

**METODE RUNGE KUTTA ORDE 4 PADA MODEL PENYEBARAN
INFLUENZA DENGAN POPULASI SIRC**

SKRIPSI

OLEH
RIZKA NINDA LESTARI
NIM. 15610112



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019**

**METODE RUNGE KUTTA ORDE 4 PADA METODE PENYEBARAN
INFLUENZA DENGAN POPULASI SIRC**

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Rizka Ninda Lestari
NIM. 15610112

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019**

**METODE RUNGE KUTTA ORDE 4 PADA MODEL PENYEBARAN
INFLUENZA DENGAN POPULASI SIRC**

SKRIPSI

Oleh
Rizka Ninda Lestari
NIM. 15610112

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 30 Oktober 2019

Pembimbing I,

Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Pembimbing II,

Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIP. 19900511 20160801 1 057

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

**METODE RUNGE KUTTA ORDE 4 PADA MODEL PENYEBARAN
INFLUENZA DENGAN POPULASI SIRC**

SKRIPSI

Oleh
Rizka Ninda Lestari
NIM. 15610112

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Pengaji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 27 November 2019

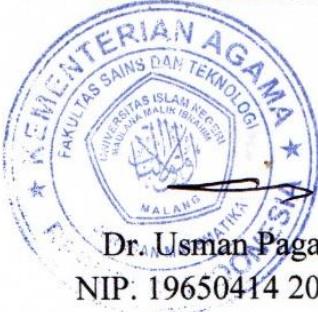
Pengaji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Ketua Pengaji : Heni Widayani, M.Si

Sekretaris Pengaji : Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd

Anggota Pengaji : Muhammad Khudzaifah, M.Si

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rizka Ninda Lestari

NIM : 15610112

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Metode Runge Kutta Orde 4 pada Model Penyebaran Influenza

dengan Populasi SIRC

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 Oktober 2019
Yang membuat pernyataan



Rizka Ninda Lestari
NIM. 15610112

MOTO

*“Janganlah kamu bersikap lemah dan janganlah pula kamu bersedih hati,
padahal kamu salah orang orang yang paling tinggi derajatnya jika kamu beriman”*
(QS al-Imran/3:139)



PERSEMBAHAN

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Bapak Purnadi dan Ibu Sundiyah tercinta, yang tak pernah lelah untuk memberikan dukungan fisik maupun psikis kepada penulis, tak pernah luput dalam menyambungkan doa kepada Allah Swt, dan berbagai pengorbanan yang tak pernah ternilai. Serta kepada kedua adik tersayang Dewi Lailatul Rachmawati dan Nadifatul Ulfiah yang selalu menjadi kebanggaan

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Metode Runge Kutta Orde 4 pada Model Penyebaran Influenza dengan Populasi SIRC” sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.

5. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen wali yang selalu memberikan motivasi dan arahan kepada penulis.
7. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam proses perkuliahan.
8. Bapak dan Ibu serta adik tercinta yang selalu memberikan doa, semangat dan motivasi demi keberhasilan penulis.
9. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2015 khususnya Matematika C dan Keluarga Bumi Palapa atas dukungan serta motivasinya dalam menggapai cita-cita.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materiil maupun moril.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, Oktober 2019

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR viii

DAFTAR ISI x

DAFTAR TABEL xii

DAFTAR GAMBAR xiii

ABSTRAK xiv

ABSTRACT xv

ملخص xvi

BAB I PENDAHULUAN

1.1	Latar Belakang	1
1.2	Rumusan Masalah	3
1.3	Tujuan Penelitian.....	4
1.4	Manfaat Penelitian.....	4
1.5	Batasan Masalah.....	4
1.6	Metode Penelitian.....	5
1.7	Sistematika Penulisan.....	6

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1	Persamaan Diferensial.....	8
2.2	Persamaan Diferensial Biasa.....	8
2.3	Sistem Persamaan Diferensial	10
2.4	Metode Runge Kutta	11
2.5	Runge Kutta Orde 4.....	11
2.6	Galat	12
2.7	Model Epidemi Influenza.....	13
2.8	Kajian Al-Quran tentang Perilaku Hidup Sehat Rasulullah Saw	16

BAB III PEMBAHASAN

3.1	Penurunan Metode Runge Kutta Orde 4	19
3.2	Solusi Numerik Model Penyebaran Virus Influenza dengan Menggunakan Metode Runge Kutta Orde 4	36
3.2.1	Hasil Iterasi Metode Runge Kutta Orde 4 pada Model Penyebaran Virus Influenza	38
3.2.2	Perbandingan Solusi Numerik Metode Runge Kutta Orde 4 dengan ODE45	53
3.3	Analisis Galat	61
3.3.1	Analisis Galat Relatif Hampiran Metode Runge Kutta Orde 4	61
3.3.2	Perbandingan Galat Runge Kutta Orde 4 dengan ODE45	64

BAB IV PENUTUP

4.1	Kesimpulan.....	72
4.2	Saran.....	74

DAFTAR RUJUKAN	75
-----------------------------	----

LAMPIRAN**RIWAYAT HIDUP****BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Nilai Awal dan Nilai Parameter Sistem Persamaan (3.11)	37
Tabel 3.2	Hasil Iterasi Populasi <i>Susceptible</i>	53
Tabel 3.3	Hasil Iterasi Populasi <i>Infectious</i>	55
Tabel 3.4	Hasil Iterasi Populasi <i>Recovered</i>	57
Tabel 3.5	Hasil Iterasi Populasi <i>Cross-immune</i>	59
Tabel 3.6	Hasil Galat Relatif Hampiran pada <i>Susceptible</i>	64
Tabel 3.7	Hasil Galat Relatif Hampiran pada <i>Infectious</i>	66
Tabel 3.8	Hasil Galat Relatif Hampiran pada <i>Recovered</i>	68
Tabel 3.9	Hasil Galat Relatif Hampiran pada <i>Cross-immune</i>	70

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram Populasi Manusia	13
Gambar 3.1	Grafik Populasi <i>Susceptible</i>	54
Gambar 3.2	Grafik Populasi <i>Infectious</i>	56
Gambar 3.3	Grafik Populasi <i>Recovered</i>	58
Gambar 3.4	Grafik Populasi <i>Cross-immune</i>	60
Gambar 3.5	Grafik Galat <i>Susceptible</i>	65
Gambar 3.6	Grafik Galat <i>Infectious</i>	67
Gambar 3.7	Grafik Galat <i>Recovered</i>	69
Gambar 3.8	Grafik Galat <i>Cross-immune</i>	71

ABSTRAK

Lestari, Rizka Ninda. 2019. **Metode Runge Kutta Orde 4 pada Model Penyebaran Influenza dengan Populasi SIRC.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Si. M.Pd. (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Kata kunci: Runge Kutta orde 4, penyebaran influenza, model SIRC

Model penyebaran influenza pada populasi manusia ditunjukkan pada model SIRC. Model SIRC merupakan sistem persamaan diferensial biasa linier. Dalam penelitian ini, digunakan solusi numerik untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial biasa linier. Solusi numerik yang digunakan adalah metode Runge Kutta orde 4 pada model SIRC penyebaran influenza. Penelitian ini membahas tentang metode Runge Kutta orde 4. Penurunan metode Runge Kutta orde 4 dilakukan untuk mengetahui nilai dari a_1, a_2, a_3, a_4 yang ada pada rumus umum Runge Kutta orde 4. Perhitungan numerik Runge Kutta orde 4 menghasilkan nilai iterasi pada setiap populasi *Susceptible, Infectious, Recovered, Cross-immune*. Pada perhitungan numerik juga menghasilkan grafik solusi yang menunjukkan pola perilaku setiap populasi SIRC. Setiap populasi pada grafik tersebut akan stabil dengan ditunjukannya hasil grafik yang konvergen (menuju titik kesetimbangan). Selanjutnya juga dianalisis galat dari hasil iterasi metode Runge Kutta orde 4 dengan menggunakan galat relatif hampiran. Diperoleh nilai galat dari setiap iterasi populasi SIRC. Disimpulkan bahwa metode Runge Kutta orde 4 dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial biasa linier pada model SIRC penyebaran influenza.

ABSTRACT

Lestari, Rizka Ninda. 2019. **Fourth-Order Runge Kutta Methods in Spread Model of Influenza with SIRC Populations.** Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, M.Si. M.Pd. (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Keyword: *fourth-order Runge Kutta, influenza spread, SIRC model*

Models of influenza spread in human populations are shown in the SIRC model. The SIRC model is a system of linear ordinary differential equations. In this research, numerical solutions are used to solve differential equations system. The numerical solution used is the fourth-order Runge Kutta methods in the SIRC model of influenza spread. This research discusses the fourth-order Runge Kutta. The derivation of the fourth-order Runge Kutta methods to determine the values of a_1, a_2, a_3, a_4 that exist in the general formula fourth-order Runge Kutta. The numerical calculation of fourth-order Runge Kutta generate an iteration value in each population of Susceptible, Infectious, Recovered, and Cross-immune. The numerical calculations also generate a solution graph that shows the behavior patterns of each SIRC population. Each population on the graph will be stable with the graph showing the convergent results (towards the equilibrium point). Furthermore, an error was also analyzed from the results of the iteration of the fourth-order Runge Kutta methods using relative iteration error. An error value is obtained from each iteration of the SIRC population. It was concluded that the fourth-order Runge Kutta methods can be used to solve differential equation system in the SIRC model of the influenza spread.

ملخص

ليستاري، رزكا نيندا. ٢٠١٩ . طريقة *Runge Kutta* ترتيب ٤ في نموذج انتشار الأنفلونزا مع سكان SIRC. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) اري كوسوماستوتي، الماجستير (٢) محمد خوذاييف، الماجستير

الكلمات الرئيسية: طريقة *Runge Kutta* ترتيب ٤ ، انتشار الأنفلونزا، نموذج SIRC

يتم عرض نماذج لانتشار الأنفلونزا بين البشر في نموذج SIRC. نموذج SIRC هو نظام من المعادلات التفاضلية الخطية العادية. في هذه الدراسة ، يتم استخدام الحلول العددية لحل نظم المعادلات التفاضلية الخطية العادية. الحل العددي المستخدم هو طريقة *Runge Kutta* ترتيب ٤ في نموذج SIRC لانتشار الأنفلونزا. تناقش هذه الدراسة طريقة *Runge Kutta* ترتيب ٤ . يتم إجراء تخفيض في طريقة *Runge Kutta* في الترتيب ٤ لمعرفة قيم a_1, a_2, a_3, a_4 الموجودة في الصيغة العامة *Runge Kutta* ترتيب ٤ . ينتج الحساب العددي لترتيب *Runge Kutta* ترتيب ٤ قيمة تكرار في كل مجموعة سكانية. وهي عرضة ، المعدية ، المستردة ، عبر المناعة. تنتج الحسابات العددية أيضاً رسم بياني للحل يظهر أنماط سلوك كل مجموعة منمجموعات SIRC. سيكون كل مجتمع على الرسم البياني مستقرًا مع الرسم البياني الذي يعرض النتائج المتقاربة (نحو نقطة التوازن). علاوة على ذلك ، تم تحليل خطأ أيضاً من نتائج تكرار طريقة *Runge Kutta* ترتيب ٤ باستخدام خطأ قريب نسبياً. يتم الحصول على قيمة خطأ من كل تكرار من السكان SIRC. تم التوصل إلى أنه يمكن استخدام طريقة *Runge Kutta* ترتيب ٤ لحل نظم المعادلات التفاضلية الخطية العادية في نموذج SIRC لانتشار الأنفلونزا.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyakit influenza merupakan salah satu jenis penyakit menular yang disebabkan oleh virus influenza. Ada tiga jenis virus influenza, yaitu tipe A, tipe B, dan tipe C. Beberapa virus menginfeksi manusia dengan menggabungkan gen manusia dan gen hewan untuk diproduksi subtipe virus baru (Kusumo, 2017). Model epidemik influenza manusia yang telah sembuh dari penyakit dalam periode tertentu dapat terinfeksi kembali oleh jenis virus yang sama. Proses reinfeksi oleh jenis virus yang sama di populasi manusia digambarkan dengan model SIRC. Model penyebaran virus influenza digunakan untuk memahami pola infeksi influenza pada populasi manusia.

Allah Swt berfirman dalam al-Quran surat al-Ahzab ayat 21:

“Sungguh, telah ada pada (diri) Rasulullah itu suri teladan yang baik bagimu (yaitu) bagi orang yang mengharap (rahmat) Allah dan (kedatangan) hari kiamat dan yang banyak mengingat Allah” (QS al-Ahzab/33:21).

Pada ayat tersebut Allah Swt menganjurkan kepada kita agar meniru pola hidup sehat yang diterapkan oleh Rasulullah Saw dalam hidupnya. Rasulullah Saw semasa hidupnya beliau jarang jatuh sakit, beliau sakit ketika menerima wahyu pertama dan ketika hendak wafat, dikarenakan pola hidupnya memiliki nilai-nilai kebaikan yang baik untuk kesehatan jasmani maupun rohani (Abdurrahman, 2002). Menerapkan pola hidup sehat seperti yang diterapkan Rasulullah Saw merupakan cara agar kita tidak mudah terserang penyakit.

Model matematika untuk masalah penyebaran virus influenza disajikan dalam bentuk PDB (Persamaan Diferensial Biasa) bergantung waktu yang menjelaskan menularnya virus di dalam tubuh manusia (*human*). Model matematika ini memuat 4 persamaan dalam satu sistem yang terdiri atas variabel *Susceptible in human* (S_h), *Infectious in human* (I_h), *Recovered in human* (R_h), dan *Cross-immune in human* (C_h). Dimana *Susceptible* merupakan jumlah individu yang mudah terinfeksi dan mudah ditulari penyakit, *Infectious* merupakan jumlah individu yang terinfeksi, *Recovered* merupakan jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit, dan *Cross-immune* merupakan jumlah individu dengan imunitas sementara.

Selanjutnya interpretasi model dapat dilakukan dengan menganalisis perilaku model secara numerik. Dalam penelitian ini dipilih metode Runge Kutta orde 4. Metode Runge Kutta orde 4 merupakan salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang menyangkut nilai awal dengan ukuran langkah waktu yang bervariasi. Munir (2010) mengatakan bahwa metode ini dipandang cukup baik dalam mencari solusi numerik karena memiliki ketelitian yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan fungsi dalam penyelesaiannya. Metode Runge Kutta orde 4 dapat diturunkan dengan cara yang sama seperti penurunan Runge Kutta orde 2 maupun orde 3. Sebelum menggunakan Runge Kutta orde 4 kita perlu mengetahui kebenaran dari rumusnya dengan cara penurunan. Dalam metode numerik, hasil yang diperoleh bukanlah hasil yang sama persis dengan nilai sejatinya. Akan selalu ada selisih karena hasil yang didapat dengan metode numerik merupakan hasil yang diperoleh dengan proses iterasi (*looping*) untuk menghampiri nilai sebenarnya, dan selisih tersebut merupakan

galat (*error*) dari metode numerik. Dalam penelitian ini akan dikaji penurunan Runge Kutta orde 4, simulasi numerik pada penyebaran virus influenza menggunakan metode Runge Kutta orde 4, serta galat metode numerik pada Runge Kutta orde 4.

Penelitian ini merujuk pada penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Kusumo (2017) yang mengkaji tentang analisis dinamik model penyebaran virus influenza. Pada penelitian tersebut diperoleh analisis kestabilan untuk model matematika penyebaran virus influenza dan analisis perilaku sistem untuk mendeteksi siklus jenis infeksi menggunakan teori bifurkasi. Selain itu merujuk juga pada buku karangan Chapra dan Canale (2010) yang menjelaskan tentang solusi numerik, di antaranya yaitu analisis galat, solusi persamaan diferensial biasa, metode Runge Kutta, serta turunan metode Runge Kutta.

Berdasarkan uraian yang telah dipaparkan sebelumnya, pada penelitian ini penulis akan mengkaji dan menganalisis secara numerik model matematika penyebaran virus influenza pada populasi manusia dengan judul “Metode Runge Kutta Orde 4 pada Model Penyebaran Influenza dengan Populasi SIRC”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana penurunan metode Runge Kutta orde 4?
2. Bagaimana solusi numerik model penyebaran virus influenza dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4?
3. Bagaimana analisis galat model penyebaran virus influenza?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang sudah disebutkan, maka tujuan dalam penelitian ini adalah:

1. Mengetahui penurunan metode Runge Kutta orde 4.
2. Mengetahui solusi numerik model penyebaran virus influenza dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4.
3. Mengetahui analisis galat model penyebaran virus influenza.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

1. Mendapatkan hasil penurunan metode Runge Kutta orde 4.
2. Mendapatkan solusi numerik model penyebaran virus influenza dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4 sehingga dapat diketahui pola penyebaran dari virus influenza.
3. Mendapatkan hasil analisis galat model penyebaran virus influenza.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, penulis difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah sebagai berikut:

- a. Model matematika yang digunakan dalam penelitian ini berbentuk:

$$\dot{S}_h = \mu_1 - \mu_2 \dot{S}_h - \beta \dot{S}_h \dot{I}_h + \gamma \dot{C}_h$$

$$\dot{I}_h = \beta \dot{S}_h \dot{I}_h + \sigma \beta \dot{C}_h \dot{I}_h - (\mu_3 + \alpha) \dot{I}_h$$

$$\dot{R}_h = (1 - \sigma) \beta \dot{C}_h \dot{I}_h + \alpha \dot{I}_h - (\mu_4 + \delta) \dot{R}_h$$

$$\dot{C}_h = \delta \dot{R}_h - \beta \dot{C}_h \dot{I}_h - (\mu_5 + \gamma) \dot{C}_h$$

(Kusumo, 2017).

- b. Asumsi yang digunakan adalah dengan memperhatikan faktor kelahiran dan kematian.

1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini metode yang digunakan adalah studi literatur dengan menelaah dan mempelajari buku-buku, jurnal-jurnal, dan referensi lain yang mendukung penelitian ini. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini yaitu:

1. Penurunan metode Runge Kutta orde 4
 - a. Menganalisis rumus Runge Kutta orde 4
 - b. Menganalisis deret Taylor untuk Runge Kutta orde 4
 - c. Menganalisis penurunan Runge Kutta orde 4
 - d. Mengubah k_1, k_2, k_3, k_4 ke deret Taylor 2 variabel
 - e. Mensubstitusi hasil k_1, k_2, k_3, k_4 ke rumus umum Runge Kutta orde 4
 - f. Membandingkan hasil penurunan dengan hasil substitusi k_1, k_2, k_3, k_4 ke rumus umum Runge Kutta orde 4
 - g. Menganalisis persamaan baru dari hasil perbandingan
 - h. Menganalisis nilai a_1, a_2, a_3, a_4
 - i. Menganalisis hasil rumus Runge Kutta orde 4 dengan mensubstitusi nilai a_1, a_2, a_3, a_4
 - j. Memberikan kesimpulan dari hasil penelitian.
 - k. Melaporkan hasil penelitian.

2. Solusi numerik
 - a. Menganalisis penerapan Runge Kutta orde 4 ke dalam model SIRC penyebaran influenza
 - b. Menghitung iterasi numerik dengan mensubstitusikan nilai awal dari variabel dan nilai parameter pada model menggunakan metode Runge Kutta orde 4
 - c. Menginterpretasi hasil grafik pada *software* MATLAB berdasarkan simulasi numerik.
 - d. Memberikan kesimpulan dari hasil penelitian.
 - e. Melaporkan hasil penelitian.
3. Analisis galat
 - a. Menganalisis galat dari metode numerik
 - b. Menghitung galat berdasarkan hasil iterasi numerik
 - c. Menginterpretasi hasil simulasi numerik dan hasil analisis galat
 - d. Memberikan kesimpulan dari hasil penelitian.
 - e. Melaporkan hasil penelitian.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk lebih mudah memahami penelitian ini secara keseluruhan, maka penulis memberikan gambaran umum sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini membahas mengenai latar belakang penelitian, rumusan masalah penelitian, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini membahas kajian pustaka yang dipakai dasar pembahasan penelitian ini, meliputi persamaan diferensial, persamaan diferensial biasa, sistem persamaan diferensial, metode Runge Kutta, Runge Kutta orde 4, galat, penyakit influenza, dan model epidemi influenza.

Bab III Pembahasan

Bab ini membahas tentang hasil penelitian yang diperoleh, yaitu penurunan Runge Kutta orde 4, simulasi numerik pada penyebaran virus influenza menggunakan metode Runge Kutta orde 4, serta galat metode numerik pada Runge Kutta orde 4.

Bab IV Penutup

Bab ini membahas kesimpulan akhir yang merupakan jawaban dari rumusan masalah penelitian dan saran dari penulis untuk pembaca

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas disebut persamaan diferensial (Pamuntjak dan Santosa, 1990). Menurut Triatmodjo (2002) persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung turunan fungsi. Derajat (order) dari persamaan diferensial ditentukan oleh derajat tertinggi dari turunannya. Sebagai contoh persamaan diferensial di bawah mengandung satu turunan dengan variabel bebas t .

$$\frac{dy}{dt} + 5t - 5 = 0 \quad (2.1)$$

Berdasarkan jumlah variabel bebas, persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Jika variabel terikat dalam suatu persamaan diferensial merupakan suatu fungsi satu variabel bebas maka turunannya disebut turunan biasa dan persamaan tersebut dinamakan persamaan diferensial biasa. Jika variabel terikat suatu fungsi dua variabel atau lebih maka turunannya disebut turunan parsial dan persamaannya dinamakan persamaan diferensial parsial (Triatmodjo, 2002).

