PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN VIBRASI MENGGUNAKAN METODE *SHOOTING*

SKRIPSI

OLEH
GHINA AYU KUSUMANING DEWI
NIM. 15610087

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN VIBRASI MENGGUNAKAN METODE *SHOOTING*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Ghina Ayu Kusumaning Dewi
NIM. 15610087

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN VIBRASI MENGGUNAKAN METODE *SHOOTING*

SKRIPSI

Oleh
Ghina Ayu Kusumaning Dewi
NIM. 15610087

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 28 November 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Usman Pagalay, M.Si	Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001	NIDT. 19900511 20160801 1 057

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN VIBRASI MENGGUNAKAN METODE *SHOOTING*

SKRIPSI

Oleh
Ghina Ayu Kusumaning Dewi
NIM. 15610087

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 20 Desember 2019

Penguji Utama	:	Mohammad Jamhuri, M.Si	....
Ketua Penguji	:	Mohammad Nafie Jauhari, M. Si	....
Sekretaris Penguji	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Anggota Penguji	:	Muhammad Khudzaifah, M.Si	....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ghina Ayu Kusumaning Dewi

NIM : 15610087

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penyelesaian Numerik Persamaan Vibrasi Menggunakan Metode *Shooting*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 November 2019
Yang membuat pernyataan,

Ghina Ayu Kusumaning Dewi
NIM. 15610087

MOTO

لَا تَحۡزَنۡ إِنَّ ٱللَّهَ مَعَنَا

"Janganlah kamu berduka cita, sesungguhnya Allah beserta kita" (Q.S. At-Taubah: 40).

PERSEMBAHAN

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt, penulis persembahkan skripsi ini kepada: Abah M. Cholil Arifin dan Ibu Mariya Suliya serta adik Dzulfikar Firmansyah yang telah menjadi *support system*. Seluruh keluarga, teman-teman dan guru-guru yang senantiasa memberikan dukungan moril maupun spiritual. Serta seluruh orang yang menghiasi warna kehidupan penulis, terima kasih telah menjadi guru kehidupan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rah mat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam semoga tercurah kepada nabi Muhammad Saw yang telah membimbing manusia kepada jalan yang terang.

Proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu, ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan juga doa agar segala sesuatu yang telah diberikan dibalas oleh Allah Swt dengan balasan yang sebaik-baiknya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan ilmu, nasihat, motivasi, dan arahan kepada penulis.
5. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan ilmu, nasihat, motivasi, dan arahan kepada penulis.

6. Seluruh civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah ikhlas dan sabar dalam mendidik dan memberikan ilmu kepada penulis.
7. Abah M. Cholil Arifin dan ibu Mariya Suliya yang dengan ikhlas dan sabar merawat, mendidik, dan membesarkan penulis serta senantiasa memberikan doa, nasihat, dan motivasi kepada penulis.
8. Saudara-saudara KSR-PMI Unit UIN Malang yang telah memberikan ruang pengalaman dan pembelajaran untuk berproses.
9. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2015 yang telah berjuang bersama dalam menuntut ilmu.
10. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebutkan satu-persatu, terima kasih atas bantuan moril maupun spiritual yang telah diberikan kepada penulis.

Penulis berharap agar skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis maupun bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 20 Desember 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Dewi, Ghina Ayu Kusumaning. 2019. **Penyelesaian Numerik Persamaan Vibrasi Menggunakan Metode *Shooting*.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Kata Kunci: Persamaan Vibrasi Paksa dengan Redaman, Metode *Shooting*, Masalah Nilai Batas

Vibrasi merupakan gerakan bolak-balik pada suatu sistem mekanik diakibatkan oleh gaya pemulih dari objek tersebut yang selalu mengembalikan ke posisi semula. Selain itu, gerakan pada sistem mekanik juga dipengaruhi oleh faktor redaman dan faktor luar yang dinamakan vibrasi paksa dengan redaman. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui solusi numerik persamaan vibrasi paksa dengan redaman menggunakan metode *Shooting* dan menganalisis galatnya.

Persamaan vibrasi paksa dengan redaman memiliki bentuk persamaan berupa $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t$. Faktor luar yang mempengaruhi persamaan ini sebesar $F_0 \cos \omega t$ dan faktor redaman berupa $-bv$. Penyelesaian menggunakan metode *Shooting* dilakukan dengan mereduksi masalah nilai batas menjadi masalah nilai awal. Selanjutnya digunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk menyelesaikan permasalahan nilai awal. Kemudian melakukan pendekatan metode *Shooting* menggunakan kombinasi linier.

Hasil yang diperoleh dari solusi numerik menggunakan metode *Shooting* dengan domain $t = [0,1]$ sangat mendekati solusi analitiknya. Hal tersebut ditunjukkan dengan galat terbesar yaitu 3.2×10^{-7}. Dan galat yang terkecil diperoleh 8.1×10^{-8}.

ABSTRACT

Dewi, Ghina Ayu Kusumaning. 2019. **Numerical Solution of Vibration Using Shooting Method.** Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisors: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si, (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Keyword: Forced Vibration with Damping, Shooting Method, Boundary Value Problems

Vibration is a movement back and forth on a mechanical system caused by the recovery force of the object that always returns to its original position. In addition, the movement of a mechanical system is also influenced by a damping factor and an external factor called forced vibration with damping. The purpose of this study is to determine the numerical solutions of forced vibration equations with damping using the Shooting method and analyzing the error.

Forced vibration with damping equation has the form of the equation in the form $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t$. The external factors which affect this equation for $F_0 \cos \omega t$ and the damping factor consists of $-bv$. The Shooting method is done by reducing the boundary value problem into an initial value problem. Furthermore, the fourth order Runge-Kutta method is used to solve the initial value problem. Then approach the Shooting method using a linear combination.

The results obtained from the numeric solution using the Shooting method with the domain *t* = [0.1] are very close to the analytics solution. This is indicated by the largest error that 3.2×10^{-7}. And the smallest error is obtained 8.1×10^{-8}.

ملخص

ديوي، غينا أيو كوسومانينج. ٢٠١٩. **الحل العددي لمعادله الاهتزاز باستخدام طريقه** *Shooting*. بحث جامعي. شعبة الرياضيات ، كليه العلوم والتكنولوجيا الجامعة الاسلاميه الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانغ. المشرفون: (١) الدكتور عثمان باجالاي ، الما جستير،(٢)محمد خوذايفة, الماجستير

الكلمات الرئيسية: معادلات اهتزاز إجباريه مع التخميد ، طرق *Shooting* ، قيم حد المشكلة

الاهتزاز هو حركه ذهابا وإيابا في نظام الميكانيكية الناجمة عن نمط المرمم من الكائن الذي يستعيد دائما إلى موضعه الأصلي. الاضافة إلى ذلك ، يتاثر التحرك في النظام الميكانيكي أيضا بعامل التوهين والعامل الخارجي المسمي الاهتزاز القسري مع التخميد. والغرض من هذا البحث هو معرفة الحل العددي لمعادلات الاهتزاز القسري مع التوهين باستخدام طرق *Shooting* وتحليل السلالات.

معادلات الاهتزاز القسري مع التوهين علي شكل $m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F_0\cos\omega t$. العوامل الخارجية التي تؤثر علي هذه المعادلة هي $F_0\, cos\ \omega t$ وعامل التوهين $-bv$. يتم الانتهاء من استخدام طريقه *Shooting* عن طريق تقليل مشكله قيمه الحدود إلى مشكله قيمه أوليه. يتم استخدام الأمر الاربعه التالية Runge-Kutta الطريقة لحل المشكلة القيمة الاوليه. ثم الاقتراب من طريقة *Shooting* باستخدام تركيبه خطيه.

النتائج التي تم الحصول عليها من الحل العددي باستخدام أسلوب *Shooting* مع المجال $t=[0,1]$ قريبة جدا من حل التحليلات. ويظهر مع أكبر خطا من 3.2×10^{-7}. ويتم الحصول علي أصغر خطا .8.1×10^{-8}.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kehidupan sering kali menyuguhkan berbagai masalah yang melibatkan konsep matematika dalam penyelesaiannya. Masalah itu erat kaitannya dengan bidang teknik dan pengetahuan alam. Abdussakir (2007) menyatakan bahwa "Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan hitungan-hitungan yang mapan dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan berarti". Salah satu permasalahan dalam kehidupan yang dapat diselesaikan dengan matematika adalah vibrasi (getaran).

Getaran secara umum merupakan gerakan bolak-balik pada suatu sistem mekanik yang diakibatkan oleh gaya pemulih dari objek tersebut yang selalu mengembalikan objek ke posisi semula. Kuat lemahnya getaran dipengaruhi oleh besar tidaknya energi yang diberikan. Contoh vibrasi yang paling sederhana adalah partikel bermassa yang dikaitkan pada pegas (Syauqi, dkk, 2016).

Vibrasi yang terjadi pada pegas dapat dibedakan menjadi gerak harmonik sederhana, gerak harmonik teredam dan gerak paksa. Gerak getaran benda yang terjadi berulang-ulang dan tidak terdapat faktor hambatan atau redaman disebut sebagai gerak harmonik sederhana. Namun dalam kenyataannya, gerak getaran benda juga dipengaruhi oleh faktor hambatan yang mengakibatkan tidak terjadi getaran terus menerus disebut gerak harmonik teredam. Sedangkan getaran paksa terjadi akibat adanya faktor luar yang menyebabkan getaran. Faktor luar yang menimbulkan getaran yang diserta hambatan akan secara perlahan-lahan mengurangi getaran hingga berhenti dinamakan vibrasi paksa dengan redaman (Giancoli, 2005).

Permasalahan vibrasi merupakan kejadian yang mudah ditemui dalam kehidupan sehari-hari. Sikat gigi listrik, senar gitar yang dipetik, ayunan pendulum jam kuno, gerakan maju mundur piston-piston pada mesin mobil adalah beberapa peristiwa vibrasi dalam kehidupan sehari-hari (Young dan Roger A. Freedman, 2002). Allah berfirman dalam al-Quran:

وَلَقَدْ صَرَّفْنَا فِي هَٰذَا ٱلْقُرْءَانِ لِلنَّاسِ مِن كُلِّ مَثَلٍ ۚ وَكَانَ ٱلْإِنسَٰنُ أَكْثَرَ شَيْءٍ جَدَلًا ﴿٥٤﴾

“Dan Sesungguhnya Kami telah mengulang-ulangi bagi manusia dalam al-Quran ini bermacam-macam perumpamaan. dan manusia adalah makhluk yang paling banyak membantah”(Q.S al-Kahfi: 54).

Ayat di atas menunjukkan bahwa Allah mengingatkan manusia dengan berbagai macam perumpamaan secara berulang-ulang. Hal ini juga berkaitan dengan gejala fisis yang terjadi pada alam semesta. Allah menciptakan alam semesta dengan wujudnya atau materinya selalu bergerak secara berulang-ulang. Gerak yang berulang-ulang sering disebut dengan vibrasi (getaran).

Model matematika vibrasi adalah salah satu permasalahan kompleks dalam fisika yang berbentuk Persamaan Diferensial Biasa (PDB). Persamaan ini dapat diselesaikan menggunakan metode analitik dan metode numerik. Metode analitik merupakan metode yang memberikan hasil sesungguhnya (eksak). Metode numerik adalah pendekatan dari hasil eksak suatu masalah matematika.

Adapun salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari solusi tersebut adalah metode *Shooting*.

Metode *Shooting* merupakan metode yang cukup baik karena memiliki tingkat ketelitian yang tinggi dan mudah dimengerti. Metode ini menyelesaikan permasalahan nilai batas dengan merubahnya menjadi permasalahan nilai awal. Selanjutnya, permasalahan tersebut diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Hasil yang diperoleh, digunakan untuk menentukan fungsi pendekatan metode *Shooting* (Hoffman, 2001).

Penelitian sebelumnya dilakukan oleh Musa Basbuk, dkk (2016) membahas mengenai gerak benda bermassa pada pegas pada enam kasus yang berbeda menggunakan Metode Ekspansi Magnus. Dalam penelitian ini digunakan pemotongan seri Magnus dengan mempertimbangkan sifat geometris kualitatif sehingga diperoleh solusi yang akurat.

Selain itu, Yulia Acu, dkk (2017) membahas gerak osilasi pegas dengan massa yang berubah-ubah terhadap waktu menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan Runge-Kutta Fehlberg tingkat lima. Penelitian ini menghasilkan pertumbuhan *truncation error* yang jauh lebih kecil dan menunjukkan gerak osilator dengan massa yang berubah terhadap waktu. Sistem akan mengalami gerak harmonik sederhana saat air dalam sistem sudah habis.

Nanum Sovia (2018) juga melakukan penelitian pada model vibrasi menggunakan metode Elemen Hingga. Hasil penyelesaian numerik yang diperoleh menggunakan metode tersebut menunjukkan galat yang kecil terjadi pada Δt yang kecil. Akan tetapi penelitian ini membutuhkan waktu dan perhitungan yang panjang untuk mendapatkan nilai galat yang sangat kecil.

Berdasarkan paparan di atas, pada penelitian ini penulis akan membahas dan mengkaji penyelesaian numerik persamaan vibrasi menggunakan metode *Shooting*. Kemudian hasil yang didapatkan pada penyelesaian numerik akan dibandingkan dengan solusi analitiknya untuk mengetahui nilai galatnya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana solusi numerik persamaan vibrasi menggunakan metode *Shooting*?
2. Bagaimana analisis galat dari persamaan vibrasi menggunakan metode *Shooting*?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui solusi numerik persamaan vibrasi menggunakan metode *Shooting*.
2. Untuk mengetahui analisis galat dari persamaan vibrasi menggunakan metode *Shooting*.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Menemukan solusi analitik dan numerik menggunakan metode *Shooting* pada persamaan vibrasi.
2. Memperoleh informasi keakuratan metode *Shooting* sebagai solusi pendekatan untuk persamaan vibrasi.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

1. Persamaan vibrasi yang digunakan adalah persamaan vibrasi paksa dengan redaman (*forced vibration with damping*), dikutip dari (William E. Boyce & Richard C. DiPrima, 2008) yaitu:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 0.125\frac{du(t)}{dt} + u(t) = 3\cos t, \qquad 0 < t < 1,$$

dengan nilai batas

$$u(0) = 2 \text{ dan } u(1) = 2.32741.$$

2. Penyelesaian menggunakan metode *Shooting* dengan metode Runge-Kutta orde empat.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yakni dengan menelaah dan mengumpulkan beberapa literatur berupa buku, jurnal, dan referensi lain yang berkaitan. Adapun langkah-langkah yang digunakan penulis dalam penelitian ini secara rinci dijabarkan sebagai berikut:

1. Menyelesaikan metode analitik pada persamaan vibrasi.

2. Menyelesaikan solusi numerik pada persamaan vibrasi menggunakan metode *Shooting* dengan langkah- langkah sebagai berikut:
   a. Mereduksi persamaan dengan nilai batas menjadi sistem persamaan dengan nilai awal yang sesuai bentuk pendekatan metode *Shooting*.
   b. Menyelesaikan sistem nilai awal menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.
   c. Melakukan reduksi pada persamaan orde dua menjadi sistem persamaan orde satu menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.
   d. Melakukan perhitungan Runge-Kutta orde empat dengan memilih partisi interval waktu pada domain $t \in [0,1]$ dengan $\Delta t = 0.1$.
   e. Menentukan fungsi aproksimasi metode *Shooting* menggunakan kombinasi linier dari hasil Runge-Kutta.
   f. Mensubtitusi titik t dengan domain $t \in [0,1]$ dengan $\Delta t = 0.1$ ke dalam fungsi aproksimasi untuk memperoleh nilai solusi numerik.
3. Menganalisis galat

   Pada tahap ini akan dicari selisih dari solusi analitik dan numerik. Selisih tersebut menunjukkan seberapa besar nilai galat dari perhitungan numerik. Pada tahap ini juga akan ditunjukkan simulasi dari perhitungan analitik dan numeriknya.

