ESTIMASI PARAMETER MODEL *COX INGERSOLL ROSS* MENGGUNAKAN METODE *JACKKNIFE*

SKRIPSI

OLEH
ELMIRA DWI YUNIZAR
NIM. 15610091

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

ESTIMASI PARAMETER MODEL *COX INGERSOLL ROSS* MENGGUNAKAN METODE *JACKKNIFE*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Elmira Dwi Yunizar
NIM. 15610091

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

ESTIMASI PARAMETER MODEL *COX INGERSOLL ROSS*
MENGGUNAKAN METODE *JACKKNIFE*

SKRIPSI

Oleh
Elmira Dwi Yunizar
NIM. 15610091

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 05 November 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Abdul Aziz, M.Si	Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19760318 200604 1 002	NIP. 19720604 199903 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

KEMENTERIAN AGAMA FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG JURUSAN MATEMATIKA REPUBLIK INDONESIA

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER MODEL *COX INGERSOLL ROSS*
MENGGUNAKAN METODE *JACKKNIFE*

SKRIPSI

Oleh
Elmira Dwi Yunizar
15610091

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai salah satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 18 November 2019

Penguji Utama	: Dr. Sri Harini, M.Si	....
Ketua Penguji	: Angga Dwi Mulyanto, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Abdul Aziz, M.Si	....
Anggota Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Elmira Dwi Yunizar

NIM : 15610091

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Estimasi Parameter Model *Cox Ingersoll Ross* Menggunakan Metode *Jackknife*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 04 November 2019

Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
TGL. 20
E661FAEF491245023
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Elmira Dwi Yunizar

NIM. 15610091

MOTTO

"Berlomba-lombalah dalam kebaikan"
(Qs. Al-Baqarah:148)

"Anything is Possible"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayah Achmad Sulaimi dan Ibu Nasita tersayang

serta kakak Noviana Ulfa dan adik Deshinta Rahma Hairunnisa tercinta

yang selalu memberikan doa, nasihat, semangat dan kasih sayang yang sangat berarti bagi penulis

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah dan Ibu serta kakak dan adik tercinta yang selalu memberikan do'a, semangat, kasih sayang serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Keluarga besar PPTQ Oemah Alquran Abu Hanifah yang selalu menemani dan memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis.
9. Sahabat-sahabat terbaik penulis yang selalu menemani, membantu, dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
10. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2015 yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terimakasih kenang-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 04 November 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

$\boldsymbol{Y_i}$: Nilai Variabel terikat priode ke – *i*

$\boldsymbol{\beta_1}$: Intersep (titik potong kurva terhadap sumbu Y)

$\boldsymbol{\beta_2}$: Koefisien kemiringan (*slope*)

$\boldsymbol{X_i}$: Variabel bebas periode ke- *i*

$\boldsymbol{\varepsilon_i}$: Error $\left(\boldsymbol{\varepsilon_i} \sim N(0, \sigma^2)\right)$

n : Banyak data penelitian

$\boldsymbol{y}$: Vektor kolom dari variabel terikat Y

$\boldsymbol{x}$: Matriks data dari banyak pengamatan n

$\boldsymbol{\beta}$: Vektor kolom dari parameter yang belum diketahui β_1 sampai β_n

$\boldsymbol{\varepsilon}$: Vektor kolom dari error

$\boldsymbol{k}$: Index dari variabel bebas

$\boldsymbol{Y^i}$: Vektor Y yang sudah dihilangkan data baris ke-i berukuran $(n-1) \times 1$

$\boldsymbol{X^i}$: Matriks X yang sudah dihilangkan data baris ke-i berukuran $(n-1) \times k$

$\boldsymbol{\beta^i}$: Vektor parameter *Jackknife* yang sudah dihilangkan data baris ke-i berukuran $k \times 1$

$\boldsymbol{\varepsilon^i}$: Vektor *error* yang sudah dihilangkan data baris ke-i berukuran$(n-1) \times 1$ untuk $i = 1,2,3 \ldots, n$.

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{j}}$: Penduga dari metode *jackknife*

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{i}}$: Penduga dari metode *Jackknife* yang parameternya sudah dihilangkan pada data baris ke-i

r : Tingkat suku bunga

κ : Kelajuan r menuju level θ

θ : Level rata-rata (*reversion level*)

σ : Suku difusi (simpangan baku sesaat dari r)

ABSTRAK

Yunizar, Elmira Dwi. 2019. **Estimasi Parameter Model *Cox Ingersoll Ross* Menggunakan Metode *Jackknife***. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Kata kunci: estimasi, estimasi *Ordinary Least Square*, *Cox Ingersoll Rpss*, *Jackknife*

Model *Cox Ingersoll Ross* (CIR) merupakan model tingkat suku bunga yang diprediksi bernilai positif. *Ordinary Least Square* (OLS) merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mengestimasi parameter model CIR. Tujuan dari metode OLS adalah meminimumkan jumlah kuadrat error dari setiap nilai observasi. *Jackknife* merupakan metode pendugaan parameter dengan *resampling* yang menghilangkan satu pengamatan dari data dan mengulangi sebanyak jumlah yang ada. Penggunaan metode *Jackknife* adalah untuk mendapatkan estimasi yang baik dari data dengan sampel yang minimum.

Tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui bentuk dan hasil estimasi parameter model CIR menggunakan metode *Jackknife* pada data tingkat suku bunga Bank Indonesia mulai tahun 2011 sampai dengan 2015.

Estimasi parameter model CIR menggunakan metode *Jackknife* terdiri dari beberapa tahap yaitu menentukan solusi rekursif, mengubah persamaan model CIR dalam bentuk regresi, mengubah dalam bentuk matriks dan estimasi parameter dengan metode *Jackknife*.

Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa model CIR dengan menggunakan metode *Jackknife* merupakan model yang sesuai ketika diterapkan pada data tingkat suku bunga Bank Indonesia. Bentuk estimasi parameternya adalah sebagai berikut:

$$dr\ (t) = 0{,}0248\big(6{,}8136 - r(t)\big)dt + 0{,}1165\sqrt{r(t)}dW(t).$$

ABSTRACT

Yunizar, Elmira Dwi. 2019. **Parameter Estimation of Cox Ingersoll Ross Model Using Jackknife Method**. Thesis. . Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Kata kunci: estimation, Ordinary Least Square estimation, Cox Ingersoll Ross, Jackknife

The Cox Ingersoll Ross (CIR) model is a predicted interest rate model that is positive. Ordinary Least Square (OLS) is one of the methods used to estimate the parameters of the CIR model. The purpose of the OLS method is to minimize the number of error squares of each observation value. Jackknife is a parameter estimation method with resampling that removes one observation from the data and repeats along the data. The use of the Jackknife method is to get a good estimation of the data with a minimum sample.

The purpose of this study is to determine the form and results of the estimated parameters of the CIR model using the Jackknife method on Bank Indonesia interest rate data from 2011 to 2015.

The parameter estimation of the CIR model using the Jackknife method consists of several stages, namely determining the recursive solution, transforming the equation of the CIR model in the form of regression, transforming the matrix and estimating the parameters with the Jackknife method.

The results of this study indicate that the CIR model using the Jackknife method is an appropriate model when applied to Bank Indonesia interest rate data. The form of parameter estimation is as follows:

$$dr\,(t) = 0{,}0248\big(6{,}8136 - r(t)\big)dt + 0{,}1165\sqrt{r(t)}dW(t).$$

ملخص

يونيزار، الميرا دوي . 2019. **معيار المعلمة نموذج *Cox Ingersoll Ross* باستخدام طريقة *Jackknife***. البحث الجامعي .شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنول وجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولنا مالك إبراهيم مالنج .المشرف: (1) عبد العزيز، الماجستير.(2) ايفواتي اليسه، الماجستير.

الكلمة الرئيسية: تقدير، تقدير *Ordinary Least Square*، *Cox Ingersoll Ros*، *Jackknife*.

نموذج *Cox Ingersoll Ross* (CIR) هو نموذج لأسعار الفائدة التي من المتوقع أن تكون إيجابية. *Ordinary Least Square* (OLS) هو العادية إحدى الطرق المستخدمة لتقدير معلمات نموذج CIR. الغرض من طريقة OLS هو تقليل عدد مربعات الخطأ لكل قيمة الملاحظة. *Jackknife* هي طريقة تقدير المعلمة مع إعادة أخذ العينات التي تزيل ملاحظة واحدة من البيانات وتكررها. استخدام طريقة *Jackknife* هو الحصول على تقدير جيد للبيانات بأقل عينة.

كان الغرض من هذه الدراسة هو تحديد عملية ونتائج المعلمات المقدرة لنموذج CIR باستخدام طريقة *Jackknife* على بيانات سعر الفائدة لبنك إندونيسيا من 2011 إلى 2015.

يتكون تقدير المعلمة لنموذج CIR باستخدام طريقة *Jackknife* من عدة مراحل وهي تحديد الحل العودية، وتحويل معادلة نموذج CIR في شكل الانحدار، واستخدام المصفوفة وتقدير المعلمات مع طريقة *Jackknife*.

تشير نتائج هذه الدراسة إلى أن نموذج CIR الذي يستخدم طريقة *Jackknife* هو نموذج مناسب عند تطبيقه على بيانات سعر الفائدة في بنك إندونيسيا. شكل تقدير المعلمة كما يلي:

$$dr\,(t) = 0{,}0248\big(6{,}8136 - r(t)\big)dt + 0{,}1165\sqrt{r(t)}dW(t).$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu yang digunakan sebagai alat penting dalam berbagai bidang di seluruh dunia. Matematika terus berkembang sampai sekarang, salah satunya adalah dalam ilmu ekonometri. Ilmu ekonometri ini terdiri dari matematika, statistika, dan ekonomi. Ekonometri merupakan suatu alat analisis yang penting bagi permasalahan ekonomi. Ekonometri juga menggunakan estimasi untuk menunjukkan hubungan antara berbagai variabel ekonomi.

Estimasi merupakan suatu proses yang dapat digunakan untuk menduga hubungan parameter populasi yang belum diketahui dengan menggunakan sampel statistik. Berdasarkan cara penyajiannya estimasi dibagi menjadi dua yaitu estimasi tunggal dan estimasi interval. Sedangkan berdasarkan jenis parameternya terdapat empat jenis yaitu estimasi rata-rata, estimasi proporsi, estimasi varians, dan estimasi simpangan baku (Hasan, 2002).

Menurut Boediono (2014), tingkat suku bunga merupakan suatu harga yang diperoleh dari penggunaan dana investasi yang dilakukan dalam periode tertentu. Salah satu indikator untuk menentukan seseorang dalam melakukan investasi atau menabung adalah tingkat suku bunga. Tingkat suku bunga yang tetap untuk menentukan harga dalam suatu investasi tidaklah sulit. Tetapi pada kenyataannya, pergerakan dalam tingkat suku bunga berubah-ubah sepanjang waktu secara tidak pasti atau disebut dengan proses Stokastik (Budiman dkk, 2015). Sehingga dalam proses stokastik ini dibutuhkan suatu model pergerakan dalam tingkat suku bunga.

Salah satu model dalam tingkat suku bunga yaitu model *Cox Ingersoll Ross* (CIR). Model CIR pertama kali diperkenalkan pada tahun 1985 oleh Cox, Ingersoll, dan Ross. Model ini dapat menjamin prediksi tingkat suku bunganya bernilai positif (Filipovic, 2009). Model CIR juga mempunyai sifat *mean reversion* yaitu kecenderungan dari tingkat suku bunga yang kembali ke nilai rata-rata jangka panjang tingkat suku bunga. Apabila terjadi suatu proses tingkat suku bunga yang naik dan turun secara terus menerus, maka tingkat suku bunga tersebut dalam jangka panjang berada pada sekitar *mean reversion level*. Model CIR mempunyai beberapa parameter yang belum diketahui nilainya dan perlu diestimasi (Hull, 1946).

Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untuk mengestimasi parameter pada model CIR. Salah satu metode tersebut adalah metode *Jackknife*. Tahun 1949 Quenouille memperkenalkan metode non parametrik yaitu metode *Jackknife* yang bertujuan untuk mengestimasi bias dari suatu estimator dengan menghapus suatu observasi dari sampel asli. Sampel yang didapat digunakan untuk menghitung nilai estimator. Metode *Jackknife* juga digunakan untuk mengestimasi variansi sebuah estimasi parameter. Metode *Jackknife* dalam menyelesaikan masalah estimasi parameter menghasilkan tingkat akurasi yang baik (Sprent, 1989).

Al-Quran telah menjelaskan tentang estimasi atau bisa diartikan sebagai pendugaan. Hal ini terdapat dalam surat Al-Jaatsiyah ayat 24 sebagai berikut:

وَقَالُوْا مَا هِيَ اِلَّا حَيَاتُنَا الدُّنْيَا نَمُوْتُ وَنَحْيَا وَمَا يُهْلِكُنَآ اِلَّا الدَّهْرُ ۚ وَمَا لَهُمْ بِذٰلِكَ مِنْ عِلْمٍ ۚ اِنْ هُمْ اِلَّا يَظُنُّوْنَ ﴿٢٤﴾

"Dan mereka berkata, " kehidupan ini tidak lain hanyalah kehidupan di dunia saja, kita mati dan kita hidup dan tidak ada yang membinasakan kita selain masa", dan mereka sekali-kali tidak punya pengetahuan tentang itu, mereka tidak lain hanya menduga-duga saja" (QS. Al-Jaatsiyah/45:24).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa ada kaitannya dengan metode estimasi yang terdapat pada akhir ayat yaitu dapat memperkirakan atau menduga saja dan tidak diketahui seberapa tepat pendugaannya. Ayat tersebut menjelaskan orang-orang kafir dan musyrik hanya menduga-duga saja. Mereka beranggapan bahwa kehidupan hanya di dunia ini saja, yang mematikan dan membinasakan manusia adalah masa dan tidak ada kekuatan lain.