2.2 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang memuat satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu peubah bebas. Pangkat (derajat) suatu persamaan diferensial biasa yang berbentuk

polinom dalam fungsi (peubah tak bebas) beserta turunan-turunannya adalah pangkat (derajat) polinom itu, yakni pangkat tertinggi dari perkalian peubah tak bebas beserta turunan-turunannya yang terdapat dalam persamaan diferensial tersebut (Pamuntjak dan Santosa, 1990).

Menurut Waluya (2006) persamaan diferensial biasa yang berbentuk

$$F(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.2)$$

dikatakan linier jika F adalah linier dalam variabel-variabel $y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}$.

Secara umum persamaan diferensial biasa linier diberikan sebagai berikut:

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = f(t) \quad (2.3)$$

Menurut Baiduri (2002), persamaan (2.3) merupakan persamaan diferensial orde- n dikatakan linier jika memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

- a. Variabel terikat y dan derivatifnya hanya berderajat satu.
- b. Tidak ada perkalian antara y dan derivatifnya serta antara derivatif.
- c. Variabel terikat y bukan merupakan fungsi transenden.

Dimisalkan bahwa koefisien $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$ dan fungsi $f(t)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang I . Jika fungsi $f(t) = 0$ maka persamaan (2.3) disebut persamaan homogen. Jika fungsi $f(t) \neq 0$ maka persamaan (2.3) disebut persamaan nonhomogen atau tak homogen. Jika semua koefisien $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_0(t)$ adalah suatu konstanta, maka persamaan (2.3) disebut persamaan linier koefisien konstanta. Jika semua variabelnya berupa fungsi maka disebut persamaan linier koefisien variabel (Finizio dan Ladas, 1988).

Sebagai contoh persamaan diferensial berikut:

$$\dot{S}_h = \mu_1 - \mu_2 \dot{S}_h - \beta \dot{S}_h \dot{I}_h + \gamma \dot{C}_h \quad (2.4)$$

dimana S_h , I_h , dan C_h berturut turut menyatakan individu rentan, terinfeksi, dan imunitas sementara yang bergantung terhadap waktu t . Sedangkan μ_1 , μ_2 , β , dan γ merupakan nilai parameter yang diberikan. Persamaan (2.4) memuat turunan biasa dan tidak berpangkat maka disebut persamaan diferensial biasa linier.

Persamaan diferensial yang bukan persamaan linier disebut persamaan diferensial non linier. Dikatakan persamaan diferensial non linier jika persamaan (2.2) memenuhi salah satu dari sifat berikut:

1. F tidak berbentuk polinom dalam $y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^n$.
2. F tidak berbentuk polinom berpangkat lebih dari 2 dalam $y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^n$.

2.3 Sistem Persamaan Diferensial

Menurut Finizio dan Ladas (1988) sistem persamaan diferensial linier adalah suatu sistem yang memuat n buah persamaan diferensial dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, dimana n merupakan bilangan bulat positif yang lebih besar sama dengan 2. Bentuk umum dari suatu sistem persamaan diferensial linier orde satu dengan n fungsi yang tidak diketahui adalah:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

Suatu sistem persamaan diferensial dikatakan linier jika sistem tersebut terdiri lebih dari satu persamaan linier yang saling terkait. Sedangkan koefisiennya bisa berupa konstanta ataupun fungsi. Sedangkan sistem persamaan diferensial dikatakan non linier jika sistem tersebut terdiri lebih dari satu persamaan non linier yang saling terkait (Boyce dan DiPrima, 2001).

2.4 Metode Runge Kutta

Metode Runge Kutta merupakan alternatif dari metode deret Taylor yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan fungsi (Munir, 2010). Bentuk umum dari metode Runge Kutta orde- n yaitu:

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n \quad (2.6)$$

dengan a adalah konstanta dan

$$k_1 = hf(t_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1)$$

$$k_3 = hf(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 + q_{22} k_2)$$

\vdots

$$k_n = hf(t_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 + q_{n-1,2} k_2 + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1})$$

dengan p dan q adalah konstanta. Nilai k menunjukkan hubungan berurutan. Nilai k_1 muncul dalam persamaan untuk menghitung k_2 , yang kedua juga muncul dalam persamaan untuk menghitung k_3 dan seterusnya. Hubungan berurutan ini membuat metode Runge Kutta menjadi efisien untuk hitungan komputer (Chapra dan Canale, 2010).

2.5 Runge Kutta Orde 4

Metode Runge Kutta yang sering digunakan adalah metode Runge Kutta orde 4. Karena tingkat ketelitian solusinya tinggi dibandingkan metode Runge Kutta sebelumnya. Bentuk umum metode Runge Kutta orde 4 yaitu:

$$y_{i+1} = y_i + h(a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + a_4 k_4) \quad (2.7)$$

dengan,

$$k_1 = f(t_i, y_i) \quad (2.8)$$

$$k_2 = f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \quad (2.9)$$

$$k_3 = f(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \quad (2.10)$$

$$k_4 = f(t_i + p_3 h, y_i + q_{31} k_1 h + q_{32} k_2 h + q_{33} k_3 h) \quad (2.11)$$

2.6 Galat

Menganalisis galat sangat penting dalam perhitungan yang menggunakan metode numerik. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya, semakin teliti solusi numerik yang didapatkan (Munir, 2010).

Misalkan \hat{a} adalah nilai hampiran terhadap nilai sejati a , maka selisih $\varepsilon = a - \hat{a}$ disebut galat. Dalam praktik terkadang sulit dicari nilai sejati a , karena itu galat ε sering dinormalkan terhadap solusi hampirannya, sehingga galat relatifnya dinamakan galat relatif hampiran. Galat relatif hampiran dirumuskan sebagai berikut:

$$\varepsilon_{RA} = \frac{\varepsilon}{\hat{a}} \quad (2.12)$$

dengan,

ε_{RA} : galat relatif hampiran

ε : galat

\hat{a} : nilai hampiran terhadap nilai a sejati

Menurut Munir (2010) perhitungan galat relatif hampiran masih mengandung kelemahan karena nilai ε tetap membutuhkan pengetahuan nilai a . Oleh karena itu, perhitungan galat relatif hampiran menggunakan pendekatan lain. Pada perhitungan numerik yang menggunakan pendekatan lelaran (*iteration*), ε_{RA} dihitung dengan cara:

$$\varepsilon_{RA} = \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}}, r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.13)$$

dengan,

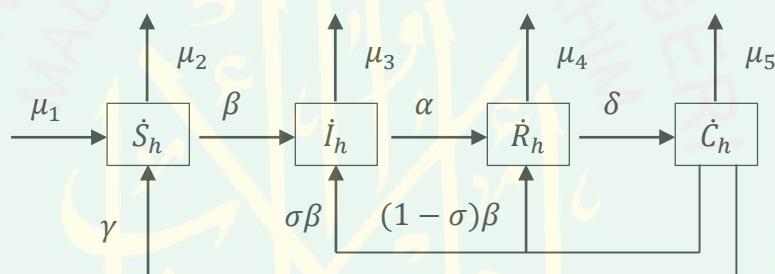
ε_{RA} : galat relatif hampiran

a_{r+1} : nilai hampiran iterasi sekarang

a_r : nilai hampiran iterasi sebelumnya

2.7 Model Epidemi Influenza

Menurut Kusumo (2017) model untuk penyebaran virus influenza menggunakan model SIRC pada populasi manusia.



Gambar 2.1 Diagram Populasi Manusia

Model untuk populasi manusia yang digunakan dalam kasus penyebaran virus influenza ini adalah model *compartmental* (pembagian kelas-kelas) epidemiologi.

Dalam modelnya, populasi total (N) menjadi empat kelas yaitu *Susceptible* (\dot{S}_h), *Infectious* (\dot{I}_h), *Recovered* (\dot{R}_h), dan *Cross-immune* (\dot{C}_h). Empat kelas tersebut merupakan variabel yang bergantung terhadap waktu t yang dipengaruhi oleh beberapa parameter.

Susceptible (\dot{S}_h) merupakan jumlah individu yang mudah terinfeksi dan mudah ditulari penyakit. Populasi ini bertambah karena adanya kelahiran alami (μ_1) dan berkurang karena adanya kematian pada populasi *susceptible* ($\mu_2\dot{S}_h$),

karena adanya interaksi antara populasi *susceptible* dan *infectious* menyebabkan populasi pada *susceptible* berkurang ($\beta \dot{S}_h I_h$), kemudian populasi *susceptible* juga bertambah karena adanya tingkat imunitas yang hilang dari populasi *cross-immune* ($\gamma \dot{C}_h$). Influenza dapat menyebabkan penyakit ringan hingga penyakit berat, dan terkadang dapat menyebabkan kematian. Jadi populasi *susceptible* dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\dot{S}_h = \mu_1 - \mu_2 \dot{S}_h - \beta \dot{S}_h I_h + \gamma \dot{C}_h \quad (2.14)$$

Infectious (I_h) merupakan jumlah individu yang terinfeksi. Populasi ini bertambah karena adanya interaksi antara populasi *susceptible* dan *infectious* ($\beta \dot{S}_h I_h$), bertambah juga karena adanya individu yang terinfeksi kembali akibat adanya interaksi antara populasi *cross-immune* dan *infectious* ($\sigma \beta \dot{C}_h I_h$), kemudian populasi *infectious* berkurang karena adanya kematian ($\mu_3 I_h$) dan individu yang pulih (αI_h) pada populasi *infectious*. Orang yang terinfeksi influenza seringkali merasakan beberapa gejala seperti berikut: demam, batuk, sakit tenggorokan, hidung tersumbat, tubuh terasa sakit, sakit kepala, merasa sangat lelah, sebagian orang mungkin bisa muntah dan diare. Jadi populasi *infectious* dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\dot{I}_h = \beta \dot{S}_h I_h + \sigma \beta \dot{C}_h I_h - (\mu_3 + \alpha) I_h \quad (2.15)$$

Recovered (\dot{R}_h) merupakan jumlah individu yang telah sembuh dari penyakit. Populasi ini bertambah karena adanya individu yang tidak terinfeksi kembali akibat adanya interaksi antara populasi *cross-immune* dan *infectious* $((1 - \sigma) \beta \dot{C}_h I_h)$, bertambah juga karena adanya individu yang pulih dari populasi *infectious* (αI_h), kemudian populasi *recovered* berkurang karena adanya kematian ($\mu_4 \dot{R}_h$) dan

terjadinya degradasi imunitas ($\delta\dot{R}_h$) pada populasi *recovered*. Jadi populasi *recovered* dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\dot{R}_h = (1 - \sigma)\beta\dot{C}_h I_h + \alpha\dot{I}_h - (\mu_4 + \delta)\dot{R}_h \quad (2.16)$$

Cross-immune (\dot{R}_h) merupakan jumlah individu dengan imunitas sementara. Populasi ini bertambah karena terjadinya degradasi imunitas pada populasi *recovered* ($\delta\dot{R}_h$), karena adanya interaksi antara populasi *cross-immune* dan *infectious* menyebabkan populasi pada *cross-immune* berkurang ($\beta\dot{C}_h I_h$), kemudian populasi *cross-immune* berkurang juga karena adanya kematian ($\mu_5\dot{C}_h$) dan tingkat imunitas yang hilang ($\gamma\dot{C}_h$) dari populasi *cross-immune*. Jadi populasi *cross-immune* dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\dot{C}_h = \delta\dot{R}_h - \beta\dot{C}_h I_h - (\mu_5 + \gamma)\dot{C}_h \quad (2.17)$$

Kusumo (2017) berasumsi bahwa virus influenza dapat menyebar dengan beberapa cara, misalnya melalui udara atau lendir. Semua kompartemen dalam model ini menunjukkan bagian dari individu di dalam populasi, yaitu $\dot{S}_h + \dot{I}_h + \dot{R}_h + \dot{C}_h = 1$. Berdasarkan diagram pada gambar 2.1 diperoleh model matematika persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\dot{S}_h = \mu_1 - \mu_2\dot{S}_h - \beta\dot{S}_h I_h + \gamma\dot{C}_h \quad (2.18)$$

$$\dot{I}_h = \beta\dot{S}_h I_h + \sigma\beta\dot{C}_h I_h - (\mu_3 + \alpha)\dot{I}_h$$

$$\dot{R}_h = (1 - \sigma)\beta\dot{C}_h I_h + \alpha\dot{I}_h - (\mu_4 + \delta)\dot{R}_h$$

$$\dot{C}_h = \delta\dot{R}_h - \beta\dot{C}_h I_h - (\mu_5 + \gamma)\dot{C}_h$$

dengan,

μ_1 : laju kelahiran alami

μ_2 : laju kematian pada populasi *susceptible*

- μ_3 : laju kematian pada populasi *infectious*
- μ_4 : laju kematian pada populasi *recovered*
- μ_5 : laju kematian pada populasi *cross-immune*
- β : laju interaksi antara dua individu
- σ : laju infeksi ulang pada individu
- α : laju pemulihan individu
- δ : laju degradasi imunitas dari individu
- γ : laju imunitas yang hilang dari individu

2.8 Kajian Al-Quran tentang Perilaku Hidup Sehat Rasulullah Saw

Berbagai jenis penyakit saat ini semakin banyak. Secara umum ada dua jenis penyakit yaitu penyakit menular dan penyakit tidak menular. Influenza merupakan salah satu jenis penyakit menular yang disebabkan oleh virus influenza. Virus influenza menyebar dan mengakibatkan gangguan kesehatan pada manusia. Salah satu penyebab gangguan kesehatan tersebut adalah pola hidup dan lingkungan yang semakin tidak sehat. Oleh karena itu kita harus selalu menjaga pola hidup dan lingkungan sekitar kita. Sebagaimana Allah Swt menganjurkan kita untuk meniru perilaku hidup sehat Rasulullah Saw. Disebutkan dalam al-Quran surat al-Ahzab ayat 21:

“Sungguh, telah ada pada (diri) Rasulullah itu suri teladan yang baik bagimu (yaitu) bagi orang yang mengharap (rahmat) Allah dan (kedatangan) hari kiamat dan yang banyak mengingat Allah” (QS al-Ahzab/33:21).

Menurut An-Nawawi (2011) dalam surat al-Ahzab tersebut Allah Swt memerintahkan manusia untuk meniru perilaku hidup sehat Rasulullah Saw. Beberapa pola hidup sehat Rasulullah Saw diantaranya:

1. Pola tidur Rasulullah Saw

Prinsip tidur Rasulullah Saw berbeda dengan orang pada umumnya. Rasulullah mempunyai waktu tidur yang sedikit berbeda, Rasulullah Saw tidur lebih awal dan bangun lebih awal. Yang dimaksud tidur lebih awal dan bangun lebih awal adalah Rasulullah tidur di awal malam selepas isya' dan bangun pada pertengahan malam di malam kedua untuk melakukan sholat sunnah tahajud.

2. Pola makan Rasulullah Saw

Prinsip Rasulullah Saw dalam menjaga kesehatan makanannya yaitu makanan yang dimakan harus *halalan thayyiban*, yang dimaksud dari kata tersebut adalah makanan yang dimakan harus halal dan baik. Makanan yang sehat itu harus halal, baik dari bahan dasar maupun cara mengolah makanan itu sendiri yang harus sesuai dengan syariat islam. Adapun makanan yang *thayyib* yaitu makanan yang memiliki kandungan gizi yang mengandung berbagai macam zat yang diperlukan oleh tubuh. Selanjutnya prinsip Rasulullah dalam menjaga porsi makanan adalah makan sebelum lapar dan berhenti sebelum kenyang.

3. Pola hidup bersih Rasulullah Saw

Dalam sebuah hadist, Rasulullah Saw bersabda:

“Sesungguhnya, Islam itu bersih, hendaklah kamu mewujudkan kebersihan karena sesungguhnya tidak akan masuk surga, kecuali orang yang bersih” (HR. Khatib).

Rasulullah Saw senantiasa nampak bersih dan rapi meskipun pakaian beliau hanya tidak lebih dari dua salinan saja. Rasulullah selalu menjaga kebersihan pakaian yang dikenakannya, rajin mencukur bulu halus pada bagian tubuh, menggosokkan siwak pada bagian mulutnya, menyisir

rambutnya dengan rapi, serta memakai minyak yang wangi dan mengoleskan ketubuhnya.

4. Pola menjaga sikap Rasulullah Saw

Rasulullah Saw mengajarkan manusia untuk menjaga sikap, salah satunya yaitu tidak iri hati. Apabila muncul rasa iri hati kemudian hilangnya ikhlas dan sabar maka akan timbul kecemasan yang akan membuat kita mudah terkena stress dan apabila seseorang stress kondisi tubuhnya akan melemah dan mudah terserang penyakit. Suatu riwayat menceritakan bahwa seorang utusan bani nadhir datang menemui Rasulullah dan orang tersebut meminta nasehat pendek jika ia ingin masuk surga dan terlepas dari siksa neraka. Rasulullah menyampaikan dengan satu kalimat pendek saja “*jangan marah*”. Berdasarkan hadist Rasulullah:

“*Jika salah seorang dari kalian marah saat berdiri, hendaknya ia duduk, kalau belum pergi amarahnya, hendaknya ia berbaring*” (HR Ahmad).

5. Pola menjaga kebugaran Rasulullah Saw

Rasulullah Saw sering juga berolahraga untuk menjaga agar kondisi tubuhnya tetap bugar, Rasulullah sangat senang memanah, berkuda, dan berenang. Sesuai dengan hadist Rasulullah:

“*Ajarilah anakmu berenang dan memanah*” (HR. Dailami).

Rasulullah juga senang berjalan kaki di dalam kesehariannya, yang membuat jantung menjadi sehat dan kondisi tubuh menjadi lebih bugar.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Penurunan Metode Runge Kutta Orde 4

Subbab ini akan membahas penurunan metode Runge Kutta orde 4. Tujuan dari penurunan ini adalah untuk mengetahui asal mula koefisien yang ada di metode Runge Kutta orde 4 dan membuktikan kebenaran rumus metode Runge Kutta orde 4. Pada penurunan ini menggunakan deret Taylor dan aturan rantai untuk menyelesaiakannya.

Diberikan rumus umum metode Runge Kutta orde 4:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + a_4 k_4)h \quad (3.1)$$

dengan,

$$k_1 = f(t_i, y_i) \quad (3.2)$$

$$k_2 = f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \quad (3.3)$$

$$k_3 = f(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \quad (3.4)$$

$$k_4 = f(t_i + p_3 h, y_i + q_{31} k_1 h + q_{32} k_2 h + q_{33} k_3 h) \quad (3.5)$$

Karena akan dilakukan penurunan metode Runge Kutta orde 4 maka deret Taylor dipotong sampai orde keempat

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i, y_i)h + f'(t_i, y_i) \frac{h^2}{2!} + f''(t_i, y_i) \frac{h^3}{3!} + f'''(t_i, y_i) \frac{h^4}{4!} \quad (3.6)$$

Setelah itu mencari turunan pertama, kedua, dan ketiga dari deret Taylor $f(t, y) = \frac{dy}{dt}$ di atas dengan y merupakan fungsi implisit dari t , diperoleh:

$$f' = f_t + f_y f$$

$$f'' = \frac{\partial}{\partial t}(f') + \frac{\partial}{\partial y}(f')f$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial t} (f_t + f_y f) + \frac{\partial}{\partial y} (f_t + f_y f) f \\
&= f_{tt} + \frac{\partial}{\partial t} (f_y f) + f_{ty} f + \frac{\partial}{\partial y} (f_y f) f \\
&= f_{tt} + f_y f_t + f_{ty} f + f_{yt} f + f_y^2 f + f_{yy} f^2 \\
&= f_{tt} + f_y f_t + 2f_{ty} f + f_y^2 f + f_{yy} f^2 \\
f''' &= \frac{\partial}{\partial t} (f'') + \frac{\partial}{\partial y} (f'') f \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (f_{tt} + f_t f_y + 2f f_{ty} + f_y^2 f + f_{yy} f^2) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} (f_{tt} + f_t f_y + 2f f_{ty} + f_y^2 f + f_{yy} f^2) f \\
&= f_{ttt} + f_{ty} f_t + f_y f_{tt} + 2f_{tty} f + 2f_{ty} f_t + 2f_{ty} f_y f + f_y^2 f_t + f_{tyy} f^2 \\
&\quad + 2f_{yy} f_t f \\
&\quad + (f_{ytt} + f_{yy} f_t + f_y f_{yt} + 2f_{yyt} f + 2f_{ty} f_y + 2f_{yy} f_y f + f_y^3 \\
&\quad + f_{yyy} f^2 + 2f_{yy} f_y f) f \\
&= f_{ttt} + f_{ty} f_t + f_y f_{tt} + 2f_{tty} f + 2f_{ty} f_t + 2f_{ty} f_y f + f_y^2 f_t + f_{tyy} f^2 \\
&\quad + 2f_{yy} f_t f + f_{ytt} f + f_{yy} f_t f + f_y f_{yt} f + 2f_{yyt} f^2 + 2f_{ty} f_y f \\
&\quad + 2f_{yy} f_y f^2 + f_y^3 f + f_{yyy} f^3 + 2f_{yy} f_y f^2 \\
&= f_{ttt} + 3f_{ty} f_t + f_y f_{tt} + 3f_{tty} f + 5f_{ty} f_y f + f_y^2 f_t + 3f_{tyy} f^2 + 3f_{yy} f_t f \\
&\quad + 4f_{yy} f_y f^2 + f_y^3 f + f_{yyy} f^3
\end{aligned}$$

Kemudian substitusi hasil turunan pertama, kedua, dan ketiga di atas ke persamaan (3.6), maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + fh + (f_t + f_y f) \frac{h^2}{2} + (f_{tt} + f_y f_t + 2f_{ty} f + f_y^2 f + f_{yy} f^2) \frac{h^3}{6} \\
&\quad + (f_{ttt} + 3f_{ty} f_t + f_y f_{tt} + 3f_{tty} f + 5f_{ty} f_y f + f_y^2 f_t + 3f_{tyy} f^2 \\
&\quad + 3f_{yy} f_t f + 4f_{yy} f_y f^2 + f_y^3 f + f_{yyy} f^3) \frac{h^4}{24} \\
&= y_i + fh + \frac{h^2}{2} f_t + \frac{h^2}{2} f f_y + \frac{h^3}{6} f_{tt} + \frac{h^3}{6} f_t f_y + \frac{h^3}{3} f f_{ty} + \frac{h^3}{6} f_y^2 f \quad (3.7) \\
&\quad + \frac{h^3}{6} f_{yy} f^2 + \frac{h^4}{24} f_{ttt} + \frac{h^4}{8} f_{ty} f_t + \frac{h^4}{24} f_y f_{tt} \\
&\quad + \frac{h^4}{8} f_{tty} f + 5 \frac{h^4}{24} f_{ty} f_y f + \frac{h^4}{24} f_y^2 f_t + \frac{h^4}{8} f_{tyy} f^2 \\
&\quad + \frac{h^4}{8} f_{yy} f_t f + \frac{h^4}{6} f_{yy} f_y f^2 + \frac{h^4}{24} f_y^3 f + \frac{h^4}{24} f_{yyy} f^3
\end{aligned}$$

Selanjutnya mengubah k_2, k_3 , serta k_4 yang terdapat pada persamaan (3.3), (3.4), serta (3.5) ke deret Taylor dua variabel untuk orde empat.