1.7 Sistematika Penulisan

Penelitian ini dilakukan dengan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab terbagi menjadi beberapa subbab dengan sistematika sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini menjelaskan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan tentang gambaran umum dari teori yang mendasari pembahasan. Pada bab ini akan diuraikan persamaan vibrasi, interpretasi persamaan vibrasi, solusi analitik persamaan vibrasi dengan redaman, metode *Shooting*, metode Runge-Kutta orde empat dan analisis galat.

Bab III Pembahasan

Bab ini menjabarkan mengenai hasil dari penelitian yaitu solusi numerik persamaan vibrasi paksa dengan redaman menggunakan metode *Shooting* serta analisis galat dari perhitungan analitik dan numerik yang telah diperoleh.

Bab IV Penutup

Bab ini terdiri dari kesimpulan yang terkait hasil dari pembahasan dan saran-saran yang berkaitan untuk pembaca dan pengembangan peneliti selanjutnya.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Vibrasi

Vibrasi atau sering disebut getaran didefinisikan sebagai gerak bolak-balik suatu benda yang terjadi pada lintasan yang sama. Sedangkan getaran benda yang terjadi dalam selang waktu tetap dinamakan gerak periodik (Sutrisno, 1997). Gerak periodik yang terjadi secara beraturan dinamakan gerak harmonik. Gerak harmonik merupakan gerak yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, salah satu contohnya adalah benda yang berosilasi pada ujung pegas (Susilo, dkk, 2012).

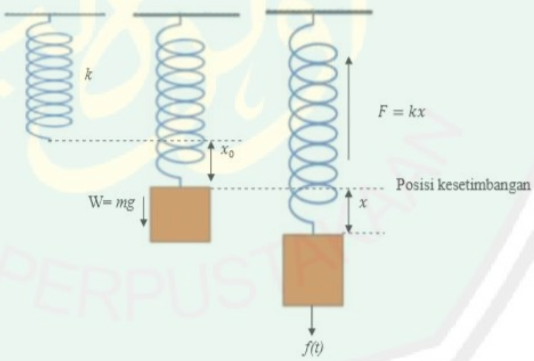
Pegas adalah perangkat yang memiliki sifat jika dilepaskan setelah ditarik akan kembali pada posisi semula, disebut sifat elastik. Sifat tersebut tidak hanya terjadi pada pegas tetapi hampir di setiap benda dalam batas-batas tertentu misalnya kawat. Sebatang kawat yang direnggangkan dengan suatu gaya, akan menambah panjang kawat tersebut. Jika gaya yang digunakan untuk menarik kawat tidak terlalu besar maka pertambahan panjang kawat adalah sebanding dengan gaya yang bekerja, seperti yang dikemukakan oleh Robert Hooke (1678). Hukum Hooke menyatakan "Jika sebuah benda diubah bentuknya, maka benda itu akan melawan perubahan bentuk (deformasi) dengan gaya yang sebanding dengan besar deformasi, asalkan deformasi ini tidak terlalu besar" (Sutrisno, 1997).

Getaran pada pegas akan terjadi jika terdapat gaya yang bekerja pada pegas tersebut. Beberapa gaya yang mempengaruhi gerak getaran pada pegas yaitu gaya gravitasi bumi, gaya tarik pegas, gaya gesek dan gaya luar (Dafik, 1999). Getaran (osilasi) dibedakan menjadi gerak harmonic sederhana, gerak harmonik teredam dan getaran paksa (*forced vibration*).

2.1.1 Gerak Harmonik Sederhana

Gerak harmonik sederhana adalah gerak getaran suatu benda yang dipengaruhi oleh gaya pemulih yang tidak mengalami gaya gesekan. Gerak harmonik sederhana juga dapat diartikan sebagai suatu sistem yang bergetar dimana gaya pemulih berbanding lurus dengan negatif simpangannya. Gaya pemulih adalah gaya yang bekerja dalam arah mengembalikan benda ke posisi setimbangnya (Giancoli, 2005).

Apabila sebuah benda bermassa m diikatkan pada sebuah pegas ideal dengan konstanta gaya k dan bebas bergerak di atas permukaan vertikal yang lain, maka gerak harmonik sederhananya dapat diilustrasikan sebagai berikut.



Gambar 2.1 Model massa pegas vertikal (Sumber: Hanifah, 2013).

Pada gambar pertama, pegas tidak mengalami peregangan karena tidak terdapat beban yang bergantung pada pegas tersebut. Pada gambar kedua pegas mencapai posisi setimbang karena terdapat beban yang tergantung pada ujung pegas sehingga pegas mengalami peregangan dan pertumbuhan panjang sebesar

x_0. Pegas yang telah mencapai posisi setimbang selanjutnya akan ditarik atau disimpangkan sejauh x seperti pada gambar ketiga.

Berdasarkan hukum Hooke, besarnya gaya pemulih yang bekerja pada benda elastis dirumuskan sebagai

$$F = -kx, \tag{2.1}$$

dengan k adalah ketetapan gaya atau konstanta pegas, x adalah simpangan (m), dan F merupakan gaya pemulih (N).

Persamaan (2.1) menunjukkan bahwa gaya yang bekerja oleh sebuah pegas pada sebuah benda berbanding lurus dengan pergeseran benda namun berlawan arahnya. Arah yang berlawanan tersebut ditunjukkan dengan tanda minus (Giancoli, 2005).

Sebuah pegas akan berada posisi setimbang yaitu ketika $x = 0$. Sesuai dengan hukum Newton I yang berbunyi: "Jika resultan pada suatu benda sama dengan nol, maka benda yang mula-mula diam akan tetap diam". Apabila pegas bergerak maka berlaku hukum Newton II. Hukum Newton II secara umum dinyatakan sebagai berikut: "Percepatan sebuah benda berbanding lurus dengan gaya total yang bekerja padanya dan berbanding terbalik dengan massanya. Arah percepatan sama dengan gaya total yang bekerja padanya". Secara matematis, dapat dituliskan sebagai:

$$\sum F = ma. \tag{2.2}$$

Sehingga berdasarkan persamaan (2.1) dan (2.2) diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$ma = -kx, \tag{2.3}$$

dimana

k = konstanta pegas,

m= massa benda,

x= simpangan, dan

a= percepatan benda.

Berdasarkan definisi dapat diperoleh jika $v = \frac{dx}{dt}$ maka $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ yang selanjutnya disubtitusikan ke persamaan (2.3), sehingga

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

atau

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \tag{2.4}$$

Persamaan (2.4) dikenal sebagai persamaan diferensial gerak harmonik sederhana (Boyce, 2008).

Solusi untuk persamaan (2.4) dapat dicari menggunakan metode akar karakteristik yaitu dengan memisalkan

$$\begin{aligned} x &= e^{st} \\ \frac{dx}{dt} &= se^{st} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= s^2e^{st}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Persamaan (2.5) disubtitusikan ke persamaan (2.4), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} ms^2e^{st} + ke^{st} &= 0 \\ s^2e^{st} + \frac{k}{m}e^{st} &= 0 \\ \left(s^2 + \frac{k}{m}\right)e^{st} &= 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Akar-akar karakteristik dari persamaan (2.6) yakni

$$s^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$s^2 = -\frac{k}{m}$$

$$s = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}}$$

$$s = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Sehingga didapatkan solusi umum dari persamaan (2.4) adalah sebagai berikut:

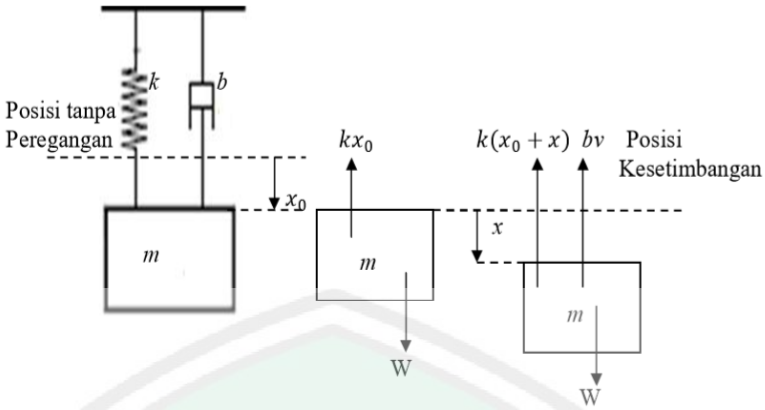
$$x(t) = c_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + c_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t.$$

Dengan c_1 dan c_2 adalah suatu konstanta sebarang (Purcell,dkk, 2008).

2.1.2 Gerak Harmonik Teredam

Getaran harmonik teredam merupakan gerakan benda yang dipengaruhi oleh gaya penghambat atau peredam yang menyebabkan amplitudo getaran berkurang secara perlahan terhadap waktu sampai akhirnya berhenti. Gaya penghambat atau redaman ini dapat berupa gaya gesek udara maupun faktor internal pada sistem (Giancoli, 2005).

Gerak yang terjadi pada pegas dikatakan teredam jika amplitudo berkurang sedikit demi sedikit sampai akhirnya menjadi nol. Hal ini terjadi karena adanya pengaruh gesekan. Dan besar gaya gesekan biasanya bergantung pada laju. Gaya gesekan sebanding dengan kecepatan, tetapi arahnya berlawanan. Gaya gesekan tesebut dapat berupa gaya gesek udara maupun gaya gesek oleh zat cair.



Gambar 2.2 Sistem massa teredam dan diagram benda bebas (Sumber: Hanifah, 2013).

Pada gambar diatas, beban bermassa m dikaitkan atau digantungkan pada sebuah pegas vertikal menimbulkan pertambahan panjang sebesar x_0 serta mencapai posisi kesetimbangan. Selanjutnya, pegas yang berada pada posisi kesetimbangan ditarik ke arah bawah sejauh x. Pada gambar, juga terlihat adanya redaman b yang menyebabkan gerak getaran perlahan berkurang terhadap waktu dan akhirnya berhenti. Persamaan getaran teredam dipengaruhi oleh hukum Newton II dengan F merupakan jumlah dari gaya pemulih yang bekerja pada pegas sebesar $-kx$ dan gaya redaman. Gaya redaman yaitu $F = -bv$ dimana b adalah koefisien redaman dan v adalah kecepatan. Dengan menjumlahkan semua gaya yang berlaku pada benda, akan didapatkan persamaan (Hanifah, 2013):

$$\sum F = ma$$

$$\sum F = -kx - bv$$

$$-kx - bv = ma$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{2.7}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Menurut hanifah (2013) persamaan (2.7) merupakan bentuk persamaan getaran pegas dengan redaman.

Berdasarkan persamaan karakteristik dari persamaan di atas terdapat tiga kasus untuk persamaan gerak teredam. Nilai $b^2 - 4mk$ dapat bernilai positif, negatif dan nol, karena setiap solusi mengandung faktor redaman dan peredam b berada dalam selang interval nol sampai tak hingga. Tiga kasus untuk sistem redaman adalah sebagai berikut :

a. Redaman superkritis (*overdamping*) ketika $b^2 - 4mk > 0$. Pada kasus ini sistem dikatakan redaman superkritis karena koefisien peredaman b besar sehingga sistem tidak akan berosilasi atau konstan. Solusi yang sesuai dengan persamaan (2.7) adalah $x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$ atau

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2m}+\sqrt{\frac{b^2-4mk}{2m}}t} + c_2 e^{-\frac{b}{2m}-\sqrt{\frac{b^2-4mk}{2m}}t}.$$

b. Redaman kritis (*critical damped*) ketika $b^2 - 4mk = 0$. Sistem ini dikatakan redaman kritis karena kesetimbangan dicapai dengan cepat sehingga menghasilkan gerakan osilasi. Solusi umum persamaan (2.7) adalah $x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 t e^{m_2 t}$ atau

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2m}t} + c_2 e^{-\frac{b}{2m}t}.$$

c. Redaman subkritis (*underdamped*) ketika $b^2 - 4mk < 0$. Dalam hal ini system dikatakan redaman subkritis, karena koefisien peredaman kecil dibandingkan dengan konstanta pegas. Akar-akar persamaan (2.7) berupa bilangan kompleks yakni $m_{1,2} = p \pm qi$ dimana

$$p = -\frac{b}{2m} \text{ dan } q = \sqrt{\frac{b^2 - 4mk}{2m}}.$$

Solusi umum dari persamaan (2.7) adalah

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\left(c_1 \cos\sqrt{\frac{b^2-4mk}{2m}}\,t + c_2 \sin\sqrt{\frac{b^2-4mk}{2m}}\,t\right).$$

(Zill dan Cullern, 2013).

2.1.3 Getaran Paksa (*Forced Vibration*)

Getaran yang terjadi akibat adanya rangsangan gaya luar yang berosilasi sehingga sistem dipaksa untuk bergetar pada frekuensi rangsangan dinamakan getaran paksa. Getaran paksa terbagi menjadi dua yakni getaran paksa dengan redaman dan getaran paksa tanpa redaman. Getaran paksa memiliki bentuk yang sama dengan getaran teredam, yang membedakan terletak pada gaya luar yang diberikan. Gaya luar dapat diamati pada bidang akustik, rangkaian arus bolak-balik, fisika atom maupun mekanika (Sutrisno, 1997).