Budiman dkk (2015) telah melakukan penelitian tentang model tingkat suku bunga CIR menggunakan metode MLE pada data tingkat suku bunga Bank Indonesia. Penelitian tersebut menghasilkan 3 nilai estimasi parameter yaitu rata-rata jangka panjang dari tingkat suku bunga, kecepatan proses menuju rata-rata jangka panjang dan volatilitas antara fluktuasi tingkat suku bunga. Nilai estimasi tersebut diperoleh dari proses metode MLE dengan metode Newton Raphson.

Mariana dkk (2015) telah melakukan penelitian juga tentang model tingkat suku bunga CIR dengan menggunakan metode *Kalman Filter*. Estimasi Parameter dengan metode *Kalman Filter* digunakan untuk menentukan harga *zero coupon bound.* Nilai awal parameter diperoleh dari hasil estimasi dengan OLS. Sehingga penelitian ini menghasilkan estimasi yang baik pada tingkat suku bunga harian model CIR. Hal ini dapat diketahui dengan melihat hasil estimasi grafik dan nilai eror yang kecil.

Noeryanti dan Herindani (2016) telah melakukan penelitian tentang estimasi parameter pada regresi berganda dengan menggunakan metode *resampling Bootstrap* dan *Jackknife*. Penelitian ini menggunakan *standard error* untuk mengetahui metode yang lebih baik dalam mengestimasi parameter model regresi. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa metode *resampling Jackknife* memberikan hasil estimasi yang lebih baik dibandingkan dengan metode *resampling Bootstrap*.

Berdasarkan dari hasil penelitian sebelumnya, peneliti tertarik untuk membahas tentang estimasi parameter tingkat suku bunga model CIR dengan menggunakan metode *Jackknife* dan data yang digunakan adalah data tingkat suku bunga Bank Indonesia.

1.2 Rumusan Masalah

Penelitian ini mengangkat beberapa rumusan masalah yaitu:

1. Bagaimana bentuk estimasi parameter model CIR menggunakan metode *Jackknife*?
2. Bagaimana hasil estimasi parameter model CIR pada tingkat suku bunga Bank Indonesia menggunakan metode *Jackknife*?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui bentuk estimasi parameter model CIR menggunakan metode *Jackknife*.
2. Untuk mengetahui hasil estimasi parameter model CIR pada tingkat suku bunga Bank Indonesia dengan menggunakan metode *Jackknife*.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Data yang digunakan adalah data tingkat bunga Bank Indonesia mulai Januari 2011 sampai dengan Januari 2015.
2. Hanya menggunakan metode *Jackknife* Terhapus-1.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Dapat memahami bentuk estimasi parameter model CIR menggunakan metode *Jackknife*.
2. Dapat memahami cara memperoleh hasil estimasi parameter model CIR pada tingkat suku bunga Bank Indonesia dengan menggunakan metode *Jackknife*.

1.6 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah pemahaman dalam penelitian ini secara keseluruhan, maka terdapat 5 bab dalam sistematika penulisan ini yaitu

Bab I Pendahuluan

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, dan sistematika penelitian.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan tentang teori yang berkaitan dengan penelitian ini yaitu model CIR, estimasi, motede *Jackknife* dan lainnya.

Bab III Metodologi Penelitian

Bab ini menjelaskan tentang pendekatan penelitian, jenis dan sumber data, variabel penelitian, dan metode data analisis.

Bab IV Hasil dan Pembahasan

Bab ini menjelaskan tentang cara mengestimasi model tingkat suku bunga CIR metode *Jackknife,* sehingga memperoleh hasil estimasi parameter model CIR serta penerapannya dalam kehidupan.

Bab V Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran dari pembahasan.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Turunan

Turunan merupakan suatu limit unik yang bentuknya sebagai berikut:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Digunakan notasi $f'(x)$ dibaca f aksen x untuk menyatakan turunan yang didefinisikan oleh limit tersebut. Proses penentuan turunan fungsi $f(x)$ disebut pendiferensialan (Razali, 2010).

2.1.1 Aturan dalam turunan

Adapun aturan-aturan dalam menentukan turunan yaitu (Razali, 2010):

a. Aturan Fungsi Konstanta

   Jika $f(x) = c$ dimana c adalah konstanta, maka untuk sebarang x berlaku $f'(x) = 0$

b. Aturan Pangkat

   Jika $f(x) = x^n$ dimana n sebarang bilangan rasional, maka turunannya adalah:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

c. Aturan Jumlah-Selisih

   Jika diberikan fungsi $f(x) = g(x) \pm h(x)$ dimana $g(x)$ dan $h(x)$ terdiferensialkan, maka

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

   turunan dari jumlah atau selisih dua fungsi adalah sama dengan jumlah atau selisih dari turunan keduanya. Aturan ini berfungsi pada tiga fungsi atau lebih.

d. Aturan Perkalian

Jika $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ dimana $g(x)$ dan $h(x)$ dapat diturunkan, maka turunan dari $f(x)$ adalah:

$$f'(x) = g(x) \cdot h'(x) \pm g'(x) \cdot h(x) \tag{2.1}$$

2.1.2 Turunan fungsi eksponensial dan fungsi logaritma

Fungsi eksponensial dan fungsi logaritma dengan basis e ($e \approx \sim 2{,}7182$ ... adalah bilangan natural). Fungsi eksponensial natural e^x adalah yang terpenting begitupun dengan logaritma. Turunan fungsi eksponensial dan logaritma diantaranya (Razali, 2010):

a. Turunan fungsi eksponensial $y = e^x$

$$\text{Jika } f(x) = e^x \text{ maka } f'(x) = e^x$$

b. Turunan fungsi eksponensial $y = e^{g(x)}$

Untuk menentukan fungsi turunan eksponensial yang pangkatnya adalah fungsi x, seperti $y = e^{g(x)}$ dimana $g(x)$ adalah fungsi x, gunakanlah aturan rantai:

$$\text{Jika } y = e^{g(x)} \text{ maka, } \frac{dy}{dx} = e^{g(x)} \cdot g'(x) \tag{2.2}$$

c. Turunan fungsi eksponensial $y = a^x$

Menentukan turunan fungsi eksponensial dengan basis a dimana $y = a^x$. Disini a adalah sebarang bilangan real yang nilainya lebih besar dari nol dan $a \neq e$.

$$\text{Jika } y = a^x \text{maka } \frac{dy}{dx} = a^x \cdot \ln a$$

Kemudian

$$\text{Jika } y = a^{g(x)} \text{ maka, } \frac{dy}{dx} = \left(a^{g(x)} \ln a\right) \cdot g'(x)$$

d. Turunan Fungsi Logaritma $y = \ln x$

Fungsi logaritma adalah logaritma dengan basis bilangan natural e

$$\text{Jika } y = \ln x \text{ maka, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

e. Turunan Fungsi Logaritma $y = \ln[g(x)]$

$$\text{Jika } y = \ln[g(x)] \text{ maka turunanya adalah } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$$

2.2 Persamaan Diferensial Biasa

Menurut Finizio (1982) persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan-turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Meskipun disebut sebagai "persamaan turunan", namun istilah "persamaan diferensial" (*aequatio differentialis*) telah dikemukakan oleh Leibniz pada tahun 1676. Menurut kartono (2012) dengan memperhatikan banyaknya variabel bebas yang terlibat, Persamaan Diferensial Biasa (PDB) adalah apabila ada satu variabel bebas yang terlibat. Bentuk umum PDB adalah:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{2.3}$$

Persamaan (2.3) menunjukkan bahwa terdapat hubungan antara variabel bebas x dan variabel terikat y beserta turunan-turunannya dalam bentuk himpunan persamaan yang secara identik sama dengan nol yang menyatakan model matematika dari fenomena perubahan yang terjadi. Sebuah persamaan diferensial disebut mempunyai orde n jika orde turunan tertinggi yang terlibat adalah n, sedangkan jika turunan dengan orde tertinggi itu berderajat k maka persamaan itu dinamakan persamaan diferensial berderajat k. Contoh dari PDB sebagai berikut:

$$y' + xy = 3 \tag{2.4}$$

$$y'' + 5y' + 6y \tag{2.5}$$

$$y'' = (1 + y'^2)(x^2 + y^2) \tag{2.6}$$

Dalam contoh persamaan (2.4) - (2.6) fungsi yang tidak diketahui adalah y dan fungsi satu peubah bebasnya adalah x, dengan $y = f(x)$. Argumen x dalam $f(x)$ beserta turunanya biasanya dihilangkan untuk menyederhanakan notasi. Simbol $y' = f'(x)$ menunjukkan turunan pertama dan $y'' = f''(x)$ adalah turunan kedua dan seterusnya. Dikarenakan contoh (2.4) - (2.6) hanya memiliki satu peubah bebas, maka dikatakan PDB (Finizio, 1982).

2.3 Stokastik

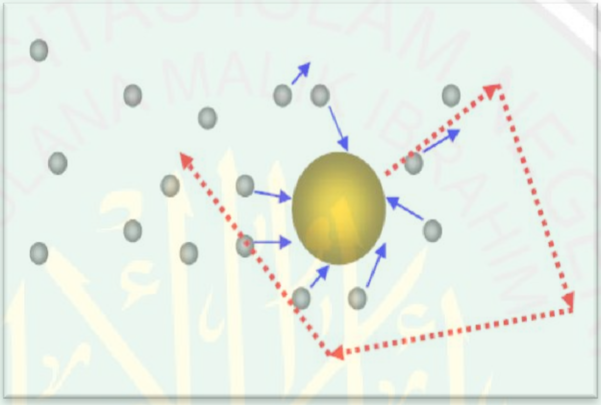
Pemanfaatan model yang menggunakan probabilitas lebih diminati dibanding model yang deterministik. Pengamatan dilakukan pada saat-saat yang berbeda, tidak dilakukan pada suatu periode waktu tertentu, sehingga menyangkut masalah probabilitas. Banyak fenomena fisika, sosial, teknik dan manajemen saat ini diselidiki merupakan fenomena yang random dengan suatu probabilitas. Proses Stokastik (*Stochastic Processes*) adalah himpunan variabel random yang merupakan fungsi dari "waktu" (*time*). Parameter "waktu" diartikan dalam arti luas. Proses stokastik sering juga disebut Proses Random (*Random Processes*) (Srinadi,2013).

2.3.1 Gerak *Brown*

Gerak *Brown* adalah gerak acak atau gerak terus-menerus dari partikel saat dimasukkan dalam suatu fluida (cair ataupun gas). Gerak ini dinamakan gerak *Brown* karena yang pertama kali mengamati adalah seorang botanis asal

Skotlandia bernama Robert Brown pada tahun 1827. Menggunakan mikroskop, Brown menemukan gejala gerak acak saat mengamati partikel dari serbuk sari ketika dilarutkan dalam air dimana partikel menyebar ke segala arah dengan lintasan yang tidak teratur. Brown kemudian mengambil kesimpulan bahwa lintasan dari gerak partikel sangat tidak teratur dan gerakan akan semakin cepat bila temperatur dinaikkan (Taylor dan Karlin,1998).

Perhatikan gambar skema dari gerak *Brown* berikut:



Gambar 2.1 Skema Gerak Brown

Gambar 2.1 merupakan skema dari Gerak Brown. Misalkan partikel yang terlihat pada gambar tersebut, bergerak naik kekanan, turun ke kanan, turun kekiri, dan naik kekiri yang ditunjukkan dengan anak panah merah secara acak. Hal tersebut menunjukkan partikel-partikel zat cair ataupun gas bergerak terus menerus secara acak atau tidak beraturan.

Setelah Brown, Seorang peneliti bernama Gouy melakukan eksperimen untuk membuktikan keberadaan gerak *Brown* dan mendapatkan kesimpulan sebagai berikut:

1. Gerakan ini sangat tidak teratur, gabungan dari translasi dan rotasi dan lintasannya nampak tidak mempunyai garis singgung.

2. Dua partikel nampak bergerak secara saling bebas, bahkan ketika mereka mendekati satu sama lain dalam jarak yang lebih dekat dibandingkan diameter mereka.
3. Gerakan ini semakin cepat untuk partikel yang semakin kecil.
4. Gerakan ini tidak dipengaruhi oleh komposisi dan rapatan partikel.
5. Gerakan ini semakin cepat dalam fluida yang viskositasnya semakin kecil.
6. Gerakan ini semakin cepat pada suhu yang semakin tinggi.
7. Gerakan ini tidak pernah berhenti.

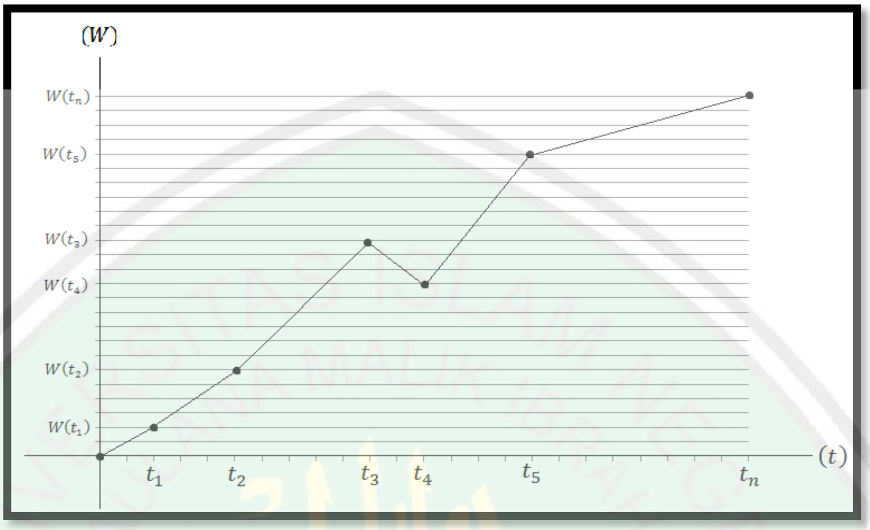
Penelitian dari kedua ilmuwan tersebut tidak memberikan penjelasan mengenai penyebab gerak *Brown* namun hanya menyatakan sifat-sifat gerak Brown tersebut. Penjelasan mengenai asal usul gerak *Brown* pertama kali dilakukan oleh Einstein. Melalui disertasinya. Einstein mengasumsikan bahwa gerak acak dari partikel-partikel serbuk sari tersebut berasal dari tumbukan molekul-molekul penyusun fluida yang bergerak terus-menerus dalam fluida dan pergerakan dari partikel serbuk sari sangat tidak teratur sehingga hanya dapat dijelaskan menggunakan konsep probabilistik (Taylor dan Karlin,1998)

2.3.2 Proses *Wiener*

Menurut Wiersema (2008) proses *Wiener* adalah bentuk dari proses stokastik pada waktu kontinu, terdefinisi pada ruang keadaan, tidak ada pengaruh gaya luar serta berangkat dari waktu dan posisi 0. Sesuai definisi diatas, proses stokastik $W(t)$disebut gerak Brown jika memenuhi:

1. $W(t) = 0$ untuk $t = 0$, maka $W(0) = 0$

2. $W(t)$ memiliki kenaikan yang independen, yakni untuk setiap $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n, W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ merupakan kumpulan peubah acak yang independen atau saling bebas.