Untuk $k_2 = f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
k_2 &= f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\
&= f + p_1 h f_t + q_{11} h f f_y + \frac{1}{2} p_1^2 h^2 f_{tt} + p_1 q_{11} h^2 f f_{ty} + \frac{1}{2} q_{11}^2 h^2 f^2 f_{yy} \\
&\quad + \frac{1}{6} p_1^3 h^3 f_{ttt} + \frac{1}{2} q_{11} p_1^2 h^3 f f_{tt} f_y + \frac{1}{2} f_t f_{yy} p_1 q_{11}^2 h^3 f^2 \\
&\quad + \frac{1}{6} q_{11}^3 h^3 f^3 f_{yyy}
\end{aligned}$$

Untuk $k_3 = f(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
k_3 &= f(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\
&= f(t_i + p_2 h, y_i + (q_{21} k_1 + q_{22} k_2) h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f + p_2 h f_t + (q_{21} k_1 + q_{22} k_2) h f_y + \frac{1}{2} p_2^2 h^2 f_{tt} + p_2 (q_{21} k_1 + q_{22} k_2) h^2 f_{ty} \\
&\quad + \frac{1}{2} (q_{21} k_1 + q_{22} k_2)^2 h^2 f_{yy} + \frac{1}{6} p_2^3 h^3 f_{ttt} \\
&\quad + \frac{1}{2} p_2^2 (q_{21} k_1 + q_{22} k_2) h^3 f_{tt} f_y + \frac{1}{2} f_t f_{yy} p_2 (q_{21} k_1 + q_{22} k_2)^2 h^3 \\
&\quad + \frac{1}{6} (q_{21} k_1 + q_{22} k_2)^3 h^3 f_{yyy} \\
&= f + p_2 h f_t + q_{21} h f f_y + q_{22} h f f_y + p_1 q_{22} h^2 f_y f_t + q_{11} q_{22} h^2 f f_y^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} p_2^2 h^2 f_{tt} + \frac{1}{6} p_2^3 h^3 f_{ttt} + \frac{1}{2} p_1^2 q_{22} h^3 f_y f_{tt} + p_1 p_2 q_{22} h^3 f_{ty} f_t \\
&\quad + \frac{1}{2} q_{21}^2 h^2 f^2 f_{yy} + \frac{1}{2} p_2^2 q_{21} h^3 f f_{tt} f_y + \frac{1}{2} p_2 q_{21}^2 h^3 f^2 f_t f_{yy} \\
&\quad + \frac{1}{2} q_{11}^2 q_{22} h^3 f^2 f_y f_{yy} + q_{11} q_{22}^2 h^3 f^2 f_{yy} f_y + p_1 q_{22}^2 h^3 f f_{yy} f_t \\
&\quad + \frac{1}{2} p_2^2 q_{22} h^3 f f_{tt} f_y + p_2 q_{21} q_{22} h^3 f^2 f_t f_{yy} + p_1 q_{11} q_{22} h^3 f f_{ty} f_y \\
&\quad + p_2 q_{11} q_{22} h^3 f f_{ty} f_y + q_{11} q_{21} q_{22} h^3 f^2 f_{yy} f_y + p_1 q_{21} q_{22} h^3 f f_{yy} f_t \\
&\quad + \frac{1}{2} p_2 q_{22}^2 h^3 f^2 f_t f_{yy} + \frac{1}{2} q_{21} q_{22}^2 h^3 f^3 f_{yy} + p_2 q_{22} h^2 f f_{ty} \\
&\quad + q_{21} q_{22} h^2 f^2 f_{yy} + \frac{1}{2} q_{21}^2 q_{22} h^3 f^3 f_{yyy} + \frac{1}{6} q_{22}^3 h^3 f^3 f_{yyy} \\
&\quad + \frac{1}{2} q_{22}^2 h^2 f^2 f_{yy} + \frac{1}{6} q_{21}^3 h^3 f^3 f_{yyy} + p_2 q_{21} h^2 f f_{ty} + \dots
\end{aligned}$$

Untuk $k_4 = f(t_i + p_3 h, y_i + q_{31} k_1 h + q_{32} k_2 h + q_{33} k_3 h)$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
k_4 &= f(t_i + p_3 h, y_i + q_{31} k_1 h + q_{32} k_2 h + q_{33} k_3 h) \\
&= f(t_i + p_3 h, y_i + (q_{31} k_1 + q_{32} k_2 + q_{33} k_3) h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f + p_3 h f_t + (q_{31} k_1 + q_{32} k_2 + q_{33} k_3) h f_y + \frac{1}{2} p_3^2 h^2 f_{tt} \\
&\quad + p_3 (q_{31} k_1 + q_{32} k_2 + q_{33} k_3) h^2 f_{ty} \\
&\quad + \frac{1}{2} (q_{31} k_1 + q_{32} k_2 + q_{33} k_3)^2 h^2 f_{yy} + \frac{1}{6} p_3^3 h^3 f_{ttt} \\
&\quad + \frac{1}{2} p_3^2 (q_{31} k_1 + q_{32} k_2 + q_{33} k_3) h^3 f_{tt} f_y \\
&\quad + \frac{1}{2} f_t f_{yy} p_3 (q_{31} k_1 + q_{32} k_2 + q_{33} k_3)^2 h^3 \\
&\quad + \frac{1}{6} (q_{31} k_1 + q_{32} k_2 + q_{33} k_3)^3 h^3 f_{yyy} \\
&= f + p_3 h f_t + q_{31} h f f_y + q_{32} h f_y f + p_1 q_{32} h^2 f_y f_t + q_{11} q_{32} h^2 f_y^2 f \\
&\quad + q_{33} h f_y f + p_2 q_{33} h^2 f_y f_t + q_{21} q_{33} h^2 f f_y^2 + q_{22} q_{33} h^2 f f_y^2 \\
&\quad + p_1 q_{22} q_{33} h^3 f_t f_y^2 + q_{11} q_{22} q_{33} h^3 f f_y^3 + p_1 p_3 q_{32} h^3 f_{ty} f_t \\
&\quad + p_2 p_3 q_{33} h^3 f_{ty} f_t + \frac{1}{2} p_2^2 q_{33} h^3 f_y f_{tt} + \frac{1}{2} p_1^2 q_{32} h^3 f_y f_{tt} \\
&\quad + \frac{1}{2} p_3^2 h^2 f_{tt} + \frac{1}{6} p_3^3 h^3 f_{ttt} + \frac{1}{2} q_{31}^2 h^2 f^2 f_{yy} \\
&\quad + \frac{1}{2} q_{11}^2 q_{32} h^3 f^2 f_y f_{yy} + q_{21} q_{33} h^2 f_y^2 f + q_{22} q_{33} h^2 f_y^2 f \\
&\quad + p_3 q_{32} h^2 f_{ty} f + p_3 q_{33} h^2 f_{ty} f + p_3 q_{31} h^2 f f_{ty} \\
&\quad + p_2 q_{22} q_{33} h^3 f_y f_{ty} f + q_{31} q_{33} h^2 f^2 f_{yy} + p_1 q_{22} q_{33} h^3 f_y^2 f_t \\
&\quad + q_{11} q_{22} q_{33} h^3 f_y^3 f + \frac{1}{2} p_3 q_{31}^2 h^3 f^2 f_t f_{yy} + q_{32} h^2 f_{yy} f \\
&\quad + p_1 q_{32} h^3 f_{yy} f_t + \dots
\end{aligned}$$

Kemudian substitusi hasil dari k_1, k_2, k_3 , dan k_4 di atas ke persamaan (3.1), maka diperoleh:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + a_4 k_4) h$$

$$\begin{aligned}
&= y_i + \left[a_1 h f + \left[a_2 h \left(f + p_1 h f_t + q_{11} h f f_y + \frac{1}{2} p_1^2 h^2 f_{tt} + p_1 q_{11} h^2 f f_{ty} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2} q_{11}^2 h^2 f^2 f_{yy} + \frac{1}{6} p_1^3 h^3 f_{ttt} + \frac{1}{2} q_{11} p_1^2 h^3 f f_{tt} f_y \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2} f_t f_{yy} p_1 q_{11}^2 h^3 f^2 + \frac{1}{6} q_{11}^3 h^3 f^3 f_{yyy} \right) \right] \\
&\quad + \left[a_3 h \left(f + p_2 h f_t + q_{21} h f f_y + q_{22} h f f_y + p_1 q_{22} h^2 f_y f_t \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + q_{11} q_{22} h^2 f f_y^2 + \frac{1}{2} p_2^2 h^2 f_{tt} + \frac{1}{6} p_2^3 h^3 f_{ttt} + \frac{1}{2} p_1^2 q_{22} h^3 f_y f_{tt} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + p_1 p_2 q_{22} h^3 f_{ty} f_t + \frac{1}{2} q_{21}^2 h^2 f^2 f_{yy} + \frac{1}{2} p_2^2 q_{21} h^3 f f_{tt} f_y \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} p_2 q_{21}^2 h^3 f^2 f_t f_{yy} + \frac{1}{2} q_{11}^2 q_{22} h^3 f^2 f_y f_{yy} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + q_{11} q_{22}^2 h^3 f^2 f_{yy} f_y + p_1 q_{22}^2 h^3 f f_{yy} f_t + \frac{1}{2} p_2^2 q_{22} h^3 f f_{tt} f_y \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + p_2 q_{21} q_{22} h^3 f^2 f_t f_{yy} + p_1 q_{11} q_{22} h^3 f f_y f_{ty} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + p_2 q_{11} q_{22} h^3 f f_{ty} f_y + q_{11} q_{21} q_{22} h^3 f^2 f_{yy} f_y \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + p_1 q_{21} q_{22} h^3 f f_{yy} f_t + \frac{1}{2} p_2 q_{22}^2 h^3 f^2 f_t f_{yy} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} q_{21} q_{22}^2 h^3 f^3 f_{yy} + p_2 q_{22} h^2 f f_{ty} + q_{21} q_{22} h^2 f^2 f_{yy} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} q_{21} q_{22} h^3 f^3 f_{yyy} + \frac{1}{6} q_{22}^3 h^3 f^3 f_{yyy} + \frac{1}{2} q_{22}^2 h^2 f^2 f_{yy} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{6} q_{21}^3 h^3 f^3 f_{yyy} + p_2 q_{21} h^2 f f_{ty} + \dots \right) \right] \\
&\quad + \left[a_4 h \left(f + p_3 h f_t + q_{31} h f f_y + q_{32} h f_y f + p_1 q_{32} h^2 f_y f_t \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + q_{11} q_{32} h^2 f_y^2 f + q_{33} h f_y f + p_2 q_{33} h^2 f_y f_t + q_{21} q_{33} h^2 f f_y^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + q_{22} q_{33} h^2 f f_y^2 + p_1 q_{22} q_{33} h^3 f_t f_y^2 + q_{11} q_{22} q_{33} h^3 f f_y^3 \right. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p_1 p_3 q_{32} h^3 f_{ty} f_t + p_2 p_3 q_{33} h^3 f_{ty} f_t + \frac{1}{2} p_2^2 q_{33} h^3 f_y f_{tt} \\
& + \frac{1}{2} p_1^2 q_{32} h^3 f_y f_{tt} + \frac{1}{2} p_3^2 h^2 f_{tt} + \frac{1}{6} p_3^3 h^3 f_{ttt} + \frac{1}{2} q_{31}^2 h^2 f^2 f_{yy} \\
& + \frac{1}{2} q_{11}^2 q_{32} h^3 f^2 f_y f_{yy} + q_{21} q_{33} h^2 f_y^2 f + q_{22} q_{33} h^2 f_y^2 f \\
& + p_3 q_{32} h^2 f_{ty} f + p_3 q_{33} h^2 f_{ty} f + p_3 q_{31} h^2 f f_{ty} \\
& + p_2 q_{22} q_{33} h^3 f_y f_{ty} f + q_{31} q_{33} h^2 f^2 f_{yy} + p_1 q_{22} q_{33} h^3 f_y^2 f_t \\
& + q_{11} q_{22} q_{33} h^3 f_y^3 f + \frac{1}{2} p_3 q_{31}^2 h^3 f^2 f_t f_{yy} + q_{32} h^2 f_{yy} f \\
& + p_1 q_{32} h^3 f_{yy} f_t + \dots)]]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y_i + a_1 h f + a_2 h f + a_2 p_1 h^2 f_t + a_2 q_{11} h^2 f f_y + \frac{1}{2} a_2 p_1^2 h^3 f_{tt} \\
&\quad + a_2 p_1 q_{11} h^3 f f_{ty} + \frac{1}{2} a_2 q_{11}^2 h^3 f^2 f_{yy} + \frac{1}{6} a_2 p_1^3 h^4 f_{ttt} \\
&\quad + \frac{1}{2} a_2 q_{11} p_1^2 h^4 f f_{tt} f_y + \frac{1}{2} a_2 f_t f_{yy} p_1 q_{11}^2 h^4 f^2 \\
&\quad + \frac{1}{6} a_2 q_{11}^3 h^4 f^3 f_{yyy} + a_3 h f + a_3 p_2 h^2 f_t + a_3 q_{21} h^2 f f_y \\
&\quad + a_3 q_{22} h^2 f f_y + a_3 p_1 q_{22} h^3 f_y f_t + a_3 q_{11} q_{22} h^3 f f_y^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} a_3 p_2^2 h^3 f_{tt} + \frac{1}{6} a_3 p_2^3 h^4 f_{ttt} + \frac{1}{2} a_3 p_1^2 q_{22} h^4 f_y f_{tt} \\
&\quad + a_3 p_1 p_2 q_{22} h^4 f_{ty} f_t + \frac{1}{2} a_3 q_{21}^2 h^3 f^2 f_{yy} \\
&\quad + \frac{1}{2} a_3 p_2^2 q_{21} h^4 f f_{tt} f_y + \frac{1}{2} a_3 p_2 q_{21}^2 h^4 f^2 f_t f_{yy} \\
&\quad + \frac{1}{2} a_3 q_{11}^2 q_{22} h^4 f^2 f_y f_{yy} + a_3 q_{11} q_{22}^2 h^4 f^2 f_{yy} f_y \\
&\quad + a_3 p_1 q_{22}^2 h^4 f f_{yy} f_t + \frac{1}{2} a_3 p_2^2 q_{22} h^4 f f_{tt} f_y \\
&\quad + a_3 p_2 q_{21} q_{22} h^4 f^2 f_t f_{yy} + a_3 p_1 q_{11} q_{22} h^4 f f_y f_{ty} \\
&\quad + a_3 p_2 q_{11} q_{22} h^4 f f_{ty} f_y + a_3 q_{11} q_{21} q_{22} h^4 f^2 f_{yy} f_y \\
&\quad + a_3 p_1 q_{21} q_{22} h^4 f f_{yy} f_t + \frac{1}{2} a_3 p_2 q_{22}^2 h^4 f^2 f_t f_{yy} \\
&\quad + \frac{1}{2} a_3 q_{21} q_{22}^2 h^4 f^3 f_{yyy} + a_3 p_2 q_{22} h^3 f f_{ty} \\
&\quad + a_3 q_{21} q_{22} h^3 f^2 f_{yy} + \frac{1}{2} a_3 q_{21}^2 q_{22} h^4 f^3 f_{yyy} \\
&\quad + \frac{1}{6} a_3 q_{22}^3 h^4 f^3 f_{yyy} + \frac{1}{2} a_3 q_{22}^2 h^3 f^2 f_{yy} + \frac{1}{6} a_3 q_{21}^3 h^4 f^3 f_{yyy} \\
&\quad + a_3 p_2 q_{21} h^3 f f_{ty} + a_4 h f + a_4 p_3 h^2 f_t + a_4 q_{31} h^2 f f_y \\
&\quad + a_4 q_{32} h^2 f_y f + a_4 p_1 q_{32} h^3 f_y f_t + a_4 q_{11} q_{32} h^3 f_y^2 f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_4 q_{33} h^2 f_y f + a_4 p_2 q_{33} h^3 f_y f_t + a_4 q_{21} q_{33} h^3 f f_y^2 \\
& + a_4 q_{22} q_{33} h^3 f f_y^2 + a_4 p_1 q_{22} q_{33} h^4 f_t f_y^2 \\
& + a_4 q_{11} q_{22} q_{33} h^4 f f_y^3 + a_4 p_1 p_3 q_{32} h^4 f_{ty} f_t \\
& + a_4 p_2 p_3 q_{33} h^4 f_{ty} f_t + \frac{1}{2} a_4 p_2^2 q_{33} h^4 f_y f_{tt} \\
& + \frac{1}{2} a_4 p_1^2 q_{32} h^4 f_y f_{tt} + \frac{1}{2} a_4 p_3^2 h^3 f_{tt} + \frac{1}{6} a_4 p_3^3 h^4 f_{ttt} \\
& + \frac{1}{2} a_4 q_{31}^2 h^3 f^2 f_{yy} + \frac{1}{2} a_4 q_{11}^2 q_{32} h^4 f^2 f_y f_{yy} \\
& + a_4 q_{21} q_{33} h^3 f_y^2 f + a_4 q_{22} q_{33} h^3 f_y^2 f + a_4 p_3 q_{32} h^3 f_{ty} f \\
& + a_4 p_3 q_{33} h^3 f_{ty} f + a_4 p_3 q_{31} h^3 f f_{ty} + a_4 p_2 q_{22} q_{33} h^4 f_y f_{ty} f \\
& + a_4 q_{31} q_{33} h^3 f^2 f_{yy} + a_4 p_1 q_{22} q_{33} h^4 f_y^2 f_t \\
& + a_4 q_{11} q_{22} q_{33} h^4 f_y^3 f + \frac{1}{2} a_4 p_3 q_{31}^2 h^4 f^2 f_t f_{yy} + a_4 q_{32} h^3 f_{yy} f \\
& + a_4 p_1 q_{32} h^4 f_{yy} f_t + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y_i + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)hf + (a_2p_1 + a_3p_2 + a_4p_3)h^2f_t \quad (3.8) \\
&\quad + (a_2q_{11} + a_3q_{21} + a_3q_{22} + a_4q_{31} + a_4q_{32} \\
&\quad + a_4q_{33})h^2ff_y + (a_2p_1^2 + a_3p_2^2 + a_4p_3^2)\frac{1}{2}h^3f_{tt} \\
&\quad + (a_2p_1^3 + a_3p_2^3 + a_4p_3^3)\frac{1}{6}h^4f_{ttt} \\
&\quad + (a_3p_1q_{22} + a_4p_1q_{32} + a_4p_2q_{33})h^3f_yf_t \\
&\quad + (a_3q_{11}q_{22} + a_4q_{11}q_{32} + a_4q_{21}q_{33} \\
&\quad + a_4q_{22}q_{33})h^3ff_y^2 \\
&\quad + (a_3p_1p_2q_{22} + a_4p_1p_3q_{32} + a_4p_2p_3q_{33})h^4f_{ty}f_t \\
&\quad + (a_3p_1^2q_{22} + a_4p_1^2q_{32} + a_4p_2^2q_{33})\frac{1}{2}h^4f_yf_{tt} \\
&\quad + a_4p_1q_{22}q_{33}h^4f_tf_y^2 + a_4q_{11}q_{22}q_{33}h^4ff_y^3 + \dots
\end{aligned}$$