Apabila suatu sistem pegas diberi gaya, respon yang terjadi pada sistem bergantung gaya luar yang diberikan dan redaman yang dialami oleh sistem tersebut. Total gaya yang bekerja pada benda bermassa m dalam sistem teredam paksa yaitu

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F(t). \tag{2.8}$$

Persamaan tersebut memiliki bentuk yang sama dengan getaran teredam, yang membedakannya adalah gaya luar sebesar $F(t)$ (Susilo, dkk, 2012).

Gaya luar $F(t)$ bersifat periodik pada frekuensi sudut ω, amplitudo F_0 sehingga gaya tersebut dapat dinyatakan $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$. Sebelumnya, diketahui bentuk identitas $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ sehingga dapat dinyatakan bahwa

$\cos\theta = Re(e^{i\theta})$ yang merupakan bagian real $e^{i\theta}$ dan $\sin\theta = Im\,(e^{i\theta})$ adalah bagian imajiner dari $e^{i\theta}$. Jika gaya luar berbentuk $F(t) = F_0 \cos\omega t$ maka persamaan getaran paksa dengan redaman ditulis sebagai

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos\omega t. \tag{2.9}$$

Tri Kuntoro P. dan Bambang Murdaka E.J (2007) menyatakan bahwa getaran paksa tanpa redaman terjadi ketika tidak ada gaya redaman ($F = -bv$), dimana b adalah koefisien redaman dan v adalah kecepatan. Sehingga diperoleh persamaan getaran paksa tanpa redaman yaitu

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \cos\omega t. \tag{2.10}$$

Persamaan getaran paksa termasuk persamaan diferensial orde dua non-homogen dengan koefisien tak tentu. Persamaan ini dapat diselesaikan dengan menemukan solusi persamaan homogennya dari persamaan (2.9)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0, \tag{2.11}$$

yang diperoleh akar-akar karakteristiknya yaitu:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}.$$

Persamaan (2.11) memiliki solusi berupa $x = e^{mt}$. Jika $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ membentuk suatu himpunan fundamental penyelesaian-penyelesaian untuk persamaan (2.11) maka solusinya $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_3(t) \dots c_nx_n(t)$ dengan c adalah konstanta sebarang. Ada tiga kemungkinan nilai akar-akar karakteristik x yaitu sebagai berikut:

1. Jika $b^2 - 4mk > 0$, sistem tidak akan berosilasi dikarenakan koefisien peredaman b besar. Maka solusi yang sesuai dari persamaan (2.11) adalah $x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$ atau

$$x_h(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2m}+\sqrt{\frac{b^2-4mk}{2m}}t} + c_2 e^{-\frac{b}{2m}-\sqrt{\frac{b^2-4mk}{2m}}t}.$$

2. Jika $b^2 - 4mk = 0$, maka diperoleh solusi dari persamaan (2.11) adalah $x(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 t e^{m_2 t}$ atau

$$x_h(t) = c_1 e^{-\frac{b}{2m}t} + t c_2 e^{-\frac{b}{2m}t}.$$

3. Jika $b^2 - 4mk < 0$, koefisien peredam lebih kecil dibandingkan dengan konstanta pegas maka diperoleh solusi untuk persamaan (2.11) adalah $m_{1,2} = p \pm qi$ dimana

$$p = -\frac{b}{2m} \text{ dan } q = \sqrt{\frac{b^2 - 4mk}{2m}}.$$

Solusi yang memenuhi yaitu $y = e^{mt}$ dengan

$$y_1 = e^{(p+iq)t} \quad \text{dan} \quad y_2 = e^{(p-iq)t}. \qquad (2.12)$$

Persamaan (2.12) selanjutnya dirubah menjadi formula Euler menggunakan deret taylor untuk e^t pada $t = 0$.

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \qquad -\infty < t < \infty.$$

Jika diasumsikan bahwa dapat mensubtitusi it pada t maka

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

dimana $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n!}$ adalah deret taylor dari $\cos t$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{(2n-1)!}$ adalah deret taylor dari $\sin t$. Sehingga diperoleh identitas Euler yaitu:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Ada beberapa variasi Euler, antara lain yaitu mengganti t menjadi $-t$

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t,$$

jika t diganti menjadi qt diperoleh

$$e^{iqt} = \cos qt + i \sin qt,$$

dan untuk bilangan kompleks maka menjadi

$$\begin{aligned} e^{(p+iq)t} &= e^{pt} e^{iqt} \\ &= e^{pt}(\cos qt + i \sin qt) \\ &= e^{pt} \cos qt + ie^{pt} \sin qt. \\ e^{(p-iq)t} &= e^{pt} \cos qt - ie^{pt} \sin qt. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Persamaan (2.12) dan (2.13) merupakan solusi persamaan linier dengan mensubtitusikan

$$\frac{y_1(t) + y_2(t)}{2} = \frac{(e^{pt} \cos qt + ie^{pt} \sin qt) + (e^{pt} \cos qt - ie^{pt} \sin qt)}{2}$$

$$= \frac{2e^{pt} \cos qt}{2} = e^{pt} \cos qt = y_1(t).$$

$$\frac{y_1(t) - y_2(t)}{2i} = \frac{(e^{pt} \cos qt + ie^{pt} \sin qt) - (e^{pt} \cos qt - ie^{pt} \sin qt)}{2}$$

$$= \frac{2i\, e^{pt} \sin qt}{2i} = e^{pt} \sin qt = y_2(t).$$

Selanjutnya persamaan $y_1(t)$ dan $y_2(t)$ dihitung menggunakan Wronskian yaitu

$$W(y_1, y_2; t) = \begin{vmatrix} e^{pt} \cos qt & e^{pt} \sin qt \\ -qe^{pt} \sin qt & qe^{pt} \cos qt \end{vmatrix}$$

$$= qe^{2pt},$$

nilai $qe^{2pt} \neq 0$ pada $q \neq 0$ maka $y_1(t)$ dan $y_2(t)$ adalah penyelesaian fundamental dari persamaan (2.11) dan setiap penyelesaian dinyatakan dalam bentuk kombinasi linier $y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$. Sehigga diperoleh solusi bentuk homogen dari persamaan (2.11) yaitu

$$x_h(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\left(c_1 \cos\sqrt{\frac{b^2 - 4mk}{2m}}\, t + c_2 \sin\sqrt{\frac{b^2 - 4mk}{2m}}\, t\right).$$

Setelah diperoleh solusi homogen dari persamaan (2.11), dilanjutkan dengan mencari solusi partikuler dari persamaan (2.9) ketika $F(t) = \cos(\omega t)$ atau $\sin(\omega t)$ berupa

$$x_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega\, t).$$

Berdasarkan kedua solusi yang diperoleh di atas, didapatkan solusi dari persamaan (2.9) yakni

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

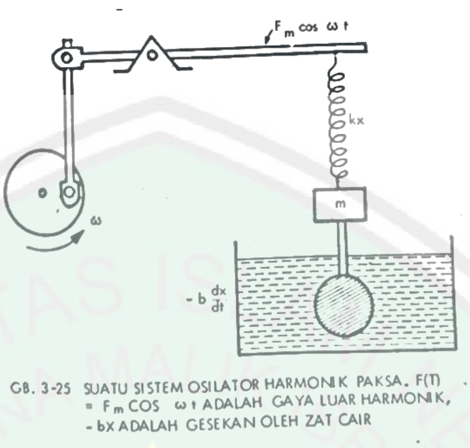
dimana $x_h(t)$ bergantung pada kondisi yang terjadi (Boyce, 2008).

2.2 Interpretasi Persamaan Vibrasi

Persamaan vibrasi yang digunakan adalah persamaan vibrasi paksa dengan redaman. Vibrasi ini melibatkan tiga buah gaya secara serentak yaitu gaya pembalik, gaya gesekan, dan gaya luar. Berdasarkan Hukum Newton II, persamaan vibrasi paksa dengan redaman dari benda bermassa m dapat dituliskan sebagai berikut (Alonso, 1994):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t. \tag{2.14}$$

Persamaan tersebut digambarkan berupa



Gambar 2.3 Sistem getaran pegas paksa dengan redaman (Sumber: Sutrisno, 1997).

Berdasarkan gambar di atas menunjukkan benda yang bermassa diikatkan pada pegas bergerak karena adanya faktor luar yang bekerja dan faktor penghambat atau peredam (Sutrisno, 1997). Penelitian ini menggunakan benda bermassa (m) sebesar 1 kg yang diikatkan pada pegas yang memilki konstanta (k) sebesar 1 N/m. Benda bergerak dipengaruhi oleh gaya luar $(F_0 \cos \omega t)$ yang berupa gaya periodik yaitu $3 \cos t$, dimana amplitude (F_0) yang diperoleh sebesar 3 dan frekuensi angular (ω) sebesar 1. Selain itu, pergerakan benda juga mengalami pengambatan atau peredaman karena adanya gaya gesek berupa zat cair (b) sebesar 0.125 kali kecepatannya pada setiap t yang dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 0.125\frac{du(t)}{dt} + u(t) = 3\cos t\,. \tag{2.15}$$

Solusi dari persamaan (2.14) memberikan simpangan $u(t)$ berupa

$$U(t) = R\cos(\omega t - \delta),$$

dengan R adalah simpangan maksimum getaran (amplitudo) dan δ adalah fase awal. Selanjutnya, solusi $U(t)$ disubtitusikan pada persamaan (2.14) untuk mendapatkan nilai amplitudo getaran yaitu

$$R = \frac{Fo}{\sqrt{(m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2)}}.$$

Pada persamaan ini diperoleh $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1$ yang merupakan frekuensi alam dari getaran. Sehingga diperoleh nilai amplitudo untuk persamaan (2.15) yaitu

$$\begin{aligned} R &= \frac{3}{\sqrt{1^2(1^2 - 1^2) + 0.125^2 1^2}} \\ &= \frac{3}{0.125} \\ &= 24. \end{aligned}$$

Sehingga simpangan maksimum pada persamaan (2.9) adalah $24\,m$. Selain itu, diperoleh nilai fase awal yaitu

$$\begin{aligned} \cos\delta &= \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2)}} \\ &= \frac{1(1^2 - 1^2)}{\sqrt{1^2(1^2 - 1^2)^2 + 0.125^2 1^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

dan

$$\sin\delta = \frac{b\omega}{\sqrt{(m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2)}}$$

$$= 0.125 \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2(1^2-1^2)^2+0.125^2 1^2}}$$

$$= \frac{0.125}{0.125} = 1.$$

Untuk $\omega = \omega_0$ diperoleh nilai $\cos\delta = 0$ dan $\sin\delta = 1$ maka diperoleh fase awal $\delta = \frac{\pi}{2}$. Getaran paksa dengan redaman pada kondisi tunak (steady) memiliki frekuensi pendorong gaya luar $\Gamma = \frac{b^2}{mk} = \frac{0.125^2}{1\cdot 1} = 0.015625$ (Boyce, 2008).

2.3 Penyelesian Analitik Persamaan Vibrasi Paksa dengan Redaman

Diberikan persamaan getaran paksa dengan redaman yang diperoleh dari (William E. Boyce & Richard C. DiPrima, 2008) sebagai berikut:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 0.125\frac{du(t)}{dt} + u(t) = 3\cos t, \tag{2.16}$$

dengan kondisi batas

$$u(0) = 2 \text{ dan } u(1) = 2.32741. \tag{2.17}$$

Persamaan (2.16) merupakan persamaan linier non- homogen yang memiliki solusi berupa

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t),$$

dimana

$u_h(t)$ adalah solusi homogen, dan

$u_p(t)$ adalah solusi partikuler,

Langkah pertama, terlebih dahulu mencari solusi homogen untuk persamaan (2.14) menggunakan persamaan karakteristik berupa

$$m^2 + 0.125\,m + 1 = 0. \tag{2.18}$$

Kemudian dicari diskriminan dari persamaan (2.18) yakni

$D = b^2 - 4ac \leftrightarrow (0.125)^2 - 4(1)(1) = -3.984375,$

diperoleh $D < 0$ maka akar-akar persamaannya berupa bilangan kompleks yaitu

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-0.125 \pm \sqrt{(0.125)^2 - 4(1)(1)}}{2} \\ &= -0.0625 \pm \frac{\sqrt{-3.984375}}{2} \\ &= -\frac{1}{16} \pm \frac{1}{16}\sqrt{255}\, i. \end{aligned}$$

Dengan demikian solusi homogen $u_h(t)$ pada persamaan ini adalah

$$u_h(t) = c_1 e^{-\frac{1}{16}t} \cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16} t\right) + c_2 e^{-\frac{1}{16}t} \sin\left(\frac{\sqrt{255}}{16} t\right). \qquad (2.19)$$

Langkah kedua, mencari solusi partikuler yang sesuai dengan persamaan (2.16) yaitu menggunakan

$$u_p(t) = A \cos t + B \sin t. \qquad (2.20)$$

Dimana nilai A dan B diperoleh dengan mensubtitusikan $u_p(t)$ untuk $u(t)$ pada persamaan (2.18). Terlebih dahulu mencari turunan pertama dan kedua dari persamaan (2.20):

$$\begin{aligned} u_p'(t) &= -A \sin t + B \cos t\,, \\ u_p''(t) &= -A \cos t - B \sin t. \end{aligned} \qquad (2.21)$$

Kemudian, subtitusi persamaan (2.21) pada persamaan (2.16) sehingga didapatkan

$$0.125\, B \cos t\, - 0.125\, A \sin t = 3 \cos t, \qquad (2.22)$$

dengan nilai A dan B yang memenuhi persamaan (2.22) yaitu

$$0.125\, B = 3$$

$$B = \frac{3}{0.125}$$

$$B = 24,$$

dan

$$-0.125\, A = 0$$

$$A = 0.$$

Sehingga diperoleh nilai $A = 0$ dan $B = 24$ yang memenuhi persamaan (2.22). Sehingga diperoleh solusi partikuler dari persamaan (2.16) yaitu

$$u_p(t) = A\cos t + B\sin t$$

$$= 0\cos t + 24\sin t$$

$$u_p(t) = 24\sin t.$$

Langkah **ketiga**, mencari solusi umum dari persamaan (2.16) dengan mensubtitusikan solusi partikuler dan solusi homogennya,

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

$$u(t) = c_1 e^{-\frac{1}{16}t}\cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}t\right) + c_2 e^{-\frac{1}{16}t}\sin\left(\frac{\sqrt{255}}{16}t\right) + 24\sin t. \quad (2.23)$$

