KETERBATASAN PERUMUMAN INTEGRAL FRAKSIONAL DI RUANG LEBESGUE PADA HIPERGRUP KOMUTATIF

SKRIPSI

OLEH
JIE YAN KIRANA EMBUN KUMALA ASIH
NIM. 15610088

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

KETERBATASAN PERUMUMAN INTEGRAL FRAKSIONAL DI RUANG LEBESGUE PADA HIPERGRUP KOMUTATIF

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Jie Yan Kirana Embun Kumala Asih
NIM. 15610088

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

KETERBATASAN PERUMUMAN INTEGRAL FRAKSIONAL DI RUANG LEBESGUE PADA HIPERGRUP KOMUTATIF

SKRIPSI

Oleh
Jie Yan Kirana Embun Kumala Asih
NIM. 15610088

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 30 Oktober 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Hairur Rahman, M.Si	Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003	NIDT. 1990511 20160801 1 057

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

KETERBATASAN PERUMUMAN INTEGRAL FRAKSIONAL DI RUANG LEBESGUE PADA HIPERGRUP KOMUTATIF

SKRIPSI

Oleh
Jie Yan Kirana Embun Kumala Asih
NIM. 15610088

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 22 November 2019

Penguji Utama	:Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc	....
Ketua Penguji	:Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	....
Sekretaris Penguji	:Dr. Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji	:Muhammad Khudzaifah, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Jie Yan Kirana Embun Kumala Asih

NIM : 15610088

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Keterbatasan Perumuman Integral Fraksional di Ruang Lebesgue pada Hipergrup Komutatif

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 Oktober 2019
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
355AHF199947828
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Jie Yan Kirana Embun Kumala Asih
NIM. 15610088

MOTO

"*Time is money*"

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Bapak Mujiono dan Ibu Mulyani tercinta,

yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat,

dan kasih sayang yang tak ternilai, serta adik tersayang Tjie Yan Sufi Dewa Tapa

Larantuka yang selalu menjadi kebanggaan bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Keterbatasan PerumumanIntegral Fraksional di Ruang Lebesgue pada Hipergrup Komutatif"sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si,selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si,selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.
5. Muhammad Khudzaifah, M.Si,selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen wali yang selalu memberikan motivasi dan arahan kepada penulis.
7. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam proses perkuliahan.
8. Bapak dan Ibu serta adik tercinta yang selalu memberikan do'a, semangat dan motivasi demi keberhasilan penulis.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembacapada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 30 Oktober 2019

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

ABSTRAK

Asih, Jie Yan Kirana Embun Kumala. 2019. **Keterbatasan Perumuman Integral Fraksional di Ruang Lebesgue pada Hipergrup Komutatif.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Kata kunci:Keterbatasan perumuman integral fraksional, ruang lebesgue, hipergrup komutatif

Operator integral fraksional merupakan operator balikan dari suatu pangkat operator Laplace yang diperkenalkan pertama kali oleh Marcel Riesz sekitar tahun 1886. Hardy-Littlewood dan Sobolev pernah membahasnya dalam ruang Lebesgue dan kemudian dikenal dengan ketaksamaan Hardy-Littlewood Sobolev. Operator ini terus dikembangkan, Eiichi Nakai memperkenalkan perumuman integral fraksional pada tahun 2001. Mubariz G. Hajibayov telah membuktikan keterbatasan perumuman integral fraksional pada hipergrup komutatif pada tahun 2015.

Perumuman integral fraksional dalam penelitian ini dinotasikan dengan $I_\rho f(x) = \int_\mu f(y)\frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n}d\mu(y)$. Akan dibuktikan keterbatasannya di ruang Lebesgue pada hiergrup komutatif. Berdasarkan pembahasan diperoleh bahwa perumuman integral fraksional I_ρ terbatas dari $L^p(K,\mu)$ ke $L^q(K,\mu)$ di ruang Lebesgue pada hipergrup komutatif. Di mana $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}, 1 < p < q < \infty$, serta ρmemenuhi$\rho(r) \leq C\int_r^\infty \frac{\rho(t)}{t} \leq C\rho(r)$, dan$\rho(r) = r^\alpha$dengan syarat $\mu(B) \leq Cr^n$.

ABSTRACT

Asih, Jie Yan Kirana Embun Kumala. 2019. **Boundedness of Generalized Fractional Integral in Lebesgue Space on Commutative Hypergroup.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Keywords:Boundedness of Generalized Fractional Integral, lebesgue space, commutative hypergroup

Fractional Integral Operators is an inverse operators of Laplace power's operator that introduced by Marcel Riesz for the first time at about 1886. Hardy-Littlewood and Sobolev had discuss it in Lebesgue space and then it is well known as Hardy-Littlewood Sobolev inequality. This operator continues to be developed, Eiichi Nakai was introduced generalized fractional integral in 2001. Mubariz G. Hajibayov was proved boundedness of generalized fractional integral on commutative hypergroup in 2015.

Generalized fractional integral in this paper is denoted by $I_\rho f(x) = \int_\mu f(y)\frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$. Its boundedness in Lebesgue space on commutative hypergroup will be proved. Based on discussion, it was obtained that generalized fractional integral I_ρ is bounded from $L^p(K,\mu)$ to $L^q(K,\mu)$ in Lebesgue space on commutative hypergroup.Where $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}, 1 < p < q < \infty$, and ρ satisfy $\rho(r) \le C\int_r^\infty \frac{\rho(t)}{t} \le C\rho(r)$, and $\rho(r) = r^\alpha$ with $\mu(B) \le Cr^n$.

ملخص

اسيه، جييان كيرانا إمبون كومالا.2019.**قيود تعميم المتكاملة الكسري في فضاء *Lebesgue*على *Hypergroup* التبادلية**. بحث جامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعةالإسلامية الحكومية مولانامالك إبراهيممالانج. مؤدب:(I) الدكتورخيرالرحمن الماجستير، (II) محمدخذيفة الماجستير

الكلمات الرئيسية: حدود تعميم المتكامل الكسري، فضاء*lebesgue* ، *hypergroup* التبادلية

لمشغل المتكامل الكسري هو المشغل العكسي لرتبة مشغل لابلاس والذي تم تقديمه لأول مرة بواسطة *Marcell Riesz*حوالي عام 1886. ناقشها*Hardy*،*Littlewood*و*Sobolev*في فضاء *Lebesgue*وأصبحت فيما بعد تُعرف بعدم مساواة*Hardy-LittlewoodSobolev*.يتم دائمًا تطوير هذا المشغل، قدمت *Eiichi Nakai*تعميم متكاملة كسرية في عام 2001. لقد أثبت *MubarizG. Hajibayov* القيود المفروضة على تعميم عن التكاملات الكسرية في *hypergroup* التبادلية في عام 2015.

يشار إلى تعميم متكاملة كسرية في هذه الدراسة $I_\rho f(x) = \int_\mu f(y)\frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n}d\mu(y)$ سوف تثبت حدودها في الفضاء *Lebesgue* في التسلسلات الهرمية التبادلية. بناءً على المناقشة ، وجد أن تعميم عن التكاملالكسريI_ρ يقتصرمن$L^p(K,\mu)$ إلى $L^q(K,\mu)$في الفضاء *Lebesgue* على التشعبية التبادلية. حيث $1 < p < q < \infty, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$كذلك$\rho$ اجتماع $\rho(r) \le C\int_r^\infty \frac{\rho(t)}{t} \le C\rho(r)$ و$\rho(r) = r^\alpha$ بشرط $\mu(B) \le Cr^n$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori operator integral fraksional merupakan salah satu kajian dalam analisis harmonik. Operator integral fraksional adalah bagian dari potensial Riesz. Potensial Riesz merupakan salah satu operator yang menjadi bahan kajian utama pada perkembangan analisis modern. Operator ini pada dasarnya merupakan operator balikan dari suatu pangkat operator Laplace yang diperkenalkan pertama kali oleh Marcel Riesz sekitar tahun 1886.

Operator integral fraksional adalah operator $I_\alpha f$ yang memetakan fungsi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sebagai

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

dengan $0 < \alpha < n$. $I_\alpha f := (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f, 0 < \alpha < n$. Jadi,

$$I_\alpha f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

dengan

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{(n-\alpha)}{2}\right)}.$$

Selanjutnya, I_α dinamakan sebagai operator Riesz atau operator integral fraksional (Gunawan, 2006).

Operator integral fraksional merupakan operator terbatas dari ruang lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang lebesgue $L^q(\mathbb{R}^n)$, yaitu terdapat konstanta riil

$C > 0$ sedemikian sehingga

$$\|I_\alpha f\|_q \leq C\|f\|_p \quad 1.1$$

untuk $\alpha = \frac{n}{p} - \frac{n}{q}, 1 < p < q < \infty. \mu(B(x,r))$ adalah ukuran Lebesgue $B(x,r)$ di $\mathbb{R}^n$. Dalam hal ini $B(r) = B(x,r)$ adalah bola buka di $\mathbb{R}^n$ yang berpusat di titik $x \in \mathbb{R}^n$ dengan jari-jari $r > 0$, yaitu $B(x,r) \coloneqq \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$ dan $r > 0$ (Gunawan, 2006).