Selanjutnya menyamadengangkan persamaan (3.7) dan (3.8)

$$\begin{aligned}
fh &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)hf \\
\frac{h^2}{2}f_t &= (a_2p_1 + a_3p_2 + a_4p_3)h^2f_t \\
\frac{1}{2}h^2ff_y &= (a_2q_{11} + a_3q_{21} + a_3q_{22} + a_4q_{31} + a_4q_{32} + a_4q_{33})h^2ff_y \\
\frac{1}{6}h^3f_{tt} &= (a_2p_1^2 + a_3p_2^2 + a_4p_3^2)\frac{1}{2}h^3f_{tt} \\
\frac{1}{24}h^4f_{ttt} &= (a_2p_1^3 + a_3p_2^3 + a_4p_3^3)\frac{1}{6}h^4f_{ttt} \\
\frac{1}{6}h^3f_tf_y &= (a_3p_1q_{22} + a_4p_1q_{32} + a_4p_2q_{33})h^3f_yf_t \\
\frac{1}{6}h^3f_y^2f &= (a_3q_{11}q_{22} + a_4q_{11}q_{32} + a_4q_{21}q_{33} + a_4q_{22}q_{33})h^3ff_y^2 \\
\frac{1}{8}h^4f_{ty}f_t &= (a_3p_1p_2q_{22} + a_4p_1p_3q_{32} + a_4p_2p_3q_{33})h^4f_{ty}f_t
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{24} h^4 f_y f_{tt} = (a_3 p_1^2 q_{22} + a_4 p_1^2 q_{32} + a_4 p_2^2 q_{33}) \frac{1}{2} h^4 f_y f_{tt}$$

$$\frac{1}{24} h^4 f_y^2 f_t = a_4 p_1 q_{22} q_{33} h^4 f_t f_y^2$$

$$\frac{1}{24} h^4 f_y^3 f = a_4 q_{11} q_{22} q_{33} h^4 f f_y^3$$

Dari persamaan di atas diperoleh sistem persamaan baru sebagai berikut:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$$

$$a_2 p_1 + a_3 p_2 + a_4 p_3 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 q_{11} + a_3 (q_{21} + q_{22}) + a_4 (q_{31} + q_{32} + q_{33}) = \frac{1}{2}$$

$$a_2 p_1^2 + a_3 p_2^2 + a_4 p_3^2 = \frac{1}{3}$$

$$a_2 p_1^3 + a_3 p_2^3 + a_4 p_3^3 = \frac{1}{4}$$

$$a_3 p_1 q_{22} + a_4 p_1 q_{32} + a_4 p_2 q_{33} = \frac{1}{6}$$

$$a_3 q_{11} q_{22} + a_4 q_{11} q_{32} + a_4 q_{21} q_{33} + a_4 q_{22} q_{33} = \frac{1}{6}$$

$$a_3 p_1 p_2 q_{22} + a_4 p_1 p_3 q_{32} + a_4 p_2 p_3 q_{33} = \frac{1}{8}$$

$$a_3 p_1^2 q_{22} + a_4 p_1^2 q_{32} + a_4 p_2^2 q_{33} = \frac{1}{12}$$

$$a_4 p_1 q_{22} q_{33} = \frac{1}{24}$$

$$a_4 q_{11} q_{22} q_{33} = \frac{1}{24}$$

Dari sistem persamaan di atas dapat diketahui bahwa:

$$p_1 = q_{11}$$

$$p_2 = q_{21} + q_{22}$$

$$p_3 = q_{31} + q_{32} + q_{33}$$

Kemudian akan dicari nilai dari a_1, a_2, a_3 , dan a_4 dari sistem persamaan di atas.

$$1. \quad a_4 q_{11} q_{22} q_{33} = \frac{1}{24}$$

$$a_4 = \frac{\frac{1}{24}}{q_{11} q_{22} q_{33}}$$

$$a_4 = \frac{1}{24 q_{11} q_{22} q_{33}}$$

$$2. \quad a_3 q_{11} q_{22} + a_4 q_{11} q_{32} + a_4 q_{21} q_{33} + a_4 q_{22} q_{33} = \frac{1}{6}$$

$$a_3 q_{11} q_{22} + \frac{1}{24 q_{11} q_{22} q_{33}} q_{11} q_{32} + \frac{1}{24 q_{11} q_{22} q_{33}} q_{21} q_{33}$$

$$+ \frac{1}{24 q_{11} q_{22} q_{33}} q_{22} q_{33} = \frac{1}{6}$$

$$a_3 q_{11} q_{22} + \frac{q_{11} q_{32}}{24 q_{11} q_{22} q_{33}} + \frac{q_{21} q_{33}}{24 q_{11} q_{22} q_{33}} + \frac{q_{22} q_{33}}{24 q_{11} q_{22} q_{33}} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{24 a_3 q_{11}^2 q_{22}^2 q_{33} + q_{11} q_{32} + q_{21} q_{33} + q_{22} q_{33}}{24 q_{11} q_{22} q_{33}} = \frac{1}{6}$$

$$144 a_3 q_{11}^2 q_{22}^2 q_{33} + 6 q_{11} q_{32} + 6 q_{21} q_{33} + 6 q_{22} q_{33} = 24 q_{11} q_{22} q_{33}$$

$$144 a_3 q_{11}^2 q_{22}^2 q_{33} = 24 q_{11} q_{22} q_{33} - 6 q_{11} q_{32} - 6 q_{21} q_{33} - 6 q_{22} q_{33}$$

$$a_3 = \frac{24 q_{11} q_{22} q_{33} - 6 q_{11} q_{32} - 6 q_{21} q_{33} - 6 q_{22} q_{33}}{144 q_{11}^2 q_{22}^2 q_{33}}$$

$$3. \quad a_2 q_{11} + a_3 q_{21} + a_3 q_{22} + a_4 q_{31} + a_4 q_{32} + a_4 q_{33} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 q_{11} + \frac{24 q_{11} q_{22} q_{33} - 6 q_{11} q_{32} - 6 q_{21} q_{33} - 6 q_{22} q_{33}}{144 q_{11}^2 q_{22}^2 q_{33}} q_{21}$$

$$+ \frac{24 q_{11} q_{22} q_{33} - 6 q_{11} q_{32} - 6 q_{21} q_{33} - 6 q_{22} q_{33}}{144 q_{11}^2 q_{22}^2 q_{33}} q_{22}$$

$$+ \frac{1}{24 q_{11} q_{22} q_{33}} q_{31} + \frac{1}{24 q_{11} q_{22} q_{33}} q_{32} + \frac{1}{24 q_{11} q_{22} q_{33}} q_{33} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
& a_2 q_{11} + \frac{q_{21}(24q_{11}q_{22}q_{33} - 6q_{11}q_{32} - 6q_{21}q_{33} - 6q_{22}q_{33})}{144q_{11}^2q_{22}^2q_{33}} \\
& + \frac{q_{22}(24q_{11}q_{22}q_{33} - 6q_{11}q_{32} - 6q_{21}q_{33} - 6q_{22}q_{33})}{144q_{11}^2q_{22}^2q_{33}} \\
& + \frac{q_{31}}{24q_{11}q_{22}q_{33}} + \frac{q_{32}}{24q_{11}q_{22}q_{33}} + \frac{q_{33}}{24q_{11}q_{22}q_{33}} = \frac{1}{2} \\
& a_2 q_{11} + \frac{24q_{11}q_{21}q_{22}q_{33} - 6q_{11}q_{21}q_{32} - 6q_{21}^2q_{33} - 6q_{21}q_{22}q_{33}}{144q_{11}^2q_{22}^2q_{33}} \\
& + \frac{24q_{11}q_{22}^2q_{33} - 6q_{11}q_{22}q_{32} - 6q_{21}q_{22}q_{33} - 6q_{22}^2q_{33}}{144q_{11}^2q_{22}^2q_{33}} \\
& + \frac{q_{31}}{24q_{11}q_{22}q_{33}} + \frac{q_{32}}{24q_{11}q_{22}q_{33}} + \frac{q_{33}}{24q_{11}q_{22}q_{33}} = \frac{1}{2} \\
& \frac{144a_2q_{11}^3q_{22}^2q_{33} + 24q_{11}q_{21}q_{22}q_{33} - 6q_{11}q_{21}q_{32} - 6q_{21}^2q_{33}}{144q_{11}^2q_{22}^2q_{33}} \\
& - \frac{6q_{21}q_{22}q_{33} + 24q_{11}q_{22}^2q_{33} - 6q_{11}q_{22}q_{32} - 6q_{21}q_{22}q_{33}}{144q_{11}^2q_{22}^2q_{33}} \\
& - \frac{-6q_{22}^2q_{33} + 6q_{11}q_{22}q_{31} + 6q_{11}q_{22}q_{32} + 6q_{11}q_{22}q_{33}}{144q_{11}^2q_{22}^2q_{33}} = \frac{1}{2} \\
& 288a_2q_{11}^3q_{22}^2q_{33} + 48q_{11}q_{21}q_{22}q_{33} - 12q_{11}q_{21}q_{32} - 12q_{21}^2q_{33} \\
& - 12q_{21}q_{22}q_{33} + 48q_{11}q_{22}^2q_{33} - 12q_{11}q_{22}q_{32} \\
& - 12q_{21}q_{22}q_{33} - 12q_{22}^2q_{33} + 12q_{11}q_{22}q_{31} + 12q_{11}q_{22}q_{32} \\
& + 12q_{11}q_{22}q_{33} = 144q_{11}^2q_{22}^2q_{33} \\
& 288a_2q_{11}^3q_{22}^2q_{33} \\
& = 144q_{11}^2q_{22}^2q_{33} - 48q_{11}q_{21}q_{22}q_{33} + 12q_{11}q_{21}q_{32} \\
& + 12q_{21}^2q_{33} + 12q_{21}q_{22}q_{33} - 48q_{11}q_{22}^2q_{33} + 12q_{11}q_{22}q_{32} \\
& + 12q_{21}q_{22}q_{33} + 12q_{22}^2q_{33} - 12q_{11}q_{22}q_{31} - 12q_{11}q_{22}q_{32} \\
& - 12q_{11}q_{22}q_{33}
\end{aligned}$$

$$a_2 = \frac{144q_{11}^2q_{22}^2q_{33} - 48q_{11}q_{21}q_{22}q_{33} + 12q_{11}q_{21}q_{32} + 12q_{21}^2q_{33}}{288q_{11}^3q_{22}^2q_{33}}$$

$$\underline{+12q_{21}q_{22}q_{33} - 48q_{11}q_{22}^2q_{33} + 12q_{11}q_{22}q_{32} + 12q_{21}q_{22}q_{33}}$$

$$\underline{+12q_{22}^2q_{33} - 12q_{11}q_{22}q_{31} - 12q_{11}q_{22}q_{32} - 12q_{11}q_{22}q_{33}}$$

4. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$

$$a_1 = 1 - a_2 - a_3 - a_4$$

$$a_1 = 1 - \frac{144q_{11}^2q_{22}^2q_{33} - 48q_{11}q_{21}q_{22}q_{33} + 12q_{11}q_{21}q_{32}}{288q_{11}^3q_{22}^2q_{33}}$$

$$\underline{+12q_{21}^2q_{33} + 12q_{21}q_{22}q_{33} - 48q_{11}q_{22}^2q_{33} + 12q_{11}q_{22}q_{32}}$$

$$\underline{+12q_{21}q_{22}q_{33} + 12q_{22}^2q_{33} - 12q_{11}q_{22}q_{31} - 12q_{11}q_{22}q_{32}}$$

$$\underline{-12q_{11}q_{22}q_{33} - \frac{24q_{11}q_{22}q_{33} - 6q_{11}q_{32} - 6q_{21}q_{33} - 6q_{22}q_{33}}{144q_{11}^2q_{22}^2q_{33}}}$$

$$-\frac{1}{24q_{11}q_{22}q_{33}}$$

Untuk mengetahui nilai dari a_1, a_2, a_3 , dan a_4 , diasumsikan nilai semua variabel yang terdapat pada persamaan a_1, a_2, a_3 , dan a_4 di atas. Dipilih $q_{11} = \frac{1}{2}, q_{21} = 0$,

$q_{22} = \frac{1}{2}, q_{31} = 0, q_{32} = 0, q_{33} = 1$, maka

$$p_1 = q_{11} = \frac{1}{2}$$

$$p_2 = q_{21} + q_{22} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$p_3 = q_{31} + q_{32} + q_{33} = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$a_4 = \frac{1}{24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\frac{24}{4}} \\
&= \frac{1}{6} \\
a_3 &= \frac{24q_{11}q_{22}q_{33} - 6q_{11}q_{32} - 6q_{21}q_{33} - 6q_{22}q_{33}}{144q_{11}^2q_{22}^2q_{33}} \\
&= \frac{24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 - 6 \cdot 0 \cdot 1 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}{144 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1} \\
&= \frac{24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 - 6 \cdot 0 \cdot 1 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}{144 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1} \\
&= \frac{6 - 0 - 0 - 3}{9} \\
&= \frac{3}{9} \\
&= \frac{1}{3} \\
a_2 &= \frac{144q_{11}^2q_{22}^2q_{33} - 48q_{11}q_{21}q_{22}q_{33} + 12q_{11}q_{21}q_{32}}{288q_{11}^3q_{22}^2q_{33}} \\
&\quad + \frac{12q_{21}^2q_{33} + 12q_{21}q_{22}q_{33} - 48q_{11}q_{22}^2q_{33} + 12q_{11}q_{22}q_{32}}{288q_{11}^3q_{22}^2q_{33}} \\
&\quad + \frac{12q_{21}q_{22}q_{33} + 12q_{22}^2q_{33} - 12q_{11}q_{22}q_{31} - 12q_{11}q_{22}q_{32} - 12q_{11}q_{22}q_{33}}{288q_{11}^3q_{22}^2q_{33}} \\
&= \frac{144 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 - 48 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0}{288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1} \\
&\quad + \frac{12 \cdot 0^2 \cdot 1 + 12 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - 48 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 + 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0}{288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 12 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 - 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 - 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 - 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \\
 & = \frac{\frac{144}{16} - 0 + 0 + 0 + 0 - \frac{48}{8} + 0 + 0 + \frac{12}{4} - 0 - 0 - \frac{12}{4}}{\frac{288}{32}} \\
 & = \frac{9 - 6 + 3 - 3}{9} \\
 & = \frac{3}{9} \\
 & = \frac{1}{3} \\
 a_1 & = 1 - a_2 - a_3 - a_4 \\
 & = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\
 & = \frac{6 - 2 - 2 - 1}{6} \\
 & = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh metode Runge Kutta orde 4 yaitu:

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y_i + \left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 \right) h \\
 &= y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

dengan,

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t_i, y_i) \\
 k_2 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \\
 k_3 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \\
 k_4 &= f(t_i + h, y_i + k_3h)
 \end{aligned}$$

Metode Runge Kutta orde 4 dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial. Berikut akan dibahas sistem persamaan pada penelitian ini menggunakan metode Runge Kutta orde 4:

$$\begin{aligned}\frac{dS_h(t)}{dt} &= f(t_i, S_i, I_i, R_i, C_i) = \mu_1 - \mu_2 S_h(t) - \beta S_h(t) I_h(t) + \gamma C_h(t) \\ \frac{dI_h(t)}{dt} &= g(t_i, S_i, I_i, R_i, C_i) = \beta S_h(t) I_h(t) + \sigma \beta C_h(t) I_h(t) - (\mu_3 + \alpha) I_h(t) \\ \frac{dR_h(t)}{dt} &= p(t_i, S_i, I_i, R_i, C_i) = (1 - \sigma) \beta C_h(t) I_h(t) + \alpha I_h(t) - (\mu_4 + \delta) R_h(t) \\ \frac{dC_h(t)}{dt} &= q(t_i, S_i, I_i, R_i, C_i) = \delta R_h(t) - \beta C_h(t) I_h(t) - (\mu_5 + \gamma) C_h(t)\end{aligned}\tag{3.10}$$

Sistem persamaan (3.10) diselesaikan menggunakan metode Runge Kutta orde 4, maka skema numerik berdasarkan persamaan (3.9) adalah:

$$\begin{aligned}S_{i+1} &= S_i + \frac{1}{6} h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ I_{i+1} &= I_i + \frac{1}{6} h(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\ R_{i+1} &= R_i + \frac{1}{6} h(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\ C_{i+1} &= C_i + \frac{1}{6} h(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4)\end{aligned}$$

dengan,

$$k_1 = f(t_i, S_i, I_i, R_i, C_i)$$

$$l_1 = g(t_i, S_i, I_i, R_i, C_i)$$

$$m_1 = p(t_i, S_i, I_i, R_i, C_i)$$

$$n_1 = q(t_i, S_i, I_i, R_i, C_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, S_i + \frac{1}{2}k_1 h, I_i + \frac{1}{2}l_1 h, R_i + \frac{1}{2}m_1 h, C_i + \frac{1}{2}n_1 h\right)$$

$$\begin{aligned}
 l_2 &= g\left(t_i + \frac{1}{2}h, S_i + \frac{1}{2}k_1h, I_i + \frac{1}{2}l_1h, R_i + \frac{1}{2}m_1h, C_i + \frac{1}{2}n_1h\right) \\
 m_2 &= p\left(t_i + \frac{1}{2}h, S_i + \frac{1}{2}k_1h, I_i + \frac{1}{2}l_1h, R_i + \frac{1}{2}m_1h, C_i + \frac{1}{2}n_1h\right) \\
 n_2 &= q\left(t_i + \frac{1}{2}h, S_i + \frac{1}{2}k_1h, I_i + \frac{1}{2}l_1h, R_i + \frac{1}{2}m_1h, C_i + \frac{1}{2}n_1h\right) \\
 k_3 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, S_i + \frac{1}{2}k_2h, I_i + \frac{1}{2}l_2h, R_i + \frac{1}{2}m_2h, C_i + \frac{1}{2}n_2h\right) \\
 l_3 &= g\left(t_i + \frac{1}{2}h, S_i + \frac{1}{2}k_2h, I_i + \frac{1}{2}l_2h, R_i + \frac{1}{2}m_2h, C_i + \frac{1}{2}n_2h\right) \\
 m_3 &= p\left(t_i + \frac{1}{2}h, S_i + \frac{1}{2}k_2h, I_i + \frac{1}{2}l_2h, R_i + \frac{1}{2}m_2h, C_i + \frac{1}{2}n_2h\right) \\
 n_3 &= q\left(t_i + \frac{1}{2}h, S_i + \frac{1}{2}k_2h, I_i + \frac{1}{2}l_2h, R_i + \frac{1}{2}m_2h, C_i + \frac{1}{2}n_2h\right) \\
 k_4 &= f(t_i + h, S_i + k_3h, I_i + l_3h, R_i + m_3h, C_i + n_3h) \\
 l_4 &= g(t_i + h, S_i + k_3h, I_i + l_3h, R_i + m_3h, C_i + n_3h) \\
 m_4 &= p(t_i + h, S_i + k_3h, I_i + l_3h, R_i + m_3h, C_i + n_3h) \\
 n_4 &= q(t_i + h, S_i + k_3h, I_i + l_3h, R_i + m_3h, C_i + n_3h)
 \end{aligned}$$

3.2 Solusi Numerik Model Penyebaran Virus Influenza dengan Menggunakan Metode Runge Kutta Orde 4

Subbab ini akan membahas penyelesaian numerik pada model penyebaran virus influenza pada populasi manusia dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4. Model tersebut merupakan model SIRC (*Susceptible, Infectious, Recovered, Cross-immune*) yang berbentuk sistem persamaan diferensial linier yang terdiri dari 4 variabel dan beberapa parameter bergantung terhadap waktu t yang dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{dS_h(t)}{dt} = \mu_1 - \mu_2 S_h(t) - \beta S_h(t)I_h(t) + \gamma C_h(t)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_h(t)}{dt} &= \beta S_h(t) I_h(t) + \sigma \beta C_h(t) I_h(t) - (\mu_3 + \alpha) I_h(t) \\
 \frac{dR_h(t)}{dt} &= (1 - \sigma) \beta C_h(t) I_h(t) + \alpha I_h(t) - (\mu_4 + \delta) R_h(t) \\
 \frac{dC_h(t)}{dt} &= \delta R_h(t) - \beta C_h(t) I_h(t) - (\mu_5 + \gamma) C_h(t)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Nilai awal setiap variabel dan nilai parameter pada sistem persamaan (3.11) diberikan pada Tabel 3.1 sebagai berikut:

Tabel 3.1 Nilai Awal dan Nilai Parameter Sistem Persamaan (3.11)

Variabel/Parameter	Deskripsi	Nilai awal/ Nilai parameter
$S(0) = S_0$	Nilai awal individu rentan	0,15
$I(0) = I_0$	Nilai awal individu terinfeksi	0,001
$R(0) = R_0$	Nilai awal individu yang telah sembuh	0,409
$C(0) = C_0$	Nilai awal individu dengan imunitas sementara	0,44
μ_1	Laju kelahiran alami	0,02
μ_2	Laju kematian pada populasi <i>susceptible</i>	0,02
μ_3	Laju kematian pada populasi <i>infectious</i>	0,02
μ_4	Laju kematian pada populasi <i>recovered</i>	0,02
μ_5	Laju kematian pada populasi <i>cross-immune</i>	0,02
β	Laju interaksi antara dua individu	100
γ	Laju imunitas yang hilang dari individu	0,5
σ	Laju infeksi ulang pada individu	0,05
α	Laju pemulihan individu	73
δ	Laju degradasi imunitas dari individu	1