Gambar 2.2 Grafik Kenaikan yang Independen

Dari grafik diatas terlihat kenaikan yang dimiliki tidak selalu naik, kenaikan yang dimiliki grafik tersebet bersifat independen atau kenaikannya bebas sehingga bisa turun bisa saja naik.

3. Untuk setiap pergerakan atau kenaikan yang terjadi pada interval waktu dengan panjang $0 \leq t < t + dt$ hampir semua lintasan sampel dari $W(t + dt) - W(t) = dW(t)$ berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi sama dengan panjang interval waktu tersebut.

2.3.3 Proses Stokastik

Menurut Ross (2010) Sebuah proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ adalah kumpulan variabel acak. Yaitu, untuk setiap $t \in T, X(t)$ adalah variabel acak. t didefinisikan sebagai waktu. $X(t)$ didefinisikan sebagai proses pada waku t.

Contoh untuk proses stokastik adalah $X(t)$ merupakan jumlah total pelanggan yang telah memasuki supermarket pada waktu t.

Himpunan T disebut himpunan indeks dari proses. Ketika T adalah himpunan yang dapat dihitung, maka proses stokastik dikatakan sebagai proses diskrit. Contoh, $\{X_n, n = 0,1, ...\}$ adalah proses stokastik diskrit yang indeksnya oleh bilangan bulat non negatif. Ketika T adalah interval pada garisnya, maka proses stokastik dikatakan sebagai proses waktu kontinu. Contoh $\{X(t), t \geq 0\}$ adalah proses stokastik kontinu yang indeksnya oleh bilangan real non-negatif (Ross, 2010).

Menurut Wiersema (2008) sebuah proses stokastik $\{W(t), t \geq 1\}$ disebut sebagai proses *Wiener* jika memenuhi beberapa syarat, salah satunya yaitu fungsi kepadatan peluang dari variabel random yang berdistribusi normal, dengan rata-rata adalah μ dan variansi σ^2 adalah

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Kumpulan dari sebuah proses *Wiener* pada interval $[t, t + dt]$ berdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan variansi sama dengan panjang interval. Fungsi distribusi dari kenaikan tersebut ditulis sebagai berikut:

$$P[W(t+dt) - W(t) \leq a] = \int_{x=-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{dt}\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{dt}}\right)^2\right] dx$$

Kovarians dari proses *Wiener* pada waktu s dan t dimana $s < t$ merupakan nilai harapan dari variabel random tersebut, yaitu:

$$Cov[W(s), W(t)] = E[\{W(s) - E[W(s)]\}\{W(t) - E[W(t)]\}]$$

Jika mengikuti syarat dari proses *Wiener* nilai dari $E[W(s)]$ dan $E[W(t)]$ adalah 0, sehingga

$$Cov[W(s), W(t)] = E[W(s)W(t)]$$

Dengan sedikit modifikasi pada $W(t)$ maka dapat ditulis:

$$W(t) = W(s) + \{W(t) — W(s)\}$$

Maka

$$\begin{aligned}
E[W(s)W(t)] &= Cov(W(s)W(t)) \\
&= E[\{W(s) - E(W(s))\}\{W(t) - E(W(t))\}] \\
&= E[\{W(s) - E(W(s))\}\{W(s) + (W(t) - W(s)) - E(W(s) \\
&\qquad + (W(t) - W(s))\}] \\
&= E[W(s)^2 + (W(s)W(t) - W(s)^2) - E(W(s)^2 \\
&\qquad + (W(s)W(t) - W(s)^2) - E(W(s)^2 \\
&\qquad + E(W(s)W(t) - W(s)^2) + (E(W(s))^2 \\
&\qquad + E(W(s)W(t) - W(s)^2)] \\
&= E[W(s)^2 + (W(s)W(t) - W(s)) - 0] \\
&= E[W(s)^2 + (W(s)W(t) - W(s))] \\
&= E[W(s)^2 + W(s)\{W(t) - W(s)\}] \\
&= E[W(s)^2] + E[W(s)]E[W(t) - W(s)] \\
&= s + 0 \\
&= s
\end{aligned}$$

Apabila $t < s$ maka $E[W(s)W(t)] = t$ untuk sembarang waktu s dan t sehingga ditulis

$$E[W(s)W(t)] = \min(s, t)$$

2.3.4 Proses Ito

Jenis selanjutnya dari proses stokastik dikenal dengan proses ito. Proses ito adalah proses wiener umum diman x dan waktu t, yaitu (Hull, 1946) :

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dW(t)$$

Baik laju drift maupun laju varians dari proses ito dapat berubah dari waktu ke waktu. Dalam interval waktu yang kecil antara t dan $t + \Delta t$, variabelnya berubah dari x ke $x + \Delta x$, dimana

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

Hubungan ini melibatkan perkiraan yang kecil. Diasumsikan bahwa laju drift dan laju varians x tetap konstan, nilai-nilainya sama pada waktu t, selama interval waktu antara t dan $t + \Delta t$ (Hull, 1946).

Menurut Øksendal (2000) bentuk umum dari persamaan diferensial stokastik adalah sebagai berikut:

$$dXt = b(t, Xt)dt + \sigma(t, Xt)dWt \quad (2.7)$$

atau bisa juga ditulis dalam bentuk integral stokastik

$$\int_0^t dX(t) = \int_0^t b\big(s, X(s)\big)ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dWs$$

$$X(t) - X(0) = \int_0^t b\big(s, X(s)\big)ds + \int_0^t \sigma\big(s, X(s)\big)dWs$$

$$Xt = X(0) + \int_0^t b(s, Xs)ds + \int_0^t \sigma(s, Xs)dWs$$

2.4 Regresi Linier

Bagian ini akan membahas tentang regresi linier dimana terdapat satu variabel terikat (Y) dan satu atau lebih variabel bebas (X). Dalam model ini digunakan untuk mengetahui pengaruh antara variabel terikat dan variabel bebasnya. Adapun pembagian regresi linier sebagai berikut (Gujarati, 2004):

a. Regresi Linier Sederhana

Regresi yang paling dasar adalah model regresi linier sederhana yang diberikan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i} \tag{2.8}$$

dimana:

$\boldsymbol{Y_i}$ = Nilai Variabel terikat priode ke – *i*

$\boldsymbol{\beta_1}$ = Intersep (titik potong kurva terhadap sumbu *Y*)

$\boldsymbol{\beta_2}$ = Koefisien kemiringan (*slope*)

$\boldsymbol{X_i}$ = Variabel bebas periode ke- *i*

$\boldsymbol{\varepsilon_i}$ = *error* $(\boldsymbol{\varepsilon_i} \sim N(0, \sigma^2))$

Untuk $i = 1,2,3 \dots n$, sehingga diperoleh:

$$\begin{array}{cccc} Y_1 = \beta_1 & + \beta_2 X_1 & + \varepsilon_1 \\ Y_2 = \beta_1 & + \beta_2 X_2 & + \varepsilon_2 \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_n = \beta_1 & + \beta_2 X_n & + \varepsilon_n \end{array}$$

Kemudian dinotasikan dalam bentuk berikut:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Dari bentuk matriks tersebut diperoleh bentuk sederhana:

$$\boldsymbol{y = X\beta + \varepsilon} \tag{2.9}$$

dimana:

$\boldsymbol{y}$ = vektor kolom dari variabel terikat Y

$\boldsymbol{X}$ = matriks data dari banyak pengamatan n

$\boldsymbol{\beta}$ = vektor kolom dari parameter yang belum diketahui β_1 sampai β_n

$\boldsymbol{\varepsilon}$ = vektor kolom dari *error*

b. Regresi Linier Berganda

Regresi linier berganda merupakan bentuk persamaan yang digunakan untuk menunjukkan pengaruh antara satu variabel terikat (Y) dan satu atau lebih variabel bebas (X). Dengan rumus sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i} \tag{2.10}$$

dimana:

$\boldsymbol{Y_i}$ = Variabel terikat peride ke-i

$\boldsymbol{\beta_1}$ = intersep

$\boldsymbol{\beta_2}, \ldots . \boldsymbol{\beta_k}$ = Koefisien regresi

$\boldsymbol{X_2}, \ldots . \boldsymbol{X_k}$ = Variabel bebas periode ke-i

$\boldsymbol{\varepsilon_i}$ = *error* ($\boldsymbol{\varepsilon_i} \sim N(0, \sigma^2)$)

n = banyak data penelitian

k = index dari variabel bebas

Untuk $i = 1,2,3 \ldots n$, sehingga diperoleh:

$$\begin{gathered} Y_1 = \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \cdots + \beta_k X_{k1} + \varepsilon_1 \\ Y_2 = \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \cdots + \beta_k X_{k2} + \varepsilon_2 \\ \vdots \\ Y_n = \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \cdots + \beta_k X_{kn} + \varepsilon_n \end{gathered}$$

Kemudian dinotasikan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & \dots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & \dots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & \dots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Dari bentuk matriks tersebut diperoleh bentuk sederhana:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.11}$$

dimana:

$\boldsymbol{y}$ = vektor kolom dari variabel terikat Y

$\boldsymbol{X}$ = matriks data dari banyak pengamatan n pada index $k-1$ pada variabel X_2 sampai X_k

$\boldsymbol{\beta}$ = vektor kolom dari parameter yang belum diketahui β_1 sampai β_n

$\boldsymbol{\varepsilon}$ = vektor kolom dari *error*

2.5 Estimasi

Estimasi (*estimation*) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau memperkirakan hubungan parameter populasi yang tidak diketahui berdasarkan informasi dari sampel. Dalam hal ini, peubah acak akan diambil dari populasi yang bersangkutan. Sehingga, keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002).

Penduga (*estimator*) adalah suatu statistik (harga sampel) yang digunakan untuk menduga suatu parameter. Dengan pedugaan dapat diketahui seberapa jauh suatu parameter populasi yang tidak dietahui berada di sekitar sampel. Secara umum, parameter dinyatakan dengan θ dan penduga dinyatakan dengan $\hat{\theta}$. Berikut ini beberapa parameter dan penduganya:

Tabel 2.1 Parameter dan penduganya

Parameter (θ)	Penduga ($\hat{\theta}$)
μ (rata-rata populasi)	$\bar{X}$ atau $\hat{\mu}$
π (populasi/presentase)	$\hat{p}$
σ^2 (varians)	S^2 atau $\hat{S}^2$
σ (simpangan baku)	S atau $\hat{S}$
ρ (koefisien korelasi)	ρ atau $\hat{r}$
β (koefisien regresi)	β atau $\hat{b}$

Karena penduga merupakan fungsi dari nilai-nilai sampel, maka penduga termasuk variabel acak dan memiliki distribusi pemilihan sampel (Hasan, 2002).

Terdapat beberapa sifat untuk menentukan apakah sebuah penduga tergolong baik atau tidak. Suatu penduga dikatakan baik apabila memiliki sifat berikut:

a. Tak Bias (*Unbiased*)

Estimator tidak bias jika, untuk setiap ukuran sampel n, nilai rata-rata estimator atas semua sampel yang mungkin adalah nilai parameter populasi. Semua estimator adalah jumlah acak. Untuk beberapa sampel, penaksiran terlalu besar, dan untuk sampel lain, penaksir yang sama akan terlalu kecil. Rata-rata, estimator yang tidak bias akan tepat.

Misalkan T adalah statistik sampel, digunakan sebagai penduga untuk parameter populasi θ, jadi $\hat{\theta} = T$. Bias dari estimator T adalah $E[T] - \theta$, yang merupakan nilai rata-rata yang diharapkan atau T minus nilai sebenarnya dari parameter populasi θ. Estimator T dikatakan tidak bias jika $E[T] = \theta$ (Sleeper, 2006).

b. Konsisten

Estimator konsisten jika n bertambah besar, penaksirannya mendekati nilai parameter populasi sebenarnya. Jika sampel ukuran tak terbatas dapat dianalisis, penaksir yang konsisten memberikan nilai parameter populasi yang tepat, sedangkan penaksir yang tidak konsisten tidak akan memberikan nilai parameter populasi yang tepat.

Misalkan sampel ukuran n dipilih dari suatu populasi. θ menjadi parameter populasi, dan biarkan T_n menjadi penaksir θ berdasarkan sampel ukuran n, T_n membentuk urutan penaksiran n bertambah besar. Urutan estimator T_n dikatakan konsisten jika untuk setiap nilai $a > 0$ dan untuk setiap kemungkinan θ. $P[|T_n - \theta| > a] \to 0$ dengan $n \to \infty$ (Sleeper, 2006).

2.5.1 Metode *Ordinary Least Square*

Ordinary Least Square (OLS) adalah regresi mengggunakan metode kuadrat kesalahan terkecil yang sederhana. OLS adalah keluarga estimator *Least Square* yang paling sederhana. Estimator ini memiliki banyak asumsi yang harus dipenuhi agar didapatkan hasil regresi yang tidak bias, konsisten, dan efisien. Metode estimator *Least Square* pada prinsipnya menentukan nilai parameter dengan cara meminimumkan kuadrat kesalahan (Ekananda, 2005).