Untuk menentukan nilai konstanta c_1 dan c_2 dapat digunakan kondisi batas (2.17) diperoleh

$$u(0) = 2$$

$$2 = c_1 e^{-\frac{1}{16}(0)}\cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0)\right) + c_2 e^{-\frac{1}{16}(0)}\sin\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0)\right) + 24\sin(0)$$

$$2 = c_1,$$

dan

$$u(1) = 2.32741$$

$$2.32741 = c_1 e^{-\frac{1}{16}(1)} \cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(1)\right) + c_2 e^{-\frac{1}{16}(1)} \sin\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(1)\right) + 24\sin(1)$$

$$2.32741 = c_1(0.5091115073) + c_2(0.7894950131) + 24(0.7894950131)$$

$$2.32741 = 2(0.5091115073) + c_2(0.7894950131) + 24(0.7894950131)$$

$$-c_2 = \frac{21.21352666 + 2.3274}{0.7894950131}$$

$$c_2 = -23.92178082.$$

Sehingga didapatkan hasil $c_1 = 2$ dan $c_2 = -23.92178082$ yang memenuhi persamaan (2.23). Maka solusi solusi khusus dari persamaan (2.16) diperoleh dengan mensubtitusi nilai c_1 dan c_2, yaitu:

$$u(t) = 2e^{-\frac{1}{16}t} \cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}t\right) - 23.92178082\, e^{-\frac{1}{16}t} \sin\left(\frac{\sqrt{255}}{16}t\right) + 24\sin t. \tag{2.24}$$

Penelitian ini menggunakan domain $t = [0,1]$ dan dipartisi pada $\Delta t = 0.1$. Untuk $t = 0$ diperoleh

$$u(0) = 2e^{-\frac{1}{16}(0)} \cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0)\right) - 23.92178082\, e^{-\frac{1}{16}(0)} \sin\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0)\right) + 24\sin(0)$$

$$= 2 - 23.92178082(0) + 24(0)$$

$$= 2.$$

Untuk $t = 0.1$ diperoleh

$$u(0.1) = 2e^{-\frac{1}{16}(0.1)} \cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0.1)\right) - 23.92178082\, e^{-\frac{1}{16}(0.1)} \sin\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0.1)\right) + 24\sin(0.1)$$

$$= 2(0.9888241598) - 23.92178082(0.09901808679)$$

$$+ 24(0.09983341665)$$

$$= 2.00496260509734.$$

Untuk $t = 0.2$ diperoleh

$$u(0.2) = 2e^{-\frac{1}{16}(0.2)} \cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0.2)\right)$$

$$- 23.92178082\, e^{-\frac{1}{16}(0.2)} \sin\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0.2)\right) + 24\sin(0.2)$$

$$= 2(0.9679686375) - 23.92178082(0.1958229530)$$

$$+ 24(0.1986693308)$$

$$= 2.01956993681892.$$

Untuk $t = 0.3$ diperoleh

$$u(0.3) = 2e^{-\frac{1}{16}(0.3)} \cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0.3)\right)$$

$$- 23.92178082\, e^{-\frac{1}{16}(0.3)} \sin\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0.3)\right) + 24\sin(0.3)$$

$$= 2(0.9377607604) - 23.92178082(0.2894808694)$$

$$+ 24(0.2955202067)$$

$$= 2.04311223999325.$$

Untuk $t = 0.4$ diperoleh

$$u(0.4) = 2e^{-\frac{1}{16}(0.4)} \cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0.4)\right)$$

$$- 23.92178082\, e^{-\frac{1}{16}(0.4)} \sin\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0.4)\right) + 24\sin(0.4)$$

$$= 2(0.8986166542) - 23.92178082(0.3791009539)$$

$$+ 24(0.3894183423)$$

$$= 2.07450840246253.$$

Untuk $t = 0.5$ diperoleh

$$u(0.5) = 2e^{-\frac{1}{16}(0.5)}\cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0.5)\right)$$

$$- 23.92178082\, e^{-\frac{1}{16}(0.5)}\sin\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0.5)\right) + 24\sin(0.5)$$

$$= 2(0.8510360070) - 23.92178082(0.4638434841)$$

$$+ 24(0.4794255386)$$

$$= 2.11232866047462.$$

Untuk $t = 0.6$ diperoleh

$$u(0.6) = 2e^{-\frac{1}{16}(0.6)}\cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0.6)\right)$$

$$- 23.92178082\, e^{-\frac{1}{16}(0.6)}\sin\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0.6)\right) + 24\sin(0.6)$$

$$= 2(0.7955960702) - 23.92178082(0.5429276006)$$

$$+ 24(0.5646424734)$$

$$= 2.15482332255312.$$

Untuk $t = 0.7$ diperoleh

$$u(0.7) = 2e^{-\frac{1}{16}(0.7)}\cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0.7)\right)$$

$$- 23.92178082\, e^{-\frac{1}{16}(0.7)}\sin\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0.7)\right) + 24\sin(0.7)$$

$$= 2(0.7329449634) - 23.92178082(0.6156383292)$$

$$+ 24(0.6442176872)$$

$$= 2.19995704999434.$$

Untuk $t = 0.8$ diperoleh

$$u(0.8) = 2e^{-\frac{1}{16}(0.8)} \cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0.8)\right) - 23.92178082\, e^{-\frac{1}{16}(0.8)} \sin\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0.8)\right) + 24\sin(0.8)$$

$$= 2(0.6637943580) - 23.92178082(0.6813328617) + 24(0.7173560909)$$

$$= 2.24544815535814.$$

Untuk $t = 0.9$ diperoleh

$$u(0.9) = 2e^{-\frac{1}{16}(0.9)} \cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0.9)\right) - 23.92178082\, e^{-\frac{1}{16}(0.9)} \sin\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(0.9)\right) + 24\sin(0.9)$$

$$= 2(0.5889116219) - 23.92178082(0.7394460418) + 24(0.7833269096)$$

$$= 2.28881231113130.$$

Untuk $t = 1$ maka diperoleh

$$u(1) = 2e^{-\frac{1}{16}(1)} \cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(1)\right) - 23.92178082\, e^{-\frac{1}{16}(1)} \sin\left(\frac{\sqrt{255}}{16}(1)\right) + 24\sin(1)$$

$$= 2(0.5091115073) - 23.92178082(0.7894950131) + 24(0.8414709848)$$

$$= 2.32741000000000.$$

2.4 Metode *Shooting*

Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan nilai batas yaitu metode beda hingga, metode elemen hingga dan metode *Shooting*. Metode *Shooting* atau metode tembakan ini adalah metode yang menggunakan iterasi numerik untuk mencapai kemiringan sebenarnya. Pendekatan metode *Shooting* bergantung pada pemilihan nilai *slope* awal untuk mendekati nilai *slope* yang sebenarnya.

Persamaan yang diselesaikan menggunakan metode ini, merupakan persamaan diferensial biasa orde dua. Metode *Shooting* dilakukan dengan mereduksi persamaan diferensial masalah nilai batas menjadi sistem persamaan diferensial masalah nilai awal. Selanjutnya persamaan nilai awal tersebut diselesaikan menggunakan metode Euler, Heun atau Runge-Kutta (Kharab, 2012).

Persamaan diferensial biasa dengan kondisi batas, ditulis sebagai berikut (Hoffman, 2001):

$$u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = r(t), \qquad u(a) = \alpha;\ u(b) = \beta, \qquad (2.25)$$

yang memiliki penyelesaian tunggal berupa $u(t)$. Dimana $u(t)$ adalah fungsi u yang bergantung terhadap waktu dengan nilai batas berupa $u(a) = \alpha$ dan $u(b) = \beta$. Persamaan (2.25) merupakan persamaan diferensial biasa linier jika memenuhi:

i. $p(t), q(t)$, dan $r(t)$ kontinu pada $[a, b]$,

ii. $q(t) > 0$ pada $[a, b]$.

Maka persamaan (2.25) memiliki solusi yang unik.

Didefinisikan solusi untuk persamaan (2.25) yaitu (Burden, 2011):

$$u(t) = y(t) + \frac{\beta - y(b)}{v(b)} v(t), \qquad (2.26)$$

dengan $v(b) \neq 0$. Solusi (2.26) dapat ditulis

$$u'(t) = y'(t) + \frac{\beta - y(b)}{v(b)} v'(t),$$

dan

$$u"(t) = y"(t) + \frac{\beta - y(b)}{v(b)} v"(t).$$

Persamaan (2.26) diperoleh dari kombinasi linier dua persamaan dengan nilai awal. Persamaan yang memenuhi adalah

$$\begin{aligned} &y" + p(t)y' + q(t)y = r(t) \\ &y(a) = \alpha; y'(a) = 0, \end{aligned} \qquad (2.27)$$

dan

$$\begin{aligned} &v" + p(t)v' + q(t)v = 0 \\ &v(a) = 0; v'(a) = 1. \end{aligned} \qquad (2.28)$$

Pembuktian tersebut ditunjukkan dengan mensubtitusi (2.27) dan (2.28) ke dalam persamaan $u"(t)$

$$\begin{aligned} u"(t) &= y"(t) + \frac{\beta - y(b)}{v(b)} v"(t) \\ &= r(t) - p(t)y'(t) - q(t)y(t) + \frac{\beta - y(b)}{v(b)} \big(-p(t)v'(t) - q(t)v(t)\big) \\ &= r(t) - p(t)\left(y'(t) + \frac{\beta - y(b)}{v(b)} v'(t)\right) - q(t)\left(y(t) + \frac{\beta - y(b)}{v(b)} v(t)\right) \\ &= r(t) - p(t)u'(t) - q(t)u(t) \end{aligned}$$

$$r(t) = u"(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t).$$

Selain itu, ditunjukkan dengan kondisi batas pada persamaan (2.27) dan (2.28) yang disubtitusikan pada persamaan (2.26)

$$u(a) = y(a) + \frac{\beta - y(b)}{v(b)} v(a)$$

$$= \alpha + \frac{\beta - y(b)}{v(b)} \cdot 0$$

$$= \alpha,$$

dan

$$u(b) = y(b) + \frac{\beta - y(b)}{v(b)} v(b)$$

$$= y(b) + \beta - y(b)$$

$$= \beta.$$

Sehingga persamaan (2.27) dan (2.28) dapat dipilih sebagai persamaan yang sesuai untuk metode *Shooting*. Selanjutnya, persamaan (2.27) dan (2.28) yang merupakan permasalahan nilai awal, diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat (Suarga, 2014).

2.4.1 Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta pertama kali dikembangkan oleh Carl Runge dan Wiliam Kutta dalam rangka meniru hasil dari pendekatan deret Taylor tanpa melakukan diferensial analitik secara berulang. Metode Runge-Kutta merupakan metode yang memberikan ketelitian hasil yang lebih besar dan tidak memerlukan turunan dari fungsi (Acu, dkk, 2017).

Bentuk umum dari metode Runge-Kutta adalah:

$$y_{i+1} = y_i + \varphi(x_i, y_i)h, \tag{2.29}$$

dengan $\varphi(y_i, x_i)h$ adalah fungsi pertambahan yang merupakan kemiringan rerata pada interval dan digunakan untuk mengekstrapolasi dari nilai lama y_i ke nilai baru y_{i+1} sepanjang interval h. Fungsi pertambahan dapat ditulis dalam bentuk umum:

$$\varphi = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n,$$

dengan a adalah konstanta dan k adalah

$$k_1 = hf(x_r, y_r),$$

$$k_2 = hf(x_r + p_1h, y_r + q_{11}k_1),$$

$$k_3 = hf(x_r + p_2h, y_r + q_{21}k_1 + q_{22}k_2),$$

$$\vdots$$

$$k_n = hf\left(x_r + p_{n-1}h, y_r + q_{n-1,2}k_1 + q_{n-1,2}k_2 + \cdots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}\right),$$

dimana p dan q konstan. Nilai k menunjukkan hubungan berurutan. Nilai k_1 muncul dalam persamaan untuk menghitung k_2, yang keduanya juga muncul dalam persamaan untuk menghitung k_3 dan seterusnya. Hubungan berurutan ini membuat metode Runge-Kutta menjadi efisien untuk hitungan komputer (Chapra dan Canale, 2010).

Metode Runge-Kutta memiliki beberapa tipe bergantung pada nilai n yang digunakan. Pada penelitian ini menggunakan Runge-Kutta orde empat yang berarti memiliki nilai $n = 4$. Metode ini, merupakan metode yang sering digunakan dalam ilmu komputasi karena memiliki tingkat ketelitian solusi yang lebih tinggi dibandingkan orde sebelumnya.

Menurut Chapra dan Canale (2010) metode Runge-Kutta orde empat mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4)h, \tag{2.30}$$

dengan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), \\ k_2 &= f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1), \\ k_3 &= f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1 + q_{22}k_2), \\ k_4 &= f(x_i + p_3h, x_i + q_{31}k_1 + q_{32}k_2 + q_{33}k_3). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Persamaan (2.31) di atas memiliki 13 konstanta, antara lain yaitu $a_1, a_2, a_3, a_4, p_1, p_2, p_3, q_{11}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32}, q_{33}$. Nilai dari 13 konstanta tersebut dapat diperoleh dengan menjabarkan k_1, k_2, k_3 dan k_4 dalam bentuk deret Taylor. Dengan menjabarkan k_i yang hanya memiliki variabel y maka akan diperoleh:

$$k_1 = f \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f(y_i + q_{11}k_1) \\ &= f + hq_{11}ff_y + \frac{h^2q_{11}^2f^2f_{yy}}{2} + \frac{h^3q_{11}^3f^3f_{yy}}{6} + \cdots \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f(y_i + q_{21}k_1 + q_{22}k_2) \\ &= f(h(q_{21} + q_{22})ff_y + h^2\left(q_1q_{22}ff_y^2 + \tfrac{1}{2}(q_{21} + \right. \\ &\quad \left. q_{22})^2f^2f_{yy}\right) + h^3\left(\tfrac{1}{2}q_{11}^2q_{22}f^2f_yf_{yy} + q_{21}(q_{21} + \right. \\ &\quad \left. q_{22})q_{22}f^2f_yf_{yy} + \tfrac{1}{6}(q_{21} + q_{22})^3f^3f_{yyy}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f(y_i + q_{31}k_1 + q_{32}k_2 + q_{33}k_3) \\ &= f + h(q_{31} + q_{32} + q_{33})ff_y + h^2\left(q_{11}q_{32}ff_y^2 + \right. \\ &\quad \left. (q_{21} + q_{22})q_{33}ff_y^2 + \tfrac{1}{2}(q_{31} + q_{32} + q_{33})f^2f_{yy}\right) + \\ &\quad h^3\left(\tfrac{1}{2}q_{11}^2q_{32}(q_{31} + q_{32} + q_{33})f^2f_yf_{yy} + \right. \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\frac{q_{33}(q_{21}+q_{22})^2 f^2 f_y f_{yy}}{2} + (q_{31}+q_{32}+q_{33})\big(q_{11}q_{32} +$$