Dengan mensubstitusikan nilai parameter-parameter pada Tabel 3.1 di atas maka sistem persamaan (3.11) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dS_h(t)}{dt} = 0,02 - 0,02S_h(t) - 100S_h(t)I_h(t) + 0,5C_h(t)$$

$$\frac{dI_h(t)}{dt} = 100S_h(t)I_h(t) + 5C_h(t)I_h(t) - 73,02I_h(t)$$

$$\frac{dR_h(t)}{dt} = 95C_h(t)I_h(t) + 73I_h(t) - 1,02R_h(t)$$

$$\frac{dC_h(t)}{dt} = R_h(t) - 100C_h(t)I_h(t) - 0,52C_h(t) \quad (3.12)$$

3.2.1 Hasil Iterasi Metode Runge Kutta Orde 4 pada Model Penyebaran Virus Influenza

Persamaan (3.12) akan dihitung menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dengan $h = 0,05$ dan $t = 0,05$ sampai $t = 0,15$. Untuk iterasi pertama dengan $t = 0,05$, $S_0 = 0,15$, $I_0 = 0,001$, $R_0 = 0,409$, $C_0 = 0,44$, diperoleh perhitungan iterasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} k_1 &= 0,02 - 0,02S_0 - 100S_0I_0 + 0,5C_0 \\ &= 0,02 - 0,02 \cdot 0,15 - 100 \cdot 0,15 \cdot 0,001 + 0,5 \cdot 0,44 \\ &= 0,22200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= 100S_0I_0 + 5C_0I_0 - 73,02I_0 \\ &= 100 \cdot 0,15 \cdot 0,001 + 5 \cdot 0,44 \cdot 0,001 - 73,02 \cdot 0,001 \\ &= -0,05582 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1 &= 95C_0I_0 + 73I_0 - 1,02R_0 \\ &= 95 \cdot 0,44 \cdot 0,001 + 73 \cdot 0,001 - 1,02 \cdot 0,409 \\ &= -0,30238 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_1 &= R_0 - 100C_0I_0 - 0,52C_0 \\ &= 0,409 - 100 \cdot 0,44 \cdot 0,001 - 0,52 \cdot 0,44 \\ &= 0,13620 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= 0,02 - 0,02 \left(S_0 + \frac{1}{2}k_1h \right) - 100 \left(S_0 + \frac{1}{2}k_1h \right) \left(I_0 + \frac{1}{2}l_1h \right) \\ &\quad + 0,5 \left(C_0 + \frac{1}{2}n_1h \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0,02 - 0,02 \left(0,15 + \frac{1}{2} \cdot 0,22200 \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 100 \left(0,15 + \frac{1}{2} \cdot 0,22200 \cdot 0,05 \right) \left(0,001 + \frac{1}{2} \cdot (-0,05582) \right. \\
&\quad \left. \cdot 0,05 \right) + 0,5 \left(0,44 + \frac{1}{2} \cdot 0,13620 \cdot 0,05 \right) \\
&= 0,24474
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_2 &= 100 \left(S_0 + \frac{1}{2} k_1 h \right) \left(I_0 + \frac{1}{2} l_1 h \right) + 5 \left(C_0 + \frac{1}{2} n_1 h \right) \left(I_0 + \frac{1}{2} l_1 h \right) \\
&\quad - 73,02 \left(I_0 + \frac{1}{2} l_1 h \right) \\
&= 100 \left(0,15 + \frac{1}{2} \cdot 0,22200 \cdot 0,05 \right) \left(0,001 + \frac{1}{2} \cdot (-0,05582) \cdot 0,05 \right) \\
&\quad + 5 \left(0,44 + \frac{1}{2} \cdot 0,13620 \cdot 0,05 \right) \left(0,001 + \frac{1}{2} \cdot (-0,05582) \right. \\
&\quad \left. \cdot 0,05 \right) - 73,02 \left(0,001 + \frac{1}{2} \cdot (-0,05582) \cdot 0,05 \right) \\
&= 0,02185
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_2 &= 95 \left(C_0 + \frac{1}{2} n_1 h \right) \left(I_0 + \frac{1}{2} l_1 h \right) + 73 \left(I_0 + \frac{1}{2} l_1 h \right) - 1,02 \left(R_0 + \frac{1}{2} m_1 h \right) \\
&= 95 \left(0,44 + \frac{1}{2} \cdot 0,13620 \cdot 0,05 \right) \left(0,001 + \frac{1}{2} \cdot (-0,05582) \cdot 0,05 \right) \\
&\quad + 73 \left(0,001 + \frac{1}{2} \cdot (-0,05582) \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 1,02 \left(0,409 + \frac{1}{2} \cdot (-0,30238) \cdot 0,05 \right) \\
&= -0,45500
\end{aligned}$$

$$n_2 = \left(R_0 + \frac{1}{2} m_1 h \right) - 100 \left(C_0 + \frac{1}{2} n_1 h \right) \left(I_0 + \frac{1}{2} l_1 h \right) - 0,52 \left(C_0 + \frac{1}{2} n_1 h \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(0,409 + \frac{1}{2} \cdot (-0,30238) \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 100 \left(0,44 + \frac{1}{2} \cdot 0,13620 \cdot 0,05 \right) \left(0,001 + \frac{1}{2} \cdot (-0,05582) \right. \\
&\quad \left. \cdot 0,05 \right) - 0,52 \left(0,44 + \frac{1}{2} \cdot 0,13620 \cdot 0,05 \right) \\
&= 0,18841
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= 0,02 - 0,02 \left(S_0 + \frac{1}{2} k_2 h \right) - 100 \left(S_0 + \frac{1}{2} k_2 h \right) \left(I_0 + \frac{1}{2} l_2 h \right) \\
&\quad + 0,5 \left(C_0 + \frac{1}{2} n_2 h \right) \\
&= 0,02 - 0,02 \left(0,15 + \frac{1}{2} \cdot 0,24474 \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 100 \left(0,15 + \frac{1}{2} \cdot 0,24474 \cdot 0,05 \right) \left(0,001 + \frac{1}{2} \cdot 0,02185 \right. \\
&\quad \left. \cdot 0,05 \right) + 0,5 \left(0,44 + \frac{1}{2} \cdot 0,18841 \cdot 0,05 \right) \\
&= 0,21509
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_3 &= 100 \left(S_0 + \frac{1}{2} k_2 h \right) \left(I_0 + \frac{1}{2} l_2 h \right) + 5 \left(C_0 + \frac{1}{2} n_2 h \right) \left(I_0 + \frac{1}{2} l_2 h \right) \\
&\quad - 73,02 \left(I_0 + \frac{1}{2} l_2 h \right) \\
&= 100 \left(0,15 + \frac{1}{2} \cdot 0,24474 \cdot 0,05 \right) \left(0,001 + \frac{1}{2} \cdot 0,02185 \cdot 0,05 \right) \\
&\quad + 5 \left(0,44 + \frac{1}{2} \cdot 0,18841 \cdot 0,05 \right) \left(0,001 + \frac{1}{2} \cdot 0,02185 \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 73,02 \left(0,001 + \frac{1}{2} \cdot 0,02185 \cdot 0,05 \right) \\
&= -0,08533
\end{aligned}$$

$$m_3 = 95 \left(C_0 + \frac{1}{2} n_2 h \right) \left(I_0 + \frac{1}{2} l_2 h \right) + 73 \left(I_0 + \frac{1}{2} l_2 h \right) - 1,02 \left(R_0 + \frac{1}{2} m_2 h \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 95 \left(0,44 + \frac{1}{2} \cdot 0,18841 \cdot 0,05 \right) \left(0,001 + \frac{1}{2} \cdot 0,02185 \cdot 0,05 \right) \\
&\quad + 73 \left(0,001 + \frac{1}{2} \cdot 0,02185 \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 1,02 \left(0,409 + \frac{1}{2} \cdot (-0,45500) \cdot 0,05 \right) \\
&= -0,22737
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_3 &= \left(R_0 + \frac{1}{2} m_2 h \right) - 100 \left(C_0 + \frac{1}{2} n_2 h \right) \left(I_0 + \frac{1}{2} l_2 h \right) - 0,52 \left(C_0 + \frac{1}{2} n_2 h \right) \\
&= \left(0,409 + \frac{1}{2} \cdot (-0,45500) \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 100 \left(0,44 + \frac{1}{2} \cdot 0,18841 \cdot 0,05 \right) \left(0,001 + \frac{1}{2} \cdot 0,02185 \right. \\
&\quad \left. \cdot 0,05 \right) - 0,52 \left(0,44 + \frac{1}{2} \cdot 0,18841 \cdot 0,05 \right) \\
&= 0,09761
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= 0,02 - 0,02(S_0 + k_3 h) - 100(S_0 + k_3 h)(I_0 + l_3 h) + 0,5(C_0 + n_3 h) \\
&= 0,02 - 0,02(0,15 + 0,21509 \cdot 0,05) \\
&\quad - 100(0,15 + 0,21509 \cdot 0,05)(0,001 + (-0,08533) \cdot 0,05) \\
&\quad + 0,5(0,44 + 0,09761 \cdot 0,05) \\
&= 0,29174
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_4 &= 100(S_0 + k_3 h)(I_0 + l_3 h) + 5(C_0 + n_3 h)(I_0 + l_3 h) - 73,02(I_0 + l_3 h) \\
&= 100(0,15 + 0,21509 \cdot 0,05)(0,001 + (-0,08533) \cdot 0,05) \\
&\quad + 5(0,44 + 0,09761 \cdot 0,05)(0,001 + (-0,08533) \cdot 0,05) \\
&\quad - 73,02(0,001 + (-0,08533) \cdot 0,05) \\
&= 0,17874
\end{aligned}$$

$$m_4 = 95(C_0 + n_3 h)(I_0 + l_3 h) + 73(I_0 + l_3 h) - 1,02(R_0 + m_3 h)$$

$$\begin{aligned}
&= 95(0,44 + 0,09761 \cdot 0,05)(0,001 + (-0,08533) \cdot 0,05) \\
&\quad + 73(0,001 + (-0,08533) \cdot 0,05) \\
&\quad - 1,02(0,409 + (-0,22737) \cdot 0,05) \\
&= -0,78209
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_4 &= (R_0 + m_3 h) - 100(C_0 + n_3 h)(I_0 + l_3 h) - 0,52(C_0 + n_3 h) \\
&= (0,409 + (-0,22737) \cdot 0,05) \\
&\quad - 100(0,44 + 0,09761 \cdot 0,05)(0,001 + (-0,08533) \cdot 0,05) \\
&\quad - 0,52(0,44 + 0,09761 \cdot 0,05) \\
&= 0,31161
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh hasil iterasi pertama sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
S_1 &= S_0 + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= 0,15 + \frac{1}{6} \cdot 0,05(0,22200 + 2 \cdot 0,24474 + 2 \cdot 0,21509 + 0,29174) \\
&= 0,16195
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= I_0 + \frac{1}{6}h(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\
&= 0,001 + \frac{1}{6} \cdot 0,05((-0,05582) + 2 \cdot 0,02185 + 2 \cdot (-0,08533) \\
&\quad + 0,17874) \\
&= 0,00097
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= R_0 + \frac{1}{6}h(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \\
&= 0,409 + \frac{1}{6} \cdot 0,05((-0,30238) + 2 \cdot (-0,45500) + 2 \cdot (-0,22737) \\
&\quad + (-0,78209)) \\
&= 0,38859
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= C_0 + \frac{1}{6}h(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4) \\
&= 0,44 + \frac{1}{6} \cdot 0,05(0,13620 + 2 \cdot 0,18841 + 2 \cdot 0,09761 + 0,31161) \\
&= 0,4485
\end{aligned}$$

Untuk iterasi kedua dengan $t = 0,1$, $S_1 = 0,16195$, $I_1 = 0,00097$, $R_1 = 0,38859$, $C_1 = 0,4485$, diperoleh perhitungan iterasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0,02 - 0,02S_1 - 100S_1I_1 + 0,5C_1 \\
&= 0,02 - 0,02 \cdot 0,16195 - 100 \cdot 0,16195 \cdot 0,00097 + 0,5 \cdot 0,4485 \\
&= 0,22536
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_1 &= 100S_1I_1 + 5C_1I_1 - 73,02I_1 \\
&= 100 \cdot 0,16195 \cdot 0,00097 + 5 \cdot 0,4485 \cdot 0,00097 - 73,02 \cdot 0,00097 \\
&= -0,05274
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= 95C_1I_1 + 73I_1 - 1,02R_1 \\
&= 95 \cdot 0,4485 \cdot 0,00097 + 73 \cdot 0,00097 - 1,02 \cdot 0,38859 \\
&= -0,28464
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_1 &= R_1 - 100C_1I_1 - 0,52C_1 \\
&= 0,38859 - 100 \cdot 0,4485 \cdot 0,00097 - 0,52 \cdot 0,4485 \\
&= 0,11203
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= 0,02 - 0,02 \left(S_1 + \frac{1}{2}k_1h \right) - 100 \left(S_1 + \frac{1}{2}k_1h \right) \left(I_1 + \frac{1}{2}l_1h \right) \\
&\quad + 0,5 \left(C_1 + \frac{1}{2}n_1h \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0,02 - 0,02 \left(0,16195 + \frac{1}{2} \cdot 0,22536 \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 100 \left(0,16195 + \frac{1}{2} \cdot 0,22536 \cdot 0,05 \right) \left(0,00097 + \frac{1}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot (-0,05275) \cdot 0,05 \right) + 0,5 \left(0,4485 + \frac{1}{2} \cdot 0,11203 \cdot 0,05 \right) \\
&= 0,24820
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_2 &= 100 \left(S_1 + \frac{1}{2} k_1 h \right) \left(I_1 + \frac{1}{2} l_1 h \right) + 5 \left(C_1 + \frac{1}{2} n_1 h \right) \left(I_1 + \frac{1}{2} l_1 h \right) \\
&\quad - 73,02 \left(I_1 + \frac{1}{2} l_1 h \right) \\
&= 100 \left(0,16195 + \frac{1}{2} \cdot 0,22536 \cdot 0,05 \right) \left(0,00097 + \frac{1}{2} \cdot (-0,05275) \cdot 0,05 \right) \\
&\quad + 5 \left(0,4485 + \frac{1}{2} \cdot 0,11203 \cdot 0,05 \right) \left(0,00097 + \frac{1}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot (-0,05275) \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 73,02 \left(0,00097 + \frac{1}{2} \cdot (-0,05275) \cdot 0,05 \right) \\
&= 0,01903
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_2 &= 95 \left(C_1 + \frac{1}{2} n_1 h \right) \left(I_1 + \frac{1}{2} l_1 h \right) + 73 \left(I_1 + \frac{1}{2} l_1 h \right) - 1,02 \left(R_1 + \frac{1}{2} m_1 h \right) \\
&= 95 \left(0,4485 + \frac{1}{2} \cdot 0,11203 \cdot 0,05 \right) \left(0,00097 + \frac{1}{2} \cdot (-0,05275) \cdot 0,05 \right) \\
&\quad + 73 \left(0,00097 + \frac{1}{2} \cdot (-0,05275) \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 1,02 \left(0,38859 + \frac{1}{2} \cdot (-0,28464) \cdot 0,05 \right) \\
&= -0,42993
\end{aligned}$$

$$n_2 = \left(R_1 + \frac{1}{2} m_1 h \right) - 100 \left(C_1 + \frac{1}{2} n_1 h \right) \left(I_1 + \frac{1}{2} l_1 h \right) - 0,52 \left(C_1 + \frac{1}{2} n_1 h \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(0,38859 + \frac{1}{2} \cdot (-0,28464) \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 100 \left(0,4485 + \frac{1}{2} \cdot 0,11203 \cdot 0,05 \right) \left(0,00097 + \frac{1}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot (-0,05275) \cdot 0,05 \right) - 0,52 \left(0,4485 + \frac{1}{2} \cdot 0,11203 \cdot 0,05 \right) \\
&= 0,1627
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= 0,02 - 0,02 \left(S_1 + \frac{1}{2} k_2 h \right) - 100 \left(S_1 + \frac{1}{2} k_2 h \right) \left(I_1 + \frac{1}{2} l_2 h \right) \\
&\quad + 0,5 \left(C_1 + \frac{1}{2} n_2 h \right) \\
&= 0,02 - 0,02 \left(0,16195 + \frac{1}{2} \cdot 0,24820 \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 100 \left(0,16195 + \frac{1}{2} \cdot 0,24820 \cdot 0,05 \right) \left(0,00097 + \frac{1}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot 0,01903 \cdot 0,05 \right) + 0,5 \left(0,4485 + \frac{1}{2} \cdot 0,1627 \cdot 0,05 \right) \\
&= 0,21867
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_3 &= 100 \left(S_1 + \frac{1}{2} k_2 h \right) \left(I_1 + \frac{1}{2} l_2 h \right) + 5 \left(C_1 + \frac{1}{2} n_2 h \right) \left(I_1 + \frac{1}{2} l_2 h \right) \\
&\quad - 73,02 \left(I_1 + \frac{1}{2} l_2 h \right) \\
&= 100 \left(0,16195 + \frac{1}{2} \cdot 0,24820 \cdot 0,05 \right) \left(0,00097 + \frac{1}{2} \cdot 0,01903 \cdot 0,05 \right) \\
&\quad + 5 \left(0,4485 + \frac{1}{2} \cdot 0,1627 \cdot 0,05 \right) \left(0,00097 + \frac{1}{2} \cdot 0,01903 \right. \\
&\quad \left. \cdot 0,05 \right) - 73,02 \left(0,00097 + \frac{1}{2} \cdot 0,01903 \cdot 0,05 \right) \\
&= -0,07779
\end{aligned}$$

$$m_3 = 95 \left(C_1 + \frac{1}{2} n_2 h \right) \left(I_1 + \frac{1}{2} l_2 h \right) + 73 \left(I_1 + \frac{1}{2} l_2 h \right) - 1,02 \left(R_1 + \frac{1}{2} m_2 h \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 95 \left(0,4485 + \frac{1}{2} \cdot 0,1627 \cdot 0,05 \right) \left(0,00097 + \frac{1}{2} \cdot 0,01903 \cdot 0,05 \right) \\
&\quad + 73 \left(0,00097 + \frac{1}{2} \cdot 0,01903 \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 1,02 \left(0,38859 + \frac{1}{2} \cdot (-0,42993) \cdot 0,05 \right) \\
&= -0,21813
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_3 &= \left(R_1 + \frac{1}{2} m_2 h \right) - 100 \left(C_1 + \frac{1}{2} n_2 h \right) \left(I_1 + \frac{1}{2} l_2 h \right) - 0,52 \left(C_1 + \frac{1}{2} n_2 h \right) \\
&= \left(0,38859 + \frac{1}{2} \cdot (-0,42993) \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 100 \left(0,4485 + \frac{1}{2} \cdot 0,1627 \cdot 0,05 \right) \left(0,00097 + \frac{1}{2} \cdot 0,01903 \right. \\
&\quad \left. \cdot 0,05 \right) - 0,52 \left(0,4485 + \frac{1}{2} \cdot 0,1627 \cdot 0,05 \right) \\
&= 0,07725
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= 0,02 - 0,02(S_1 + k_3 h) - 100(S_1 + k_3 h)(I_1 + l_3 h) + 0,5(C_1 + n_3 h) \\
&= 0,02 - 0,02(0,16195 + 0,21867 \cdot 0,05) \\
&\quad - 100(0,16195 + 0,21867 \cdot 0,05)(0,00097 + (-0,07779) \\
&\quad \cdot 0,05) + 0,5(0,4485 + 0,07725 \cdot 0,05) \\
&= 0,29325
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_4 &= 100(S_1 + k_3 h)(I_1 + l_3 h) + 5(C_1 + n_3 h)(I_1 + l_3 h) - 73,02(I_1 + l_3 h) \\
&= 100(0,16195 + 0,21867 \cdot 0,05)(0,00097 + (-0,07779) \cdot 0,05) \\
&\quad + 5(0,4485 + 0,07725 \cdot 0,05)(0,00097 + (-0,07779) \cdot 0,05) \\
&\quad - 73,02(0,00097 + (-0,07779) \cdot 0,05) \\
&= 0,15629
\end{aligned}$$

$$m_4 = 95(C_1 + n_3 h)(I_1 + l_3 h) + 73(I_1 + l_3 h) - 1,02(R_1 + m_3 h)$$

$$\begin{aligned}
&= 95(0,4485 + 0,07725 \cdot 0,05)(0,00097 + (-0,07779) \cdot 0,05) \\
&\quad + 73(0,00097 + (-0,07779) \cdot 0,05) \\
&\quad - 1,02(0,38859 + (-0,21813) \cdot 0,05) \\
&= -0,72423
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_4 &= (R_1 + m_3 h) - 100(C_1 + n_3 h)(I_1 + l_3 h) - 0,52(C_1 + n_3 h) \\
&= (0,38859 + (-0,21813) \cdot 0,05) \\
&\quad - 100(0,4485 + 0,07725 \cdot 0,05)(0,00097 + (-0,07779) \\
&\quad \cdot 0,05) - 0,52(0,4485 + 0,07725 \cdot 0,05) \\
&= 0,27468
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh hasil iterasi kedua sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
S_2 &= S_1 + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
&= 0,16195 + \frac{1}{6} \cdot 0,05(0,22536 + 2 \cdot 0,24820 + 2 \cdot 0,21867 + 0,29325) \\
&= 0,17405 \\
I_2 &= I_1 + \frac{1}{6}h(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\
&= 0,00097 + \frac{1}{6} \\
&\quad \cdot 0,05((-0,05275) + 2 \cdot 0,01903 + 2 \cdot (-0,07779) \\
&\quad + 0,15629) \\
&= 0,00085
\end{aligned}$$

$$R_2 = R_1 + \frac{1}{6}h(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

$$\begin{aligned}
&= 0,38859 + \frac{1}{6} \\
&\quad \cdot 0,05((-0,28464) + 2 \cdot (-0,42993) + 2 \cdot (-0,21813) \\
&\quad + (-0,72423)) \\
&= 0,36938
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= C_1 + \frac{1}{6}h(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4) \\
&= 0,4485 + \frac{1}{6} \cdot 0,05(0,11203 + 2 \cdot 0,1627 + 2 \cdot 0,07725 + 0,27468) \\
&= 0,45572
\end{aligned}$$