Notasi $L^p(\mathbb{R}^n)$ menyatakan ruang Lebesgue, yaitu untuk $0 < p < \infty$, himpunan terukur $E \subset \mathbb{R}^n, L^p(E)$ merupakan ruang lebesgue dari fungsi-fungsi dengan norm $\|f\|_{L^p(E)} = \left(\int_E |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} < \infty, \|I_\alpha f\|_q = \left(\int_E |I_\alpha f(x)|^q\, dx\right)^{1/q} < \infty$. Untuk $p = \infty, \|f\|_{L^\infty(E)}$ merupakan norma supremum esensial yang biasa. Untuk $L^p(\mathbb{R}^n)$ ditulis L^p, sedangkan untuk $\|f\|_{L^p}$ ditulis $\|f\|_p$(Adams, 1996: 2 dan Utoyo, 2016).

Ketaksamaan 1.1 di atas pertama kali dibuktikan oleh G.H. Hardy, J.E. Littlewood dan Sergei Sobolev pada sekitar tahun 1930 sehingga selanjutnya dikenal sebagai ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev. Teorema Hardy-Littlewood-Sobolev merupakan sebuah hasil yang penting dalam teori integral fraksional dan teori potensial. Ada banyak perumuman dan analog dari teorema ini (Gunawan, 2003; dan Hajibayov, 2015).

Teorema Hardy-Littlewood Sobolev telah dibuktikan pada integral fraksional dalam ukuran ganda (*doubling*) maupun tak ganda (*non-doubling*). Di mana ruang tak homogen adalah ruang $\mathbb{R}^n$yang dilengkapi dengan ukuran tak negatif μ yang memenuhi kondisi *growth* $(\mu \in GC(n))$. Ukuran μ dikatakan memenuhi kondisi *growth* apabila terdapat konstanta $C > 0$

sedemikian sehingga untuk semua bola $B(x,r), \mu\big(B(x,r)\big) \leq Cr^n$(Hajibayov, 2015).

Selain itu, operator integral fraksional juga dikembangkan pada perumuman integral fraksional I_ρ yang pertama kali pertama kali dipelajari oleh Nakai pada tahun 2001. Perumuman operator integral fraksional I_ρ, didefinisikan untuk fungsi yang sesuai $\rho: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sebagai

$$I_\rho f(x) = \int_B f(y) \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

jika $\rho(t) = t^\alpha, 0 < \alpha < n$, maka $I_\rho = I_\alpha$ (Gunawan, 2003).

Teori operator integral fraksional terus dikembangkan. Sehingga akan terus dikaji dan diteliti oleh para ahli. Hal ini mengharuskan manusia untuk selalu berfikir dan mengambil pelajaran. Anjuran tersebut terdapat dalam al-Qur'an surat az-Zumar ayat 9 yang artinya:

> *"(Apakah kamu orang musyrik yang lebih beruntung) ataukah orang yang beribadah pada waktu malam dengan sujud dan berdiri , karena takut kepada (azab) akhirat dan mengharapkan rahmat Tuhannya? Katakanlah, "Apakah sama orang-orang yang mengetahui dengan orang-orang yang tidak mengetahui?" Sebenarnya hanya orang yang berakal sehat yang dapat menerima pelajaran."*

Berdasarkan tafsir Kementrian Agama RI (2010), Allah menyatakan bahwa hanya orang-orang yang berakal yang dapat mengambil pelajaran. Pelajaran tersebut baik dari pengalaman hidupnya atau dari tanda-tanda kebesaran Allah yang terdapat di langit dan di bumi serta isinya, juga yang terdapat pada dirinya atau teladan dari kisah umat yang lalu. Dalam kesimpulannya juga disebutkan bahwa tidak sama antara orang yang mempunyai ilmu pengetahuan dengan yang tidak berilmu. Oleh karena itu, kita diharuskan untuk selalu berfikir dan mengambil pelajaran agar menjadi orang yang berilmu. Sehingga dapat terus meneliti dan mengembangkan ilmu pengetahuan, salah satunya pada operator integral fraksional khususnya perumuman integral fraksional.

Perkembangan perumuman integral fraksional salah satunya pada sifat ukurannya. Hal tersebut telah dilakukan oleh banyak matematikawan. Salah satunya adalah Mubariz G. Hajibayov yang telah membuktikan keterbatasan perumuman integral fraksional pada hipergrup komutatif pada tahun 2015 (Hajibayov, 2015).

Hipergrup adalah aljabar ukuran yang memiliki banyak sifat yang berkaitan dengan aljabar ukuran konvolusi sebuah grup, akan tetapi tidak ada pendugaan struktur aljabar pada ruang dasarnya. Suatu hipergrup K disebut komutatif jika $\delta_x * \delta_y = \delta_y * \delta_x$ (δ menotasikan ukuran Dirac) untuk semua $x, y \in K$. Sudah menjadi hal yang umum bahwa setiap hipergrup yang komutatif memiliki ukuran Haar yang dinotasikan dengan λ. Hal ini, untuk semua fungsi terukur Borel f di K,

$$\int_K f(\delta_x * \delta_y) d\lambda(y) = \int_K f(y) d\lambda(y) (x \in K).$$

Didefinisikan operator translasi yang diperumum $T^x, x \in K$ dengan

$$T^x f(y) = \int_K f d(\delta_x * \delta_y)$$

untuk semua $y \in K$ (Ross, 1998 dan Hajibayov, 2015).

Berdasarkan paparan di atas, dapat diketahui bahwa perkembangan teori keterbatasan operator integral fraksional yang diperkenalkan oleh Marcell Riesz pada tahun 1886 telah banyak dikembangkan oleh para matematikawan. Contohnya Nakai yang telah mengembangkannya pada perumuman integral fraksional pada 2001 yang terbatas di ruang Morrey. Kemudian Hajibayov telah mengembangkan keterbatasan perumuman integral fraksional pada hipergrup komutatif pada 2015. Sehingga sebagai pengembangan dari hasil-hasil penelitan tersebut, pada penelitian ini akan dibuktikan keterbatasan perumuman integral fraksional pada hipergrup komutatif dari ruang $L^p(K,\mu)$ ke $L^q(K,\mu)$ dengan syarat $\mu(B) \leq Cr^n$.

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimanakah keterbatasan perumuman integral fraksional pada hipergrup komutatif dari ruang $L^p(K,\mu)$ ke $L^q(K,\mu)$?

1.3 Tujuan Penelitian

Membuktikan keterbatasan perumuman integral fraksional pada hipergrup komutatif dari ruang $L^p(K,\mu)$ ke $L^q(K,\mu)$.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yaitu mengetahui keterbatasan perumuman integral fraksional pada hipergrup komutatif dari ruang $L^p(K,\mu)$ ke $L^q(K,\mu)$.

1.5 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi kepustakaan (*Library research*) yaitu dengan mengumpulkan informasi yang diperoleh dari buku-buku maupun jurnal-jurnal yang berkaitan dengan penelitian. Adapun langkah yang dilakukan yaitu membuktikan keterbatasan perumuman integral fraksional di ruang Lebesgue pada hipergrup komutatif.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi lebih terarah dan mudah dipahami, digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi atas beberapa subbab dengan sistematika sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian Pustaka terdiri dari teori-teori yang digunakan untuk mendukung pembahasan dan menjawab rumusan masalah. Kajian Pustaka dalam penelitian ini meliputi: Integral fraksional, perumuman integral fraksional, fungsi maksimal, ukuran, integral Lebesgue, ruang Lebesgue, ruang L^p, ruang metrik, hipergrup, perintah Allah untuk selalu berfikir.

Bab III Pembahasan

Pembahasan terdiri dari hasil utama penelitian yang menjawab rumusan masalah. Pembahasan dalam penelitian ini yaitu: Keterbatasan operator I_ρ di ruang Lebesgue.

Bab IV Penutup

Penutup terdiri dari kesimpulan terkait hasil pembahasan dan juga saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Integral Fraksional

Misalkan f fungsi terukur bernilai riil pada $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ dan misalkan $0 < \alpha < n$. Integral fraksional atau potensial Riesz dari f untuk α didefinisikan sebagai

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, x \in \mathbb{R}^n,$$

asalkan nilai integralnya ada. Dengan nilai f yang bisa berbeda-beda, pemetaan didefinisikan sebagai $I_\alpha : f \to I_\alpha f$, yaitu operator konvolusi dengan kernel $|x|^{\alpha-n}$ yang disebut operator integral fraksional untuk α(Wheeden, 2015: 415).

Contoh 1

Suatu bola $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ dan fungsi $f_{\chi_B}(x)$ merupakan fungsi karakteristik pada bola B. Operator integral fraksional dari f adalah

$$I_\alpha f(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{|x-y|^{n-\alpha}} dx$$

$$= \int_B \frac{f(x)}{|x-y|^{n-\alpha}} dx + \int_{B^c} \frac{f(x)}{|x-y|^{n-\alpha}} dx$$

$$= \int_B \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dx + \int_{B^c} \frac{0}{|x-y|^{n-\alpha}} dx$$

$$= \int_B \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dx$$

$$= \int_{\|x\|<1} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dx.$$

Untuk $y = 0$ maka

$$I_\alpha f(0) = \int_{\|x\|<1} \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} dx$$

$$= \int_{\|x\|<1} |x|^{\alpha-n} dx.$$

Misalkan $|x| = r$, maka $dx = dr$. Sedemikian sehingga,

$$I_\alpha f(0) = C \int_0^1 r^{n-1} r^{\alpha-n} dr$$

$$= C \int_0^1 r^{\alpha-1} dr$$

$$= C r^\alpha |_0^1$$

$$= C.$$

Untuk $y \in \mathbb{R}$ maka

$$I_\alpha f(y) = \int_{\|x\|<1} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dx$$

$$= \int_{\|x\|<1} |x-y|^{\alpha-n} dx$$

$$\leq \int_{\|x\|<1} |x|^{\alpha-n} dx - \int_{\|x\|<1} |y|^{\alpha-n} dx$$

$$= C - |y|^{\alpha-n} |B|$$

$$= C - C_1 |y|^{\alpha-n}.$$

Karena $\|y\| > 0$ dan $\alpha - n < 0$, maka

$$I_\alpha f(y) = C - C_1 |y|^{\alpha-n}$$

$$= C - \frac{C_1}{|y|^{n-\alpha}}.$$

(Nurjannah, 2018:21-22).