$$q_{33}(q_{21}+q_{22})\big) f^2 f_y f_{yy} + q_{33}q_{22}q_{11} f f_y^3 +$$

$$\frac{1}{6}(q_{31}+q_{32}+q_{33})^3 f^3 f_{yyy}\Big) \cdots$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (2.32), (2.33), (2.34) dan (2.35) ke dalam persamaan (2.31) akan diperoleh nilai parameter $a_1, a_2, a_3, a_4, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32}, q_{33}$. Selanjutnya, dengan deret Taylor diperoleh:

$$\begin{aligned}
& q_{11} = p_1, \\
& q_{21} + q_{22} = p_2, \\
& q_{31} + q_{32} + q_{33} = p_3, \\
& a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1, \\
& a_2 q_{11} + a_3(q_{21}+q_{22}) + a_4(q_{31}+q_{32}+q_{33}) = \frac{1}{2}, \\
& a_2 q_{11}^2 + a_3(q_{21}+q_{22})^2 + a_4(q_{31}+q_{32}+q_{33})^2 = \frac{1}{3}, \\
& a_2 q_{11}^3 + a_3(q_{21}+q_{22})^3 + a_4(q_{31}+q_{32}+q_{33})^3 = \frac{1}{4}, \\
& a_3 q_{22} q_{11} + a_4 q_{32} q_{11} + a_4 q_{33}(q_{21}+q_{22}) = \frac{1}{6}, \\
& a_3 q_{22} q_{11}^2 + a_4 q_{32} q_{11}^2 + a_4 q_{33}(q_{21}+q_{22})^2 = \frac{1}{12}, \\
& a_3 q_{11} q_{22}(q_{21}+q_{22}) \\
& \qquad + a_4(q_{31}+q_{32}+q_{31})\big(q_{11}q_{32} \\
& \qquad + q_{33}(q_{21}+q_{22})\big) = \frac{1}{8}, \\
& a_4 q_{33} q_{22} q_{11} = \frac{1}{24}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Persamaan (2.36) memuat 11 persamaan dengan 13 parameter yang tidak diketahui. Jika digunakan tiga kondisi tambahan agar sistem tersebut dapat diselesaikan yaitu:

$$q_{11} = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2}, p_3 = 1. \tag{2.37}$$

Maka, terbentuk Runge-Kutta orde empat sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{2.38}$$

dimana

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i), \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right), \\ k_4 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_3\right). \end{aligned} \tag{2.39}$$

(Syauqi, 2016)

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde dua menggunakan metode Runge-Kutta, harus dirubah terlebih dahulu menjadi sistem persamaan diferensial orde satu (Dafik, 1999). Sebuah persamaan orde dua sebagai berikut:

$y" = f(t, y, y')$ dengan nilai awal $y(t_0) = y_0$ dan $y'(t_0) = x_0$. (2.40)

Persamaan (2.29) terlebih dahulu dirubah menjadi sistem PDB orde satu yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t, y, x) = x, & y(t_0) &= y_0, \\ \frac{dx}{dt} &= g(t, y, y') = g(t, y, x), & x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Sehingga formula metode Runge-Kutta menjadi berikut:

$$
\begin{aligned}
&y(i+h) = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),\\
&x(i+h) = x_0 + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4),\\
&\quad k_1 = f(t_i, y_i, x_i),\\
&\quad l_1 = g(t_i, y_i, x_i),\\
&\quad k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}, x_i + \frac{hl_1}{2}\right),\\
&\quad l_2 = g\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}, x_i + \frac{hl_1}{2}\right),\\
&\quad k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2}, x_i + \frac{hl_2}{2}\right),\\
&\quad l_3 = g\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2}, x_i + \frac{hl_2}{2}\right),\\
&\quad k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3, x_i + hl_3),\\
&\quad l_4 = g(t_i + h, y_i + kh_3, x_i + hl_3).
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

Metode Runge-Kutta orde empat ini yang digunakan pada metode tembakan dengan mereduksi masalah nilai batas (Kharab, 2012).

2.5 Analisis Galat (*error*)

Penyelesaian numerik dari suatu persamaan matematika akan menghasilkan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak dari penyelesaian analitik. Sehingga ada selisih diantara keduanya yang dinamakan dengan galat. Galat dapat mempengaruhi seberapa dekat solusi numerik terhadap solusi analitiknya. Dilihat dari penyelesaian numerik yang semakin tidak teliti jika nilai galat yang didapatkan besar. Sebaliknya penyelesaian numerik dikatakan teliti jika nilai galat kecil (Munir, 2006).

Menurut Djojodiharjo (2000), galat terbagi menjadi dua jenis yaitu galat pemotong dan galat pembulatan. Galat pemotongan ditimbulkan karena penghentian suatu deret atau runtunan langkah-langkah komputasi yang tak berhingga menjadi runtunan langkah yang berhingga. Perhitungan yang dilakukan tidak sesuai dengan prosedur matematika juga dapat mengakibatkan galat pemotongan. Sedangkan galat pembulatan terjadi karena tidak diperhitungkan beberapa angka terakhir dari suatu bilangan.

Nilai galat sangat erat hubungannya dengan nilai eksak dan nilai perkiraan sehingga dapat dituliskan sebagai

$$y(t) = \bar{y}(t) + e, \qquad (2.43)$$

dimana $y(t)$ menyatakan nilai sebenarnya, $y'(t)$ nilai perkiraan dan e menyatakan galat terhadap nilai eksak.

Persamaan (2.43) dapat ditulis menjadi

$$e = y(t) - \bar{y}(t). \qquad (2.44)$$

Berdasarkan persamaan (2.44) dapat disebut bahwa galat merupakan selisih antara nilai eksak dan nilai perkiraan, maka nilai galat bersifat mutlak atau dapat ditulis sebagai

$$|e| = |y(t) - \bar{y}(t)|. \qquad (2.45)$$

2.6 Kajian Islam tentang Getaran

Fenomena vibrasi (getaran) sangat erat kaitannya dalam kehidupan sehari-hari. Ada banyak kejadian yang dapat dikategorikan sebagai peristiwa vibrasi, salah satunya gempa bumi. Gempa bumi adalah getaran yang dirasakan di permukaan bumi berasal dari dalam lapisan-lapisan kulit bumi. Menurut Howel

(1969), gempa bumi diartikan sebagai getaran atau serentetan getaran dari kulit bumi yang bersifat tidak abadi dan kemudian menyebar ke segala arah. Kata gempa bumi dalam bahasa arab memiliki istilah yaitu Al-Zalzalah, yang tersirat dalam firman Allah SWT:

إِذَا زُلۡزِلَتِ ٱلۡأَرۡضُ زِلۡزَالَهَا ۝١

"Apabila bumi digoncangkan dengan goncangan (yang dahsyat)" (Q.S. Al-Zalzalah:1).

Berdasarkan firman Allah di atas, terdapat kata Al-zalzalah yang berarti goncangan atau getaran. Getaran pada bumi tidak sama halnya dengan getaran yang terjadi pada gerak bola yang diikat pegas. Bola dapat bergerak bolak-balik, atas-bawah, kanan-kiri. Sedangkan getaran yang terjadi di bumi terjadi secara parsial. Tidak semua wilayah dapat merasakan getarannya. Akan tetapi, getaran yang terjadi juga dapat menimbulkan kerusakan serta menelan korban jiwa (Purwanto, 2015).

Selain kata Al- zalzalah, Al-Quran menyatakan peristiwa gempa bumi dalam beberapa kata lain. Beberapa kata tersebut yaitu *syaqq* (terbelahnya bumi), *qath'* (terbelahnya bumi), *badl Al-ardl* (penggantian bumi), *rajfah* (gempa yang dahsyat), *rajj* (gocangan yang dahsyat), *madd* (meratakan bumi), khasf (terbenamnnya bumi) dan *fasad Al-Ardl* (kerusakan bumi).

إِذَا رُجَّتِ ٱلۡأَرۡضُ رَجّٗا ۝٤

"Apabila bumi digoncangkan sedahsyat-dahsyatnya" (Q.S Al-Waqiah: 4).

Kata (*rujjat*) berasal dari kata (*rajja*) yang berarti mengguncang dengan keras. Ayat di atas menggunakan kata pasif yang menunjukkan bahwa hal tersebut terjadi dengan sangat mudah. Menurut M. Quraish Shihab dalam tafsir al-Misbah menjelasakan bahwa ayat di atas mengarah pada fenomena alam gempa bumi. Dan pada tafsir al-Munthakab dijelaskan:

"Bumi yang kita huni ini pada hakikatnya tidak tetap dan tidak seimbang. Bumi terdiri atas lapisan batu-batu yang bertumpuk-tumpuk dan tidak teratur. Terkadang lapisannya tidak sama dengan sebelahnya sehingga membentuk apa yang disebut rongga geolog di banyak tempat. Rongga-rongga inilah yang sejak dahulu, bahkan sampai sekarang menjadi pusat terjadinya gempa berskala besar. Itu dimungkinkan karena rongga-rongga itu berada di bawah pengaruh daya tarik menarik yang sangat kuat yang terjadi saat lapisan-lapisan itu terbelah. Maka apabila kekuatan ini tidak seimbang akibat pengaruh faktor-faktor eksternal lainnya, akan terjadi hentakan yang sangat kuat dan mengakibatkan goncangan bumi yang dapat menghancurkan permukaan bumi terdekat dari pusat gempa" (Shihab, 2002).

Pernyataan di atas sejalan dengan pengetahuan sains yang menjelaskan beberapa faktor yang dapat mempengaruhi adanya gempa bumi. Gempa tektonik, gempa vulkanik, gempa runtuhan, gempa buatan manusia adalah macam-macam gempa bumi yang dipengaruhi oleh berbagai faktor.

Gempa tektonik adalah gempa bumi yang disebabkan oleh peristiwa tektonik, yaitu berupa gerakan sepanjang sesar atau retakan pada kerak bumi. Dalam kaitannya gempa bumi, ada teori tentang kerak bumi. Teori ini adalah teori tektonik lempeng yang juga dikenal sebagai teori benua terapung atau pelebaran dasar laut. Teori ini menyebutkan bahwa batuan baru dalam kerak bumi senantiasa terbentuk dengan bahan batuan yang berasal dari bagian bumi yang paling dalam.

Gempa bumi vulkanik disebabkan oleh aktivitas gunung api. Gempa ini juga dapat diakibatkan oleh retakan pada struktur gunung api akibat gerakan magma menuju ke permukaan bumi. Letusan yang terjadi akibat gemba bumi vulkanik dapat berkekuatan lemah hingga sedang dengan frekuensi getaran yang berkepanjangan sehingga bertahan dari beberapa jam hingga beberapa hari.

Gunung runtuhan (terban) terjadi karena runtuhnya bagian atap gua terutama di daerah batu kapur. Kerangka tektonik Indonesia didominasi oleh interaksi antar lempeng litosfera. Lempeng Asia Tenggara/ Eurasia yakni Filiphina, Pasifik dan Hindia-Australia (Badwi, dkk, 2019).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Penyelesaian Numerik Persamaan Vibrasi dengan Metode *Shooting*

Persamaan yang akan diselesaikan adalah persamaan vibrasi paksa dengan redaman yang diperoleh dari (William E. Boyce & Richard C. DiPrima, 2008) sebagai berikut:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 0.125\frac{du(t)}{dt} + u(t) = 3\cos t, \tag{3.1}$$

dengan nilai batas

$$u(0) = 2 \text{ dan } u(1) = 2.32741. \tag{3.2}$$

Terdapat beberapa langkah yang harus diselesaikan menggunakan metode *Shooting*. Langkah awal menggunakan metode *Shooting* yaitu merubah persamaan (3.1) yang berupa permasalahan nilai batas menjadi sistem persamaan diferensial orde dua dengan nilai awal. Secara umum, bentuk persamaan yang sesuai dengan metode *Shooting* ada pada subbab 2.4 yaitu persamaan (2.27) dan (2.28). Persamaan tersebut diperoleh dari kombinasi liner $u(t_i) = y(t_i) - \frac{\beta - y(b)}{v(b)}v(t_i)$. Berdasarkan bentuk tersebut, diperoleh sistem persamaan yang baru yakni

$$y'' + 0.125y' + y = 3\cos t, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \tag{3.3}$$

dan

$$v'' + 0.125v' + v = 0, \qquad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1. \tag{3.4}$$

Dengan demikian kedua persamaan tersebut selanjutnya akan diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.