Menurut Aziz (2010), misalkan model statistik linier

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\beta_1 x_1} + \boldsymbol{\beta_2 x_2} + \cdots + \boldsymbol{\beta_k x_k} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.12}$$

dimana variabel terikat $\boldsymbol{y}$ bergantung kepada variabel bebas $\boldsymbol{x}$ sebesar $\boldsymbol{\beta}$, dengan sejumlah n data observasi maka model linier ini dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

sehingga model ini dapat disederhanakan sebagai

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.13}$$

Menurut Aziz (2010), berkaitan dengan model regresi yang telah dikemukakan sebelumnya, Gauss telah membuat asumsi mengenai variabel $\boldsymbol{\varepsilon}$ sebagai berikut:

1. Nilai rata-rata atau harapan variabel $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah sama dengan nol atau

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0$$

yang berarti nilai bersyarat $\boldsymbol{\varepsilon}$ yang diharapkan adalah sama dengan nol dimana syaratnya yang dimaksud tergantung pada nilai $\boldsymbol{x}$. Dengan demikian, untuk nilai $\boldsymbol{x}$ tertentu mungkin saja nilai $\boldsymbol{\varepsilon}$ sama dengan nol, mungkin positif atau negatif, tetapi untuk banyak nilai $\boldsymbol{x}$ secara keseluruhan nilai rata-rata $\boldsymbol{\varepsilon}$ diharapkan sama dengan nol.

2. Tidak terdapat korelasi serial atau autokorelasi antar variabel untuk setiap observasi. Dengan demikian dianggap bahwa tidak terdapat hubungan yang positif atau negatif antara $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}_j$, dan tidak terdapat heteroskedastisitas antar variabel $\boldsymbol{\varepsilon}$ untuk setiap observasi, atau dikatakan bahwa setiap variabel $\boldsymbol{\varepsilon}$ memenuhi syarat homoskedastisitas. Artinya variabel $\boldsymbol{\varepsilon}$ mempunyai variansi yang positif dan konstan yang nilainya σ^2, yaitu

$$Var(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j) = \begin{cases} \sigma^2, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

atau dalam bentuk matriks

$$cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} var(\varepsilon_1) & cov(\varepsilon_1, \varepsilon_2) & \dots & cov(\varepsilon_1, \varepsilon_n) \\ cov(\varepsilon_2, \varepsilon_1) & var(\varepsilon_2) & \dots & cov(\varepsilon_2, \varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(\varepsilon_n, \varepsilon_1) & cov(\varepsilon_n, \varepsilon_2) & \dots & var(\varepsilon_n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

sehingga asumsi kedua ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = E\left[\left(\boldsymbol{\varepsilon} - E(\boldsymbol{\varepsilon})\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon} - E(\boldsymbol{\varepsilon})\right)'\right] = E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \sigma^2 I_n$$

3. Variabel $\boldsymbol{x}$ dan variabel $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah saling tidak tergantung untuk setiap observasi sehingga

$$\begin{aligned} Cov(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i) &= E\left[\left(\boldsymbol{x}_i - E(\boldsymbol{x}_i)\right)\left(\boldsymbol{\varepsilon}_i - E(\boldsymbol{\varepsilon}_i)\right)\right] \\ &= E[(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{\varepsilon}_i - 0)] \\ &= E[(\boldsymbol{x}_i - \bar{x})\boldsymbol{\varepsilon}_i] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dari ketiga asumsi ini diperoleh,

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{y}) &= E(\boldsymbol{X\beta}) + E(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= \boldsymbol{X\beta} + 0 \\ E(\boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{X\beta} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} Cov(\boldsymbol{y}) &= E\left[\left(\boldsymbol{y} - E(\boldsymbol{y})\right)\left(\boldsymbol{y} - E(\boldsymbol{y})\right)'\right] \\ &= E[(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})'] \\ &= E[(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{X\beta})(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{X\beta})'] \\ &= E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'] \\ &= \sigma^2 I_n \end{aligned}$$

Misalkan sampel untuk $\boldsymbol{y}$ diberikan. Maka aturan main yang memungkinkan pemakaian sampel tadi untuk mendapatkan taksiran dari $\boldsymbol{\beta}$ adalah dengan membuat $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}$ sekecil mungkin. Dengan aturan main ini, diharapkan akan menghasilkan komponen sistematik yang lebih berperan dari pada komponen stokastiknya. Karena bila komponen stokastik yang lebih berperan artinya hanya diperoleh sedikit informasi tentang **y**. Dengan kata lain, $\boldsymbol{X}$ tidak mampu menjelaskan $\boldsymbol{y}$. Untuk tujuan ini maka perlu memilih parameter β sehingga,

$$S = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) \tag{2.14}$$

sekecil mungkin (minimal) (Aziz, 2010).

Persamaan (2.14) adalah skalar, sehingga komponen-komponennya juga skalar. Akibatnya, transpose skalar tidak merubah nilai skalar tersebut. Sehingga S dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} S &= (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) \\ &= (\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}')(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) \\ &= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}'\boldsymbol{X\beta} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} \\ &= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{y}'\boldsymbol{X\beta})' - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} \\ &= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} \\ &= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - 2\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} \end{aligned}$$

Untuk meminimumkannya dapat diperoleh dengan melakukan turunan parsial pertama S terhadap $\boldsymbol{\beta}$ (Aziz, 2010):

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\boldsymbol{\beta}} &= 0 - 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})' \\ &= -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} \\ &= -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} \end{aligned}$$

dan menyamakannya dengan nol diperoleh

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

yang dinamakan sebagai persamaan normal, dan

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ols} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \tag{2.15}$$

yang dinamakan sebagai penaksir (estimator) parameter $\boldsymbol{\beta}$ secara kuadrat terkecil (*Ordinary Least Square*, OLS).

Selanjutnya, karena mencari nilai minimum dari errornya, maka dilakukan turunan parsial kedua S terhadap $\boldsymbol{\beta}$ yang harus bernilai lebih besar dari nol :

$$\frac{d}{d\boldsymbol{\beta}'}\left(\frac{dS}{d\boldsymbol{\beta}}\right) = \frac{dS}{d\boldsymbol{\beta}'}(-2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$= 0 + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$$

$$= 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$$

dimana $2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} > 0$.

2.5.2 Metode *Jackknife*

Tahun 1949 Quenouille memperkenalkan metode non parametrik untuk mengestimasi bias yang dikenal sebagai *Jackknife*. Metode *Jackknife* juga digunakan untuk mengestimasi variansi sebuah estimasi parameter (Sprent, 1989). Prinsip dari metode *Jackknife* adalah menghilangkan satu buah data dan mengulanginya sebanyak sampel yang ada. Prosedur *Jackknife* untuk mengestimasi parameter regresi dalam menghilangkan satu buah data dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut (Sahinler dan Topus, 2007):

a. Menghilangkan satu baris dari vektor atau satu pengamatan pada data yaitu menghilangkan baris pertama dari vektor sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1(n-1)} & x_{2(n-1)} & \cdots & x_{k(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} \end{bmatrix}$$

dari matriks tersebut diperoleh model linier sebagai berikut:

$$\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{i}} \tag{2.16}$$

dimana

$\boldsymbol{y^i}$: vektor y yang sudah dihilangkan data baris ke-i berukuran $(n-1) \times 1$

$\boldsymbol{X^i}$: matriks X yang sudah dihilangkan data baris ke-i berukuran $(n-1) \times k$

$\boldsymbol{\beta^i}$: vektor parameter *Jackknife* yang sudah dihilangkan data baris ke-i berukuran $k \times 1$

$\boldsymbol{\varepsilon^i}$: vektor *error* yang sudah dihilangkan data baris ke-i berukuran $(n-1) \times 1$

untuk $i = 1,2,3 \dots, n$.

b. Penduga parameter $\boldsymbol{\beta^i}$ dicari menggunakan metode OLS. Prinsip dari metode ini adalah untuk meminimumkan jumlah kuadrat *error* seperti pada persamaan (2.15). Sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{i}} = (\boldsymbol{X^{iT}X^i})^{-1}\boldsymbol{X^{iT}y^i} \tag{2.17}$$

c. Selanjutnya, setelah diperoleh parameter *Jackknife* $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{1}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{2}}, \dots, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{n}}$. Penduga parameter *Jackknife* diperoleh dengan mencari rata-rata nilai dari setiap penduga parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{1}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{2}}, \dots, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{n}}$ yaitu:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{j}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{i}}}{n} \tag{2.18}$$

dimana

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{j}}$: penduga dari metode *Jackknife*

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{i}}$: penduga dari metode *Jackknife* yang parameternya sudah dihilangkan pada data baris ke-i

n : banyak data *Jackknife*

Kemudian menghitung tingkat akurasi estimasi parameter dengan menggunakan bias dan standar deviasi. Bias dari *Jackknife* dapat dihitung sebagai berikut:

$$Bias^{j} = (n-1)\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{j}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}} \tag{2.19}$$

dimana

$Bias^{j}$: bias dari *Jackknife*

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{j}}$: penduga dari metode *Jackknife*

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$: penduga sebenarnya

n : banyak data *Jackknife*

Adapun variansi dari *Jackknife* dapat dihitung sebagai berikut:

$$Var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{j}}) = \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{i}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{j}})(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{i}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{j}})^{T} \tag{2.20}$$

Sehingga standar deviasi *Jackknife* adalah

$$SD^{j} = \sqrt{Var(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{j}})} \tag{2.21}$$

2.6 Tingkat Suku Bunga

Pengertian tingkat suku bunga *(interest rate)* menurut Samuel dan Nordhaus (1995) adalah sebagai berikut:

"The interest rate is the amount of interest paid per unit of time. In other words, people must pay for the opportunity to borrow money. The cost of borrowing money, measured in dollar per year per dollar borrowed, is the interest rate".

Tingkat suku bunga adalah jumlah dari tingkat pembayaran per unit tiap waktu. Dengan kata lain, seseorang harus membayar sesuai dengan berapa banyaknya uang yang dipinjam. Banyaknya uang yang dipinjam ini diukur atau diasumsikan dalam dollar. Sehingga jumlah yang telah dipinjam ini akan diakumulasikan dalam dolar tiap tahunnya.

Menurut Kuncoro (2001), menyatakan bahwa tingkat bunga terjadi karena adanya permintaan dan penawaran akan uang dari masyarakat, sedangkan perubahan naik-turunnya tingkat suku bunga mempengaruhi keinginan untuk mengadakan investasi, misalnya pada surat berharga, dimana harga dapat naik atau turun tergantung pada tingkat bunga (bila tingkat bunga naik maka surat berharga turun dan sebaliknya), sehingga ada kemungkinan pemegang surat berharga akan menderita *capital loss* atau *gain*.

2.6.1 Suku Bunga Stokastik

Sehubungan dengan tingkat suku bunga, selama ini perhitungan premi dilakukan dengan menggunakan suku bunga tetap, sedangkan berdasarkan kenyataan yang ada suku bunga selalu berubah-ubah secara tidak menentu dalam periode tertentu karena berbagai faktor yang memengaruhinya yang disebut sebagai suku bunga stokastik (Zeytun dan Gupta, 2007).

Menurut Hull (1946), terdapat beberapa model suku bunga stokastik, diantaranya yaitu model keseimbangan. Model keseimbangan pada umumnya dimulai dengan asumsi tentang variabel ekonomi dan proses penurunan bunga jangka pendek r. Model keseimbangan tersebut kemudian dikembangkan dan diimplikasikan untuk menentukan harga *bond* dan harga opsi. Pada umumnya proses-proses dengan resiko netral dijelaskan sebagai proses Ito dalam bentuk :

$$dr = m(r)dt + s(r)dW \tag{2. 22}$$

Secara singkat, drift m, dan standar deviasi s, diasumsikan menjadi fungsi terhadap r. Persamaan umum (2.22) terus dikembangkan, sehingga didapatkan beberapa model suku bunga yaitu :

$m(r) = \kappa(\theta - r); \quad s(r) = \sigma$ (Model Vasicek)

$m(r) = \kappa(\theta - r); \quad s(r) = \sigma\sqrt{r}$ (Model Cox Ingersoll Ross)

2.6.2 Model *Cox Ingersoll Ross*

Menurut Zeytun dan Gupta (2007), model CIR mengikuti persamaan diferensial stokastik (2.7) sebagai berikut:

$$dr\,(t) = \kappa\big(\theta - r(t)\big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \qquad r(0) = r_0 \tag{2.23}$$

dimana:

r : tingkat suku bunga

κ : kelajuan r menuju level θ

θ : level rata-rata (*reversion level*)

σ : suku difusi (simpangan baku sesaat dari r)

$W(t)$: gerak *Brown*

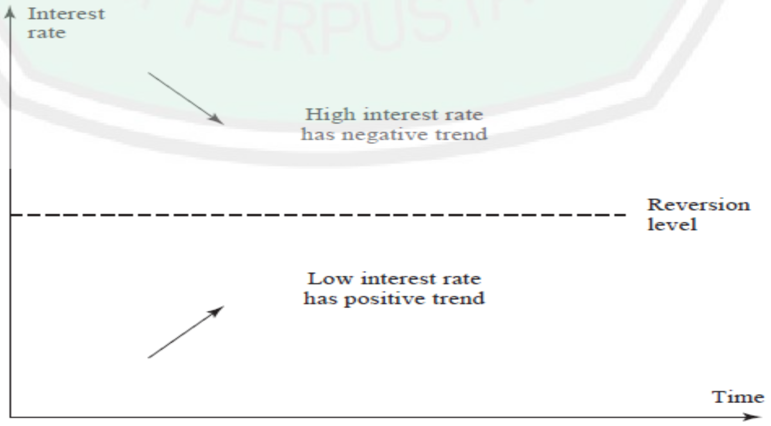
dengan r_0, κ, θ dan σ merupakan konstanta positif.

Ketika dalam kondisi $2\kappa\theta > \sigma^2$ maka suku bunga selalu positif, sebaliknya hanya bisa menjamin bahwa itu non negatif (dengan probabilitas positif untuk mengakhiri pada nol).