Untuk iterasi ketiga dengan $t = 0,15$, $S_2 = 0,17405$, $I_2 = 0,00085$, $R_2 = 0,36938$, $C_2 = 0,45572$, diperoleh perhitungan iterasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0,02 - 0,02S_2 - 100S_2I_2 + 0,5C_2 \\
&= 0,02 - 0,02 \cdot 0,17405 - 100 \cdot 0,17405 \cdot 0,00085 + 0,5 \cdot 0,45572 \\
&= 0,22959
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_1 &= 100S_2I_2 + 5C_2I_2 - 73,02I_2 \\
&= 100 \cdot 0,17405 \cdot 0,00085 + 5 \cdot 0,4557 \cdot 0,00085 - 73,02 \cdot 0,00085 \\
&= -0,04533
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_1 &= 95C_2I_2 + 73I_2 - 1,02R_2 \\
&= 95 \cdot 0,45572 \cdot 0,00085 + 73 \cdot 0,00085 - 1,02 \cdot 0,36938 \\
&= -0,27793
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_1 &= R_2 - 100C_2I_2 - 0,52C_2 \\
&= 0,36938 - 100 \cdot 0,45572 \cdot 0,00085 - 0,52 \cdot 0,45572 \\
&= 0,09367
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= 0,02 - 0,02 \left(S_2 + \frac{1}{2} k_1 h \right) - 100 \left(S_2 + \frac{1}{2} k_1 h \right) \left(I_2 + \frac{1}{2} l_1 h \right) \\
&\quad + 0,5 \left(C_2 + \frac{1}{2} n_1 h \right) \\
&= 0,02 - 0,02 \left(0,17405 + \frac{1}{2} \cdot 0,22959 \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 100 \left(0,17405 + \frac{1}{2} \cdot 0,22959 \cdot 0,05 \right) \left(0,00085 + \frac{1}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot (-0,04533) \cdot 0,05 \right) + 0,5 \left(0,45572 + \frac{1}{2} \cdot 0,09367 \cdot 0,05 \right) \\
&= 0,25053
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_2 &= 100 \left(S_2 + \frac{1}{2} k_1 h \right) \left(I_2 + \frac{1}{2} l_1 h \right) + 5 \left(C_2 + \frac{1}{2} n_1 h \right) \left(I_2 + \frac{1}{2} l_1 h \right) \\
&\quad - 73,02 \left(I_2 + \frac{1}{2} l_1 h \right) \\
&= 100 \left(0,17405 + \frac{1}{2} \cdot 0,22959 \cdot 0,05 \right) \left(0,00085 + \frac{1}{2} \cdot (-0,04533) \cdot 0,05 \right) \\
&\quad + 5 \left(0,45572 + \frac{1}{2} \cdot 0,09367 \cdot 0,05 \right) \left(0,00085 + \frac{1}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot (-0,04533) \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 73,02 \left(0,00085 + \frac{1}{2} \cdot (-0,04533) \cdot 0,05 \right) \\
&= 0,01495
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_2 &= 95 \left(C_2 + \frac{1}{2} n_1 h \right) \left(I_2 + \frac{1}{2} l_1 h \right) + 73 \left(I_2 + \frac{1}{2} l_1 h \right) - 1,02 \left(R_2 + \frac{1}{2} m_1 h \right) \\
&= 95 \left(0,45572 + \frac{1}{2} \cdot 0,09367 \cdot 0,05 \right) \left(0,00085 + \frac{1}{2} \cdot (-0,04533) \cdot 0,05 \right) \\
&\quad + 73 \left(0,00085 + \frac{1}{2} \cdot (-0,04533) \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 1,02 \left(0,36938 + \frac{1}{2} \cdot (-0,27793) \cdot 0,05 \right)
\end{aligned}$$

$$= -0,4027$$

$$\begin{aligned}
n_2 &= \left(R_2 + \frac{1}{2} m_1 h \right) - 100 \left(C_2 + \frac{1}{2} n_1 h \right) \left(I_2 + \frac{1}{2} l_1 h \right) - 0,52 \left(C_2 + \frac{1}{2} n_1 h \right) \\
&= \left(0,36938 + \frac{1}{2} \cdot (-0,27793) \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 100 \left(0,45572 + \frac{1}{2} \cdot 0,09367 \cdot 0,05 \right) \left(0,00085 + \frac{1}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot (-0,04533) \cdot 0,05 \right) - 0,52 \left(0,45572 + \frac{1}{2} \cdot 0,09367 \cdot 0,05 \right) \\
&= 0,13722
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= 0,02 - 0,02 \left(S_2 + \frac{1}{2} k_2 h \right) - 100 \left(S_2 + \frac{1}{2} k_2 h \right) \left(I_2 + \frac{1}{2} l_2 h \right) \\
&\quad + 0,5 \left(C_2 + \frac{1}{2} n_2 h \right) \\
&= 0,02 - 0,02 \left(0,17405 + \frac{1}{2} \cdot 0,25053 \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 100 \left(0,17405 + \frac{1}{2} \cdot 0,25053 \cdot 0,05 \right) \left(0,00085 + \frac{1}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot 0,01495 \cdot 0,05 \right) + 0,5 \left(0,45572 + \frac{1}{2} \cdot 0,13722 \cdot 0,05 \right) \\
&= 0,22391
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_3 &= 100 \left(S_2 + \frac{1}{2} k_2 h \right) \left(I_2 + \frac{1}{2} l_2 h \right) + 5 \left(C_2 + \frac{1}{2} n_2 h \right) \left(I_2 + \frac{1}{2} l_2 h \right) \\
&\quad - 73,02 \left(I_2 + \frac{1}{2} l_2 h \right) \\
&= 100 \left(0,17405 + \frac{1}{2} \cdot 0,25053 \cdot 0,05 \right) \left(0,00085 + \frac{1}{2} \cdot 0,01495 \cdot 0,05 \right) \\
&\quad + 5 \left(0,45572 + \frac{1}{2} \cdot 0,13722 \cdot 0,05 \right) \left(0,00085 + \frac{1}{2} \cdot 0,01495 \right. \\
&\quad \left. \cdot 0,05 \right) - 73,02 \left(0,00085 + \frac{1}{2} \cdot 0,01495 \cdot 0,05 \right)
\end{aligned}$$

$$= -0,06448$$

$$\begin{aligned}
m_3 &= 95 \left(C_2 + \frac{1}{2} n_2 h \right) \left(I_2 + \frac{1}{2} l_2 h \right) + 73 \left(I_2 + \frac{1}{2} l_2 h \right) - 1,02 \left(R_2 + \frac{1}{2} m_2 h \right) \\
&= 95 \left(0,45572 + \frac{1}{2} \cdot 0,13722 \cdot 0,05 \right) \left(0,00085 + \frac{1}{2} \cdot 0,01495 \cdot 0,05 \right) \\
&\quad + 73 \left(0,00085 + \frac{1}{2} \cdot 0,01495 \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 1,02 \left(0,36938 + \frac{1}{2} \cdot (-0,4027) \cdot 0,05 \right) \\
&= -0,22380
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_3 &= \left(R_2 + \frac{1}{2} m_2 h \right) - 100 \left(C_2 + \frac{1}{2} n_2 h \right) \left(I_2 + \frac{1}{2} l_2 h \right) - 0,52 \left(C_2 + \frac{1}{2} n_2 h \right) \\
&= \left(0,36938 + \frac{1}{2} \cdot (-0,4027) \cdot 0,05 \right) \\
&\quad - 100 \left(0,45572 + \frac{1}{2} \cdot 0,13722 \cdot 0,05 \right) \left(0,00085 + \frac{1}{2} \right. \\
&\quad \left. \cdot 0,01495 \cdot 0,05 \right) - 0,52 \left(0,45572 + \frac{1}{2} \cdot 0,13722 \cdot 0,05 \right) \\
&= 0,06437
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 &= 0,02 - 0,02(S_2 + k_3 h) - 100(S_2 + k_3 h)(I_2 + l_3 h) + 0,5(C_2 + n_3 h) \\
&= 0,02 - 0,02(0,17405 + 0,22391 \cdot 0,05) \\
&\quad - 100(0,17405 + 0,22391 \cdot 0,05)(0,00085 + (-0,06448) \\
&\quad \cdot 0,05) + 0,5(0,45572 + 0,06437 \cdot 0,05) \\
&= 0,28974
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_4 &= 100(S_2 + k_3 h)(I_2 + l_3 h) + 5(C_2 + n_3 h)(I_2 + l_3 h) - 73,02(I_2 + l_3 h) \\
&= 100(0,17405 + 0,22391 \cdot 0,05)(0,00085 + (-0,06448) \cdot 0,05) \\
&\quad + 5(0,45572 + 0,06437 \cdot 0,05)(0,00085 + (-0,06448) \\
&\quad \cdot 0,05) - 73,02(0,00085 + (-0,06448) \cdot 0,05)
\end{aligned}$$

$$= 0,12392$$

$$\begin{aligned} m_4 &= 95(C_2 + n_3 h)(I_2 + l_3 h) + 73(I_2 + l_3 h) - 1,02(R_2 + m_3 h) \\ &= 95(0,45572 + 0,06437 \cdot 0,05)(0,00085 + (-0,06448) \cdot 0,05) \\ &\quad + 73(0,00085 + (-0,06448) \cdot 0,05) \\ &\quad - 1,02(0,36938 + (-0,22380) \cdot 0,05) \\ &= -0,64215 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_4 &= (R_2 + m_3 h) - 100(C_2 + n_3 h)(I_2 + l_3 h) - 0,52(C_2 + n_3 h) \\ &= (0,36938 + (-0,22380) \cdot 0,05) \\ &\quad - 100(0,45572 + 0,06437 \cdot 0,05)(0,00085 + (-0,06448) \\ &\quad \cdot 0,05) - 0,52(0,45572 + 0,06437 \cdot 0,05) \\ &= 0,22849 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh hasil iterasi ketiga sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S_3 &= S_2 + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= 0,17405 + \frac{1}{6} \cdot 0,05(0,22959 + 2 \cdot 0,25053 + 2 \cdot 0,22391 + 0,28974) \\ &= 0,18628 \\ I_3 &= I_2 + \frac{1}{6}h(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \\ &= 0,00085 + \frac{1}{6} \\ &\quad \cdot 0,05((-0,04533) + 2 \cdot 0,01495 + 2 \cdot (-0,06448) \\ &\quad + 0,12392) \\ &= 0,00068 \\ R_3 &= R_2 + \frac{1}{6}h(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0,36938 + \frac{1}{6} \\
&\quad \cdot 0,05((-0,27793) + 2 \cdot (-0,4027) + 2 \cdot (-0,22380) \\
&\quad + (-0,64215)) \\
&= 0,35127 \\
C_3 &= C_2 + \frac{1}{6} h(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4) \\
&= 0,45572 + \frac{1}{6} \cdot 0,05(0,09367 + 2 \cdot 0,13722 + 2 \cdot 0,06437 + 0,22849) \\
&= 0,46176
\end{aligned}$$

3.2.2 Perbandingan Solusi Numerik Metode Runge Kutta Orde 4 dengan ODE45

Perbandingan solusi numerik metode Runge Kutta orde 4 dan ODE45 pada model penyebaran virus influenza adalah sebagai berikut:

1. Populasi *Susceptible*

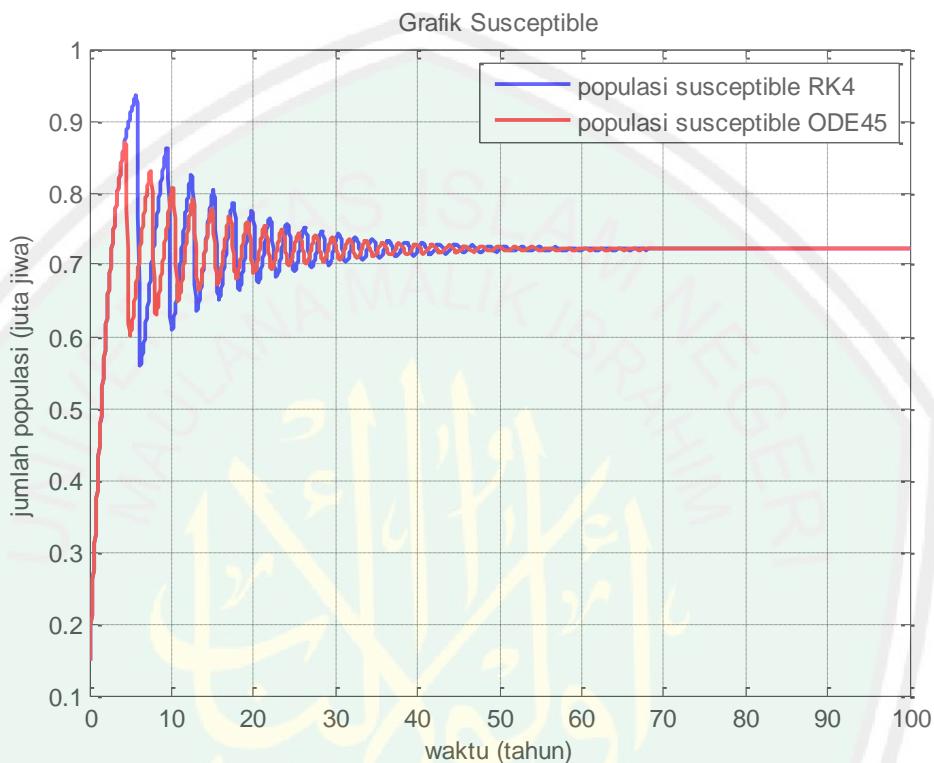
Tabel 3.2 Hasil Iterasi Populasi *Susceptible*

<i>t</i>	Iterasi RK4	Iterasi ODE45
0,05	0,16195	0,16168
0,1	0,17405	0,17378
0,15	0,18628	0,18605
0,2	0,19863	0,19846
0,25	0,21108	0,21096
0,3	0,22362	0,22355
0,35	0,23622	0,23619
0,4	0,24888	0,24888
0,45	0,26157	0,26158
0,5	0,27426	0,27428

Tabel 3.2 di atas menunjukkan hasil iterasi Runge Kutta orde 4 dan program ODE45 populasi *Susceptible* pada saat waktu $t = 0,05$ sampai $t = 0,5$ dengan ukuran langkah $h = 0,05$. Dapat diketahui bahwa hasil yang diperoleh dari iterasi metode

Runge Kutta orde 4 dengan program ODE45 menunjukkan nilai yang tidak jauh berbeda antara iterasi Runge Kutta orde 4 dan ODE45.

Penelitian ini memperoleh grafik solusi numerik pada populasi *Susceptible* berdasarkan nilai awal dan nilai parameter sesuai pada Tabel 3.1 sebagai berikut:



Gambar 3.1 Grafik Populasi *Susceptible*

Gambar 3.1 menunjukkan grafik populasi *Susceptible* $S(t)$ pada saat $t = 100$ dan $h = 0,05$ dengan berdasarkan nilai setiap iterasi dan nilai parameter yang telah disajikan pada Tabel 3.1. Grafik tersebut merupakan grafik hasil simulasi numerik menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dan program ODE45. Setiap populasi mengalami kenaikan dan penurunan yang bergantung pada besar kecilnya parameter-parameter yang mempengaruhi setiap populasi. Dari hasil simulasi menunjukkan bahwa pada saat $t = 80$ sistem akan stabil dengan ditunjukkan hasil grafik yang konvergen (menuju titik kesetimbangan), yang berarti memenuhi

kestabilan secara numerik. Grafik populasi *Susceptible* tersebut menuju pada titik kesetimbangan 0,7173785762 dan memiliki selisih puncak epidemi solusi $S(t)$ untuk Runge Kutta orde 4 pada saat $t = 5,7$ dengan nilai 0,9343, sedangkan untuk ODE45 pada saat $t = 4,35$ dengan nilai 0,8694.

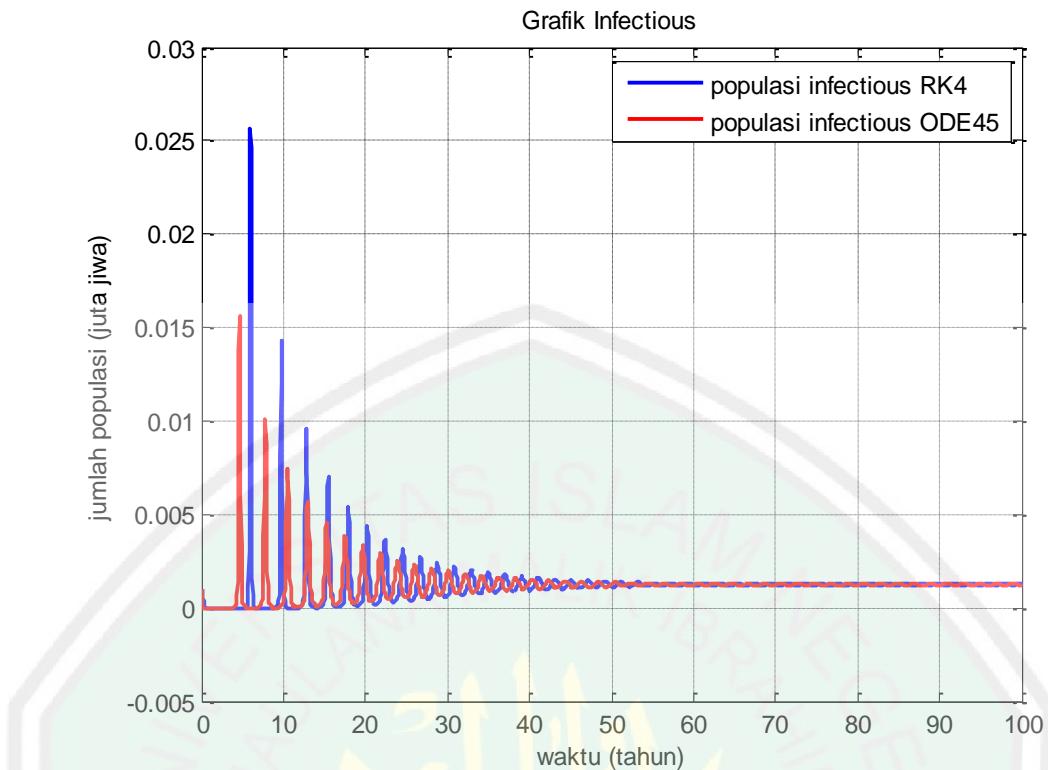
2. Populasi *Infectious*

Tabel 3.3 Hasil Iterasi Populasi *Infectious*

t	Iterasi RK4	Iterasi ODE45
0,05	0,00097	0,00006331
0,1	0,00085	0,00000428
0,15	0,00068	0,00000027
0,2	0,00049	0,000000002
0,25	0,00032	0,00000014
0,3	0,00019	0,00000005
0,35	0,00011	0,00000041
0,4	0,00005	0,00000017
0,45	0,00002	0,00000028
0,5	0,00001	0,00000008

Tabel 3.3 di atas menunjukkan hasil iterasi Runge Kutta orde 4 dan program ODE45 populasi *Infectious* pada saat waktu $t = 0,05$ sampai $t = 0,5$ dengan ukuran langkah $h = 0,05$. Dapat diketahui bahwa hasil yang diperoleh dari iterasi metode Runge Kutta orde 4 dengan program ODE45 menunjukkan nilai yang tidak jauh berbeda antara iterasi Runge Kutta orde 4 dan ODE45.

Penelitian ini memperoleh grafik solusi numerik pada populasi *Infectious* berdasarkan nilai awal dan nilai parameter sesuai pada Tabel 3.1 sebagai berikut:



Gambar 3.2 Grafik Populasi *Infectious*

Gambar 3.2 menunjukkan grafik populasi $I(t)$ pada saat $t = 100$ dan $h = 0,05$ dengan berdasarkan nilai setiap iterasi dan nilai parameter yang telah disajikan pada Tabel 3.1. Grafik tersebut merupakan grafik hasil simulasi numerik menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dan program ODE45. Setiap populasi mengalami kenaikan dan penurunan yang bergantung pada besar kecilnya parameter-parameter yang mempengaruhi setiap populasi. Dari hasil simulasi menunjukkan bahwa sistem akan stabil dengan ditunjukkan hasil grafik yang konvergen (menuju titik kesetimbangan), yang berarti memenuhi kestabilan secara numerik. Grafik populasi *Infectious* tersebut menuju pada titik kesetimbangan 0,001910113930 dan memiliki selisih puncak epidemi solusi $I(t)$ untuk Runge Kutta orde 4 pada saat $t = 5,95$ dengan nilai 0,0256, sedangkan untuk ODE45 pada saat $t = 4,65$ dengan nilai 0,0156.