3.1.1 Metode Runge-Kutta

Persamaan (3.3) dan (3.4) yang merupakan permasalahan nilai awal, yang akan diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Penyelesaian ini dilakukan secara bertahap. **Langkah pertama** adalah menyelesaikan persamaan (3.3). Berdasarkan prosedur yang telah dijelaskan pada subbab 2.4, persamaan (3.3) terlebih dahulu direduksi menjadi sistem persamaan diferensial linier orde satu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t,y,z) = z, && y(0) = 2 \\ \frac{dz}{dt} &= g(t,y,z) = 3\cos t - 0.125z - y, && z(0) = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Selanjutnya, persamaan (3.5) akan dihitung menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dengan $h = 0.1$. Untuk iterasi pertama dengan $t_0 = 0, y_0 = 2, z_0 = 0$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_0, y_0, z_0) \\ &= f(0,2,0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= g(t_0, y_0, z_0) \\ &= g(0,2,0) \\ &= 3\cos(0) - 0.125(0) - 2 \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{hk_1}{2}, z_0 + \frac{hl_1}{2}\right) \\ &= f(0.05, 2, 0.05) \\ &= 0.05, \end{aligned}$$

$$l_2 = g\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{hk_1}{2}, z_0 + \frac{hl_1}{2}\right)$$

$$= g(0.05, 2, 0.05)$$

$$= 3\cos(0.05) - 0.125(0.05) - 2$$

$$= 0.990000781,$$

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{hk_2}{2}, z_0 + \frac{hl_2}{2}\right)$$

$$= f(0.05, 2.0025, 0.04950003905)$$

$$= 0.04950003905,$$

$$l_3 = g\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{hk_2}{2}, z_0 + \frac{hl_2}{2}\right)$$

$$= g(0.05, 2.0025, 0.04950003905)$$

$$= 3\cos(0.05) - 0.125(0.04950003905) - 2.0025$$

$$= 0.987563276,$$

$$k_4 = f(t_0 + h, y_0 + hk_3, z_0 + hl_3)$$

$$= f(0.1, 2.004950004, 0.0987563276\ )$$

$$= 0.0987563276,$$

$$l_4 = g(t_0 + h, y_0 + hk_3, z_0 + hl_3)$$

$$= g(0.1, 2.004950004, 0.0987563276\ )$$

$$= 3\cos(0.1) - 0.125(0.0987563276) - 2.004950004$$

$$= 0.967717951.$$

Sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$y(0.1) = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= 2 + \frac{0.1}{6}(0 + 2(0.05) + 2(0.04950003905) + 0.0987563276)$$

$$= 2.00496260676248,$$

$$z(0.1) = z_0 + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$= 0 + \frac{0.1}{6}(1 + 2(0.990000781) + 2(0.987563276) + 0.967717951)$$

$$= 0.09871410109915.$$

Untuk iterasi kedua dengan $t_1 = 0.1$, $y_1 = 2.00496260676248$, $z_1 = 0.09871410109915$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$k_1 = f(t_1, y_1, z_1)$$

$$= f(0.1, 2.00496260676248, 0.09871410109915)$$

$$= 0.09871410109915,$$

$$l_1 = (t_1, y_1, z_1)$$

$$= g(0.1, 2.00496260676248, 0.09871410109915)$$

$$= 3\cos(0.1) - 0.125(0.09871410109915) - 2.00496260676248$$

$$= 0.967710626,$$

$$k_2 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{hk_1}{2}, z_1 + \frac{hl_1}{2}\right)$$

$$= f(0.15, 2.009898312, 0.1470996324)$$

$$= 0.1470996324,$$

$$l_2 = g\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{hk_1}{2}, z_1 + \frac{hl_1}{2}\right)$$

$$= g(0.15, 2.009898312, 0.1470996324)$$

$$= 3\cos(0.15) - 0.125(0.1470996324) - 2.009898312$$

$$= 0.938027468,$$

$$k_3 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{hk_2}{2}, z_1 + \frac{hl_2}{2}\right)$$

$$= f(0.15, 2.012317589, 0.1456154745)$$

$= 0.1456154745,$

$$l_3 = g\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{hk_2}{2}, z_1 + \frac{hl_2}{2}\right)$$

$= g(0.15, 2.012317589, 0.1456154745)$

$= 3\cos(0.15) - 0.125(0.1456154745) - 2.012317589$

$= 0.935793711,$

$k_4 = f(t_1 + h, y_1 + hk_3, z_1 + hl_3)$

$= f(0.2, 2.019524154, 0.1922934722)$

$= 0.1922934722,$

$l_4 = g(t_1 + h, y_1 + hk_3, z_1 + hl_3)$

$= g(0.2, 2.019524154, 0.1922934722)$

$= 3\cos(0.2) - 0.125(0.1922934722) - 2.019524154$

$= 0.896638895.$

Sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$y(0.2) = y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$= 2.00496260676248$

$+ \frac{0.1}{6}(0.098714101099153 + 2(0.1470996324)$

$+ 2(0.1456154745) + 0.1922934722)$

$= 2.01956990321487,$

$$z(0.2) = z_1 + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$= 0.09871410109915$

$+ \frac{0.1}{6}(0.967710626 + 2(0.938027468) + 2(0.935793711)$

$+ 0.896638895)$

$= 0.19224729909617.$

Untuk iterasi ketiga dengan $t_1 = 0.2, y_1 = 2.01956990321487,$ $z_1 = 0.19224729909617$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$k_1 = f(t_2, y_2, z_2)$

$= f(0.2, 2.01956990321487, 0.19224729909617)$

$= 0.19224729909617,$

$l_1 = g(t_2, y_2, z_2)$

$= g(0.2, 2.01956990321487, 0.19224729909617)$

$= 3\cos(0.2) - 0.125(0.19224729909617) - 2.01956990321487$

$= 0.896598918,$

$$k_2 = f\left(t_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{hk_1}{2}, z_2 + \frac{hl_1}{2}\right)$$

$= f(0.25, 2.029182268, 0.2370772450)$

$= 0.2370772450,$

$$l_2 = g\left(t_1 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{hk_1}{2}, z_2 + \frac{hl_1}{2}\right)$$

$= g(0.25, 2.029182268, 0.2370772450)$

$= 3\cos(0.25) - 0.125(0.2370772450) - 2.029182268$

$= 0.847920341,$

$$k_3 = f\left(t_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{hk_2}{2}, z_2 + \frac{hl_2}{2}\right)$$

$= f(0.25, 2.031423765, 0.2346433162)$

$= 0.2346433162,$

$$l_3 = g\left(t_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{hk_2}{2}, z_2 + \frac{hl_2}{2}\right)$$

$= g(0.25, 2.031423765, 0.2346433162)$

$= 3\cos(0.25) - 0.125(0.2346433162) - 2.031423765$

$= 0.845983085,$

$k_4 = f(t_2 + h, y_2 + hk_3, z_2 + hl_3)$

$= f(0.3, 2.043034235, 0.2768456076)$

$= 0.2768456076,$

$l_4 = g(t_2 + h, y_2 + hk_3, z_2 + hl_3)$

$= g(0.3, 2.043034235, 0.2768456076)$

$= 3\cos(0.3) - 0.125(0.2768456076) - 2.043034235$

$= 0.788369531.$

Sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$y(0.3) = y_2 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= 2.01956990321487$$

$$+ \frac{0.1}{6}(0.192247299096168 + 2(0.2370772450)$$

$$+ 2(0.2346433162) + 0.2768456076)$$

$$= 2.04311213703183,$$

$$z(0.3) = z_2 + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$= 0.19224729909617$$

$$+ \frac{0.1}{6}(0.896598918 + 2(0.847920341) + 2(0.845983085)$$

$$+ 0.788369531)$$

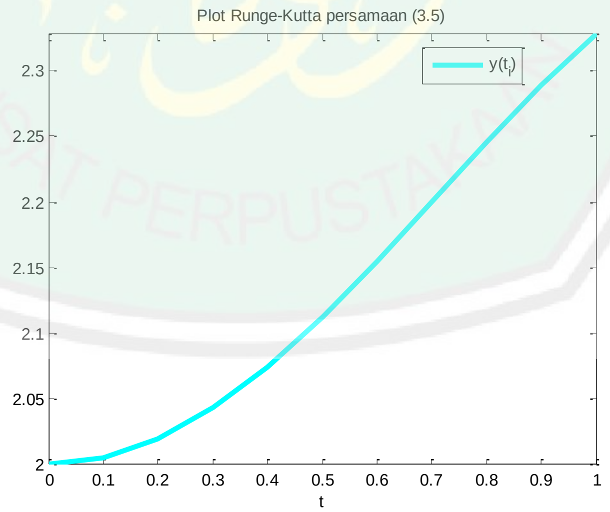
$$= 0.27679355413761.$$

Iterasi tersebut terus berulang hingga $t = 1$ atau sampai iterasi ke-10. Adapun hasil solusi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat persamaan (3.5) dituliskan pada tabel 3.1 sebagai berikut:

Tabel 3.1 Hasil Runge-Kutta orde empat persamaan (3.5)

t_i	$y(t_i)$	$z(t_i)$
0	2.00000000000000	0.00000000000000
0.1	2.00496260676248	0.09871410109915
0.2	2.01956990321487	0.19224729909617
0.3	2.04311213703183	0.27679355413761
0.4	2.07450820000359	0.34874245331798
0.5	2.11232833332231	0.40474143153550
0.6	2.15482285132675	0.44175378073535
0.7	2.19995642185610	0.45711164485871
0.8	2.24544736458317	0.44856326914040
0.9	2.28881135950814	0.41431385277106
1	2.32740889705285	0.35305944230759

Perhitungan Runge-Kutta yang dihasilkan pada persamaan (3.5) digambarkan grafiknya dengan menggunakan Maple diperoleh hasil sebagai berikut:



Gambar 3.1 Plot hasil Runge-Kutta persamaan (3.5)

Langkah kedua adalah menyelesaikan persamaan (3.4) menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Menggunakan cara yang serupa pada persamaan (3.3), terlebih dahulu persamaan (3.4) direduksi menjadi sistem persamaan diferensial orde satu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= f(t,v,w) = w, & v(0) = 0, \\ \frac{dw}{dt} &= g(t,v,w) = -0.125w - v, & w(0) = 1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Selanjutnya, persamaan (3.6) akan dihitung menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dengan $h = 0.1$. Untuk iterasi pertama dengan $t_0 = 0$, $v_0 = 0, w_0 = 1$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_0, v_0, w_0) \\ &= f(0,0,1) \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1 &= f(t_0, v_0, w_0) \\ &= g(0,0,1) \\ &= -0.125(1) - 0 \\ &= -0.125, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(t_0 + \frac{h}{2}, v_0 + \frac{hk_1}{2}, w_0 + \frac{hl_1}{2}\right) \\ &= f(0.05, 0.05, 0.99375) \\ &= 0.9937500000, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_2 &= g\left(t_0 + \frac{h}{2}, v_0 + \frac{hk_1}{2}, w_0 + \frac{hl_1}{2}\right) \\ &= g(0.05, 0.05, 0.99375) \\ &= -0.125(0.99375) - 0.05 \end{aligned}$$

$= -0.17421875,$

$$k_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, v_0 + \frac{hk_2}{2}, w_0 + \frac{hl_2}{2}\right)$$

$= f(0.05, 0.0496875, 0.9912890625)$

$= 0.9912890625,$

$$l_3 = g\left(t_0 + \frac{h}{2}, v_0 + \frac{hk_2}{2}, w_0 + \frac{hl_2}{2}\right)$$

$= g(0.05, 0.0496875, 0.9912890625)$

$= -0.125(0.9912890625) - 0.0496875$

$= -0.1735986328,$

$k_4 = f(t_0 + h, v_0 + hk_3, w_0 + hl_3)$

$= f(0.1, 0.09912890625, 0.9826401367)$

$= 0.9826401367,$

$l_4 = g(t_0 + h, v_0 + hk_3, w_0 + hl_3)$

$= g(0.1, 0.09912890625, 0.9826401367)$

$= -0.125(0.9826401367) - 0.09912890625$

$= -0.2219589234.$

Sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$v(0.1) = v_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= 0 + \frac{0.1}{6}(1 + 2(0.99375) + 2(0.9912890625) + 0.9826401367)$$

$= 0.09921197102865,$

$$w(0.1) = w_0 + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$= 1 + \frac{0.1}{6}(-0.125 \ + 2(-0.17421875) + 2(-0.1735986328)$$

$$- 0.2219589234)$$

$$= 0.98262343851725.$$

Untuk iterasi kedua dengan $t_1 = 0, v_1 = 0.09921197102865,$ $w_1 = 0.98262343851725$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$k_1 = f(t_1, v_1, w_1)$$

$$= f(0.1,0.09921197102865, 0.98262343851725)$$

$$= 0.98262343851725,$$

$$l_1 = g(t_1, v_1, w_1)$$

$$= g(0.1,0.09921197102865, 0.98262343851725)$$

$$= -0.125(0.98262343851725) - 0.09921197102865$$

$$= -0.2220399008,$$

$$k_2 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}, v_1 + \frac{hk_1}{2}, w_1 + \frac{hl_1}{2}\right)$$

$$= f(0.15, 0.1483431430, 0.9715214435)$$

$$= 0.9715214435,$$

$$l_2 = g\left(t_1 + \frac{h}{2}, v_1 + \frac{hk_1}{2}, w_1 + \frac{hl_1}{2}\right)$$

$$= g(0.15, 0.1483431430, 0.9715214435)$$

$$= -0.125(0.9715214435) - 0.1483431430$$

$$= -0.2697833234,$$

$$k_3 = f\left(t_1 + \frac{h}{2}, v_1 + \frac{hk_2}{2}, w_1 + \frac{hl_2}{2}\right)$$

$$= f(0.15, 0.1477880432, 0.9691342723)$$

$$= 0.9691342723,$$

$$l_3 = g\left(t_1 + \frac{h}{2}, v_1 + \frac{hk_2}{2}, w_1 + \frac{hl_2}{2}\right)$$

$$= g(0.15, 0.1477880432, 0.9691342723)$$

$$= -0.125(\ 0.9691342723) - 0.1477880432$$

$$= -0.2689298272,$$

$$k_4 = f(t_1 + h, v_1 + hk_3, w_1 + hl_3)$$

$$= f(0.2, 0.1961253983, 0.9557304558)$$

$$= 0.9557304558,$$

$$l_4 = g(t_1 + h, v_1 + hk_3, w_1 + hl_3)$$

$$= g(0.2, 0.1961253983, 0.9557304558)$$

$$= -0.125(0.9557304558) - 0.1961253983$$

$$= -0.3155917053.$$

Sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$v(0.2) = v_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= 0.09921197102865$$

$$+ \frac{0.1}{6}(0.98262343851725 + 2(0.9715214435)$$

$$+ 2(0.9691342723) + 0.9557304558)$$

$$= 0.19620639312791,$$

$$w(0.2) = w_1 + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$= 0.98262343851725$$

$$+ \frac{0.1}{6}(-0.2220399008\ + 2(-0.2697833234)$$

$$+ 2(-0.2689298272) - 0.3155917053)$$

$$= 0.95570580672808.$$

Untuk iterasi ketiga dengan $t_2 = 0.2, v_2 = 0.19620639312791$, $w_3 = 0.95570580672808$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$k_1 = f(t_2, v_2, w_2)$$

$$= f(0.2, 0.19620639312791, 0.955705806728080)$$

$$= 0.95570580672808,$$

$$l_1 = g(t_2, v_2, w_2)$$

$$= g(0.2, 0.19620639312791, 0.95570580672808)$$

$$= -0.125(0.95570580672808) - 0.19620639312791$$

$$= -0.3156696190,$$

$$k_2 = f\left(t_2 + \frac{h}{2}, v_2 + \frac{hk_1}{2}, w_2 + \frac{hl_1}{2}\right)$$

$$= f(0.25, 0.2439916835, 0.9399223258)$$

$$= 0.9399223258,$$

$$l_2 = g\left(t_2 + \frac{h}{2}, v_2 + \frac{hk_1}{2}, w_2 + \frac{hl_1}{2}\right)$$

$$= g(0.25, 0.2439916835, 0.9399223258)$$

$$= -0.125(0.9399223258) - 0.2439916835$$

$$= -0.3614819742,$$

$$k_3 = f\left(t_2 + \frac{h}{2}, v_2 + \frac{hk_2}{2}, w_2 + \frac{hl_2}{2}\right)$$

$$= f(0.25, 0.2432025095, 0.9376317080)$$

$$= 0.9376317080,$$

$$l_3 = g\left(t_2 + \frac{h}{2}, v_2 + \frac{hk_2}{2}, w_2 + \frac{hl_2}{2}\right)$$