Hal terpenting dari model ini adalah *mean reversion*, yaitu suatu kecenderungan nilai $r(t)$ berada di sekitar level rata-rata. Faktor drift model CIR adalah $\kappa\,(\theta - r\,(t))$. Oleh karena itu, suku bunga jangka pendek adalah *mean revertion* dengan mean jangka panjang θ dan kecepatan *mean reversion* sama dengan κ. Istilah volatilitas σ dikalikan dengan $\big(r\,(t)\big)$ dan ini dapat menghilangkan kelemahan utama dari model Vasicek yaitu probabilitas positif yang memperoleh suku bunga negatif. Saat suku bunga mendekati nol maka volatilitas $\sigma\sqrt{r\ (t)}$ mendekati nol yang dapat membatalkan pengaruh secara acak, sehingga suku bunga tetap selalu positif. Ketika tingkat bunga tinggi maka volatilitasnya tinggi dan ini adalah sifat yang diinginkan (Zeytun dan Gupta, 2007).

Sebuah argumentasi ekonomi yang mendukung mengenai *mean reversion* menyatakan bahwa ketika suku bunga tinggi, ekonomi cenderung melambat dan mengakibatkan rendahnya permintaan dana dari peminjam. Oleh karena itu, suku bunga akan ditarik kembali ke nilai keseimbangannya. Sebaliknya, ketika suku bunga rendah, akan terjadi kecenderungan naiknya permintaan dana dari peminjam. Teori *mean reversion* sangat tepat untuk menggambarkan tingkat suku bunga, karena jika tanpa teori tersebut, pergerakan suku bunga dapat meningkat secara permanen seperti halnya harga saham, yang di dalam kehidupan nyata seharusnya tingkat suku bunga bergerak secara tidak permanen (dapat naik ataupun turun dalam periode tertentu) (Zeytun dan Gupta, 2007).

Teori *mean reversion* ditunjukkan pada Gambar 2.3 (Hull, 1946).



Gambar 2.3 *Mean Reversion*

Gambar 2.3 menunjukkan tentang *Mean Reversion*. Apabila suku bunga tinggi, ekonomi cenderung akan melambat. Oleh karena itu suku bunga akan kembali menuju nilai keseimbangannya. Sebaliknya, ketika suku bunga rendah, akan terjadi kecenderungan meningkatnya permintaan dana dari peminjam. Oleh karena itu suku bunga juga akan kembali menuju nilai keseimbangannya.

2.7 Hasil Penelitian Sebelumnya

Budiman dkk (2015) telah melakukan penelitian tentang model tingkat suku bunga CIR dengan menggunakan metode MLE. Data yang digunakan adalah data tingkat suku bunga Bank Indonesia dari januari 2006 sampai dengan januari 2015. Penelitian tersebut menghasilkan 3 nilai estimasi parameter yaitu rata-rata jangka panjang dari tingkat suku bunga Bank Indonesia $(\hat{a})$ yaitu 0,0351, kecepatan proses menuju rata-rata jangka panjang $(\hat{b})$ yaitu 14,9373 dan volatilitas antara fluktuasi tingkat suku bunga Bank Indonesia $(\hat{s})$ yaitu 0,2885. Nilai estimasi tersebut diperoleh dari proses metode MLE dan metode Newton Raphson.

Mariana dkk (2015) telah melakukan penelitian juga tentang model tingkat suku bunga CIR dengan menggunakan metode *Kalman Filter*. Estimasi Parameter dengan metode *Kalman Filter* digunakan untuk menentukan harga *zero coupon bound*. Data yang digunakan merupakan data tingkat suku bunga harian 1 tahun dari *Bank of England*. Nilai awal parameter diperoleh dari hasil estimasi dengan OLS yaitu nilai $k = 1{,}390$, $\theta = 0{,}012$ dan $\sigma = 0{,}094$. Sehingga penelitian ini mengahasilkan estimasi yang baik pada tingkat suku bunga harian model CIR. Hal ini dapat diketahui dengan melihat hasil estimasi grafik dan nilai eror yang kecil.

Noeryanti dan Herindani (2016) telah melakukan penelitian tentang perbandingan dua metode yang dapat digunakan untuk estimasi parameter pada regresi berganda. Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah metode *resampling Bootstrap* dan metode *resampling Jackknife*. Penelitian ini menggunakan *standard error* untuk mengetahui metode yang lebih baik dalam mengestimasi parameter model regeresi. Hasil dari penelitian tersebut menunjukkan bahwa hasil estimasi pada regresi berganda dengan metode *resampling Jackknife* memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan dengan merode *resampling Bootstrap*. Hal ini ditunjukkan dengan metode *resampling Jackknife* menghasilkan estimasi dengan *standard error* yang lebih kecil dibandingkan menggunakan metode *resampling Bootstrap*.

2.8 Estimasi dalam Alquran

Kitab suci agama islam adalah Alquran. Umat islam percaya bahwa Alquran dapat menjadi petunjuk atau pedoman hidup bagi manusia. Alquran merupakan wahyu Allah SWT yang diturunkan kepada nabi Muhammad SAW dengan perantara malaikat Jibril. Alquran mempunyai kedudukan sebagai sumber hukum islam yang pertama dan sumber hukum islam kedua adalah hadits. Membaca dan mempelajari Alquran dapat menenangkan jiwa dan mendapatkan pahala.

Estimasi juga diterangkan dalam Alquran salah satunya pada surat Al-Jaatsiyat ayat 24. Arti dari surat al-jaatsiyah adalah yang berlutut. Surat ini terdiri dari 37 ayat dan termasuk surat makkiyah. Surat Al-Jaatsiyat ayat 24 yang berhubungan dengan estimasi berbunyi sebagai berikut:

وَقَالُوْا مَا هِيَ اِلَّا حَيَاتُنَا الدُّنْيَا نَمُوْتُ وَنَحْيَا وَمَا يُهْلِكُنَآ اِلَّا الدَّهْرُ ۚ وَمَا لَهُمْ بِذٰلِكَ مِنْ عِلْمٍ ۚ اِنْ هُمْ

اِلَّا يَظُنُّوْنَ ﴿٢٤﴾

"Dan mereka berkata, " kehidupan ini tidak lain hanyalah kehidupan di dunia saja, kita mati dan kita hidup dan tidak ada yang membinasakan kita selain masa", dan mereka sekali-kali tidak punya pengetahuan tentang itu, mereka tidak lain hanya menduga-duga saja" (QS. Al-Jaatsiyat/45:24).

Menurut tafsir Ibnu katsir dalam surat al-jaatsiyah ayat 24 dijelaskan bahwa Allah SWT berfirman tentang orang-orang kafir dan musryik yang mengingkari adanya hari kiamat dan hari kebangkitan. Mereka berkata bahwa kehidupan ini, hanyalah kehidupan sekali di dunia saja dan yang mematikan maupun yang membinasakan manusia adalah masa dan tidak ada kekuatan lain. Mereka berkata dan beranggapan demikian, padahal mereka tidak mempunyai pengetahuan tentang itu dan mereka hanyalah menduga-duga saja (Bahreisy, 1992).

Surat Al-Jaatsiyah ayat 24 dijelaskan juga dalam tafsir Al-maraghi sebagai berikut:

وَقَالُوْا مَا هِيَ اِلَّا حَيَاتُنَا الدُّنْيَا نَمُوْتُ وَنَحْيَا

Dan orang-orang musyrik yang telah disebutkan sebagian sifatnya mereka berkata, tidak ada kehidupan lagi sesudah kehidupan yang kita alami. Kita mati kemudian hiduplah anak-anak sesudah kehidupan kita. Perkataan seperti ini merupakan pendustaan yang tegas dari mereka terhadap kebangkitan dan akhirat.

Ringkasnya mereka berkata, yang ada hanyalah dunia saja. Suatu kaum mati, kemudian hiduplah yang lain. Tidak ada kebangkitan dan tidak ada kiamat.

وَمَا يُهۡلِكُنَآ إِلَّا ٱلدَّهۡرُۚ

Dan tidak ada yang membinasakan kita kecuali berjalannya malam dan siang. Jadi lewatnya malam dan siang itulah yang mempengaruhi kebinasaan orang. Dan mereka menisbatkan setiap peristiwa kepada masa.

Orang Arab semasa jahiliyah, apabila mendapat suatu bencana atau kesedihan atau mengalami penderitaan, maka mereka berkata *"Ya Khaibatad Dahri"* (hai masa yang sial). Maka datanglah larangan untuk mencela masa. Jadi seolah-olah mereka mencela Allah Azza wajalla. Karena Dia-lah yang melakukan semua itu pada hakikatnya. Karena Allah Ta'ala itulah yang mereka maksud *Ad-Dahr* itu.

Kemudian Allah SWT, mengecam perkataan mereka seperti tadi, yang tidak ada dalilnya. Firman-Nya yaitu

وَمَا لَهُم بِذَٰلِكَ مِنۡ عِلۡمٍۖ إِنۡ هُمۡ إِلَّا يَظُنُّونَ ٢٤

Mereka menyatakan bahwa kehidupan ini hanyalah kehidupan dunia saja dan yang membinasakan adalah masa. Mereka tidaklah mempunyai ilmu yang didasarkan kepada akal maupun naqal (kitab). Jadi ringkasnya mereka hanyalah menyangka, membuat perkiraan saja tanpa adanya hujjah yang jitu, yang mereka jadikan pegangan.

Estimasi juga dijelaskan dalam hadits sebagai berikut:

"*Dari Malik, dari Nafi', dari Ibnu Umar, dari Zaid bin Tsabit sesungguhnya Rasulullah SAW memberi keringanan kepada mereka yang mempunyai ariyah untuk menjualnya dengan kira-kira (ditaksir)"* (Shahih Bukhari, 2188).

Ariyah adalah apabila seseorang membeli kurma kering dan menukarnya dengan kurma basah dengan memperkirakan atau menaksir berapa banyak jumlahnya setelah kering. Para ulama salaf berbeda pendapat tentang anggur atau selainnya masuk kategori kurma atau atau tidak dalam hal *ariyah*. Sebagian mengatakan tidak diikutkan dari madzhab Azh-Zhahiri. Sebagian pendapat lagi mengatakan diikutkan, ini adalah pendapat yang masyhur dalam madzhab Syafi"i. Ada yang berpendapat bahwa semua buah-buahan dan semua yang dapat disimpan lama dapat diikutkan di dalamnya, ini adalah pendapat madzhab Maliki (Al Asqalani, 2007).

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Pendekatan Penelitian

Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan kuantitatif dengan bantuan studi literatur. Pendekatan tersebut dilakukan dengan cara mengkaji buku-buku maupun literatur lain yang berkaitan dengan penelitian ini. Data yang digunakan dalam penelitian ini berupa angka atau data numerik.

3.2 Jenis dan Sumber Data

Jenis data yang digunakan dalam penelitian ini berupa data sekunder yang diperoleh dari hasil publikasi Bank Indonesia (BI). Data tersebut tentang tingkat suku bunga dari bulan Januari 20011 sampai Desember 2015 (Rahmawati dan Wahyu, 2017).

3.3 Variabel Penelitian

Data pada penelitian ini mempunyai dua variabel yaitu variabel bebas (y_{t-1}) dan variabel terikat (y_t). Variabel bebas (y_{t-1}) merupakan rata-rata tingkat suku bunga pada waktu sebelumnya dan variabel terikat (y_t) merupakan rata-rata tingkat suku bunga aktual.

3.4 Metode Analisis Data

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah

1. Mengestimasi parameter model CIR menggunakan metode *Jackknife*

a. Menentukan solusi rekursif model CIR

b. Mengubah persamaan model CIR dalam model regresi

c. Mengubah model regresi menjadi bentuk matriks

d. Mengestimasi model CIR dengan metode *Jackknife*

2. Mengaplikasikan estimasi parameter model CIR menggunakan metode *Jackknife* pada data tingkat suku bunga Bank Indonesia

a. Mengestimasi model CIR dengan metode OLS

b. Mengestimasi model CIR dengan metode *Jackknife* pada tingkat suku bunga Bank Indonesia

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Estimasi Parameter Model CIR dengan Metode *Jackknife*

4.1.1 Menentukan Solusi Rekursif Model CIR

Model CIR pada persamaan (2.23) merupakan persamaan diferensial stokastik. Cara memperoleh penyelesaian model CIR tersebut dengan mengubah ke dalam persamaan berikut:

$$dr\,(t) = \kappa\big(\theta - r(t)\big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

$$= \kappa\theta dt - \kappa r(t)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

$$dr\,(t) + \kappa r(t)dt = \kappa\theta dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \tag{4.1}$$

Untuk mencari solusi khusus kedua ruas pada persamaan (4.1) dikalikan dengan $e^{\kappa t}$ seperti pada persamaan (2.2) dapat diperoleh sebagai berikut:

$$e^{\kappa t}(dr\,(t) + \kappa r(t)dt) = e^{\kappa t}\left(\kappa\theta dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)\right)$$

$$e^{\kappa t}dr\,(t) + \kappa e^{\kappa t}r(t)dt = \kappa\theta e^{\kappa t}dt + \sigma e^{\kappa t}\sqrt{r(t)}dW(t)$$

Kemudian mengikuti aturan perkalian dalam menentukan turunan seperti pada persamaan (2.1), dengan dimisalkan terlebih dahulu:

$$u = e^{\kappa t}$$

$$u' = ke^{\kappa t}$$

$$v = r(t)$$

$$v' = dr(t)$$

$$d(u \cdot v) = d\big(e^{\kappa t}r(t)\big)$$

sehingga berubah bentuk sebagai berikut:

$$d\left(e^{\kappa t}r(t)\right) = \kappa\theta e^{\kappa t}dt + \sigma e^{\kappa t}\sqrt{r(t)}dW(t) \tag{4.2}$$