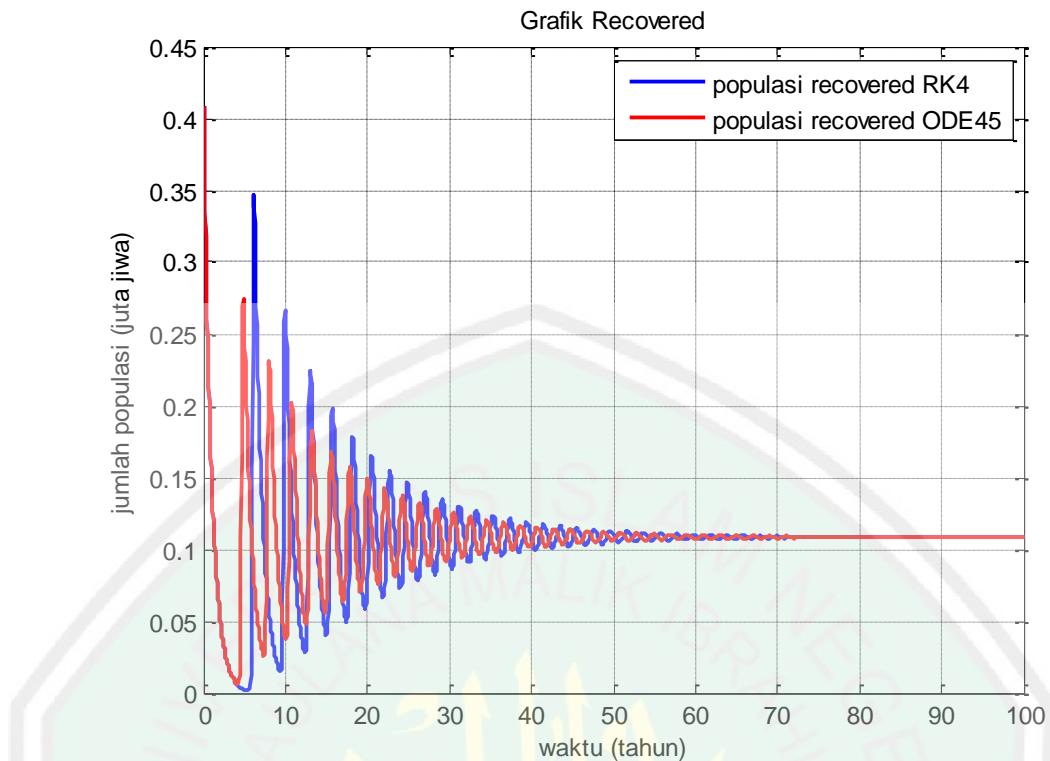
3. Populasi *Recovered*

Tabel 3.4 Hasil Iterasi Populasi *Recovered*

t	Iterasi RK4	Iterasi ODE45
0,05	0,38859	0,39054
0,1	0,36938	0,37124
0,15	0,35127	0,35279
0,2	0,33413	0,33525
0,25	0,31784	0,31858
0,3	0,30231	0,30274
0,35	0,28747	0,28769
0,4	0,2733	0,27338
0,45	0,25978	0,25979
0,5	0,2469	0,24687

Tabel 3.4 di atas menunjukkan hasil iterasi Runge Kutta orde 4 dan program ODE45 populasi *Recovered* pada saat waktu $t = 0,05$ sampai $t = 0,5$ dengan ukuran langkah $h = 0,05$. Dapat diketahui bahwa hasil yang diperoleh dari iterasi metode Runge Kutta orde 4 dengan program ODE45 menunjukkan nilai yang tidak jauh berbeda antara iterasi Runge Kutta orde 4 dan ODE45.

Penelitian ini memperoleh grafik solusi numerik pada populasi *Recovered* berdasarkan nilai awal dan nilai parameter sesuai pada Tabel 3.1 sebagai berikut:



Gambar 3.3 Grafik Populasi *Recovered*

Gambar 3.3 menunjukkan grafik populasi $R(t)$ pada saat $t = 100$ dan $h = 0,05$ dengan berdasarkan nilai setiap iterasi dan nilai parameter yang telah disajikan pada Tabel 3.1. Grafik tersebut merupakan grafik hasil simulasi numerik menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dan program ODE45. Setiap populasi mengalami kenaikan dan penurunan yang bergantung pada besar kecilnya parameter-parameter yang mempengaruhi setiap populasi. Dari hasil simulasi menunjukkan bahwa sistem akan stabil dengan ditunjukkan hasil grafik yang konvergen (menuju titik kesetimbangan), yang berarti memenuhi kestabilan secara numerik. Grafik populasi *Recovered* tersebut menuju pada titik kesetimbangan 0,1823235679 dan memiliki selisih puncak epidemi solusi $R(t)$ untuk Runge Kutta orde 4 pada saat $t = 6,15$ dengan nilai 0,3464, sedangkan untuk ODE45 pada saat $t = 4,85$ dengan nilai 0,2739.

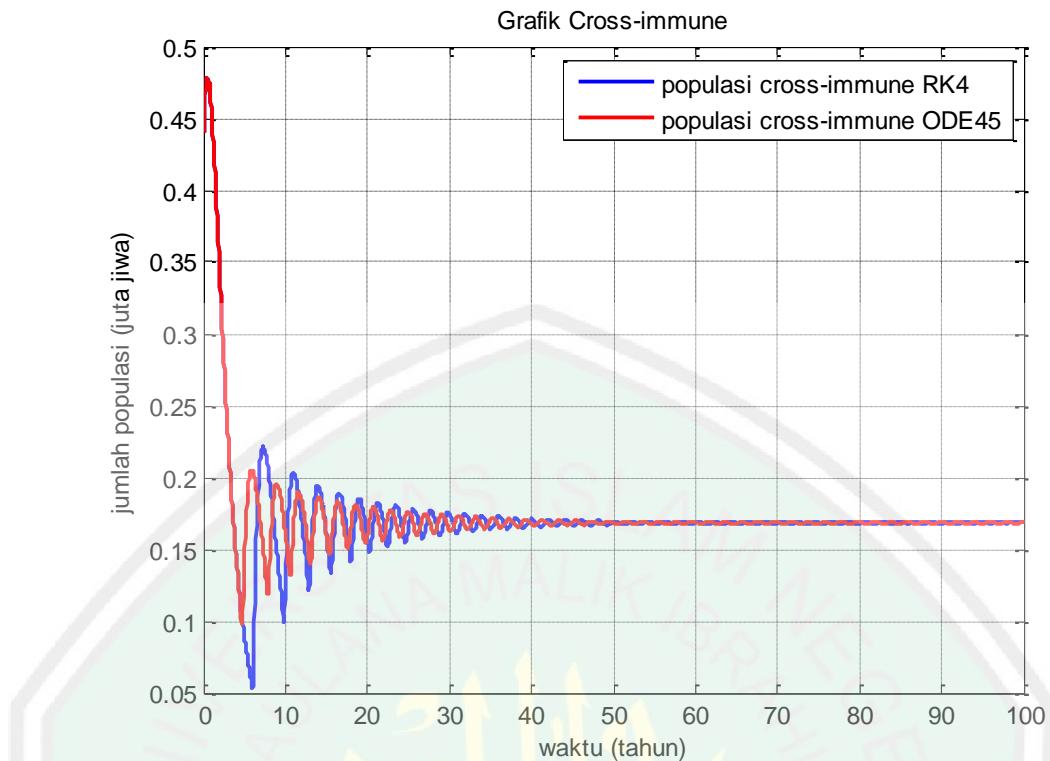
4. Populasi *Cross-immune*

Tabel 3.5 Hasil Iterasi Populasi *Cross-immune*

t	Iterasi RK4	Iterasi ODE45
0,05	0,4485	0,44772
0,1	0,45572	0,45497
0,15	0,46176	0,46116
0,2	0,46674	0,46629
0,25	0,47075	0,47046
0,3	0,47388	0,47371
0,35	0,4762	0,47612
0,4	0,47777	0,47774
0,45	0,47863	0,47863
0,5	0,47883	0,47885

Tabel 3.5 di atas menunjukkan hasil iterasi Runge Kutta orde 4 dan program ODE45 populasi *Cross-immune* pada saat waktu $t = 0,05$ sampai $t = 0,5$ dengan ukuran langkah $h = 0,05$. Dapat diketahui bahwa hasil yang diperoleh dari iterasi metode Runge Kutta orde 4 dengan program ODE45 menunjukkan nilai yang tidak jauh berbeda antara iterasi Runge Kutta orde 4 dan ODE45.

Penelitian ini memperoleh grafik solusi numerik pada populasi *Cross-immune* berdasarkan nilai awal dan nilai parameter sesuai pada Tabel 3.1 sebagai berikut:



Gambar 3.4 Grafik Populasi *Cross-immune*

Gambar 3.4 menunjukkan grafik populasi $C(t)$ pada saat $t = 100$ dan $h = 0,05$ dengan berdasarkan nilai setiap iterasi dan nilai parameter yang telah disajikan pada Tabel 3.1. Grafik tersebut merupakan grafik hasil simulasi numerik menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dan program ODE45. Setiap populasi mengalami kenaikan dan penurunan yang bergantung pada besar kecilnya parameter-parameter yang mempengaruhi setiap populasi. Dari hasil simulasi menunjukkan bahwa sistem akan stabil dengan ditunjukkan hasil grafik yang konvergen (menuju titik kesetimbangan), yang berarti memenuhi kestabilan secara numerik. Grafik populasi *Cross-immune* tersebut menuju pada titik kesetimbangan 0,2564284760 dan memiliki selisih puncak epidemi solusi $C(t)$ untuk Runge Kutta orde 4 pada saat $t = 7,3$ dengan nilai 0,2213, sedangkan untuk ODE45 pada saat $t = 5,85$ dengan nilai 0,2056.

3.3 Analisis Galat

Subbab ini akan membahas analisis galat dari metode Runge Kutta orde 4 pada model penyebaran virus influenza dengan populasi SIRC. Pada penelitian ini galat yang digunakan adalah galat relatif hampiran. Galat relatif hampiran dirumuskan sebagai berikut:

$$\varepsilon_{RA} = \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}} \quad (3.13)$$

Rumus galat relatif hampiran tersebut digunakan untuk menghitung galat dari Tabel 3.2 sampai Tabel 3.5 yang berisi hasil iterasi metode Runge Kutta orde 4 pada model SIRC pada sistem persamaan 3.12.

3.3.1 Analisis Galat Relatif Hampiran Metode Runge Kutta Orde 4

Berdasarkan Tabel 3.2 yang menunjukkan hasil iterasi populasi *Susceptible*, diperoleh hasil galat relatif hampiran pada populasi *Susceptible* sebagai berikut:

Ketika $S = 0,16195$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{RA} &= \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}} \\ &= \frac{0,16195 - 0,15}{0,16195} \\ &= 0,07376 \end{aligned}$$

Ketika $S = 0,17405$ diperoleh:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{RA} &= \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}} \\ &= \frac{0,17405 - 0,16195}{0,17405} \\ &= 0,06954 \end{aligned}$$

Ketika $S = 0,18628$ diperoleh:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{RA} &= \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}} \\ &= \frac{0,18628 - 0,17405}{0,18628} \\ &= 0,06568\end{aligned}$$

Berdasarkan Tabel 3.3 yang menunjukkan hasil iterasi populasi *Infectious*, diperoleh hasil galat relatif hampiran pada populasi *Infectious* sebagai berikut:

Ketika $I = 0,00097$ diperoleh:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{RA} &= \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}} \\ &= \frac{0,00097 - 0,001}{0,00097} \\ &= 0,0348\end{aligned}$$

Ketika $I = 0,00085$ diperoleh:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{RA} &= \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}} \\ &= \frac{0,00085 - 0,00097}{0,00085} \\ &= 0,13702\end{aligned}$$

Ketika $I = 0,00068$ diperoleh:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{RA} &= \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}} \\ &= \frac{0,00068 - 0,00085}{0,00068} \\ &= 0,25107\end{aligned}$$

Berdasarkan Tabel 3.4 yang menunjukkan hasil iterasi populasi *Recovered*, diperoleh hasil galat relatif hampiran pada populasi *Recovered* sebagai berikut:

Ketika $R = 0,38859$ diperoleh:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{RA} &= \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}} \\ &= \frac{0,38859 - 0,409}{0,38859} \\ &= 0,05252\end{aligned}$$

Ketika $R = 0,36938$ diperoleh:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{RA} &= \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}} \\ &= \frac{0,36938 - 0,38859}{0,36938} \\ &= 0,05200\end{aligned}$$

Ketika $R = 0,35127$ diperoleh:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{RA} &= \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}} \\ &= \frac{0,35127 - 0,36938}{0,35127} \\ &= 0,05155267411\end{aligned}$$

Berdasarkan Tabel 3.5 yang menunjukkan hasil iterasi populasi *Cross-immune*, diperoleh hasil galat relatif hampiran pada populasi *Cross-immune* sebagai berikut:

Ketika $C = 0,4485$ diperoleh:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{RA} &= \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}} \\ &= \frac{0,4485 - 0,44}{0,4485} \\ &= 0,01895\end{aligned}$$

Ketika $C = 0,45572$ diperoleh:

$$\varepsilon_{RA} = \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}}$$

$$= \frac{0,45572 - 0,4485}{0,45572}$$

$$= 0,01585$$

Ketika $C = 0,46176$ diperoleh:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{RA} &= \frac{a_{r+1} - a_r}{a_{r+1}} \\ &= \frac{0,46176 - 0,45572}{0,46176} \\ &= 0,01309\end{aligned}$$

3.3.2 Perbandingan Galat Runge Kutta Orde 4 dengan ODE45

Perbandingan galat relatif hampiran Runge Kutta orde 4 dengan ODE45 pada sistem persamaan model SIRC adalah sebagai berikut:

1. Populasi *Susceptible*

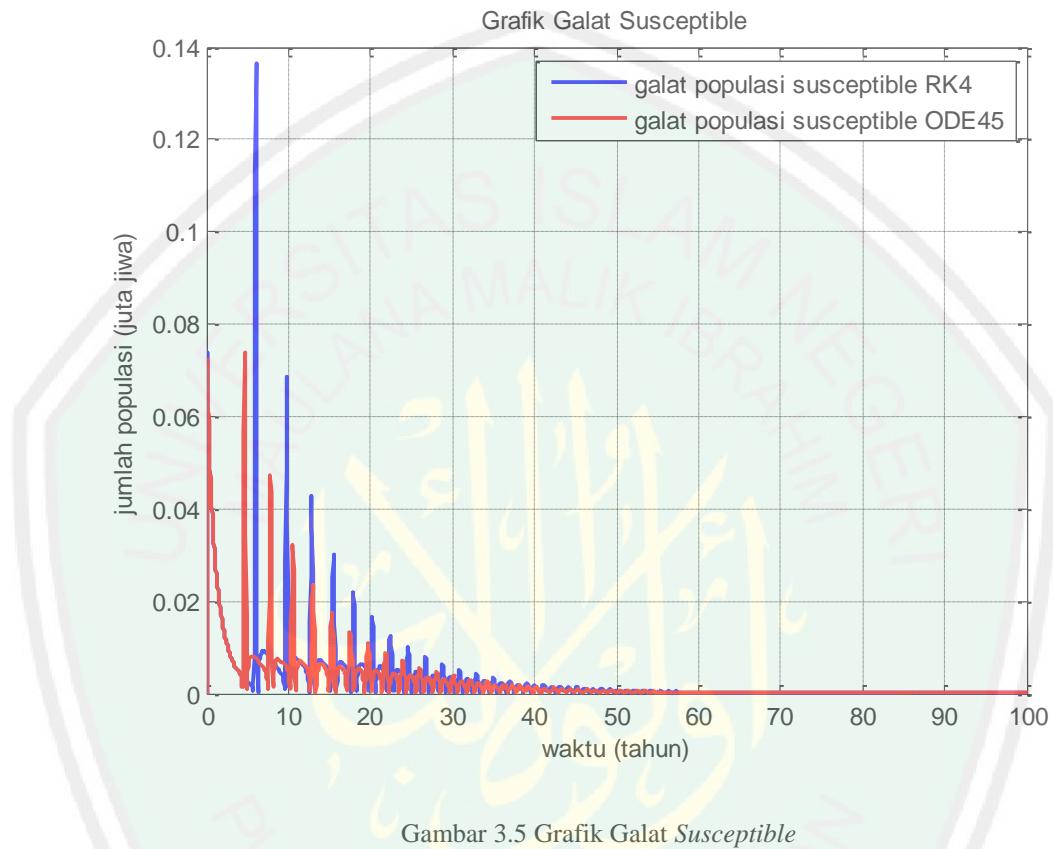
Tabel 3.6 Hasil Galat Relatif Hampiran pada *Susceptible*

t	Galat RK4	Galat ODE45
0,05	0,07376	0,07224
0,1	0,06954	0,06963
0,15	0,06568	0,06596
0,2	0,06217	0,0625
0,25	0,05898	0,05928
0,3	0,05606	0,05630
0,35	0,05337	0,05353
0,4	0,05085	0,05096
0,45	0,0485	0,05856
0,5	0,04628	0,04631

Tabel 3.6 di atas menunjukkan hasil perhitungan galat relatif hampiran Runge Kutta orde 4 dan program ODE45 populasi *Susceptible* pada saat waktu $t = 0,05$ sampai $t = 0,5$ dengan ukuran langkah $h = 0,05$. Dapat diketahui bahwa hasil galat yang

diperoleh dari metode Runge Kutta orde 4 dengan program ODE45 menunjukkan nilai yang tidak jauh berbeda antara galat Runge Kutta orde 4 dan ODE45.

Penelitian ini memperoleh grafik analisis galat relatif hampiran pada populasi *Susceptible* berdasarkan hasil iterasi sesuai pada Tabel 3.2 sebagai berikut:



Gambar 3.5 Grafik Galat *Susceptible*

Gambar 3.5 menunjukkan grafik galat populasi *Susceptible* $S(t)$ pada saat $t = 100$ dan $h = 0,05$ dengan berdasarkan hasil iterasi yang telah disajikan pada Tabel 3.2. Grafik tersebut merupakan grafik hasil analisis galat relatif hampiran menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dan program ODE45. Dari grafik tersebut terdapat selisih pertumbuhan galat antara Runge Kutta orde 4 dengan ODE45, akan tetapi selisih yang didapatkan tidak jauh berbeda antara Runge Kutta orde 4 dengan ODE45.

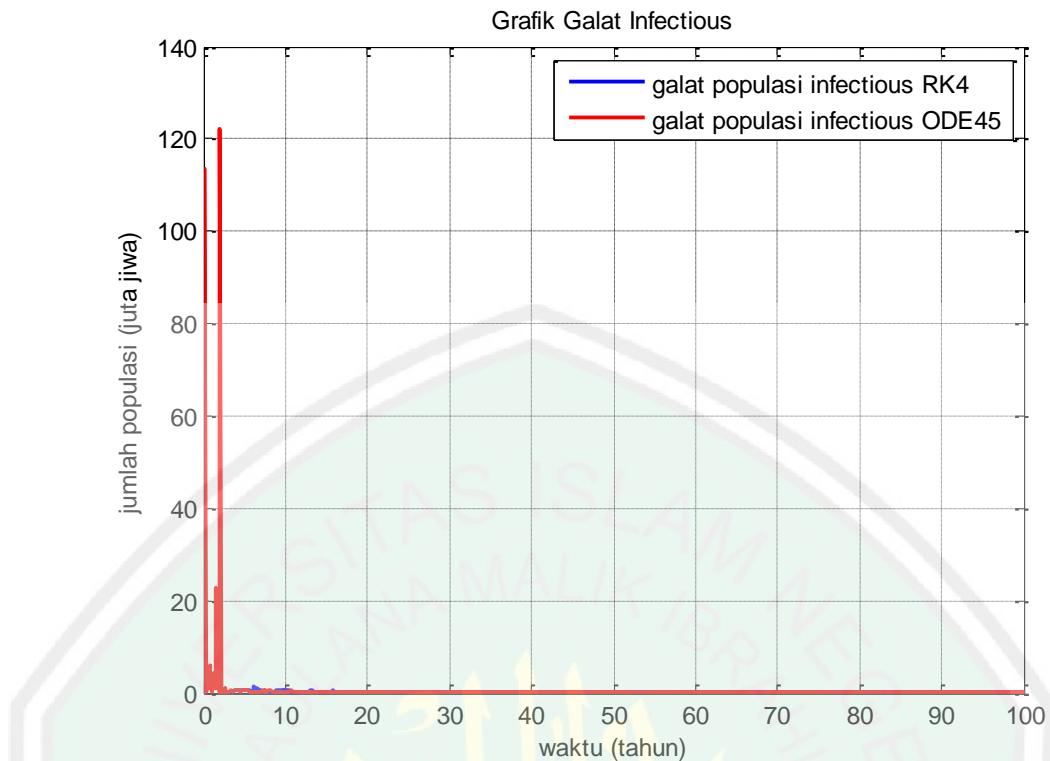
2. Populasi *Infectious*

Tabel 3.7 Hasil Galat Relatif Hampiran pada *Infectious*

t	Galat RK4	Galat ODE45
0,05	0,0348	0,14795
0,1	0,13702	0,13784
0,15	0,25107	0,14878
0,2	0,37770	1,13759
0,25	0,51743	0,00983
0,3	0,67044	0,03874
0,35	0,83645	0,01122
0,4	1,01461	0,03381
0,45	1,20326	0,00377
0,5	1,39980	0,02644

Tabel 3.7 di atas menunjukkan hasil perhitungan galat relatif hampiran Runge Kutta orde 4 dan program ODE45 populasi *Infectious* pada saat waktu $t = 0,05$ sampai $t = 0,5$ dengan ukuran langkah $h = 0,05$. Dapat diketahui bahwa hasil galat yang diperoleh dari metode Runge Kutta orde 4 dengan program ODE45 menunjukkan nilai yang tidak jauh berbeda antara galat Runge Kutta orde 4 dan ODE45.

Penelitian ini memperoleh grafik analisis galat relatif hampiran pada populasi *Infectious* berdasarkan hasil iterasi sesuai pada Tabel 3.3 sebagai berikut:



Gambar 3.6 Grafik Galat *Infectious*

Gambar 3.6 menunjukkan grafik galat populasi $I(t)$ pada saat $t = 100$ dan $h = 0,05$ dengan berdasarkan hasil iterasi yang telah disajikan pada Tabel 3.3. Grafik tersebut merupakan grafik hasil analisis galat relatif hampiran menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dan program ODE45. Dari grafik tersebut terdapat selisih pertumbuhan galat antara Runge Kutta orde 4 dengan ODE45, akan tetapi selisih yang didapatkan tidak jauh berbeda antara Runge Kutta orde 4 dengan ODE45.