$$= g(0.25, 0.2432025095, 0.9376317080)$$

$$= -0.125(0.9376317080) - 0.2432025095$$

$$= -0.3604064730,$$

$$k_4 = f(t_2 + h, v_2 + hk_3, w_2 + hl_3)$$

$$= f(0.3, 0.2899695640, 0.9196651594)$$

$$= 0.9196651594,$$

$$l_4 = g(t_2 + h, v_2 + hk_3, w_2 + hl_3)$$

$$= g(0.3, 0.2899695640, 0.9196651594)$$

$$= -0.125(0.9196651594) - 0.2899695640$$

$$= -0.4049277089.$$

Sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$v(0.3) = v_2 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= 0.19620639312791$$

$$+ \frac{0.1}{6}(0.95570580672808 + 2(0.9399223258)$$

$$+ 2(0.9376317080) + 0.9196651594)$$

$$= 0.29004771035725,$$

$$w(0.3) = w_2 + \frac{h}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$$

$$= 0.95570580672808$$

$$+ \frac{0.1}{6}(-0.3156696190 + 2(-0.3614819742)$$

$$+ 2(-0.3604064730) - 0.4049277089)$$

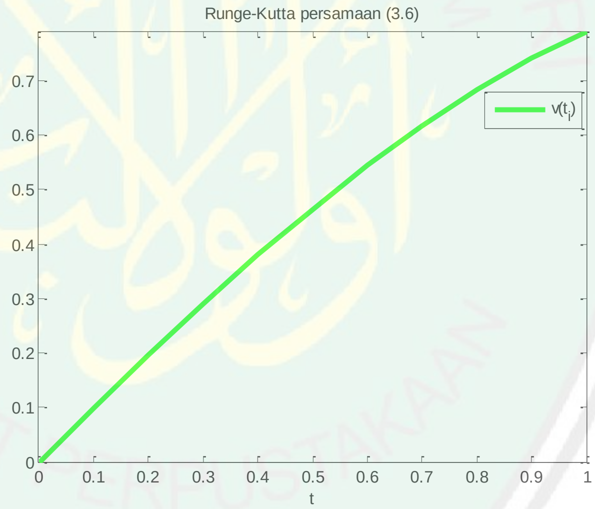
$$= 0.91963290302741.$$

Iterasi tersebut terus berulang hingga $t = 1$ atau sampai iterasi ke-10. Adapun hasil solusi numerik menggunakan metode Runge-Kutta orde empat persamaan (3.6) dituliskan pada tabel 3.2 sebagai berikut:

Tabel 3.2 Hasil Runge-Kutta orde empat persamaan (3.6)

t_i	$v(t_i)$	$w(t_i)$
0	0.00000000000000	1.00000000000000
0.1	0.09921197102865	0.98262343851725
0.2	0.19620639312791	0.95570580672808
0.3	0.29004771035726	0.91963290302741
0.4	0.37984329704706	0.87487664030951
0.5	0.46475178780690	0.82198929039729
0.6	0.54399079507003	0.76159700204713
0.7	0.61684394515109	0.69439266591565
0.8	0.68266717141818	0.62112820544767
0.9	0.74089421131985	0.54260637736409
1.0	0.79104126257424	0.45967216925814

Perhitungan Runge-Kutta yang dihasilkan pada persamaan (3.6) digambarkan grafiknya dengan menggunakan Maple diperoleh hasil sebagai berikut:



Gambar 3.2 Plot hasil Runge-Kutta persamaan (3.6)

3.1.2 Metode *Shooting*

Metode *Shooting* dilakukan dengan menentukan fungsi pendekatan yang sesuai. Fungsi pendekatan yang memenuhi telah dijelaskan pada subbab (2.4) sebagai:

$$u(t_i) = y(t_i) - \frac{\beta - y(b)}{v(b)} v(t_i).$$

Fungsi $u(t_i)$ yang merupakan fungsi pendekatan metode *Shooting* dapat diselesaikan dengan mensubtitusi hasil perhitungan metode Runge-Kutta orde empat pada persamaan (3.3) dan (3.4) yaitu

Tabel 3.3 Hasil Runge-Kutta persamaan (3.3) dan (3.4)

t_i	$y(t_i)$	$v(t_i)$
0	2.00000000000000	0.00000000000000
0.1	2.00496260676248	0.09921197102865
0.2	2.01956990321487	0.19620639312791
0.3	2.04311213703183	0.29004771035726
0.4	2.07450820000359	0.37984329704706
0.5	2.11232833332231	0.46475178780690
0.6	2.15482285132675	0.54399079507003
0.7	2.19995642185610	0.61684394515109
0.8	2.24544736458317	0.68266717141818
0.9	2.28881135950814	0.74089421131985
1.0	2.32740889705285	0.79104126257424

Dengan mensubtitusikan nilai batas $\beta = 2.32741, y(b) = 2.32740889705285$ dan $v(b) = 0.79104126257424$ hasil perhitungan pada tabel (3.3) diperoleh fungsi pendekatan untuk persamaan (3.1) berupa

$$u(t_i) = y(t_i) - \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424} v(t_i). \qquad (3.7)$$

Solusi numerik (3.7) untuk menyelesaikan persamaan (3.1) didapatkan dengan melakukan perhitungan pada interval waktu [0,1] dan $h = 0.1$ yaitu

$$u(0) = y(0) - \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424} v(0)$$

$$= 2.00000000000000 - \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424} (0)$$

$$= 2.00000000000000.$$

Untuk iterasi pertama dengan $t_1 = 0.1, y(0.1) = 2.00496260676248$, $v(0.1) = 0.09921197102865$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$u(0.1) = y(0.1) - \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424} v(0.1)$$

$$= 2.00496260676248$$

$$- \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424}(0.09921197102865)$$

$$= 2.00496274509352.$$

Untuk iterasi kedua dengan $t_2 = 0.2,\ y(0.2) = 2.01956990321487$, $v(0.2) = 0.19620639312791$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$u(0.2) = y(0.2) - \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424} v(0.2)$$

$$= 2.01956990321487$$

$$- \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424}(0.19620639312791)$$

$$= 2.01957017678503.$$

Untuk iterasi ketiga dengan $t_3 = 0.3,\ y(0.3) = 2.04311213703183$, $v(0.3) = 0.29004771035726$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$u(0.3) = y(0.3) - \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424} v(0.3)$$

$$= 2.04311213703183$$

$$- \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424}(0.29004771035726)$$

$$= 2.04311254144474.$$

Untuk iterasi keempat dengan $t_4 = 0.4,\ y(0.4) = 2.07450820000359$, $v(0.4) = 0.37984329704706$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$(0.4) = y(0.4) - \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424} v(0.4)$$

$$= 2.07450820000359$$

$$- \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424} (0.37984329704706)$$

$$= \ 2.07450872961829.$$

Untuk iterasi kelima dengan $t_5 = 0.5$, $y(0.5) = 2.11232833332231$, $v(0.5) = 0.46475178780690$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$u(0.5) = y(0.5) - \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424} v(0.5)$$

$$= 2.11232833332231$$

$$- \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424} (0.46475178780689)$$

$$= \ 2.11232898132474.$$

Untuk iterasi keenam dengan $t_6 = 0.6$, $y(0.6) = 2.15482285132675$, $v(0.6) = 0.54399079507003$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$u(0.6) = y(0.6) - \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424} v(0.6)$$

$$= 2.15482285132675$$

$$- \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424} (0.54399079507003)$$

$$= 2.15482360981196.$$

Untuk iterasi ketujuh dengan $t_7 = 0.7$, $y(0.7) = 2.19995642185610$, $v(0.7) = 0.61684394515109$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$u(0.7) = y(0.7) - \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424} v(0.7)$$

$$= 2.19995642185610$$

$$-\frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424}(0.61684394515109)$$

$$= 2.19995728192031.$$

Untuk iterasi kedelapan dengan $t_8 = 0.8,\ y(0.8) = 2.24544736458317$, $v(0.8) = 0.68266717141818$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$u(0.8) = y(0.8) - \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424}v(0.8)$$

$$= 2.24544736458317$$

$$-\frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424}(0.68266717141818)$$

$$= 2.24544831642456.$$

Untuk iterasi kesembilan dengan $t_9 = 0.9,\ y(0.9) = 2.28881135950814$ $v(0.9) = 0.74089421131985$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$u(0.9) = y(0.9) - \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424}v(0.9)$$

$$= 2.28881135950814$$

$$-\frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424}(0.74089421131985)$$

$$= 2.28881239253536.$$

Untuk iterasi kesepuluh dengan $t_{10} = 1,\ y(1) = 2.32740889705285$, $v(1) = 0.79104126257424$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$u(1) = y(1) - \frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424}v(1)$$

$$= 2.32740889705285$$

$$-\frac{2.32741 - 2.32740889705285}{0.79104126257424}(0.79104126257424)$$

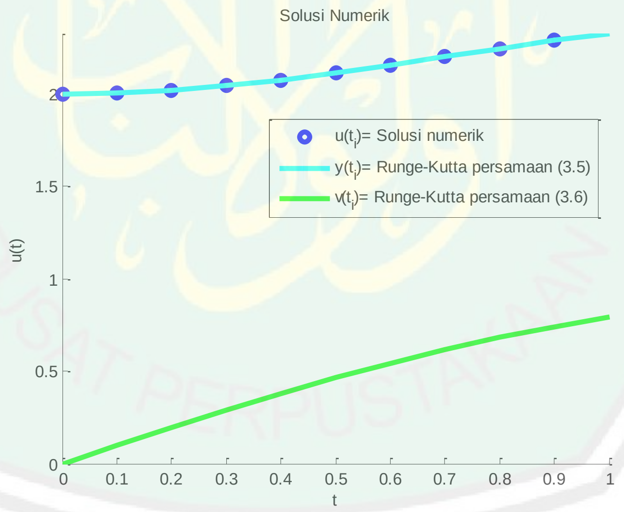
$$= 2.32741000000000.$$

Adapun hasil solusi numerik yang dihasilkan dari fungsi pendekatan metode *Shooting* (3.7) dituliskan pada tabel 3.4 sebagai berikut:

Tabel 3.4 Hasil solusi numerik dengan metode *Shooting*

t_i	$y(t_i)$	$v(t_i)$	$u(t_i)$
0	2.00000000000000	0.00000000000000	2.0000000000000
0.1	2.00496260676248	0.09921197102865	2.00496274509352
0.2	2.01956990321487	0.19620639312791	2.01957017678503
0.3	2.04311213703183	0.29004771035726	2.04311254144474
0.4	2.07450820000359	0.37984329704706	2.07450872961829
0.5	2.11232833332231	0.46475178780690	2.11232898132474
0.6	2.15482285132675	0.54399079507003	2.15482360981196
0.7	2.19995642185610	0.61684394515109	2.19995728192031
0.8	2.24544736458317	0.68266717141818	2.24544831642456
0.9	2.28881135950814	0.74089421131985	2.28881239253536
1.0	2.32740889705285	0.79104126257424	2.32741000000000

Solusi numerik yang dihasilkan pada tabel (3.4) digambarkan grafiknya dengan menggunakan Matlab diperoleh hasil sebagai berikut:



Gambar 3.3 Plot Solusi numerik persamaan vibrasi dengan metode *Shooting*

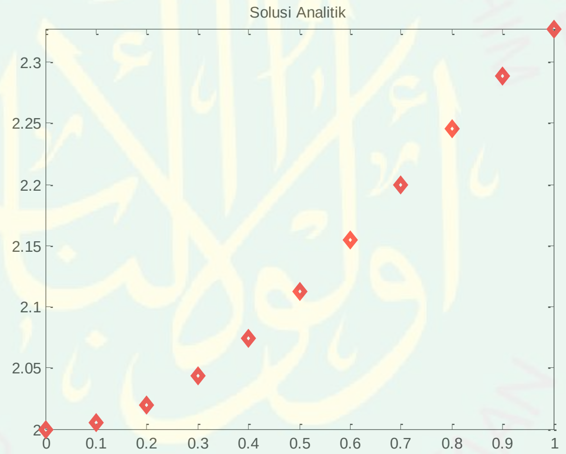
3.2 Analisis Galat Persamaan Vibrasi Paksa dengan Redaman

Pada penyelesaian analitik persamaan vibrasi paksa dengan redaman yang telah dipaparkan pada subbab 2.3. Dengan memilih domain $t \in [0,1]$ dengan $\Delta t = 0.1$ diperoleh solusi analitik yang disajikan pada tabel (3.5) sebagai berikut:

Tabel 3.5 Hasil solusi analitik persamaan vibrasi

t	Solusi Analitik
0	2.000000000000000
0.1	2.00496260509734
0.2	2.01956993681892
0.3	2.04311223999325
0.4	2.07450840246253
0.5	2.11232866047462
0.6	2.15482332255312
0.7	2.19995704999434
0.8	2.24544815535814
0.9	2.28881231113130
1	2.32741000000000

Solusi analitik pada persamaan (3.1) digambarkan grafiknya dengan menggunakan Matlab diperoleh hasil sebagai berikut:



Gambar 3.4 Plot solusi analitik persamaan vibrasi dengan metode *Shooting*

Berdasarkan Gambar (3.4) terdapat 11 titik yang menggambarkan hasil solusi analitik dengan $\Delta t = 0.1$. Titik-titik tersebut merupakan simulasi dari solusi analitik yang termuat pada tabel (3.5).