2.2 Perumuman Integral Fraksional

Perumuman operator integral fraksional I_ρ, didefinisikan untuk fungsi yang sesuai $\rho: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sebagai

$$I_\rho f(x) = \int_B f(y) \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

jika $\rho(t) = t^\alpha, 0 < \alpha < n$, maka $I_\rho = I_\alpha$ (Gunawan, 2003).

2.3 Fungsi Maksimal

Fungsi maksimal fraksional, didefinisikan untuk $0 < \alpha < n$ dengan

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy,$$

Selain itu, digunakan juga fungsi maksimal Hardy-Littlewood pada fungsi terintegral lokal f yaitu

$$M_0 f(x) = Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy.$$

(Adams, 1996: 3).

Lemma2.1

Misalkan $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$. Maka, untuk $x \in \mathbb{R}^n$, berlaku

$$|I_\alpha f(x)| \leq C \|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}} [Mf(x)]^{1-\frac{\alpha p}{n}},$$

di mana M merupakan fungsi maksimal Hardy-Littlewood dan $C = C(\alpha, p, n)$.

Bukti

Ditetapkan $x \in \mathbb{R}^n$, untuk suatu $r > 0$,

$$|I_\alpha f(x)| \leq \int_{|y|\leq r} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}} dy + \int_{|y|>r} \frac{|f(x-y)|}{|y|^{n-\alpha}} dy := J_1 + J_2.$$

Untuk J_1, ditulis

$$J_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j-1}r<|y|\le 2^{-j}r} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}} dy$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{-j-1}r)^{n-\alpha}} \int_{2^{-j-1}r<|y|\le 2^{-j}r} |f(x-y)| dy$$

$$\le Cr^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2^{-j})^{\alpha}}{(2^{-j}r)^{n}} \int_{|y|\le 2^{-j}r} |f(x-y)| dy$$

$$\le Cr^{\alpha} Mf(x).$$

Untuk J_2, jika $p = 1$, maka

$$J_2 \le r^{\alpha-n} \|f\|_1.$$

Jika $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, maka ketaksamaan Holder mengakibatkan

$$J_2 \le \left(\int_{|y|>r} |y|^{(\alpha-n)'} dy \right)^{1/p'} \|f\|_p$$

$$\le Cr^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_p.$$

Oleh karena itu, ketika $1 \le p < \frac{n}{\alpha}$, dari penjabaran J_1 dan J_2, untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$, mengikuti itu

$$|I_\alpha(x)| \le C \left(r^{\alpha} Mf(x) + r^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_p \right).$$

Ambil $r = \left(\frac{\|f\|_p}{Mf(x)} \right)^{\frac{p}{n}}$, maka

$$r^{\alpha} Mf(x) = r^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_p = \|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}} Mf(x)^{1-\frac{\alpha p}{n}}.$$

Jadi, lemma ini terbukti.

(Lu, 2007: 135).

Teorema 2.2 (Hardy-Littlewood-Sobolev)

Misalkan$0 < \alpha < n,\ 1 \le p < \frac{n}{\alpha}$ dan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, sehingga

(i) Jika $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \left(1 < p < \frac{n}{\alpha}\right)$, maka $\|I_\alpha f\|_q \le C\|f\|_p$;

(ii) Jika $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, maka untuk setiap $\lambda > 0,\ |\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}| \le \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_1\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$, dimana $C = C(\alpha, n, p)$.

Bukti:

(i) Ingat bahwa $\left(1 - \frac{\alpha p}{n}\right) q = p$ dengan Lemma 2.1 dan keterbatasan-L^p dari operator maksimal Hardy-Littlewood M untuk $1 < p < \infty$, didapatkan

$$\|I_\alpha f\|_q \le C\|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}} \|Mf\|_p^{1-\frac{\alpha p}{n}} \le C\|f\|_p.$$

(ii) Menggunakan Lemma 2.1 dan keterbatasan-(1,1) lemah dari operator M, didapatkan

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}| = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \left(\frac{\lambda}{C\|f\|_1^{\frac{\alpha}{n}}}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}\right\}\right|$$

$$\le C_1 \left(\frac{C\|f\|_1^{\frac{\alpha}{n}}}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} \|f\|_1$$

$$\le \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_1\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}.$$

Teorema ini terbukti. ■

(Lu, 2007: 136).

2.4 Ukuran dan Aljabar-σ

Definisi 2.3

Ukuran adalah fungsi bernilai riil diperpanjang μ terdefinisi pada aljabar-$\sigma\mathcal{X}$ dari subhimpunan X sedemikian sehingga

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu(E) \geq 0$ untuk semua $E \in \mathcal{X}$, dan

(iii) Jika (E_n) sebarang barisan disjoin dari himpunan di $\mathcal{X}$, maka

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Di mana barisan disjoin yaitu $E_n \cap E_m = \emptyset$ jika $n \neq m$.

(Bartle, 1995: 19)

Definisi 2.4

Misalkan X sebarang himpunan. Sebuah koleksi himpunan $\mathcal{X}$ dari subset X disebut aljabar-σ pada X jika

a. $\emptyset, X \in \mathcal{X}$,

b. Jika $A \in \mathcal{X}$, maka $A^c \in \mathcal{X}$,

c. Jika $\{A_n\}$ barisan himpunan pada $\mathcal{X}$, maka $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$.

Sebuah pasangan terurut $(X, \mathcal{X})$ yang terdiri dari himpunan X dan aljabar-$\sigma\mathcal{X}$ dari subhimpunan X disebut ruang terukur. Setiap himpunan pada $\mathcal{X}$ disebut himpunan terukur-$\mathcal{X}$. Tetapi ketika aljabar-$\sigma\mathcal{X}$ telah diketahui, maka cukup disebut himpunan terukur (Bartle, 1995: 6).

Contoh 2

Misalkan X himpunan dan $\mathcal{X} = \{\emptyset, X\}$. Maka $\mathcal{X}$ aljabar-σ pada X(Cohn, 2013: 2).

Bukti:

X himpunan dan $\mathcal{X} = \{\emptyset, X\}$.

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{X}$,

(ii) $\emptyset \in \mathcal{X}$, $\emptyset^c = X \in \mathcal{X}$

$X \in \mathcal{X}$, $X^c = \emptyset \in \mathcal{X}$,

(iii) $\emptyset, X \in \mathcal{X}$, $\emptyset \cup X = X \in \mathcal{X}$.

Jadi, berdasarkan (i), (ii), dan (iii) terbukti memenuhi definisi aljabar-σ.

Teorema 2.5

Jika $(\Omega, \mathcal{X})$ ruang terukur $E \in \mathcal{X}$, dan fungsi $f: \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, maka empat pernyataan di bawah ini ekuivalen (Darmawijaya, 2007: 230):

(i) $\{x: x \in E | f(x) < \alpha\} \in \mathcal{X}$;

(ii) $\{x: x \in E | f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{X}$;

(iii) $\{x: x \in E | f(x) > \alpha\} \in \mathcal{X}$;

(iv) $\{x: x \in E | f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{X}$;

untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bukti:

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) Jelas, karena keduanya saling komplemen;

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) Jelas, karena saling komplemen.

Oleh karena itu, cukup membuktikan (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Perhatikan bahwa

$$\{x \in E|f(x) < \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \in E \middle| f(x) \leq \alpha - \frac{1}{n}\right\}.$$

Karena $\alpha - \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$, maka $\left\{x \in E \middle| f(x) \leq \alpha - \frac{1}{n}\right\}$ terukur. Lebih lanjut, gabungannya terukur. Jadi, $\{x \in E|f(x) < \alpha\}$ terukur.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Perhatikan bahwa

$$\{x \in E|f(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in E \middle| f(x) < \alpha + \frac{1}{n}\right\}.$$

Karena $\alpha + \frac{1}{n} \in \mathbb{R}$, maka $\left\{x \in E \middle| f(x) < \alpha + \frac{1}{n}\right\}$ terukur. Lebih lanjut, irisannya terukur. Jadi, $\{x \in E|f(x \leq \alpha\}$ terukur.

2.5 Ruang Lebesgue

Definisi 2.6

Norm pada ruang vektor $\boldsymbol{V}$adalah fungsi bernilai riil pada $\boldsymbol{V}$ yang nilainya di $x \in \boldsymbol{V}$dinotasikan sebagai $\|x\|$, dibaca norm dari x, dan memenuhi beberapa aksioma

(N1) $\|x\| \geq 0$;

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (Ketaksamaan segitiga).

Di sini x dan y merupakan sebarang vektor di $\boldsymbol{V}$dan α suatu skalar.