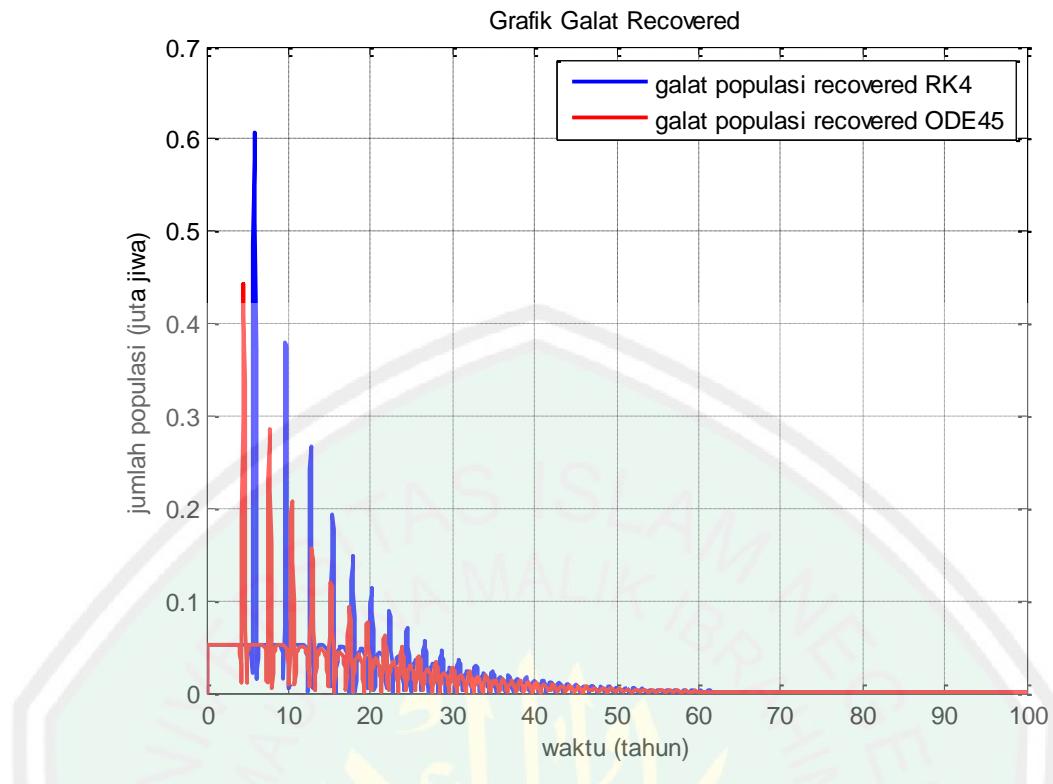
3. Populasi *Recovered*

Tabel 3.8 Hasil Galat Relatif Hampiran pada *Recovered*

t	Galat RK4	Galat ODE45
0,05	0,05252	0,04727
0,1	0,05200	0,05198
0,15	0,05155	0,0523
0,2	0,05129	0,05232
0,25	0,05125	0,05232
0,3	0,05139	0,05232
0,35	0,05162	0,05232
0,4	0,05186	0,05233
0,45	0,05205	0,05232
0,5	0,05218	0,05232

Tabel 3.8 di atas menunjukkan hasil perhitungan galat relatif hampiran Runge Kutta orde 4 dan program ODE45 populasi *Recovered* pada saat waktu $t = 0,05$ sampai $t = 0,5$ dengan ukuran langkah $h = 0,05$. Dapat diketahui bahwa hasil galat yang diperoleh dari metode Runge Kutta orde 4 dengan program ODE45 menunjukkan nilai yang tidak jauh berbeda antara galat Runge Kutta orde 4 dan ODE45.

Penelitian ini memperoleh grafik analisis galat relatif hampiran pada populasi *Recovered* berdasarkan hasil iterasi sesuai pada Tabel 3.4 sebagai berikut:



Gambar 3.7 Grafik Galat *Recovered*

Gambar 3.7 menunjukkan grafik galat populasi $R(t)$ pada saat $t = 100$ dan $h = 0,05$ dengan berdasarkan hasil iterasi yang telah disajikan pada Tabel 3.4. Grafik tersebut merupakan grafik hasil analisis galat relatif hampiran menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dan program ODE45. Dari grafik tersebut terdapat selisih pertumbuhan galat antara Runge Kutta orde 4 dengan ODE45, akan tetapi selisih yang didapatkan tidak jauh berbeda antara Runge Kutta orde 4 dengan ODE45.

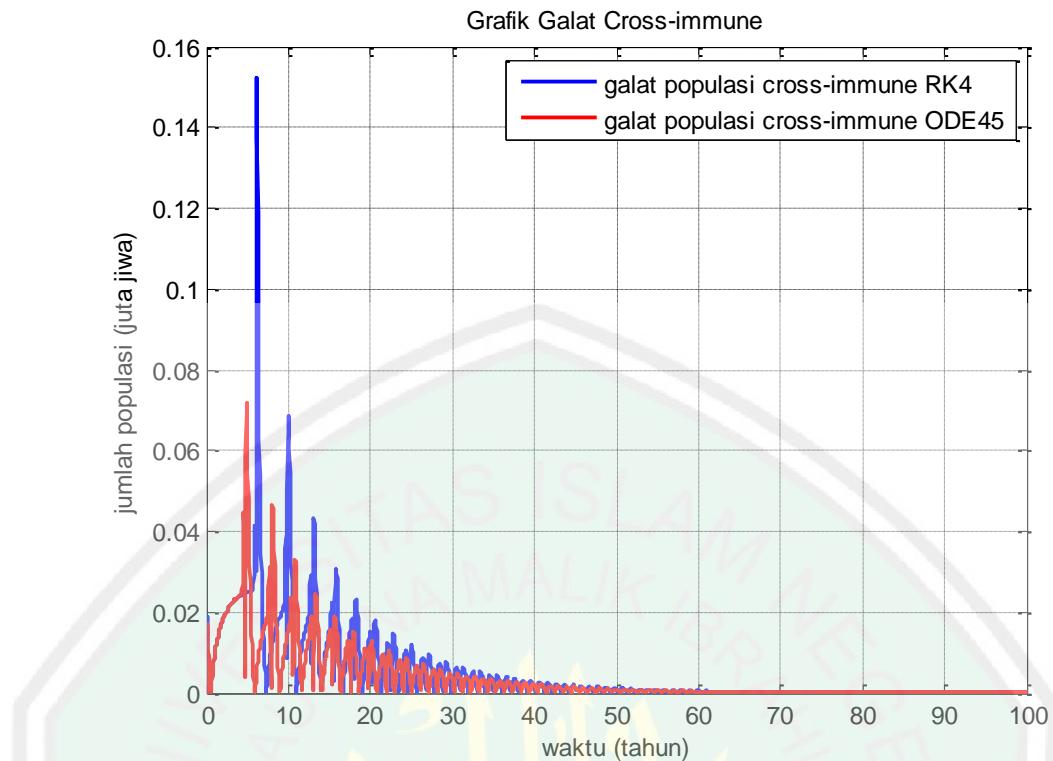
4. Populasi *Cross-immune*

Tabel 3.9 Hasil Galat Relatif Hampiran pada *Cross-immune*

t	Galat RK4	Galat ODE45
0,05	0,01895	0,01724
0,1	0,01585	0,01595
0,15	0,01309	0,01340
0,2	0,01066	0,01102
0,25	0,00851	0,00885
0,3	0,00660	0,00687
0,35	0,00487	0,00506
0,4	0,00328	0,0034
0,45	0,00180	0,00186
0,5	0,00042	0,00045

Tabel 3.9 di atas menunjukkan hasil perhitungan galat relatif hampiran Runge Kutta orde 4 dan program ODE45 populasi *Cross-immune* pada saat waktu $t = 0,05$ sampai $t = 0,5$ dengan ukuran langkah $h = 0,05$. Dapat diketahui bahwa hasil galat yang diperoleh dari metode Runge Kutta orde 4 dengan program ODE45 menunjukkan nilai yang tidak jauh berbeda antara galat Runge Kutta orde 4 dan ODE45.

Penelitian ini memperoleh grafik analisis galat relatif hampiran pada populasi *Cross-immune* berdasarkan hasil iterasi sesuai pada Tabel 3.5 sebagai berikut:



Gambar 3.8 Grafik Galat *Cross-immune*

Gambar 3.8 menunjukkan grafik galat populasi $C(t)$ pada saat $t = 100$ dan $h = 0,05$ dengan berdasarkan hasil iterasi yang telah disajikan pada Tabel 3.5. Grafik tersebut merupakan grafik hasil analisis galat relatif hampiran menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dan program ODE45. Dari grafik tersebut terdapat selisih pertumbuhan galat antara Runge Kutta orde 4 dengan ODE45, akan tetapi selisih yang didapatkan tidak jauh berbeda antara Runge Kutta orde 4 dengan ODE45.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Adapun kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Penurunan metode Runge Kutta orde 4 digunakan untuk mengetahui asal mula koefisien yang ada pada metode Runge Kutta orde 4. Penurunan dilakukan dengan cara menyamakan hasil penurunan deret Taylor dengan hasil substitusi k_1, k_2, k_3, k_4 yang diubah ke deret Taylor 2 variabel ke rumus umum Runge Kutta orde 4. Diperoleh nilai masing-masing koefisien yaitu: $a_1 = \frac{1}{6}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{6}$.
2. Solusi numerik pada model penyebaran virus influenza populasi SIRC diselesaikan dengan menggunakan metode Runge Kutta orde 4. Model SIRC yang masing-masing merupakan *Susceptible*, *Infectious*, *Recovered*, dan *Cross-immune*. Dari model tersebut diperoleh hasil iterasi metode Runge Kutta orde 4 dan hasil iterasi program ODE45 pada setiap populasi dengan menggunakan waktu $t = 0,05$ sampai $t = 0,5$ dengan ukuran langkah $h = 0,05$. Dari perhitungan solusi numerik tersebut juga diperoleh grafik solusi dari model SIRC. Grafik solusi menunjukkan pola pada setiap populasi. Dari hasil grafik dapat ditunjukkan bahwa sistem akan stabil pada saat $t = 80$ dengan ditunjukkan hasil grafik yang konvergen (menuju titik kesetimbangan), yang berarti memenuhi kestabilan numerik. Grafik populasi *Susceptible* menuju pada titik kesetimbangan 0,7173785762 dan

memiliki selisih puncak epidemi solusi $S(t)$ untuk Runge Kutta orde 4 pada saat $t = 5,7$ dengan nilai 0,9343, sedangkan untuk ODE45 pada saat $t = 4,35$ dengan nilai 0,8694. Grafik populasi *Infectious* menuju pada titik kesetimbangan 0,001910113930 dan memiliki selisih puncak epidemi solusi $I(t)$ untuk Runge Kutta orde 4 pada saat $t = 5,95$ dengan nilai 0,0256, sedangkan untuk ODE45 pada saat $t = 4,65$ dengan nilai 0,0156. Grafik populasi *Recovered* menuju pada titik kesetimbangan 0,1823235679 dan memiliki selisih puncak epidemi solusi $R(t)$ untuk Runge Kutta orde 4 pada saat $t = 6,15$ dengan nilai 0,3464, sedangkan untuk ODE45 pada saat $t = 4,85$ dengan nilai 0,2739. Grafik populasi *Cross-immune* menuju pada titik kesetimbangan 0,2564284760 dan memiliki selisih puncak epidemi solusi $C(t)$ untuk Runge Kutta orde 4 pada saat $t = 7,3$ dengan nilai 0,2213, sedangkan untuk ODE45 pada saat $t = 5,85$ dengan nilai 0,2056.

3. Analisis galat pada solusi numerik model penyebaran virus influenza menggunakan metode Runge Kutta orde 4 dan program ODE45 dihitung dengan pendekatan galat relatif hampiran. Dari perhitungan galat relatif hampiran diperoleh nilai galat Runge Kutta orde 4 dan galat ODE45 untuk masing-masing *Susceptible*, *Infectious*, *Recovered*, *Cross-immune* pada saat waktu $t = 0,05$ sampai $t = 0,5$ dengan masing-masing nilai iterasi *Susceptible*, *Infectious*, *Recovered*, *Cross-immune*. Terdapat selisih pertumbuhan galat antara Runge Kutta orde 4 dengan ODE45, akan tetapi selisih yang didapatkan tidak jauh berbeda antara Runge Kutta orde 4 dengan ODE45.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya dapat dibahas mengenai solusi model penyebaran virus influenza pada populasi SIRC dengan menggunakan metode Runge Kutta yang berorde lebih tinggi.



DAFTAR RUJUKAN

- Abdurrahman, A. 2002. *Syarah Hadits Pilihan Bukhari Muslim*. Jakarta: Darul Falah.
- An-Nawawi, I. 2011. *Riyadhus Shalihin*. Solo: Insan Kamil.
- Baiduri. 2002. *Persamaan Diferensial dan Matematika Model*. Malang: UMM Press.
- Boyce, W. E. dan DiPrima, R. C. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems Seventh Edition*. New York: John Wiley dan Sons, Inc.
- Chapra, S. C. dan Canale, R. P. 2010. *Numerical Methods for Engineers Sixth Edition*. New York (US): McGraw-Hill.
- Finizio, N. dan Ladas, G. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Bandung: Erlangga.
- Kusumo, F. A. 2017. The Dynamics of a SEIR-SIRC Antigenic Drift Influenza Model. *Bull Math Biol* 79, 1412-1425.
- Munir, R. 2010. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.
- Pamuntjak, R. J. dan Santosa, W. 1990. *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: ITB.
- Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset.
- Waluya, S. B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Program Simulasi Numerik Metode Runge Kutta Orde 4

```

clc,clf,clear
format long
dt = 0.05;
t = 0:dt:100;
n = length(t);
%parameter
mu = 0.02;
beta = 100;
gamma = 0.5;
sigma = 0.05;
alpha = 73;
delta = 1;
s(1) = 0.15;
in(1) = 0.001;
r(1) = 0.409;
c(1) = 0.44;
u = @(s,in,r,c,t) mu-(mu*s)-(beta*s*in)+(gamma*c);
x = @(s,in,r,c,t) (beta*s*in)+(sigma*beta*c*in)-(mu*in)-
(alpha*in);
y = @(s,in,r,c,t) ((1-sigma)*beta*c*in)+(alpha*in)-(mu*r)-
(delta*r);
z = @(s,in,r,c,t) (delta*r)-(beta*c*in)-(mu*c)-(gamma*c);

for i=1:n-1
    k1 = dt*u(s(i),in(i),r(i),c(i),t(i));
    l1 = dt*x(s(i),in(i),r(i),c(i),t(i));
    m1 = dt*y(s(i),in(i),r(i),c(i),t(i));
    n1 = dt*z(s(i),in(i),r(i),c(i),t(i));

    k2 =
    dt*u(s(i)+(k1/2),in(i)+(l1/2),r(i)+(m1/2),c(i)+(n1/2),t(i)+(dt/2))
    ;
    l2 =
    dt*x(s(i)+(k1/2),in(i)+(l1/2),r(i)+(m1/2),c(i)+(n1/2),t(i)+(dt/2))
    ;
    m2 =
    dt*y(s(i)+(k1/2),in(i)+(l1/2),r(i)+(m1/2),c(i)+(n1/2),t(i)+(dt/2))
    ;
    n2 =
    dt*z(s(i)+(k1/2),in(i)+(l1/2),r(i)+(m1/2),c(i)+(n1/2),t(i)+(dt/2))
    ;

    k3 =
    dt*u(s(i)+(k2/2),in(i)+(l2/2),r(i)+(m2/2),c(i)+(n2/2),t(i)+(dt/2))
    ;
    l3 =
    dt*x(s(i)+(k2/2),in(i)+(l2/2),r(i)+(m2/2),c(i)+(n2/2),t(i)+(dt/2))
    ;
    m3 =
    dt*y(s(i)+(k2/2),in(i)+(l2/2),r(i)+(m2/2),c(i)+(n2/2),t(i)+(dt/2))
    ;

```

```

n3 =
dt*z(s(i)+(k2/2),in(i)+(l2/2),r(i)+(m2/2),c(i)+(n2/2),t(i)+(dt/2))
;

k4 = dt*u(s(i)+k3,in(i)+l3,r(i)+m3,c(i)+n3,t(i)+dt);
l4 = dt*x(s(i)+k3,in(i)+l3,r(i)+m3,c(i)+n3,t(i)+dt);
m4 = dt*y(s(i)+k3,in(i)+l3,r(i)+m3,c(i)+n3,t(i)+dt);
n4 = dt*z(s(i)+k3,in(i)+l3,r(i)+m3,c(i)+n3,t(i)+dt);

s(i+1) = s(i)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
in(i+1) = in(i)+(l1+2*l2+2*l3+l4)/6;
r(i+1) = r(i)+(m1+2*m2+2*m3+m4)/6;
c(i+1) = c(i)+(n1+2*n2+2*n3+n4)/6;

end

plot(t,s,'-',t,in,'-',t,r,'-',t,c,'-','LineWidth',2);
hold on
disp(' t s in r c')
disp([t' s' in' r' c'])
legend ('susceptible','infectious','recovered','cross-immune')
xlabel('waktu')
ylabel('jumlah populasi')
title('Grafik SIRC')
grid on

```

Lampiran 2 Program Simulasi Numerik ODE45

```
function f=RK4(t,n)

mu = 0.02;
beta = 100;
gamma = 0.5;
sigma = 0.05;
alpha = 73;
delta = 1;

f=[mu-(mu*n(1))-  

(beta*n(1)*n(2))+(gamma*n(4));(beta*n(1)*n(2))+(sigma*beta*n(4)*n(2))-(mu*n(2))-(alpha*n(2));((1-  

sigma)*beta*n(4)*n(2))+((alpha*n(2))-(mu*n(3))-(  

(delta*n(3));(delta*n(3))-(beta*n(4)*n(2))-(mu*n(4))-(  

(gamma*n(4));
end

clc,clear

[t,Y]=ode45(@RK4,[0:0.05:100],[0.15,0.001,0.409,0.44]);
s=Y(:,1);
in=Y(:,2);
r=Y(:,3);
c=Y(:,4);
format long

figure(1),clf
plot(t,s,'b',t,in,'m',t,r,'g',t,c,'r','LineWidth',2)
legend('populasi susceptible','populasi infectious','populasi recovered','populasi cross-immune');
xlabel('waktu (tahun)')
ylabel('jumlah populasi (juta jiwa)')
title('Grafik SIRC')
hold on
grid on

%Galat Relatif
for i=1:length(t)-1

    galat_s(i)=abs((s(i+1)-s(i))/(s(i+1)));
    galat_in(i)=abs((in(i+1)-in(i))/(in(i+1)));
    galat_r(i)=abs((r(i+1)-r(i))/(r(i+1)));
    galat_c(i)=abs((c(i+1)-c(i))/(c(i+1)));
end
```

Lampiran 3 Nilai Koefisien Metode Runge Kutta Orde 4

restart;

$$A := a[4] \cdot q[11] \cdot q[22] \cdot q[33] = \frac{1}{24}$$

$$a_4 q_{11} q_{22} q_{33} = \frac{1}{24}$$

$$B := a[3] \cdot q[11] \cdot q[22] + a[4] \cdot q[11] \cdot q[32] + a[4] \cdot q[21] \cdot q[33] + a[4] \cdot q[22] \cdot q[33] = \frac{1}{6}$$

$$a_3 q_{11} q_{22} + a_4 q_{11} q_{32} + a_4 q_{21} q_{33} + a_4 q_{22} q_{33} = \frac{1}{6}$$

$$C := a[2] \cdot q[11] + a[3] \cdot q[21] + a[3] \cdot q[22] + a[4] \cdot q[31] + a[4] \cdot q[32] + a[4] \cdot q[33] \\ = \frac{1}{2}$$

$$a_2 q_{11} + a_3 q_{21} + a_3 q_{22} + a_4 q_{31} + a_4 q_{32} + a_4 q_{33} = \frac{1}{2}$$

$$E := a[1] + a[2] + a[3] + a[4] = 1$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$$

$$q[11] := \frac{1}{2}; q[21] := 0; q[22] := \frac{1}{2}; q[31] := 0; q[32] := 0; q[33] := 1;$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

solve({A, B, C, E}, {a[1], a[2], a[3], a[4]});

$$\left\{ a_1 = \frac{1}{6}, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{6} \right\}$$

RIWAYAT HIDUP

Rizka Ninda Lestari, lahir di Kabupaten Malang pada tanggal 5 April 1998 dan biasa dipanggil Rizka. Penulis tinggal di Kepanjen, Kabupaten Malang. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara dari pasangan bapak Purnadi dan ibu Sundiyah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SD Negeri Sukoraharjo III, Kabupaten Malang. Setelah itu melanjutkan ke MTs Negeri Kepanjen, Kabupaten Malang. Kemudian penulis melanjutkan Pendidikan ke SMK Islam Kepanjen, Kabupaten Malang. Pada tahun 2015, penulis mulai menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada jurusan Matematika.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Rizka Ninda Lestari
NIM : 15610112
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Metode Runge Kutta Orde 4 pada Model Penyebaran Influenza dengan Populasi SIRC
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	24 April 2019	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	26 April 2019	Konsultasi Integrasi Bab I dan Bab II	2.
3.	25 Juni 2019	Konsultasi Pembahasan Model	3.
4.	5 Juli 2019	Konsultasi Hasil Iterasi	4.
5.	13 Agustus 2019	Konsultasi Penurunan	5.
6.	21 Agustus 2019	Konsultasi Solusi Numerik	6.
7.	23 Oktober 2019	Konsultasi Bab III	7.
8.	29 Oktober 2019	Konsultasi Bab I, Bab II, Bab III, dan Bab IV	8.
9.	30 Oktober 2019	ACC Bab I, Bab II, Bab III, dan Bab IV	9.
10.	30 Oktober 2019	ACC Integrasi Bab I, Bab II	10.

Malang, 31 Oktober 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001