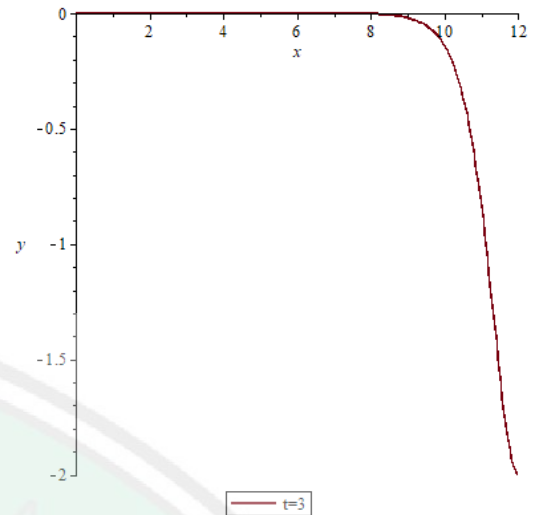
Berikut, plot solusi $u(x, t) = -2 \operatorname{sech}^2(4t - x)$ dengan nilai awal $u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2(x)$.



Gambar 3.5 Simulasi saat $t = 0$



Gambar 3.6 Simulasi saat $t = 1$

Gambar 3.7 Simulasi saat $t = 2$ Gambar 3.8 Simulasi saat $t = 3$

Berdasarkan **Gambar 3.5-3.8** dapat kita lihat bahwa saat t berjalan mulai dari $t = 0$ sampai $t = 1000$ solusi gelombang soliton bersifat stabil dan tidak mengalami perubahan amplitudo.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan penelitian ini adalah penyelesaian persamaan KdV dengan nilai awal menggunakan metode transformasi diferensial berhasil dilakukan. Melalui proses iterasi sederhana diperoleh solusi analitik $u(x, t)$. Solusi dari persamaan KdV menggunakan metode transformasi diferensial dengan nilai awal $u(x, 0) = 6x$, diperoleh solusi $u(x, t) = \frac{6x}{1-36t}$. Solusi tersebut diperoleh dengan menggunakan formula jumlah deret geometri tak hingga dengan rasio antar sukunya sama. Solusi persamaan KdV menggunakan metode transformasi diferensial dengan nilai awal kedua $u(x, 0) = -2 \operatorname{sech}^2(x)$, diperoleh solusi $u(x, t) = -2 \operatorname{sech}^2(4t - x)$. Solusi dengan menggunakan nilai awal kedua diperoleh dengan menggunakan ekspansi binomial dan deret Maclaurin $\tanh(x)$ yang diturunkan satu kali terhadap x . Kedua solusi tersebut merupakan solusi analitik dari persamaan KdV dengan dua nilai awal yang diberikan.

4.2 Saran

Penulis menyarankan agar penelitian selanjutnya menerapkan metode transformasi diferensial pada persamaan diferensial parsial (PDP) nonlinear yang lain dengan nilai awal $u(x, 0) = f(x)$ dimana $f(x)$ harus kontinu, karena metode transformasi diferensial berkaitan dengan deret Taylor atau menggunakan teori ekspansi deret pangkat.

DAFTAR RUJUKAN

- Ahmad, M. Z., Alsarayreh, D., Alsarayreh, A., & Qaralleh, I. 2017. Differential Transformation Method (DTM) for Solving SIS and SI Epidemic Models. *Sains Malaysiana*, 2007-2017.
- Akdi, M. 2013. Numerical KDV equation by the adomian decomposition method. *American Journal of Modern Physiscs*, 111-115.
- Al-Qurthubi, Syeikh Imam. 2009. *Tafsir Al-Qurthubi, Jilid 15*. Penerjemah, Muhyiddin Mas Rida, Muhammad Rana Mengala, Ahmad Athaillah Mansur; Editor, Mukhlis B Mukti. Jakarta: Pustaka Azzam
- Al-Sawalha, M. M., & Noorani, M. 2008. Application of The Differential Transformation Method for The Solution of The Hyperchaotic Rossler System. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 1509-1514.
- Anton, Howard, dkk. 2012. *Calculus. 10th edition*. Jefferson City: R.R Donelley.
- Belashov, V.Yu., Vladimirov, S.V. 2006. *Solitary Wave in Dispersive Complex Media*. New York City : LE-TEX Jenolek
- Daxois, T dan Michel, P. 2010. *Physics of Solitons : An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Fatoorechi, Hooman., Abolghasemi, Hossein. 2015. The Differential Transform Method as a New Computational Tool for Laplace Transformation. *Short Communication*. 38(2):157-160.
- Kangalgil, F. and Ayaz, F. 2008. Solitary wave solutions for the KdV and mKdV equations by differential transform method. *Chaos, Solitons & Fractals*. 41(1), 464-472.
- Lestari, Dwi. 2013. *Persamaan Diferensial (Diktat)*. UNY: Yogyakarta.
- Mirzae, Farshid. 2011. Differential Transform Method for Solving Linier and Nonlinier System of Ordinary Differential Equation. *Applied Mathematical Scince*, Vol. 5 No. 70, 3464-3472.
- Muhammad, ‘Abdullah. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir, Jilid 7*. Penerjemah, M. Abdul Ghoffar E.M, Abu Ihsan al-Atsari; M. Yusuf Harun, dkk. Bogor: Pustaka Imam Syafi’i.
- N.J. Zabusky and M.D. Kruskal. 1965. Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial states. *Phys. Rev. Lett*. 15, 240-243.