Kemudian kedua ruas pada persamaan (4.2) diintegralkan dengan batas $[0, t]$ yaitu:

$$\int_0^t d\left(e^{\kappa s}r(s)\right) = \int_0^t \kappa\theta e^{\kappa s}ds + \int_0^t \sigma e^{\kappa s}\sqrt{r(s)}dW(s)$$

$$e^{\kappa t}r(t) - e^{\kappa(0)}r(0) = \int_0^t \kappa\theta e^{\kappa s}ds + \int_0^t \sigma e^{\kappa s}\sqrt{r(s)}dW(s)$$

$$e^{\kappa t}r(t) - 1 \cdot r(0) = \kappa\theta \int_0^t e^{\kappa s}ds + \sigma \int_0^t e^{\kappa s}\sqrt{r(s)}dW(s)$$

$$e^{\kappa t}r(t) = r(0) + \kappa\theta \int_0^t e^{\kappa s}ds + \sigma \int_0^t e^{\kappa s}\sqrt{r(s)}dW(s)$$

$$r(t) = e^{-\kappa t}\left(r(0) + \kappa\theta \int_0^t e^{\kappa s}ds + \sigma \int_0^t e^{\kappa s}\sqrt{r(s)}dW(s)\right)$$

$$= r(0)e^{-\kappa t} + \kappa\theta e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s}ds + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s}\sqrt{r(s)}dW(s)$$

$$= r(0)e^{-\kappa t} + \kappa\theta e^{-\kappa t}\left(\frac{1}{k}e^{\kappa t} - \frac{1}{k}\right)$$

$$+\sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s}\sqrt{r(s)}dW(s)$$

$$= r(0)e^{-\kappa t} + \left(\kappa\theta e^{-\kappa t}\frac{1}{k}e^{\kappa t} - \frac{1}{k}\kappa\theta e^{-\kappa t}\right)$$

$$+\sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s}\sqrt{r(s)}dW(s)$$

$$= r(0)e^{-\kappa t} + (e^{0}\theta - e^{-\kappa t}\theta) + \sigma e^{-\kappa t}\int_{0}^{t} e^{\kappa s}\sqrt{r(s)}dW(s)$$

$$= r(0)e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t}) + \sigma e^{-\kappa t}\int_{0}^{t} e^{\kappa s}\sqrt{r(s)}dW(s)$$

Jadi, solusi dari model CIR adalah

$$r(t) = r(0)e^{-\kappa t} + \theta(1 - e^{-\kappa t}) + \sigma e^{-\kappa t}\int_{0}^{t} e^{\kappa s}\sqrt{r(s)}dW(s) \tag{4.3}$$

4.1.2 Mengubah Persamaan dalam Model Regresi

Selanjutnya setelah memperoleh rata-rata dan variansi, persamaan model CIR didiskritisasi menggunakan metode Euler yaitu:

$$y_{i+1} = y_i + y_i'\Delta x$$

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$$

Sehingga diperoleh

$$dr\,(t) = \kappa\big(\theta - r(t)\big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

$$\frac{r(t_{i+1}) - r(t_i)}{\Delta t} = \kappa\big(\theta - r(t)\big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

$$r(t_{i+1}) - r(t_i) = \kappa\big(\theta - r(t_i)\big)\Delta t + \sigma\sqrt{r(t_i)}\sqrt{\Delta t}Z_i$$

$$r(t_{i+1}) - r(t_i) = \kappa\big(\theta - r(t_i)\big)\Delta t + \sigma\sqrt{r(t_i)}\Delta W_i \tag{4.4}$$

Dimana $i = 0, \dots, n-1$ dan $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$ dengan $Z_i \sim N(0,1)$ persamaan (4.4) dapat ditransformasi ke dalam bentuk berikut:

$$\frac{r(t_{i+1}) - r(t_i)}{\sqrt{r(t_i)}} = \frac{\kappa}{\sqrt{r(t_i)}}\big(\theta - r(t_i)\big)\Delta t + \sigma\Delta W_i$$

$$= \kappa\theta\frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_i)}} - \kappa\sqrt{r(t_i)}\Delta t + \sigma\Delta W_i \tag{4.5}$$

selanjutnya persamaan (4.5) diubah ke dalam bentuk persamaan regresi sebagai berikut:

$$\boldsymbol{y_i} = a\boldsymbol{x_{1i}} + b\boldsymbol{x_{2i}} + \boldsymbol{\varepsilon_i}$$

dimana

$$\boldsymbol{y_i} = \frac{r(t_{i+1}) - r(t_i)}{\sqrt{r(t_i)}}$$

$$a = \kappa\theta$$

$$\boldsymbol{x_{1i}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_i)}}$$

$$b = -\kappa$$

$$\boldsymbol{x_{2i}} = \sqrt{r(t_i)}\Delta t$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_i} = \sigma\Delta W_i$$

4.1.3 Mengubah Model Regresi menjadi Bentuk Matriks

Persamaan (4.5) dapat ditulis dalam bentuk matriks yaitu:

$$\begin{bmatrix} \frac{r(t_2) - r(t_1)}{\sqrt{r(t_1)}} \\ \frac{r(t_3) - r(t_2)}{\sqrt{r(t_2)}} \\ \vdots \\ \frac{r(t_n) - r(t_{n-1})}{\sqrt{r(t_{n-1})}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_1)}} & \sqrt{r(t_1)}\Delta t \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_2)}} & \sqrt{r(t_2)}\Delta t \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_{n-1})}} & \sqrt{r(t_{n-1})}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \sigma\sqrt{\Delta t} \begin{bmatrix} N_1(0,1) \\ N_2(0,1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(0,1) \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

dapat diperoleh:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \frac{r(t_2) - r(t_1)}{\sqrt{r(t_1)}} \\ \frac{r(t_3) - r(t_2)}{\sqrt{r(t_2)}} \\ \vdots \\ \frac{r(t_n) - r(t_{n-1})}{\sqrt{r(t_{n-1})}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_1)}} & \sqrt{r(t_1)}\Delta t \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_2)}} & \sqrt{r(t_2)}\Delta t \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_{n-1})}} & \sqrt{r(t_{n-1})}\Delta t \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma\sqrt{\Delta t}\begin{bmatrix} N_1(0,1) \\ N_2(0,1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(0,1) \end{bmatrix}$$

sehingga model linier pada persamaan (4.6) dapat disederhanakan menjadi seperti berikut:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.7}$$

Berdasarkan persamaan (2.15), maka secara OLS dapat diperoleh penduga parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{ols}}$ yaitu:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{ols}} = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'y}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_1)}} & \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_2)}} & \cdots & \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_{n-1})}} \\ \sqrt{r(t_1)}\Delta t & \sqrt{r(t_1)}\Delta t & \cdots & \sqrt{r(t_{n-1})}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_1)}} & \sqrt{r(t_1)}\Delta t \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_2)}} & \sqrt{r(t_2)}\Delta t \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_{n-1})}} & \sqrt{r(t_{n-1})}\Delta t \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_1)}} & \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_2)}} & \cdots & \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_{n-1})}} \\ \sqrt{r(t_1)}\Delta t & \sqrt{r(t_1)}\Delta t & \cdots & \sqrt{r(t_{n-1})}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{r(t_2)-r(t_1)}{\sqrt{r(t_1)}} \\ \frac{r(t_3)-r(t_2)}{\sqrt{r(t_2)}} \\ \vdots \\ \frac{r(t_n)-r(t_{n-1})}{\sqrt{r(t_{n-1})}} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Setelah diperoleh parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{ols}}$ dari persamaan (4.8), dapat diperoleh penduga parameter a dan b. Sehingga parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{ols}}$ dapat disubsitusikan pada persamaan (4.7) sebagai berikut:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{ols}} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.9}$$

dengan menggunakan persamaan (4.9) dapat dihitung nilai-nilai errornya yaitu:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{ols}} \tag{4.10}$$

Setelah mendapatkan nilai error pada persamaan (4.10), persamaan (4.6) menjadi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{r(t_2)-r(t_1)}{\sqrt{r(t_1)}} \\ \frac{r(t_3)-r(t_2)}{\sqrt{r(t_2)}} \\ \vdots \\ \frac{r(t_n)-r(t_{n-1})}{\sqrt{r(t_{n-1})}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_1)}} & \sqrt{r(t_1)}\Delta t \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_2)}} & \sqrt{r(t_2)}\Delta t \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_{n-1})}} & \sqrt{r(t_{n-1})}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

4.1.4 Mengestimasi Parameter Model CIR Menggunakan Metode *Jackknife*

Proses untuk mengestimasi parameter model CIR dengan menggunakan metode *Jackknife* adalah dengan menghilangkan satu pengamatan dari data atau menghilangkan baris pertama dari vektor dan mengulangi sebanyak jumlah yang ada. Langkah pertama dalam estimasi parameter *Jackknife* yaitu menghapus satu baris ke-i, dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n - 1$.

Untuk $i = 1$, dari persamaan (4.11) diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \frac{r(t_3)-r(t_2)}{\sqrt{r(t_2)}} \\ \frac{r(t_4)-r(t_3)}{\sqrt{r(t_3)}} \\ \vdots \\ \frac{r(t_n)-r(t_{n-1})}{\sqrt{r(t_{n-1})}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_2)}} & \sqrt{r(t_2)}\Delta t \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_3)}} & \sqrt{r(t_3)}\Delta t \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_{n-1})}} & \sqrt{r(t_{n-1})}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Dapat dimisalkan

$$\boldsymbol{y^1} = \begin{bmatrix} \frac{r(t_3)-r(t_2)}{\sqrt{r(t_2)}} \\ \frac{r(t_4)-r(t_3)}{\sqrt{r(t_3)}} \\ \vdots \\ \frac{r(t_n)-r(t_{n-1})}{\sqrt{r(t_{n-1})}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X^1} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_2)}} & \sqrt{r(t_2)}\Delta t \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_3)}} & \sqrt{r(t_3)}\Delta t \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_{n-1})}} & \sqrt{r(t_{n-1})}\Delta t \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta^1} = \begin{bmatrix} a^1 \\ b^1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon^1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} \end{bmatrix}$$

Sehingga model linier pada persamaan (4.12) dalam metode *Jakknife* dapat disederhanakan menjadi seperti berikut:

$$\boldsymbol{y^i} = \boldsymbol{X^i}\boldsymbol{\beta^i} + \boldsymbol{e^i} \tag{4.13}$$

Berdasarkan persamaan (2.17), maka diperoleh penduga parameter $\hat{\beta}^i$ yaitu:

$$\boldsymbol{\widehat{\beta}^i} = (\boldsymbol{X^{iT}}\boldsymbol{X^i})^{-1}\boldsymbol{X^{iT}}\boldsymbol{y^i}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_2)}} & \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_3)}} & \cdots & \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_{n-1})}} \\ \sqrt{r(t_2)}\Delta t & \sqrt{r(t_3)}\Delta t & \cdots & \sqrt{r(t_{n-1})}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_2)}} & \sqrt{r(t_2)}\Delta t \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_3)}} & \sqrt{r(t_3)}\Delta t \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_{n-1})}} & \sqrt{r(t_{n-1})}\Delta t \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_2)}} & \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_3)}} & \cdots & \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_{n-1})}} \\ \sqrt{r(t_2)}\Delta t & \sqrt{r(t_3)}\Delta t & \cdots & \sqrt{r(t_{n-1})}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{r(t_3) - r(t_2)}{\sqrt{r(t_2)}} \\ \frac{r(t_4) - r(t_3)}{\sqrt{r(t_3)}} \\ \vdots \\ \frac{r(t_n) - r(t_{n-1})}{\sqrt{r(t_{n-1})}} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Penduga parameter *Jackknife* diperoleh dengan mencari rata-rata nilai dari setiap penduga parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{1}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{2}, \ldots, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{n}$ seperti pada persamaan (2.18) yaitu:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{j} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{i}}{n}$$

Selanjutnya, dari persamaan (4.5) dapat diketahui parameter κ dan θ sebagai berikut:

$$\kappa = -b$$

$$\theta = \frac{a}{\kappa}$$

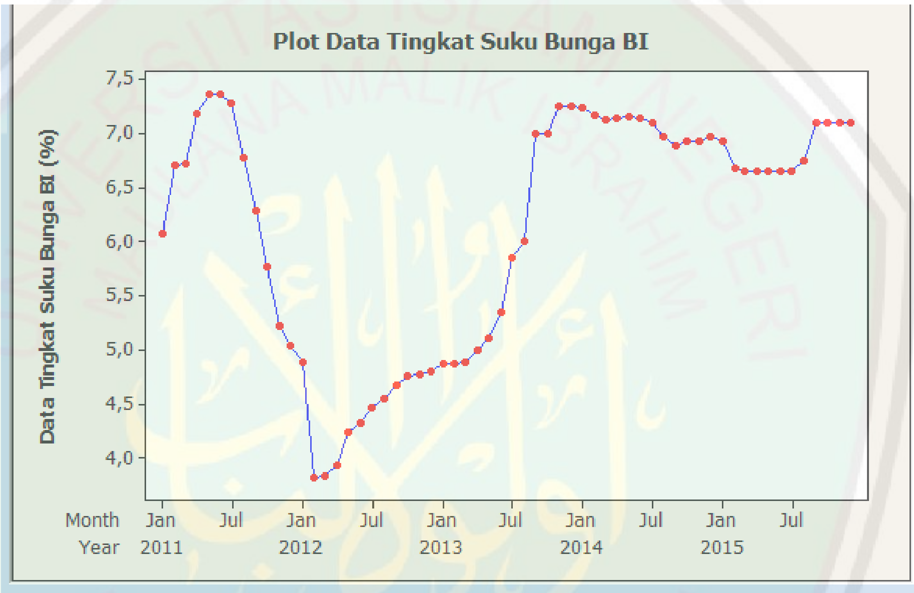
dan dapat diketahui parameter σ yaitu:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\Delta t n}} \|\boldsymbol{\varepsilon}\|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta t n}} \left\| \boldsymbol{Y}^{i} - \boldsymbol{X}^{i} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{j} \right\|$$

4.2 Implementasi Metode *Jackknife* pada Model CIR

Subab ini menjelaskan tentang penerapan model CIR dalam mengestimasi parameter pada data tingkat suku bunga Bank Indonesia dengan menggunakan Metode *Jackknife*. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data tingkat suku bunga Bank Indonesia dari bulan Januari tahun 2011 sampai dengan bulan Desember tahun 2015 yang terdapat pada Lampiran 1 dan dapat dilihat dalam plot sebagai berikut:



Gambar 4.1 Plot Data Tingkat Suku Bunga BI 2011-2015

Berdasarkan gambar diatas dapat dilihat bahwa tingkat suku bunga mengalami fluktuasi yaitu tingkaat suku bunga tertinggi terjadi pada bulan Mei dan Juni tahun 2011 sebesar 7,36% dan tingkat suku bunga terendah pada bulan Februari tahun 2012 sebesar 3,82%. Tingkat suku bunga dapat naik atau turun`dalam periode tertentu. Jika tingkat suku bunga rendah, permintaan dana dari peminjam cenderung akan naik dan sebaliknya.