Sebuah norm pada $\boldsymbol{V}$mendefinisikan sebuah metrik d pada $\boldsymbol{V}$ditulis

$$d(x, y) = \|x - y\| (x, y \in \boldsymbol{V}),$$

yang disebut metrik diinduksi oleh norma. Ruang bernorma dinotasikan dengan $(\boldsymbol{V}, \|.\|)$ (Kreyszig, 1978: 59).

Definisi 2.7

Untuk $0 < p < \infty$, himpunan terukur $E \subset \mathbb{R}^N, L^p(E)$ merupakan ruang Lebesgue dari fungsi-fungsi dengan norm

$$\|f\|_{L^p(E)} = \left(\int_E |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Untuk $p = \infty, \|f\|_{L^\infty(E)}$ merupakan norma supremum esensial yang biasa. Untuk $L^p(\mathbb{R}^N)$ ditulis L^p, sedangkan untuk $\|f\|_{L^p}$ ditulis $\|f\|_p$(Adams, 1996: 2).

Dua fungsi di $L = L(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ (di mana $\boldsymbol{X}$menotasikan aljabar-σ) dikatakan ekuivalen-μ jika bernilai sama di hampir setiap μ. Kelas ekuivalensi ditentukan oleh f di L biasanya dinotasikan dengan $[f]$ dan terdiri dari himpunan semua fungsi di L dimana μ dan f ekuivalen. Ruang Lebesgue $L_1 = L_1(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ terdiri dari semua kelas ekuivalensi di L. Jika L_1 memuat $[f]$, norm dapat didefinisikan sebagai

$$\|[f]\|_1 = \int |f| d\mu \qquad 2.1$$

(Bartle, 1995 :54).

Teorema 2.8

Ruang Lebesgue $L^1(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ ($\boldsymbol{X}$menotasikan aljabar-σ) adalah ruang linear bernorma.

Bukti. Dapat diketahui bahwa operasi vektor di L^1 didefinisikan sebagai

$$\alpha[f] = [\alpha f], \qquad [f] + [g] = [f + g],$$

dan elemen nol L^1 adalah $[0]$. Hanya akan diperiksa bahwa persamaan 2.1memberikan norma pada L^1. Tentu saja $\|[f]\|_1 \geq 0$ dan $\|[0]\|_1 = 0$. Selain itu, jka $\|[f]\|_1 = 0$ maka

$$\int |f| d\mu = 0,$$

jadi $f(x) = 0$ untuk μ di hampir semua x. Oleh karena itu $[f] = [0]$. Akhirnya dapat diketahui bahwa poin (iii) dan (iv) pada Definisi 2.5 terpenuhi. Oleh karena itu, $\| \quad \|_1$ mengahasilkan norm pada L_1 (Bartle, 1995 :54-55).

Contoh 3

Sebuah koleksi $B(X)$ dari semua fungsi bernilai real terbatas pada X adalah bernorma dengan bentuk:

$$N(f) = \sup\{|f(x)|: x \in X\}$$

(Bartle, 1995: 53).

2.6 Integral Lebesgue

Definisi 2.9

Misalkan $f: E \to \mathbb{R}$ adalah fungsi sederhana, $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$.

Integral Lebesgue fungsi f pada E dinyatakan dengan notasi $\int_E f d\mu$ atau $\int_E f$ dan didefinisikan oleh

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i).$$

(Hutahean, 1989: 9.4)

Definisi 2.10

Misalkan μ ukuran Lebesgue, dan misalkan $E \subseteq \mathbb{R}$ suatu himpunan terukur, $\mu(E) < \infty$. Fungsi $f: E \to \mathbb{R}$ dinamakan fungsi sederhana, jika ada bilangan real $a_1, a_2, \dots a_n$, dan himpunan-himpunan terukur $E_1, E_2, \dots, E_n$, $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$, $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ sehingga

$$f(x) = a_i, \qquad x \in E_i (i = 1,2, \dots, n).$$

Jika $f: E \to \mathbb{R}$ suatu fungsi sederhana, $f = \sum_{i=1}^{n} a_i x_{E_i}$, dan $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ adalah bilangan-bilangan real tak nol yang tak sama di dalam daerah nilai fungsi f, maka

$$f = \sum_{j=1}^{k} a_{i_j} x_{E_{i_j}}$$

dinamakan representasi kanonik fungsi f.

(Hutahean, 1989: 9.3)

Contoh 4

Sebelum menulis dan menghitung representasi kanonik, didefinisikan fungsi sederhana,

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 3 \leq x \leq 5 \\ 1, & 1 \leq x < 3 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & -1 < x < 0 \\ 0, & -2 < x \leq -1 \\ 1, & -5 \leq x \leq -2 \end{cases} ;$$

f dapat dituliskan sebagai

$f = 2. x_{[0,5]} + 1. x_{[1,0]} + 0. x_{[0,1]} + 2. x_{[-1,0]} + 0. x_{[-2,-1]} + 1. x_{[-5,-2]}$.

Representasi kanonik dari fungsi f adalah

$$f = 2. x_{[0,5] \cup [-1,0]} + 1. x_{[1,0] \cup [-5,-2]}.$$

Dari fungsi $f(x)$ diperoleh

$$\int_E f d\mu = 2\mu([3,5]) + 1\mu\big([1,3)\big) + 0\mu\big([0,1)\big) + 2\mu\big((-1,0)\big)$$

$$+0\mu\big((-2,-1]\big) + 1\mu([-5,-2]) = 11.$$

Jika digunakan representasi kanonik dari fungsi f diperoleh

$$\int_E f d\mu = 2\mu\big([3,5] \cup (-1,0)\big) + 1\mu([1,3] \cup [-5,-2]) = 11$$

(Hutahean, 1989:9.4-9.5).

Teorema 2.11

Misalkan E suatu himpunan terukur yang diketahui, $\mu(E) < \infty$. Jika $f: E \to \mathbb{R}$ dan $g: E \to \mathbb{R}$ dua fungsi sederhana, α bilangan real yang diketahui, maka:

(i) $\int_E (f+g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$;

(ii) $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$;

(iii) Jika $f \geq g$ maka $\int_E f d\mu \geq \int_E g d\mu$

(Hutahean, 1989: 9.5).

Bukti:

(i) Misalkan

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i x_{E_i}, g = \sum_{j=1}^{n} b_j x_F \ .$$

$$G_{ij} = E_i \cap F_j (i = 1,2,\dots,m; j = 1,2,\dots,n),$$

maka

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{n} G_{ij}, F_j = \bigcup_{i=1}^{m} G_{ij}\ ,$$

$a_{ij} = a_i, (j = 1,2, \dots, n), b_{ij} = b_j, (i = 1,2, \dots, m)$,

$(f + g)(x) = a_i + b_j = a_{ij} + b_{ij}, x \in G_{ij}$,

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(E_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} G_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mu(G_{ij}),$$

$$\int_E g d\mu = \sum_{j=1}^{n} b_j \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} G_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ij}\mu(G_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\mu(G_{ij}),$$

sehingga

$$\int_E (f + g) d\mu = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij})\mu(G_{ij})$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mu(G_{ij}) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\mu(G_{ij}) = \int_E f d\mu + \int_E f d\mu.$$

(ii) Jelas, karena α berupa bilangan real yang diketahui. Sehingga dapat dianggap sebagai konstanta.

(iii) Misalkan

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i x_{E_i}\ , g = \sum_{j=1}^{n} b_j x_F,$$

$$G_{ij} = E_i \cap F_j (i = 1,2, \dots m; j = 1,2, \dots n),$$

maka

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{n} G_{ij}\ , F_j = \bigcup_{i=1}^{m} G_{ij},$$

$a_{ij} = a_i(j = 1,2,\dots,n), b_{ij} = b_j(i = 1,2,\dots,m)$.

Karena

$f(x) \geq g(x)$ $, x \in E$ maka $a_{ij} \geq b_{ij}(i = 1,2,\dots,m; j = 1,2,\dots,n)$,

sehingga

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mu(G_{ij}) \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\mu(G_{ij}) = \int_E g d\mu .$$

2.7 Ruang L^p

Jika $1 \leq p < \infty$, ruang $L_p = L_p(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ ($\boldsymbol{X}$menotasikan aljabar-σ) merupakan ruang yang terdiri dari semua kelas ekivalensi-μ dari fungsi bernilai real f terukur-$\boldsymbol{X}$ di mana $|f|^p$ memiliki integral berhingga dariμsampai$X$. Dua fungsi dikatakan ekivalen-μ jika keduanya sama pada hampir setiapμ. Diberikan

$$\|f\|_p = \left\{\int |f|^p d\mu\right\}^{1/p}.$$

Jika $p = 1$, fungsi ini menjadi norm pada L_1 dari kelas ekuivalensi fungsi terintegral (Bartle, 1995: 55).

Definisi 2.12

Ruang $L_\infty = L_\infty(X, \boldsymbol{X}, \mu)$ adalah ruang yang terdiri dari semua kelas ekivalensi fungsi bernilai riil terukur-$\boldsymbol{X}$($\boldsymbol{X}$menotasikan aljabar-σ)yanghampir semuanya terbatas. Dua fungsi akan ekivalen ketika bernilai sama di hampir setiap μ. Jika $f \in L_\infty$ dan $N \in \boldsymbol{X}$dengan $\mu(N) = 0$, didefinisikan

$$S(N) = \sup\{|f(x)| : x \notin N\}$$

dan

$$\|f\|_\infty = \inf\{S(N) : N \in \boldsymbol{X}, \mu(N) = 0\}.$$

Anggota dari L_∞ disebut fungsi terbatas secara esensial (Bartle, 1995: 6 & 60).