Oktavia, Aulia., Syafwan, Mahdhiyah. 2018. *Eksistensi Soliton pada Persamaan Korteweg de_Vries*. Jurnal Matematika UNAND. Vol.3 No. 1 Hal.9-16.

Scott Russel, J. 1844. Report on Waves. *Rep. Meet. British Assoc. Adv. Sci* 14:31.

Song, H. dan Tao, L. 2008. Soliton Solution for Korteweg de_Vries equation by Homotopy Analysis Method. *Anziam J.*50. c152-165.

Trisnobudi, Amoranto. 2005. *Fenomena Gelombang*. Bandung: ITB.

Verduits, M. W. J. 2011. *Soliton*. Disertasi: University Utrecht.

Zhou, J. K. 1986. Differential Transformation and Its Application for Electrical Circuits. Wuhan: Huazhong University Press.



DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Hellyatus Saadah, lahir di Pamekasan pada tanggal 13 Agustus 1997. Anak bungsu dari 3 bersaudara yakni dari pasangan Bapak Jusak (Alm) dan Ibu Hosna.

Perempuan yang akrab disapa Helli ini telah menempuh pendidikan formal mulai dari TK. Nasyatus Syibyan, lalu pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Tobungan 2 dan lulus pada tahun 2010, juga mengenyam pendidikan nonformal selama 7 tahun di MD. Nasyatul Ulum dan lulus pada tahun 2011. kemudian melanjutkan ke SMPN 5 Pamekasan dan lulus pada tahun 2013, dan melanjutkan ke MAN I Pamekasan dan lulus pada tahun 2016. Selanjutnya pada tahun yang sama menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama menjadi mahasiswa telah mengikuti beberapa kompetisi, diantaranya Riset Kompetitif Mahasiswa (RKM) pada tahun 2019 dan meraih medali perunggu pada Olimpiade Sains dan Karya Inovasi bidang Matematika tahun 2019. Selain itu disela-sela kesibukan menjadi mahasiswa, dia juga asisten laboratorium dan aktif dalam kegiatan sekolah tahfidz HTQ UIN Maliki Malang.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Hellyatus Saadah
NIM : 16610038
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Persamaan KdV (Korteweg de Vries)
Menggunakan metode Transformasi Diferensial
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si.
Pembimbing II : Dr. Hairur Rahman, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	30 Oktober 2019	Revisi Bab I & Bab II (Pembimbing I)	1.
2.	1 November 2019	Revisi Bab III (Pembimbing I)	2.
3.	1 November 2019	Konsultasi Bab II (Pembimbing II)	3.
4.	10 Februari 2020	Konsultasi Kajian Agama & Bab III (Pembimbing II)	4.
5.	10 Februari 2020	ACC untuk diseminarkan (Pembimbing II)	5.
6.	8 Maret 2020	Revisi Bab II (Pembimbing I)	6.
7.	20 Maret 2020	Revisi Bab II (Pembimbing I)	7.
8.	25 Maret 2020	Revisi Bab III (Pembimbing II)	8.
9.	28 Maret 2020	Revisi Bab I,II dan III (Pembimbing I)	9.
10.	28 Maret 2020	ACC untuk disidangkan (Pembimbing I)	10.
11.	6 April 2020	Konsultasi Pra sidang (Pembimbing II)	11.

Malang, 28 Maret 2020
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001