4.2.1 Uji Serentak dan Uji Parsial

1. Uji Serentak (Uji F)

Hasil perhitungan uji serentak yang diperoleh dengan bantuan komputer pada data model CIR sebagai berikut:

Tabel 4.1 Uji Serentak

Model		Sum of Squares	Df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	69.701	1	69.701	853.812	.000[a]
	Residual	4.653	57	.082		
	Total	74.355	58			

Berdasarkan Tabel 4.1 dapat diketahui bahwa nilai F_{hitung} adalah 853,812. Pengujian ini menggunakan selang kepercayaan 95%, sehingga diperoleh nilai sig. < 0,05 yaitu 0,000 < 0,05. Jadi, dapat disimpulkan bahwa terdapat pengaruh yang signifikan antara variabel X terhadap Y dan sebaliknya.

2. Uji Parsial (Uji t)

Setelah melakukan uji serentak, maka dilakukan uji parsial. Hasil perhitungan uji parsial yang diperoleh dengan bantuan komputer pada data model CIR sebagai berikut:

Tabel 4.2 Uji Parsial

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	T	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	.174	.207		.837	.406
	X	.974	.033	.968	29.220	.000

Dependent Variable: Y

Berdasarkan Tabel 4.2 dapat diketahui bahwa nilai t_{hitung} adalah 29,220. Pengujian ini menggunakan selang kepercayaan 95%, sehingga diperoleh nilai sig.

< 0,05 yaitu 0,000 < 0,05. Jadi, dapat disimpulkan bahwa terdapat pengaruh yang signifikan pada variabel model CIR.

4.2.2 Estimasi Parameter Model CIR dengan Metode *Jackknife*

Terdapat sejumlah 60 data dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ dan dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{r(t_2)-r(t_1)}{\sqrt{r(t_1)}} \\ \frac{r(t_3)-r(t_2)}{\sqrt{r(t_2)}} \\ \vdots \\ \frac{r(t_{60})-r(t_{59})}{\sqrt{r(t_{59})}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_1)}} & \sqrt{r(t_1)}\Delta t \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_2)}} & \sqrt{r(t_2)}\Delta t \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_{59})}} & \sqrt{r(t_{59})}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{59} \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}2555 \\ 0{,}0039 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4056 & 2{,}4658 \\ 0{,}3860 & 2{,}5904 \\ \vdots & \vdots \\ 0{,}3753 & 2{,}6646 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{59} \end{bmatrix}$$

Dapat dimisalkan

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0{,}2555 \\ 0{,}0039 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 0{,}4056 & 2{,}4658 \\ 0{,}3860 & 2{,}5904 \\ \vdots & \vdots \\ 0{,}3753 & 2{,}6646 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{59} \end{bmatrix}$$

dimana:

$\boldsymbol{y}$: vektor data y berukuran 59 x 1

$\boldsymbol{X}$: matriks data X berukuran 59 x 2

$\boldsymbol{\beta}$: vektor parameter beta berukuran 2 x 1

$\boldsymbol{\varepsilon}$: vektor *error* berukuran 59 x 1

Kemudian dapat diperoleh penduga parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ols}$ yaitu:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ols} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0,4056 & 0,3860 & \cdots & 0,375 \\ 2,4658 & 2,5904 & \cdots & 2,664 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4056 & 2,4658 \\ 0,3860 & 2,5904 \\ \vdots & \vdots \\ 0,3753 & 2,6646 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 0,4056 & 0,3860 & \cdots & 0,375 \\ 2,4658 & 2,5904 & \cdots & 2,664 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,2555 \\ 0,0039 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,1688 \\ -0,0248 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya nilai $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ols}$ tersebut dapat disubsitusikan ke dalam persamaan (4.9) sehingga bentuknya menjadi

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ols} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\begin{bmatrix} 0,2555 \\ 0,0039 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4056 & 2,4658 \\ 0,3860 & 2,5904 \\ \vdots & \vdots \\ 0,3753 & 2,6646 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1688 \\ -0,0248 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{59} \end{bmatrix}$$

Maka dapat dihitung nilai errornya sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{ols}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{59} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2555 \\ 0,0039 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,4056 & 2,4658 \\ 0,3860 & 2,5904 \\ \vdots & \vdots \\ 0,3753 & 2,6646 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1688 \\ -0,0248 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,2481 \\ 0,0029 \\ \vdots \\ 0,0027 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

secara lengkap tercantum dalam Lampiran I1I.

Setelah didapatkan nilai *error* model pada persamaan (4.16), sehingga persamaan (4.15) menjadi:

$$\begin{bmatrix} \frac{r(t_2)-r(t_1)}{\sqrt{r(t_1)}} \\ \frac{r(t_3)-r(t_2)}{\sqrt{r(t_2)}} \\ \vdots \\ \frac{r(t_{60})-r(t_{59})}{\sqrt{r(t_{59})}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_1)}} & \sqrt{r(t_1)}\Delta t \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_2)}} & \sqrt{r(t_2)}\Delta t \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_{59})}} & \sqrt{r(t_{59})}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}2481 \\ 0{,}0029 \\ \vdots \\ 0{,}0027 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$\boldsymbol{y}$: vektor data Y berukuran 59 x 1

$\boldsymbol{X}$: matriks data X berukuran 59 x 2

$\boldsymbol{\beta}$: vektor parameter beta berukuran 2 x 1

$\boldsymbol{\varepsilon}$: vektor *error* berukuran 59 x1

Langkah pertama dalam estimasi parameter *Jackknife* yaitu menghapus satu baris ke-i, dengan $i = 1, 2, 3, \dots, 59$.

Untuk $i = 1$, dari persamaan (4.18) diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \frac{r(t_2)-r(t_1)}{\sqrt{r(t_1)}} \\ \frac{r(t_3)-r(t_2)}{\sqrt{r(t_2)}} \\ \vdots \\ \frac{r(t_{60})-r(t_{59})}{\sqrt{r(t_{59})}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_1)}} & \sqrt{r(t_1)}\Delta t \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_2)}} & \sqrt{r(t_2)}\Delta t \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_{59})}} & \sqrt{r(t_{59})}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}0029 \\ 0{,}1766 \\ \vdots \\ 0{,}0027 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}0039 \\ 0{,}1774 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3860 & 2{,}5904 \\ 0{,}3858 & 2{,}5923 \\ \vdots & \vdots \\ 0{,}3753 & 2{,}6646 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}0029 \\ 0{,}1766 \\ \vdots \\ 0{,}0027 \end{bmatrix}$$

Dapat dimisalkan

$$\boldsymbol{y^1} = \begin{bmatrix} 0{,}0039 \\ 0{,}1774 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X^1} = \begin{bmatrix} 0{,}3860 & 2{,}5904 \\ 0{,}3858 & 2{,}5923 \\ \vdots & \vdots \\ 0{,}3753 & 2{,}6646 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta^1} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon^1} = \begin{bmatrix} 0{,}0029 \\ 0{,}1766 \\ \vdots \\ 0{,}0027 \end{bmatrix}$$

Dimana:

$\boldsymbol{y}$: vektor data y berukuran 58 x 1

$\boldsymbol{X}$: matriks data X berukuran 58 x 2

$\boldsymbol{\beta}$: vektor parameter beta berukuran 2 x 1

$\boldsymbol{\varepsilon}$: vektor *error* berukuran 58 x 1

Kemudian, diperoleh penduga parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{1}}$ yaitu:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{1}} = (\boldsymbol{X^{1T}X^1})^{-1}\boldsymbol{X^{1T}Y^1}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_2)}} & \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_3)}} & \cdots & \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_{59})}} \\ \sqrt{r(t_2)}\Delta t & \sqrt{r(t_3)}\Delta t & \cdots & \sqrt{r(t_{59})}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_2)}} & \sqrt{r(t_2)}\Delta t \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_3)}} & \sqrt{r(t_3)}\Delta t \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_{59})}} & \sqrt{r(t_{59})}\Delta t \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_2)}} & \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_3)}} & \cdots & \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_{59})}} \\ \sqrt{r(t_2)}\Delta t & \sqrt{r(t_3)}\Delta t & \cdots & \sqrt{r(t_{59})}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{r(t_3)-r(t_2)}{\sqrt{r(t_2)}} \\ \frac{r(t_4)-r(t_3)}{\sqrt{r(t_3)}} \\ \vdots \\ \frac{r(t_{60})-r(t_{59})}{\sqrt{r(t_{59})}} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0{,}3860 & 0{,}3858 & \cdots & 0{,}375 \\ 2{,}5904 & 2{,}5923 & \cdots & 2{,}664 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3860 & 2{,}5904 \\ 0{,}3858 & 2{,}5923 \\ \vdots & \vdots \\ 0{,}3753 & 2{,}6646 \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}3860 & 0{,}3858 & \cdots & 0{,}375 \\ 2{,}5904 & 2{,}5923 & \cdots & 2{,}664 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}0039 \\ 0{,}1774 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}1673 \\ -0{,}0262 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan cara yang sama akan diketahui hasil estimator dari $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{1}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}}, \dots, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{59}}$ yang selanjutnya akan dicari parameter *Jackknife* ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{j}}$) dengan cara mencari nilai rata-rata dari setiap penduga parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{1}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}}, \dots, \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{59}}$ yaitu:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{j}} = \frac{1}{59}\sum_{i}^{n} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{i}}$$

$$= \frac{1}{59}\left(\begin{bmatrix} 0{,}1673 \\ -0{,}0262 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}1691 \\ -0{,}0248 \end{bmatrix} + \cdots \begin{bmatrix} 0{,}1693 \\ -0{,}0249 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}1688 \\ -0{,}248 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, dapat diketahui parameter κ dan θ sebagai berikut:

$$\kappa = -b$$

$$= 0{,}0248$$

$$\theta = \frac{a}{\kappa}$$

$$= 6{,}8136$$

dan dapat diketahui parameter σ yaitu:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\Delta tn}} \|\boldsymbol{\varepsilon}\|$$

$$= 0{,}1165$$

4.3 Estimasi dalam Pandangan Islam

Istilah estimasi secara umum banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Estimasi merupakan suatu perkiraan pada suatu hal. Salah satu manfaat dari estimasi adalah untuk mendukung keputusan yang baik. Ada beberapa ayat dalam Alquran dan hadist Nabi Muhammmad SAW yang menjelaskan tentang estimasi. Salah satu ayat Alquran yang membahas tentang estimasi adalah surat Al-Jaatsiyah ayat 24 yang telah disebutkan dalam pembahasan Bab II.

Pengertian estimasi dalam surat Al-Jaatsiyah ayat 24 terdapat pada ayat terakhir yang menjelaskan bahwa orang-orang kafir dan musryik hanya memperkirakan saja. Menurut mereka hanya ada kehidupan di dunia saja, tidak ada kehidupan akhirat dan yang mematikan atau membinasakan manusia adalah masa, tidak ada kekuatan lain. Orang-orang kafir dan musryik beranggapan seperti itu, tidak mempunyai pengetahuan yang kuat tentang itu, mereka hanya memperkirakan saja.

Dari pembahasan surat Al-Jaatsiyah ayat 24 tersebut menjelaskan bahwa orang-orang kafir dan musryik hanya memperkirakan saja. Mereka tidak mempunyai ilmu yang didasarkan kepada akal maupun naqal (kitab) yang dapat jadikan pegangan. Hal ini sama halnya dengan mengenai estimasi parameter yaitu hanya dapat memperkirakan atau menduga saja dan tidak diketahui seberapa tepat pendugaannya. Tetapi estimasi dalam penelitian ini berdasarkan ilmu pengetahuan dan dapat mendekati nilai sebenarnya.

Estimasi juga disebutkan dalam sebuah hadits yang diriwayatkan oleh Bukhari tentang Rasulullah memberi keringanan kepada seseorang yang mempunyai *ariyah* untuk menjualnya dengan kira-kira. Kata mengira-ngira dalam hadits tersebut dapat diartikan dengan estimasi. Hadist tersebut menjelaskan tentang menjual buah dengan cara dikira-kira berdasarkan takaran, sama halnya dengan diestimasi. Hal tersebut dapat diartikan juga bahwa buah kurma yang masih basah dapat dijual dengan cara diestimasi atau memperkirakan berdasarkan berapa banyak jumlahnya atau harganya atau ukurannya buah kurma kering dan juga untuk buah anggur basah dapat dijual dengan memperkirakan buah anggur yang kering. Jadi, konsep estimasi sudah ada sejak zaman nabi Muhammad SAW.

Penjelasan tentang estimasi pada surat Al-Jaatsiyah dan hadist yang diriwayatkan oleh Bukhari dapat disimpulkan bahwa hadits yang menerangkan tentang menjual buah dengan dikira-kira lebih sesuai dengan penelitian ini daripada perkiraan atau estimasi dalam surat Al-Jaatsiyah ayat 24. Hal ini dikarenakan menjual buah basah perkiraan yang digunakan tidak perkiraan saja, tetapi berdasarkan takaran dengan memperkirakan seharga atau sejumlah dengan buah kering. Seperti halnya mengestimasi nilai paramater κ, θ, σ maupun $\hat{\beta}^j$ dalam penelitian ini dengan menggunakan metode *Jackknife*. Sehingga diperoleh nilai parameter yang dapat mendekati nilai sebenarnya.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada penelitian ini, maka dapat diambil kesimpulan hasil estimasi parameter model CIR menggunakan metode *Jackknife* pada data tingkat suku bunga Bank Indonesia pada tahun 2011 sampai dengan 2015 adalah

$$dr\ (t) = 0{,}0248\big(6{,}8136 - r(t)\big)dt + 0{,}1165\sqrt{r(t)}dW(t)$$

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, maka saran untuk penelitian selanjutnya adalah melakukan pengembangan terhadap model suku bunga yang lain dengan metode *Jackknife* yakni model suku bunga *Vasicek, Ho-lee,* dan *Hull white*.