Contoh 5

Misalkan $X = [0,1]$, X himpunan yang terdiri dari barisan tutup, μ adalah ukuran pada X dan $f(x) = x^{\frac{1}{2}}, 0 \leq x \leq 1$. Akan dibuktikan bahwa $f(x) \in L^2[0,1]$.

Bukti:

$f \in L^2[0,1]$, berarti $\left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$, sedemikian sehingga

$$\left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 \left|x^{\frac{1}{2}}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \sqrt{\frac{1}{2}} < \infty\,.$$

Jadi, dengan $\left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} < \infty$ maka terbukti bahwa $f(x) \in L^2[0,1]$(Nelson, 2015).

2.8 Ruang Metrik

Definisi 2.13

Ruang Metrik adalah pasangan (X, d), di mana X adalah himpunan dan d adalah metrik di X (fungsi jarak pada X), yaitu sebuah fungsi yang didefinisikan pada $X \times X$ sedemikian sehingga untuk semua $x, y, z \in X$ berlaku aksioma:

(M1) $d(x,y) \geq 0$;

(M2) $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;

(M3) $d(x,y) = d(y,x)$; (simetris)

(M4) $d(x,y) \leqq d(x,z) + d(z,y)$. (ketaksamaan segitiga)

Sebuah sub ruang $(Y, \tilde{d})$ dari (Y, d) diperoleh jika diambil subset $Y \subset X$ dan membatasi d ke $Y \times Y$, jadi metrik pada Y adalah batasan.

$$\tilde{d} = d|_{Y \times Y}$$

d disebut metrik yang diinduksi pada Y oleh d (Kreyszig, 1978: 3-4 dan Darmawijaya, 2007: 37).

Definisi 2.14

Barisan $\{x_n\}$ di dalam suatu ruang metrik (X, d) dikatakan konvergen jika ada $x \in X$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon\,.$$

Barisan yang tak konvergen dikatakan divergen (Darmawijaya, 2007: 58).

Teorema 2.15

Jika barisan $\{x_n\}$ di dalam suatu ruang metrik (X, d) konvergen, maka titik-titiknya tunggal (Darmawijaya, 2007: 58).

Bukti:

Diandaikan ada $a, b \in X$ sehingga barisan $\{x_n\}$ konvergen ke a dan juga konvergen ke b. Menurut definisi 2.14, untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ ada $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku

(i) $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, untuk setiap $n \geq n_1$, dan

(ii) $d(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$, untuk setiap $n \geq n_2$.

Selanjutnya, dengan mengambil bilangan asli $n_0 = maks\{n_1, n_2\}$, diperoleh bahwa untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$0 \leq d(a, b) \leq d(x_n, a) + d(x_n, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Karena berlaku $0 \leq d(a,b) < \varepsilon$ untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, maka $d(a,b) = 0$ atau dengan kata lain $a = b$.

Contoh 6

Sistem bilangan real $\mathbb{R}$ merupakan ruang metrik terhadap meterik :

$$d(x,y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ merupakan ruang metrik biasa.

Contoh 7

Sistem bilangan kompleks $\mathbb{C}$ merupakan ruang metrik terhadap modulusnya,

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_1 \in \mathbb{C}.$$

2.9 Hipergrup

Hipergrup adalah aljabar ukuran yang memiliki banyak sifat yang berkaitan dengan aljabar ukuran konvolusi sebuah grup, akan tetapi tidak ada pendugaan struktur aljabar pada ruang dasarnya. Akan diberikan aksioma hipergrup karena berlaku untuk kasus di mana ruang H yang mendasarinya kompak. Hal ini akan diikuti oleh modifikasi untuk kasus kompak lokal. Jadi, diasumsikan $M(H)$ aljabar Banach dengan hasil operasi $*$. Maka, $(H,*)$ adalah hipergrup (atau aljabar ukuran hipergrup) jika memenuhi aksioma (Ross, 1998: 97): pada H, maka begitu juga $\mu * \upsilon$.

(H2) ada sebuah elemen $e \in H$ sedemikian sehingga $\delta_e * \mu = \mu * \delta_e$ untuk semua $\mu \in M(H)$;

(H3) Ada involusi kontinu $x \mapsto x^{\vee} (x^{\vee\vee} = x)$ sedemikian sehingga $\in$ supp $\delta_x * \delta_y$ jika dan hanya jika $y = x^{\vee}$;

(H4) $(\mu * v)^{\vee} = v^{\vee} * \mu^{\vee}$ di mana $\mu^{\vee}$ didefinisikan sebagai $\int_H f(x) d\mu^{\vee}(x) = \int_H f(x^{\vee}) d\mu(x)$;

(H5) $(x, y) \mapsto \operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y)$ kontinu dengan topologi yang sesuai untuk ruang $\mathcal{C}(H)$ dari subset kompak H;

(H6) $(\mu, v) \mapsto \mu * v$ kontinu lemah-$*$.

Topologi yang sesuai pada (H5) adalah topologi Michael yang memiliki sub-basis terdiri dari himpunan

$$\mathcal{C}_U(V) = \{K \in \mathcal{C}(H): K \cap U \neq \emptyset \text{ dan } K \subset V\},$$

di mana U dan V sebarang subhimpunan terbuka H. Jika H memiliki metrik ρ, topologi ini ekuivalen dengan topologi yang diberikan oleh metrik Hausdorff pada $\mathcal{C}(H)$, yang terdefinisi untuk $A, B \in \mathcal{C}(H)$ sebagai

$$\rho(A, B) = \inf\{r: A \subset V_r(B) \text{dan } B \subset V_r(A)\},$$

di mana $V_r(E) = \{y \in H: \rho(x, y) < r \text{untuk suatu} x \in E\}$(Ross, 1998: 97).

Dalam kasus kompak lokal, aksioma (H5) berlaku jika $\operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y)$ adalah kompak. Serta pada (H6) syarat kontinu lemah-$*$ diganti dengan kontinu positif, yang memenuhi untuk masing-masing kompak non-negatif $support f \in C(H)$, pemetaan $(\mu, v) \mapsto \int_H f d(\mu * v)$ kontinu ketika terbatas pada ukuran positif di $M(H)$. Ketika H diskrit, sebagai contoh $H = \mathbb{N}_0$, (H6) tidak berlaku dan (H5) dapat diganti dengan $\operatorname{supp}(\delta_x * \delta_y)$ berhingga (Ross, 1998: 97).

m adalah ukuran Haar untuk hipergrup $(H,*)$ jika untuk setiap $x \in H, m * \delta_x = \delta_x * m = m$; m adalah ukuran Haar kiri jika paling tidak kesamaan kedua terpenuhi. $\phi \in C(H)$ adalah karakter $(H,*)$ jika ϕ terbatas, $\phi(x^{\vee}) = \overline{\phi(x)}$ dan

$$\int_H \phi d(\delta_x * \delta_y) = \phi(x)\phi(y)(x, y \in H)$$

(Ross, 1998: 98).

Aljabar ukuran grup dengan identidas e merupakan contoh jelas hipergrup; konvolusi didefinisikan sebagai $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$, dan involusi sebagai $x^{\vee} = x^{-1}$, invers grup x(Ross, 1998: 98).

Dunkl telah menunjukkan bahwa hipergrup $(H,*)$ memiliki ukuran Haar jika H kompak dan $*$ komutatif. Jewett menunjukkan bahwa $(H,*)$ memiliki ukuran Haar ketika H kompak, yaitu memiliki ukuran Haar kiri ketika H diskrit. Spector menunjukkan $(H,*)$ memiliki ukuran Haar ketika $*$ komutatif. Dunkl dan Spector mengggunakan definisi hipergrup yang berbeda dengan Jewett, akan tetapi hasil dari keduanya masih berlaku pada objek permasalahan Jewett. Sehingga saat ini hipergrup lebih dikenal dengan hipergrup DJS (Ross, 1998: 98).

Suatu hipergrup K disebut komutatif jika $\delta_x * \delta_y = \delta_y * \delta_x$ untuk semua $x, y \in K$. Ukuran Haar akan dinotasikan dengan λ. Hal ini, untuk semua fungsi terukur Borel f di K,

$$\int_K f(\delta_x * \delta_y) d\lambda(y) = \int_K f(y) d\lambda(y)(x \in K).$$

Didefinisikan operator translasi yang diperumum $T^x, x \in K$ dengan

$$T^x f(y) = \int_K f d(\delta_x * \delta_y)$$

untuk semua $y \in K$. Jika K adalah hipergrup yang komutatif, maka $T^x f(y) = T^y f(x)$ dan konvolusi dari dua fungsi didefinisikan sebagai

$$(f * g)(x) = \int_K T^x f(y) g(y^*) d\lambda(y)$$

(Hajibayov, 2015).

Pandang hipergrup $(K,*)$ dan anggap ada sebuah pasangan (m_1, m_2) ukuran bernilai real dan fungsi terbatas secara lokal pada K sedemikian sehingga

(1.1) $\langle \delta_x * \delta_y, m_1 \rangle = m_1(x) + m_1(y);$

(1.2) $\langle \delta_x * \delta_y, m_2 \rangle = m_2(x) + 2m_1(x)m_1(y) + m_2(y);$

(1.3) $m_1^2(x) \leq m_2(x),$

untuk semua $x, y \in K$ (δ menotasikan ukuran Dirac). Sedemikian fungsi m_1 dan m_2 disebut fungsi momen terkait urutan 1 dan 2 begitupun sebaliknya. Secara singkat (m_1, m_2) disebut pasangan fungsi momen (Ross, 1998:13).

Definisi 2.16

Ukuran Dirac adalah ukuran δ_x pada himpunan X (dengan suatu aljabar-σ subhimpunan X). Diberikan $x \in X$ dan sebarang himpunan terukur $A \subseteq X$, ukuran Dirac didefinisikan sebagai

$$\delta_x(A) = 1_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases},$$

di mana 1_A merupakan fungsi indikator dari A (Cannarsa, 2006: 10).

Contoh 8

Anggap $(H,*)$ hipergrup dengan $H \subset \mathbb{R}^v$. $(H,*)$ dikatakan hipergrup polinomial variabel-v kontinu jika karakter himpunan $(H,*)$ memuat keluarga yang kompak secara aljabar variabel-v dari polinomial (Ross, 1998: 113).

Contoh 9

Untuk menghasilkan hipergrup, selalu mungkin diperoleh dari hasil langsung dua hipergrup dan dalam kasus ini menghasilkan hipergrup polinomial variabel-v kontinu untuk setiap $v \in \mathbb{N}$.

Secara khusus, jika $(H_1,*_1)$ dan $(H_2,*_2)$ hipergrup maka

$$(H,*) = (H_1,*_1) \otimes (H_2,*_2),$$

di mana $H = H_1 \times H_2$. Hasil dari kumpulan titik diberikan oleh ukuran hasil

$$\delta_{(x_1,x_2)} * \delta_{(y_1,y_2)} = \left(\delta_{x_1} *_1 \delta_{y_1}\right) \times \left(\delta_{x_2} *_2 \delta_{y_2}\right).$$

Jadi jika $(\alpha,\beta) = (\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2) \in E_J \times E_J, J(\alpha,\beta) = J(\alpha_1,\beta_1) \otimes J(\alpha_2,\beta_2)$ adalah contoh hipergrup polinomial 2-variabel kontinu Hermit dengan karakter

$$R_n^{(\alpha_1,\beta_1)}(x) \cdot R_m^{(\alpha_2,\beta_2)}(y)(-1 < x\,, y < 1\,, n, m \in \mathbb{N}_0).$$

$J(\alpha,\beta)$ adalah hipergrup pada persegi $I \times I$ dengan $e = (1,1)$(Ross, 1998: 113-114).

2.10 Perintah Allah untuk Selalu Berfikir

Pada pembahasan sebelumnya telah dibahas tentang perintah Allah dalam al-Qur’an untuk mengambil pelajaran. Selanjutnya akan dibahas mengenai perintah untuk selalu berfikir. Karena dengan selalu befikir manusia dapat mengembangkan ilmu pengetahuan. Perintah berfikir terdapat dalam al-Qur'an surat ali Imron ayat 190-191 yang artinya:

"*Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tada-tanda bagi orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata), "ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia. Maha suci Engkau, maka peliharalah kaimi dari siksa neraka.'*""

Makna ayat ini, bahwa Allah SWT berfirman "*Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi"*. Artinya, yaitu pada ketinggian dan keluasan langit dan juga pada kerendahan bumi serta kepadatannya. Serta tanda-tanda kekuasaan-Nya yang terdapat pada ciptaan-Nya yang dapat dijangkau oleh indera manusia pada keduanya (langit dan bumi), baik yang berupa bintang-bintang, komet, daratan dan lautan, pegunungan dan pepohonan, tumbuh-tumbuhan, tanaman, buah-buahan, binatang, barang tambang serta berbagai macam warna dan aneka ragam makanan dan bebatuan,

"*Dan silih bergantinya malam dan siang*". Yakni silih bergantinya, susul menyusulnya, panjang dan pendeknya. Ada malam yang lebih panjang dan siang yang lebih pendek serta masing-masing seimbang.

Semua itu merupakan ketetapan Allah SWT. Oleh karena itu Allah SWT berfirman "*Terdapat pula tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal (Ulul Albab)*". Yaitu mereka yang mempunyai akal yang sempurna lagi bersih, yang mengetahui hakikat banyak hal secara jelas dan nyata.

Kemudian Allah menyifatkan tentang Ulul Albab, firman-Nya:

"(*Yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring*". Sebagaimana hadits yang diriwayatkan

Imam al-Bukhari dan Imam Muslim dari 'Imran bin Hushain bahwa Rasulullah SAW bersabda: "Shalatlah dengan berdiri, jika kamu tidak mampu maka lakukanlah sambil duduk, jika kamu tidak mampu maka lakukanlah sambil berbaring." Maksudnya, mereka tidak putus-putus berdzikir dalam semua keadaan baik dengan hati maupun lisan mereka.

Sebagaimana Al-Hasan al-Bashri berkata: "Berfikir sejenak lebih baik dari bangun shalat malam". Kemudian Al-Fudhail mengatakan bahwa al-hasan berkata: "berfikir adalah cermin yang menunjukkan rasa kebaikan dan kejelekan-kejelekanmu". Serta Nabi Isa 'alaihissalamberkata: "Berbahagialah bagi orang yang lisannya selalu berdzikir, diamnya selalu berfikir (tentang kekuasaan Allah), dan pandangannya mempunyai '*ibrah* (pelajaran)" (Tafsir Ibnu Katsir Jilid 2, 2001 : 208-211).

Berdasarkan paparan di atas jelas bahwa manusia harus selalu berfikir. Karena dengan berfikir manusia dapat mengembangkan ilmu. Salah satunya yaitu pada keterbatasan operator integral fraksional yang akan terus dikaji dan dikembangkan. Sehingga akan banyak ilmu baru serta dapat bermanfaat bagi penelitian-penelitian selanjutnya.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Keterbatasan Operator I_ρ di Ruang Lebesgue

Pada bab ini disajikan pembuktian keterbatasan perumuman integral fraksional I_ρ di ruang Lebesgue pada hipergrup komutatif dari $L^p(K,\mu)$ ke $L^q(K,\mu)$. Keterbatasan perumuman integral fraksional pada ruang Lebesgue dapat ditunjukkan melalui ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev. Ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev akan menunjukkan bahwa I_ρ terbatas dari $L^p(K,\mu)$ ke $L^q(K,\mu)$. Berikut adalah teorema mengenai ketaksamaan Hardy-Littlewood Sobolev pada ruang Lebesgue dengan syarat $\mu(B) \leq Cr^n$.

Teorema 3.1

Misalkan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, $1 < p < q < \infty$. Terdapat konstanta $C > 0$ dengan $\mu(B) \leq Cr^n, \mu \in GC(n)$ serta ρ memenuhi $\rho(r) \leq C \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\rho(t)}{t} \leq C\rho(r)$, dimana $\rho(r) = r^\alpha$, maka I_ρ terbatas dari $L^p(K,\mu)$ ke $L^q(K,\mu)$.

Bukti:

Ruang Lebesgue $L^p(K,\mu)$ menotasikan kelas semua fungsi terukur $\mu f: K \to (-\infty, +\infty)$ dengan

$$\|f\|_{L^p(K,\mu)} = \left(\int_K |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} < \infty.$$

$\mathcal{X}_B(x)$ menotasikan fungsi karakteristik himpunan B. Sehingga

$$Mf(x) = \sup_{R>0} \frac{1}{\mu B(e,r)} \left(|f| * \mathcal{X}_{B(e,r)}\right)(x)$$

$$= \sup_{R>0} \frac{1}{\mu B(e,r)} \int_{B(e,r)} T^x |f(y^*)| d\mu(y)$$

dan perumuman integral fraksional

$$I_\rho f(x) = \int_B f(y) \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

pada hipergrup komutatif $(K,*)$, sehingga berbentuk

$$I_\rho f(x) = \int_B T^x f(y^*) \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y).$$

Kemudian dipartisi menjadi

$$I_\rho f(x) = \int_{\delta(x,y)\leq r} T^x f(y^*) \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\delta(x,y)>r} T^x f(y^*) \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$= I_1(x) + I_2(x)$$

untuk setiap $x \in (K,\mu)$.