DAFTAR PUSTAKA

Aziz, Abdul. 2010. *Ekonometrika*. Malang: UIN Malang Press.

Bahreisy, H Salim.1992. *Terjemah Singkat Tafsir Ibnu Katsier Jilid 7*. Surabaya: PT Bina Ilmu.

Boediono. 2014. *Pengantar Ilmu Ekonomi Makro*. Yogyakarta: BPFE.

Budiman, dkk. 2015. Estimasi Parameter Model Cox Ingersoll Ross Pada Tingkat Bunga Bank Indonesia Menggunakan Metode Maximum Likelihood Estimation. *Buletin Ilmiah Matematika Stastika dan Terapannya*, 4(3): 211-216.

Ekananda, Mahyus. 2005. *Ekonometrika Dasar*. Jakarta: Mitra Wacana Media

Filipovic, Damir. 2009. *Term Structure Models*. Springer-Verlag: New York.

Finizio, N. dan G. Ladas. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.

Gujarati, Damodar N. 2004. *Basic Econometrics*. Fourth edition. Singapore: McGraw-Hill Inc.

Hasan, M. Iqbal. 2002. *Pokok-Pokok Materi Statistik 2 (Statistik Deskriptif).* Jakarta: Bumi Aksara.

Hull, J.C. 1946. *Options, Futures and Other Derivative*. New jersey: Prentice Hall.

Kartono. 1982. *Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta: Erlangga.

Kuncoro, Mudrajad. 2001. *Manajemen Keuangan Internasonal*.Yogya: BPFE.

Mariana, dkk. 2015. Estimasi Parameter pada Model Suku Bunga Cox Ingersoll Ross (CIR) Menggunakan Kalman Filter untuk Menentukan Harga Zero Coupon Bond. *JURNAL SAINS DAN SENI*, 8(1):2085-7829.

Noeryanti, dan Herindani, Rika. 2016. Estimasi Parameter Regresi Ganda Menggunakan Bootstrap dan Jackknife. *Prosiding Seminar Nasional Aplikasi Sains dan Teknologi (SNATS).*

Øksendal B. 2000. *Stochastics Differensial Equation (An Introductions with Applications).* New York: Springer-Verlag.

Rahmawati D.A.D dan Wahyu H.R. 2017. Analisis Pengaruh Suku Bunga Sertifikat Bank Indoneingkat Inflasi di Indonesia Periode 2006.1-2015.12 (Pendekatan Error Correction Model*). Jurnal Ilmu ekonomi.* Vol. 1 :60-74.

Ross, Sheldon M. 2010. *Introduction to Probability Models Tenth Edition*. Los Angeles: Academic Press.

Sahinler, S., dan Topuz D. 2007. Boots and Jackknife Resampling Algorithm for Estimation of Regression Parameters. *Journal of Aplied Quantitative Methods*. Vol.2 :188-199.

Samuel, Paul A., dan Nordhaus, William D. 1995. *Economics*.15st edition. McGraw-Hill.

Sleeper, Andrew. 2006. *Design for Six Sigma Statistics*. United States: TheMcGraw-Hill Compnies, Inc.

Sprent, P. 1989. *Applied Nonparametric Statistical Methods*. New York: Chapman and Hall.

Srinadi, I.Gusti, A. M. *Pengantar Proses Stokastik*. Denpasar: Universias Udayana.

Taylor, H.M., dan S. Karlin. 1998. *An Introduction to Stochastic Modeling*. California: Academic Press.

Wiersema, Ubbo F. 2008. *Brownian Motion Calculus*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Zeytun S., dan Gupta, A. 2007. *A Comparative Study of the Vasicek and the CIR Model of the Short Rate*. Germany: Fraunhofer Institut Techno-und Wirtschaftsmathematik.

LAMPIRAN I

DATA TINGKAT SUKU BUNGA BANK INDONESIA TAHUN 2011-2015 DALAM SATUAN PERSEN

BULAN	TAHUN				
	2011	2012	2013	2014	2015
Januari	6,08	4,88	4.87	7,23	6,93
Februari	6,71	3,82	4,87	7,17	6,67
Maret	6,72	3,83	4.88	7,13	6,65
April	7,18	3,93	5	7,14	6,65
Mei	7,36	4,24	5,1	7,15	6,65
Juni	7,36	4,32	5,35	7,14	6,65
Juli	7,28	4,46	5,85	7,09	6,65
Agustus	6,78	4,54	6	6,97	6,75
September	6,28	4,67	7	6,88	7,1
Oktober	5,77	4,75	7	6,93	7,1
November	5,22	4,77	7,25	6,93	7,1
Desember	5,04	4,8	7,25	6,97	7,1

LAMPIRAN II

NILAI DATA TINGKAT SUKU BUNGA PADA REGRESI

	X		y
1.	0.4056	2.4658	0.2555
2.	0.3860	2.5904	0.0039
3.	0.3858	2.5923	0.1774
4.	0.3732	2.6796	0.0672
5.	0.3686	2.7129	0
6.	0.3686	2.7129	-0.0295
7.	0.3706	2.6981	-0.1853
8.	0.3840	2.6038	-0.1920
9.	0.3990	2.5060	-0.2035
10.	0.4163	2.4021	-0.2290
11.	0.4377	2.2847	-0.0788
12.	0.4454	2.2450	-0.0713
13.	0.4527	2.2091	-0.4798
14.	0.5116	1.9545	0.0051
15.	0.5110	1.9570	0.0511
16.	0.5044	1.9824	0.1564
17.	0.4856	2.0591	0.0389
18.	0.4811	2.0785	0.0674
19.	0.4735	2.1119	0.0379
20.	0.4693	2.1307	0.0610
21.	0.4627	2.1610	0.0370
22.	0.4588	2.1794	0.0092
23.	0.4579	2.1840	0.0137
24.	0.4564	2.1909	0.0320
25.	0.4531	2.2068	0
26.	0.4531	2.2068	0.0045
27.	0.4527	2.2091	0.0543
28.	0.4472	2.2361	0.0447
29.	0.4428	2.2583	0.1107
30.	0.4323	2.3130	0.2162
31.	0.4134	2.4187	0.0620
32.	0.4082	2.4495	0.4082
33.	0.3780	2.6458	0
34.	0.3780	2.6458	0.0945
35.	0.3714	2.6926	0
36.	0.3714	2.6926	-0.0074
37.	0.3719	2.6889	-0.0223
38.	0.3735	2.6777	-0.0149
39.	0.3745	2.6702	0.0037
40.	0.3742	2.6721	0.0037
41.	0.3740	2.6739	-0.0037
42.	0.3742	2.6721	-0.0187
43.	0.3756	2.6627	-0.0451
44.	0.3788	2.6401	-0.0341
45.	0.3812	2.6230	0.0191
46.	0.3799	2.6325	0
47.	0.3799	2.6325	0.0152
48.	0.3788	2.6401	-0.0152
49.	0.3799	2.6325	-0.0988
50.	0.3872	2.5826	-0.0077
51.	0.3878	2.5788	0
52.	0.3878	2.5788	0
53.	0.3878	2.5788	0
54.	0.3878	2.5788	0
55.	0.3878	2.5788	0.0388
56.	0.3849	2.5981	0.1347
57.	0.3753	2.6646	0
58.	0.3753	2.6646	0
59.	0.3753	2.6646	0

LAMPIRAN III

NILAI *ERROR* DATA TINGKAT SUKU BUNGA

DATA	*ERROR*	DATA	*ERROR*
1	0,2481	31	0,0521
2	0,0029	32	0,4000
3	0,1766	33	0,0017
4	0,0706	34	0,0962
5	0,0050	35	0,0040
6	-0,0245	36	-0,0034
7	-0,1810	37	-0,0185
8	-0,1923	38	-0,0116
9	-0,2088	39	0,0067
10	-0,2397	40	0,0068
11	-0,0961	41	-0,0006
12	-0,0908	42	-0,0157
13	-0,5015	43	-0,0425
14	-0,0328	44	-0,0326
15	0,0133	45	0,0197
16	0,1203	46	0,0011
17	0,0079	47	0,0163
18	0,0376	48	-0,0137
19	0,0103	49	-0,0977
20	0,0346	50	-0,0091
21	0,0124	51	-0,0016
22	-0,0143	52	-0,0016
23	-0,0094	53	-0,0016
24	0,0092	54	-0,0016
25	-0,0218	55	0,0372
26	-0,0173	56	0,1341
27	0,0326	57	0,0027
28	0,0246	58	0,0027
29	0,0919	59	0,0027
30	0,2005	60	

LAMPIRAN IV

PROGRAM ESTIMASI PARAMETER METODE OLS

```
%data suku bunga tahun 2011-2015
clc, clear

r=xlsread('datafix.xlsx'),('B1:B60');
display(r)

%Estimasi OLS
deltat=1
for t=1:length(r)-1;
    Y(t,1)=(r(t+1)-r(t))/sqrt(r(t));
end
display(Y)
for t=1: length(r)-1;
    X(t,1)=deltat/sqrt(r(t));
    X(t,2)=sqrt(r(t))*deltat;
end;
display(X)

BetaEst=(X'*X)\X'*Y

a=BetaEst(1,1);
b=BetaEst(2,1);

E=Y-X*BetaEst;
display(E)
```

LAMPIRAN V

PROGRAM ESTIMASI PARAMETER DENGAN METODE *JACKKNIFE*

```
%data suku bunga tahun 2011-2015
clc, clear
r=xlsread('datafix.xlsx'),('B1:B60');
display(r)
deltat=1
for t=1:length(r)-1;
    Yj(t,1)=(r(t+1)-r(t))/sqrt(r(t));
end
display(Yj)
for t=1: length(r)-1;
    Xj(t,1)=deltat/sqrt(r(t));
    Xj(t,2)=sqrt(r(t))*deltat;
end;
display(Xj)

BetaEst=(Xj'*Xj)\Xj'*Yj
a=BetaEst(1,1);
b=BetaEst(2,1);
Ej=Yj-Xj*BetaEst;
display(Ej)

%Estimasi Jackknife
sum=0;
for i=1:59
    display(i)
    if i>1 && i<59
        Yja=[Yj(1:i-1,:);Yj(i+1:59,:)];
        Xja=[Xj(1:i-1,:);Xj(i+1:59,:)];
        Eja=[Ej(1:i-1,:);Ej(i+1:59,:)];
        size(Ej)
    elseif i==1
        Yja=Yj(2:59,:);
        Xja=Xj(2:59,:);
        Eja=Ej(2:59,:);
    elseif i==59
        Yja=Yj(1:58,:);
        Xja=Xj(1:58,:);
        Eja=Ej(1:58,:);
    end
    display(Yja)
    display(Xja)
    display(Eja)
    Betaj=(Xja'*Xja)\Xja'*Yja
    aj=Betaj(1,1);
    bj=Betaj(2,1);
    sum=sum+Betaj;
end
beta_mean=sum/59;
display(sum)
display(beta_mean)
```

```
Ejak=Yja-Xja*beta_mean;
kappa=-b;
display(kappa)
Theta=a/kappa;
display(Theta)
sigma=(1/sqrt(1*60)*norm(Ejak));
display(sigma)
```

RIWAYAT HIDUP

Elmira Dwi Yunizar, lahir di Banyuwangi pada tanggal 07 Juni 1998. Anak kedua dari pasangan Bapak Achmad Sulaimi dan Ibu Nasita dan merupakan adik dari Noviana Ulfa dan kakak dari Deshinta Rahma Hairunnisa.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN 3 Pakel dan lulus pada tahun 2009. Setelah itu melanjutkan sekolah di MTsN Rogojampi dan lulus tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMAN 1 Banyuwangi dan lulus tahun 2015. Kemudian kuliah di Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SBMPTN mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Selama di Malang tinggal di PPTQ Oemah Alquran Abu Hanifah sejak semester 3.

Ketika menempuh pendidikan di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang telah mengikuti organisasi intra maupun ekstra kampus. Selain itu, disela-sela kesibukannya menjadi mahasiswa ia juga pernah menjadi tentor privat dan tenaga pendidik di TPQ.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Elmira Dwi Yunizar
NIM : 15610091
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Estimasi Parameter Model *Cox Ingersoll Ross* Menggunkan Metode *Jackknife*

Pembimbing I : Abdul Aziz, M.Si
Pembimbing II : Evawati Alisah, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	25 Maret 2019	Konsultasi Bab I & II	1.
2.	1 April 2019	Konsultasi Bab I & II	2.
3.	8 April 2019	Konsultasi Bab I & II	3.
4.	15 April 2019	Konsultasi Bab I & II	4.
5.	29 April 2019	Konsultasi Bab I & II	5.
6.	6 Mei 2019	Konsultasi Bab I & II	6.
7.	13 Mei 2019	Konsultasi Bab I & II	7.
8.	20 Mei 2019	Konsultasi Bab I & II	8.
9.	27 Mei 2019	Konsultasi Bab I & II	9.
10.	25 Juni 2019	Konsultasi Bab I, II, & III	10.
11.	3 Juli 2019	Konsultasi Bab I, II, III, & IV	11.
12.	17 Juli 2019	Konsultasi Bab I, II, III, & IV	12.
13.	22 Juli 2019	Konsultasi Bab I, II, III, & IV	13.
14.	31 Juli 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	14.
15.	7 Agustus 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	15.
16.	29 November 2019	Konsultasi Bab IV	16.
17.	10 Desember 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	17.

Malang, 12 Desember 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001