Estimasi untuk I_1 adalah

$$|I_1(x)| = \left| \int_{\delta(x,y)\leq r} T^x f(y^*) \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) \right|$$

$$\leq \sum_{k=-1}^{-\infty} \int_{2^k r \leq \delta(x,y) < 2^{k+1} r} |T^x f(y^*)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

Kemudian, batas $2^k r$ disubtitusikan pada $\delta(x,y)$ sehingga menjadi

$$\leq \sum_{k=-1}^{-\infty} \int_{\delta(x,y) < 2^{k+1} r} |T^x f(y^*)| \frac{\rho(2^k r)}{(2^k r)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{\rho(2^k r)}{(2^k r)^n} \int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |T^x f(y^*)| d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=-1}^{-\infty} \rho(2^k r) \frac{1}{(2^k r)^n} \int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |T^x f(y^*)| d\mu(y).$$

Karena ρmemenuhi $\rho(r) \leq C \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\rho(t)}{t} \leq C\rho(r)$, dimana $\rho(r) = r^\alpha$ maka

$$\leq \sum_{k=-1}^{-\infty} \int_{2^k r}^{2^{k+r}} \frac{\rho(r)}{r} \, d\mu(y) \frac{1}{(2^k r)^n} \int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |T^x f(y^*)| d\mu(y)$$

$$\leq C \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\rho(r)}{r} \, d\mu(y) \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{1}{(2^k r)^n} \int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |T^x f(y^*)| d\mu(y)$$

$$\leq C\rho(r) \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{1}{(2^k r)^n} \int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |T^x f(y^*)| d\mu(y).$$

Sehingga dengan definisi fungsi maksimal fraksional diperoleh

$$C\rho(r) \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{1}{(2^k r)^n} \int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |T^x f(y^*)| d\mu(y) \leq C\rho(r) Mf(x).$$

Jadi,

$$|I_1(x)| \leq C\rho(r) Mf(x).$$

Untuk Estimasi I_2, diperoleh sebagai berikut

$$|I_2(x)| \leq \left| \int_{\delta(x,y)>r} T^x \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} f(y^*) d\mu(y) \right|$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)>r} |T^x f(y^*)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y).$$

Dengan ketaksamaan Holder, diperoleh

$$\leq \int_{\delta(x,y)>r} |T^x f(y^*)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$|I_2(x)| \leq \left(\int_{\delta(x,y)>r} |T^x f(y^*)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\delta(x,y)>r} \left(\frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n}\right)^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \|T^x f(y^*)\|_{L^p(K,\mu)} \left(\int_{\delta(x,y)>r} \left(\frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n}\right)^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C\|f\|_{L^p(K,\mu)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k r \leq \delta(x,y) \leq 2^{k+1} r} \left(\frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n}\right)^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C\|f\|_{L^p(K,\mu)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho(2^k r)}{(2^k r)^n}\right)^q \int_{\delta(x,y) \leq 2^{k+1} r} d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C\|f\|_{L^p(K,\mu)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho(2^k r)}{(2^k r)^n}\right)^q (2^{k+1} r)^n\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C\|f\|_{L^p(K,\mu)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho(2^k r)}{(2^k r)^{\frac{n}{p}}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C\|f\|_{L^p(K,\mu)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \big(\rho(2^k r)\big)^q \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \left(\frac{1}{t^{\frac{n}{p}}}\right)^q \frac{1}{t} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C\|f\|_{L^p(K,\mu)} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \left(\frac{\rho(t)}{t^{\frac{n}{p}}}\right)^q \frac{1}{t} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= C\|f\|_{L^p(K,\mu)} \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{\rho(t)}{t^{\frac{n}{p}}}\right)^q \frac{1}{t} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C\|f\|_{L^p(K,\mu)} \frac{\rho(t)}{r^\beta} \left(\int_0^{\infty} \left(t^{\beta - \frac{n}{p}}\right)^q t^{-1} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C\|f\|_{L^p(K,\mu)} \frac{\rho(r)}{r^{\frac{n}{p}}}$$

$$\leq C\rho(r)r^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p(K,\mu)}.$$

Maka

$$|I_\rho f| \leq |I(x) + II(x)|$$

$$|I_\rho f| \leq C\rho(r)Mf(x) + C\rho(r)r^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p(K,\mu)}.$$

Jika dipilih $r > 0 \ni C\rho(r)Mf(x) = C\rho(r)r^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p(K,\mu)}$

maka

$$C\rho(r)Mf(x) = C\rho(r)r^{-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^p(K,\mu)}$$

$$\frac{\rho(r)}{\rho(r)r^{-\frac{n}{p}}} = C\left(\frac{\|f\|_{L^p(K,\mu)}}{Mf(x)}\right)$$

$$\frac{1}{r^{-\frac{n}{p}}} = C\left(\frac{\|f\|_{L^p(K,\mu)}}{Mf(x)}\right)$$

$$r = C\left(\frac{\|f\|_{L^p(K,\mu)}}{Mf(x)}\right)^{\frac{p}{n}}$$

$$\left|I_\rho f\right| \leq C\rho\left(\frac{\|f\|_{L^p(K,\mu)}}{Mf(x)}\right)^{\frac{p}{n}} Mf(x)$$

$$\leq C\rho\left(\|f\|_{L^p(K,\mu)}\right)^{\frac{p}{n}} Mf(x)^{1-\frac{p}{n}}$$

$$\left|I_\rho f\right|^n \leq C\rho\left(\|f\|_{L^p(K,\mu)}\right)^p Mf(x)^{n-p}$$

$$\int_R |I_\rho f|^n d\mu(x) = C\rho\left(\|f\|_{L^p(K,\mu)}\right)^p \int_R \left(Mf(x)\right)^{n-p} d\mu(x)$$

$$\leq C\rho\left(\|f\|_{L^p(K,\mu)}\right)^p \left(\|f\|_{L^p(K,\mu)}\right)^{n-p}$$

$$\leq C\rho\left(\|f\|_{L^p(K,\mu)}\right)^n.$$

Jadi,

$$\left\|I_\rho f\right\|_{L^q(K,\mu)} \leq C\rho\left(\|f\|_{L^p(K,\mu)}\right).$$

Karena memenuhi $\left\|I_\rho f\right\|_{L^q(K,\mu)} \leq C\rho\left(\|f\|_{L^p(K,\mu)}\right)$, maka terbukti bahwa $I_\rho$terbatas dari$L^p(K,\mu)$ke$L^q(K,\mu)$dengan syarat $\mu(B) \leq Cr^n$.

Contoh:

Didefinisikan $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x < 1\}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, x \in B \\ 0, x \notin B \text{ atau } x \in B^c \end{cases}$

Tunjukkan apakah $I_\rho f(x)$ terbatas dari ruang $L^2(\mu)$ ke ruang $L^3(\mu)$!

Penyelesaian

Diketahui:

$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x < 1\}$

$f(x) = \begin{cases} x^2, x \in B \\ 0, x \notin B \text{ atau } x \in B^c \end{cases}$

Akan dibuktikan:

$f \in L^p(\mu)$ dan $I_\rho f \in L^q(\mu)$

Akan ditunjukkan:

$f \in L^2(\mu)$, artinya $\|f\|_{L^2} < \infty$

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_B |f(x)|^2 d\mu(x) + \int_{B^c} |f(x)|^2 d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_B |x^2|^2 d\mu(x) + \int_{B^c} |0|^2 d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\int_B |x|^4 d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{5}x^5 \Big|_0^1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Karena $\|f\|_{L^2} < \infty$, maka $f \in L^2(\mu)$.

Karena $f \in L^2(\mu)$ maka akan ditunjukkan bahwa $I_\rho f \in L^3(\mu)$ dengan membuktikan $I_\rho f(y) < \infty$.

$$I_\rho f(y) = \int_B T^y f(x^*) \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(x)$$

Karena bentuk $I_\rho f(y)$ merupakan hipergrup komutatif $(K,*)$, maka

$$T^y f(x^*) = \int_K f(\delta_x * \delta_y) d\mu(x)$$

$$= \int_K f(x) d\mu(x) (x \in K)$$

Sehingga

$$I_\rho f(y) = \int_B f(x) \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(x)$$

Selain itu berdasarkan perumuman integral fraksional, $\rho(r) = r^\alpha, r = \delta(x,y)$. Jadi,

$$I_\rho f(y) = \int_B f(x) \frac{\delta(x,y)^\alpha}{\delta(x,y)^n} d\mu(x)$$

$$= \int_B f(x) \delta(x,y)^{\alpha-n} d\mu(x)$$

$$= \int_B f(x) |x-y|^{\alpha-n} d\mu(x) \; (i)$$

Jika $y = 0$, maka (i) menjadi

$$\int_B f(x)|x|^{\alpha-n} d\mu(x)$$

$$= \int_B x^2 |x|^{\alpha-n} d\mu(x)$$

$$= \int_B |x|^{\alpha-n+2} d\mu(x)$$

Misalkan $|x| = r$, $d\mu(x) = dr$ sehingga

$$I_\rho f(0) \leq \int_0^1 r^{\alpha-n+2} dr$$

$$\leq \frac{1}{\alpha - n + 3} r^{\alpha-n+3} \Big|_0^1$$

$$\leq \frac{1}{\alpha - n + 3}$$

Kemudian berdasarkan teorema 3.1 diperoleh

$$\frac{1}{\alpha - n + 3} \leq \frac{1}{1 - 6 + 3}$$

$$\leq -\frac{1}{2} \leq \infty$$

Karena $I_\rho f(y) \leq -\frac{1}{2} < \infty$ untuk $y = 0$, maka

$$\|I_\rho f\|_{L^3} = \left(\int_B |I_\rho f(y)|^3 d\mu(y)\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\leq \left(\int_B \left|-\frac{1}{2}\right|^3 d\mu(y)\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\mu(B)^{\frac{1}{3}} < \infty$$

Sedemikian sehingga,

$$\|I_\rho f\|_{L^p(\mu)} \leq \frac{1}{2}\mu(B)^{\frac{1}{3}} < \infty$$

Jadi, $I_\rho f(0) \in L^3(\mu)$

Jika $y \in \mathbb{R}^n$, maka (i) menjadi

$$I_\rho f(y) = \int_B f(x)|x-y|^{\alpha-n} d\mu(x)$$

$$= \int_0^1 x^2|x-y|^{\alpha-n} d\mu(x)$$

$$= \int_0^1 |x|^{\alpha-n+2} d\mu(x) + |-y|^{\alpha-n} \int_0^1 |x|^2 d\mu(x)$$

$$= -\frac{1}{2} + |-y|^{\alpha-n}\frac{1}{3}$$

Karena $|-y| > 0$ dan $\alpha - n = -5$, maka

$$I_\rho f(y) = -\frac{1}{2} + |-y|^{-5}\frac{1}{3} < \infty$$

Karena

$I_\rho f(y) < \infty$ untuk $y \in \mathbb{R}^n$, maka

$$\|I_\rho f\|_{L^3(\mu)} = \left(\int_B |I_\rho f(y)|^3 d\mu(y)\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\int_B \left|-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}|-y|^{\alpha-n}\right|^3 d\mu(y)\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\leq \left(\int_B \left| -\frac{1}{2} \right|^3 d\mu(y) + \int_B ||-y|^{-5}|^3 d\mu(y) \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mu(B) + \int_B \frac{1}{3} |-y|^{-15} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mu(B) + \frac{1}{42} \right)^{\frac{1}{3}} < \infty$$

$$\|I_\rho f\|_{L^p(\mu)} \leq \frac{1}{2}\left(\mu(B) + \frac{1}{42} \right)^{\frac{1}{3}} < \infty$$

Jadi, $I_\rho f(y) \in L^3(\mu)$.

Berdasarkan hasil bahwa $I_\rho f \in L^3(\mu)$ dan $f \in L^2(\mu)$ maka terbukti $I_\rho f$ terbatas dari ruang $L^2(\mu)$ ke $L^3(\mu)$.

3.2 Integrasi Keterbatasan Perumuman Integral Fraksional dengan Perintah Manusia Berfikir dan Mengambil Pelajaran

Ketebatasan perumuman operator integral fraksional awalnya terinspirasi dari operator integral fraksional I_α yang diperkenalkan oleh Marcel Riesz sekitar tahun 1886. Kemudian pada tahun 1930, Hardy, Littlewood dan Sobolev membuktikan bahwa operator integral fraksional terbatas di ruang Lebesgue hingga selanjutnya dikenal dengan ketaksamaan Hardy-Littlewood Sobolev. Pada tahun 2001, Eiichi Nakai memperkenalkan perumuman integral fraksional, hingga kemudian banyak ilmuan yang meneliti perumuman integral fraksional. Mubariz G. Hajibayov telah membuktikan keterbatasan perumuman integral fraksional pada hipergrup komutatif di tahun 2015. Perkembangan yang terus menerus ini dapat dikatakan sebagai implementasi hasil pemikiran manusia melalui terus berfikir dan mendapatkan pelajaran sehingga manusia dapat mengembangkan berbagai macam bidang ilmu. Seperti yang telah disebutkan dalam al-Qur'an surat az-Zumar ayat 9 bahwa hanya yang berakal sehat yang dapat menerima pelajaran. Serta dalam surat ali Imron ayat 190-191 bahwa hanya manusia yang berakal sempurna yang selalu berfikir.

Pelajaran yang dapat diambil dari dua ayat tersebut adalah sebagai manusia kita harus senantiasa berfikir dan berdzikir agar memiliki akal yang sempurna dan sehat. Allah telah memberi bantuan kepada manusia yang selalu befikir dan berdzikir, salah satunya yaitu melalui tanda-tanda kebesaran-Nya berupa penciptaan langit dan bumi serta pergantian antara malam dan siang. Sehingga manusia dapat megambil pelajaran, baik dari tanda-tanda kebesaran Allah maupun dari pengalaman-pengalaman. Maka manusia dapat senantiasa mengembangkan ilmu-ilmu pengetahuan yang terdahulu.

Berdasarkan uraian tersebut, terdapat korelasi antara pengembangan keterbatasan perumuman integral fraksional dalam penelitian ini dengan pandangan Islam. Dalam penelitian ini, perumuman integral fraksional di ruang Lebesgue dibawa dan dikembangkan ke hipergrup komutatif yang merupakan hasil proses berfikir manusia yang selalu menerima pelajaran sehingga dapat mengembangkan ilmu pengetahuan. Sedangkan menurut pandangan Islam, manusia diharuskan untuk terus berfikir tentang tanda-tanda kekuasaan Allah serta apa yang ada di bumi. Selain itu manusia juga harus dapat menerima pelajaran agar dapat mengembangkan ilmu pengetahuan yang sudah ada.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa perumuman integral fraksional I_ρ terbatas dari $L^p(K,\mu)$ ke $L^q(K,\mu)$ di ruang Lebesgue pada hipergrup komutatif. Di mana $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}, 1 < p < q < \infty$, serta ρmemenuhi $\rho(r) \leq C \int_r^\infty \frac{\rho(t)}{t} \leq C\rho(r)$, dan $\rho(r) = r^\alpha$dengan syarat $\mu(B) \leq Cr^n$.

4.2 Saran

Penelitian ini membahas pokok permasalahan keterbatasan perumuman integral fraksional di ruang lebesgue pada hipergrup komutatif. Pada penelitian selanjutnya diharapkan dikembangkan ke ruang lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

Adams, David R dan Hedberg L.I. 1996. *Function Spaces and Potential Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Bartle, Robert G. 1995.*The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Willey & Sons, Inc.

Cannarsa, P dan T. D'Aprile. 2006. *Lecture Notes on Measure Theory and Functional Analysis.* Dipartimento di Matematica, Universita di Roma "Tor Vergata"

Cohn, Donald L. 2013. *Measure Theory : Second Edition.* Springer Science+Bussiness Media, LLC.

Darmawijaya, Soeparna. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak.* Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Gunawan, Hendra. 2003. A Note on the Generalized Fractional Integral Operators.*Bandung Institute of Technology*.

Gunawan, Hendra dan Gani Gunawan. 2006. Keterbatasan Operator Riesz di Ruang Morrey. *J. Math and Its Appl.*Vol. 3, No. 1. 27-40.

Hajibayov, M.G. 2015. Boundedness in Lebesgue Spaces of Riesz Potentials on Commutative Hypergroups.*Global Journal of Mathematical Analysis*, 3 (1)18-25.

Hajibayov, M.G. 2015. Boundedness of Generalized Riesz Potentials on Commutative Hypergroups. *International Mathematical Forum*, Vol. 10 , no. 7, 333-338.

Hutahean, Effendi. 1989. *Materi Pokok : Analisis Real II.* Jakarta: Universitas Terbuka.

Kementrian Agama RI. 2010. *Al-Quran dan Tafsirnya*. Jakarta: Penerbit LenteraAbadi.

Kreyszig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications.* United States of America: John Willey & Sons.

Lu, Shanzhen, dkk. 2007. *Singular Integrals and Related Topics.* Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Nelson, Gail S. 2015. *A User-Friendly Introduction to Lebesgue Measure and Integration.* Rhode Islands: AMS.

Nurjannah, Prameswari. 2018. *Syarat Perlu Keterbatasan Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Klasik.* Skripsi. Tidak diterbitkan. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim: Malang.

Ross, Kenneth A, dkk. 1998. *Harmonic Analysis and Hypergroups. (International Conference on Harmonic Analysis).* New York: Springer Science+Business Media.

Stein, Elias M. 1970. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* New Jersey: Princeton University Press.

Katsir, Ibnu. 2001.*Tafsir Ibnu Katsir Jilid 2*. Jakarta: Penerbit Penebar Sunnah.

Utoyo, dkk. 2016. Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional di Ruang Lebesgue pada Ruang Kuasi Metrik tak Homogen.*Seminar Nasional X Universitas Negeri Semarang.* 623-631.

Wheeden, Richard L. dan Antoni Zygmund. 2015. *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis, Second Edition*. Boca Raton: CRC Press/Chapman and Hall.

RIWAYAT HIDUP

Jie Yan Kirana Embun Kumala Asih, lahir di Malang pada 15 Juli 1998. Biasa dipanggil Jie Yan ketika di lingkungan kampus, sedangkan di lingkungan rumah dipanggil Nana. Merupakan anak pertama dari dua bersaudara pasangan Bapak Mujiono dan Ibu Mulyani.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Tirtomarto 3 selama dua tahun, kemudian pindah ke SDN Pronojiwo 3 ketika kelas 3, hingga pada kelas 4 sampai lulus pada tahun 2010 ditempuh di SDN Tirtomarto 1. Setelah itu melanjutkan sekolah di SMPN 1 Ampelgading dan lulus pada tahun 2013. Pendidikan selanjutnya ditempuh di MAN 1 Kota Malang dengan mengikuti program akselerasi dan lulus pada tahun 2015. Selanjutnya pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang jurusan matematika murni.

Selama menjadi mahasiswa, telah aktif mengikuti program petugas layanan perpustakaan dari unsur mahasiswa di Perpustakaan Pusat UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Jie Yan Kirana Embun Kumala Asih
NIM : 15610088
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Keterbatasan Perumuman Integral Fraksional di Ruang Lebesgue pada Hipergrup Komutatif

Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	22 Maret 2019	Konsultasi Bab I	1.
2.	22 Maret 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	2.
3.	5 April 2019	Konsultasi Bab II	3.
4.	8 April 2019	Konsultasi Bab II	4.
5.	6 September 2019	Konsultasi Bab II	5.
6.	12 September 2019	Konsultasi Bab II & III	6.
7.	17 September 2019	Konsultasi Bab III	7.
8.	21 September 2019	Konsultasi tambahan Bab II	8.
9.	30 Oktober 2019	ACC Keseluruhan	9.

Malang, 30 Oktober 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001