Sedangkan penyelesaian numerik persamaan vibrasi paksa dengan redaman telah dipaparkan pada tabel (3.4). Adapun perbandingan antara solusi analitik dan solusi numerik disajikan pada tabel berikut

Tabel 3.6 Hasil solusi analitik dan solusi numerik

t	Solusi Analitik	Solusi Numerik
0	2.000000000000000	2.0000000000000
0.1	2.00496260509734	2.00496274509352
0.2	2.01956993681892	2.01957017678503
0.3	2.04311223999325	2.04311254144474
0.4	2.07450840246253	2.07450872961829
0.5	2.11232866047462	2.11232898132474
0.6	2.15482332255312	2.15482360981196
0.7	2.19995704999434	2.19995728192031
0.8	2.24544815535814	2.24544831642456
0.9	2.28881231113130	2.28881239253536
1	2.32741000000000	2.32741000000000

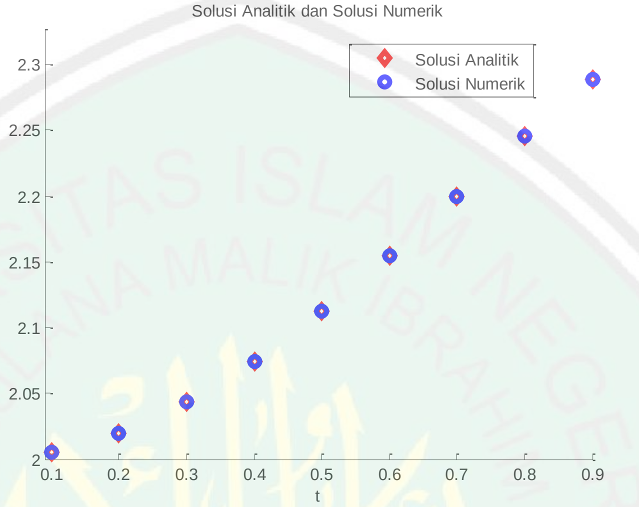
Dengan rumus galat mutlak pada persamaan (2.45), diperoleh galat sebagai berikut:

Tabel 3.7 Galat yang diperoleh dari metode *Shooting*

t	Solusi Analitik	Solusi Numerik	Galat
0.1	2.00496260509734	2.00496274509352	0.00000013999618
0.2	2.01956993681892	2.01957017678503	0.00000023996610
0.3	2.04311223999325	2.04311254144474	0.00000030145149
0.4	2.07450840246253	2.07450872961829	0.00000032715575
0.5	2.11232866047462	2.11232898132474	0.00000032085013
0.6	2.15482332255312	2.15482360981196	0.00000028725883
0.7	2.19995704999434	2.19995728192031	0.00000023192596
0.8	2.24544815535814	2.24544831642456	0.00000023192596
0.9	2.28881231113130	2.28881239253536	0.00000008140406

Dari Tabel (3.7) dapat dilihat bahwa galat terbesar adalah 0.00000032715575 yaitu ketika $t = 0.4$ dan galat yang terkecil adalah 0.00000008140406 terjadi ketika $t = 0.9$. Galat yang diperoleh dari solusi numerik ini bernilai cukup kecil. Hal tersebut menunjukkan bahwa metode *Shooting* merupakan metode yang tepat untuk menyelesaiakan persamaan vibrasi paksa dengan redaman.

Simulasi dilakukan pada persamaan (3.1) dengan kondisi batas (3.2) dengan memilih $t \in [0,1]$ dan $\Delta t = 0.1$ pada solusi analitik dan solusi numerik yang telah diperoleh. Sehingga perbandingan solusi numerik dan analitik dapat dilihat pada Gambar (3.4) berikut:



Gambar 3 5 Plot solusi analitik dan numerik persamaan vibrasi

Gambar (3.5) menunjukkan solusi numerik mendekati solusi analitik ketika domain $t \in [0,1]$ dengan $\Delta t = 0.1$. Dimana plot berwarna biru merupakan solusi numerik dan plot berwarna merah menunjukkan solusi analitik. Pada Gambar (3.5) dapat dilihat bahwa galat yang dihasilkan sangat kecil sehingga tidak tampak dengan jelas perbedaan antara hasil solusi analitik dan solusi numeriknya. Galat yang diperoleh dari Gambar (3.5) dapat dilihat pada tabel (3.7).

3.3 Penyelesaian Numerik dalam Islam

وَلَقَدْ صَرَّفْنَا فِي هَٰذَا ٱلْقُرْءَانِ لِلنَّاسِ مِن كُلِّ مَثَلٍ ۚ وَكَانَ ٱلْإِنسَٰنُ أَكْثَرَ شَيْءٍ جَدَلًا ﴿٥٤﴾

Artinya: *"Dan Sesungguhnya Kami telah mengulang-ulangi bagi manusia dalam al-Quran ini bermacam-macam perumpamaan. dan manusia adalah makhluk yang paling banyak membantah"(Q.S al-Kahfi: 54).*

Perulangan- perulangan yang dijelaskan pada ayat tersebut, erat kaitannya dalam hal fisis berupa pergerakan materi yang ada di muka bumi. Pergerakan yang berulang tersebut dinyatakan sebagai vibrasi atau getaran. Getaran merupakan salah satu permasalahan yang dapat dituliskan dalam bentuk matematika.

Permasalahan dalam matematika pada dasarnya akan memiliki sebuah solusi. Solusi tersebut dapat berupa solusi yang sebenarnya (analitik) maupun solusi numerik. Dimana solusi numerik adalah sebuah pendekatan dari suatu persamaan. Perhitungan numerik seringkali digunakan pada persamaan yang memiliki tingkat kesulitan yang tinggi, salah satunya persamaan vibrasi. Dengan demikian, Allah Swt berfirman dalam surat al-Insyirah: 5-6 tentang usaha dalam menyelesaikan masalah.

Berdasarkan surat al-Insyirah: 5-6 menerangkan bahwa satu kesulitan memiliki banyak metode atau cara penyelesaiannya. Dalam Tafsir al-Aisar dijelaskan bahwa dari ayat terdapat kata *'usri* (kesulitan) yang merupakan isim makrifat artinya satu dan terdapat pula kata *yusron* (kemudahan) sebagai isim nakirah artinya umum atau banyak (Al-Jazairi, 2007). Seperti halnya penyelesaian numerik dan analitik untuk permasalahan matematika.

Dalam penyelesaian numerik terdapat metode langsung dan iteratif yang dapat digunakan. Metode langsung digunakan untuk memecahkan masalah dengan langkah terhingga, seperti eliminasi gauss, metode simpleks dan lain-lain. Sedangkan metode iteratif, digunakan untuk memcahkan masalah dengan langkah yang tidak terhingga, contohnya metode Newton, metode bagi dua, dan iterasi Jacobi.

Sebuah penyelesaian numerik akan mendekati solusi analitiknya (eksak), sehingga solusi yang diperoleh akan menghasilkan nilai galat. Hubungan antara nilai galat dan keakuratan solusi numerik akan terlihat akurat jika nilai galat yang diperoleh semakin kecil.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Adapun kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Hasil solusi numerik persamaan vibrasi paksa dengan redaman menggunakan metode *Shooting* dengan domain $t \in [0,1]$ dan $\Delta t = 0.1$. Pada nilai $t = 0.1$ diperoleh $u_1 = 2.00496274509352$, sedangkan pada saat $t = 0.2$ diperoleh nilai $u_2 = 2.01957017678503$. Iterasi ini terus berlanjut sampai $t = 1$ atau iterasi ke-10. Dari proses iterasi tersebut, menunjukkan hasil yang akurat dengan solusi analitiknya. Dibuktikan dengan galat yang diperoleh hari hasil tersebut.
2. Galat yang diperoleh dalam penelitian ini dengan domain $t \in [0,1]$ dan $\Delta t = 0.1$. Pada titik $t = 0.4$, nilai galat yang diperoleh sebesar 0.00000032715575, yang merupakan nilai galat terbesar pada iterasi ini. Sedangkan galat terkecil terjadi ketika $t = 0.9$ yaitu 0.00000008140406. Hal ini menunjukkan bahwa metode *Shooting* merupakan metode numerik yang sesuai untuk menyelesaikan persamaan vibrasi paksa dengan redaman.

4.1 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk menggunakan metode *Shooting* dalam menyelesaikan permasalahan diferensial biasa (PDB) non linier agar dapat menambah pengetahuan dan wawasan keilmuan mengenai metode *Shooting*.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir, A. (2007). Ketika Kyai Mengajar Matematika. Malang: UIN Maliki Press

Acu, Y., Pahlanop, B. and Antasari, A. (2017). Model Sederhana Gerak Osilator dengan Massa Berubah Terhadap Waktu Menggunakan Metode Runge-Kutta. *Jurnal Positron*, VII(2): 42–47.

Adam, Badradeen & Hashim, Mohsin H.A. (2014). *Shooting Method in Solving Boundary Value Problem*. IJRRAS 21(1).

al Jazairi, A. B. J. (2007). Tafsir al Quran al Aisar, terj. *Azhari Hatim dan Abdurahim Mukti, Jakarta: Darus Sunnah*.

Alonso, M., & Finn, E. (1994). Dasar-Dasar Fisika dan Universitas, Jilid 1 (terjemah).

Badwi, N., Baharuddin, I. I., & Abbas, I. (2019). *Geologi Tata Lingkungan Edisi Revisi*. Deepublish.

Basbuk, M., Eryilmaz, A., & Atay, M. T. (2016). Vibration analysis of a mass on a spring by means of magnus expansion method. *New Trends in Mathematical Sciences*, *4*(2), 90-112.

Boyce, W. E., DiPrima, R. C., & Meade, D. B. (2008). *Elementary differential equations and boundary value problems* (Vol. 9). New York: Wiley.

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). Numerical Analysis, Brooks. *Cole Pub*, *7*.

Chapra, Steven C. dan Raymond P. Canale. (2010). Metode Numerik untuk Teknik dengan Penerapan pada Komputer Teknik. Jakarta: UI Press.

Dafik. (1999). Persamaan Diferensial Biasa (PDB): Masalah Nilai awal dan Batas. Jember: FKIP Universitas Jember.

Djojodiharjo, H. (2000). *Metode Numerik*. Jakarta: Erlangga.

Giancoli, D. C. (2005). *Physics Sixth edition.* Upper Saddle River, New Jersey: Pearson Education, Inc.

Hanifah, I. N. (2013). Analisis Model Getaran Pegas Teredam Dengan Metode Adams-Basforth-Moulton Dan Runge-Kutta. Jember: UNEJ.

Hoffman, J. D., & Frankel, S. (2001). *Numerikal methods for engineers and scientists*. CRC press.

Jati, M. E., & Priyambodo, T. K. (2007). *Fisika Dasar*. Yogyakarta: Andi.

Kharab, A., & Guenther, R. B. (2012). *An Introduction to Numerical Methods: A MATLAB Approach*. CRC Press.

Munir, R. (2006). *Metode Numerik.* Bandung: Informatika.

Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2008). Kalkulus jilid 2. *Julian Gressando, penerjemah. Erlangga. Jakarta*.

Purwanto, A. (2015). *Nalar Ayat-ayat Semesta: Menjadikan al-Quran sebagai Basis Konstruksi Ilmu Pengetahuan*. Mizan.

Richard, L., & Burden, J. (2011). Douglas faires, Numerical Analysis.

Shihab, M. Quraish. (2002). *Tafsir Al-Misbah*. Jakarta: Lentera Hati.

Sovia, N. (2018). Solusi Numerik Persamaan Vibrasi Menggunakan Metode Elemen Hingga. Skripsi tidak dipublikasikan. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Suarga. (2014). *Komputasi Numerik*. Yogyakarta: Andi.

Susilo, A., Yunianto, M., & Variani, V. I. 2012. Simulasi gerak harmonik sederhana dan osilasi teredam pada Cassy-E 524000. *Indonesian Journal of Applied Physics*. (2012), *2*(2), 1–14.

Sutrisno. (1997). *Fisika Dasar: Mekanika*. Bandung: ITB.

Syauqi, N. (2016). Penyelesaian Numerik Model Predator- Prey Tiga Spesies Menggunakan Metode Runge-Kutta orde 4. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2002). Fisika untuk Universitas Jilid I. *Erlangga. Jakarta*.

Zill, D. G., Cullen, M. R., & Wright, W. S. (2013). Differential Equations with Boundary- Value Problem. Brooks.

LAMPIRAN

1. Program Metode *Shooting*

```
function f=f1(t,v,y)
f=3*cos(t)-0.125*v-y;

function f=f2(t,v,y)
f=-0.125*v-y;

function lshoot2(f1,f2,a,b,alfa,beta,n)
%Solve the 2nd order BVP using the linier shooting method.
%f1=-p(x)*u-q(x)*v+r(x), f2=-p(x)*u-q(x)*v.
close all;
h=(b-a)/n;
u1=alfa;
u2=0;
y=alfa;
v=0;
for i=1:n
%RK of order 4
    t=a+(i-1)*h;
    k1=feval(f1,t,v,y);
    c1=v;
    k2=feval(f1,t+h/2,v+h*k1/2,y+h*c1/2);
    c2=v+h*k1/2;
    k3=feval(f1,t+h/2,v+h*k2/2,y+h*c2/2);
    c3=v+h*k2/2;
    k4=feval(f1,t+h,v+h*k3,y+h*c3);
    c4=v+h*k3;
    v=v+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    y=y+h*(c1+2*c2+2*c3+c4)/6;
    u1(i+1)=y;
end
y=0;
v=1;
for i=1:n
%RK of order 4
    t=a+(i-1)*h;
    k1=feval(f2,t,v,y);
    c1=v;
    k2=feval(f2,t+h/2,v+h*k1/2,y+h*c1/2);
    c2=v+h/2*k1;
    k3=feval(f2,t+h/2,v+h*k2/2,y+h*c2/2);
    c3=v+h/2*k2;
    k4=feval(f2,t+h,v+h*k3,y+h*c3);
    c4=v+h*k3;
    v=v+h*(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    y=y+h*(c1+2*c2+2*c3+c4)/6;
    u2(i+1)=y;
end
fprintf('\n')
disp('             Linear shooting method')
fprintf('\n')
disp(['y(b)=',num2str(u1(n+1)),' '])
disp(['v(b)=',num2str(u2(n+1)),' '])
fprintf('\n')
```

```
disp('--------------------------------------------------------------
-------------------------------------------')
disp('   xi              yi                  vi              numerik
analitik             error')
disp('--------------------------------------------------------------
-------------------------------------------')
for i=1:n+1
    t(i)=a+(i-1)*h;
    w(i)=u1(i)+(beta-u1(n+1))/u2(n+1)*u2(i);
    %Write the exact solution if known as s=s(x) otherwise set
s='n'.
    s(i)=-(1/100000)*exp(-
(1/16)*t(i))*sin((1/16)*sqrt(255)*t(i))*(200000*cos((1/16)*sqrt(25
5))*exp(-1/16)+2400000*sin(1)-232741)/(exp(-
1/16)*sin((1/16)*sqrt(255)))+2*exp(-
(1/16)*t(i))*cos((1/16)*sqrt(255)*t(i))+24*sin(t(i));
    err(i)=abs(s(i)-w(i));
        fprintf('%6.2f  %12.14f  %12.14f   %12.14f    %12.14f
%12.14f\n',t(i),u1(i),u2(i),w(i),s(i),err(i))
end
figure(1)
plot(t,w,'rd','LineWidth',3);
title('Solusi Analitik')
axis([0 1, min(min(w)) max(max(w))]);
xlabel('t');
ylabel('solusi analitik')

figure(2)
plot(t,u1,'c-','LineWidth',3);
title('Plot Runge-Kutta persamaan (3.5)')
axis([0 1,min(min(u1)) max(max(u1))]);
legend('y(t_i)');
xlabel('t');

figure(3)
plot(t,u2,'g-','LineWidth',3);
title('Runge-Kutta persamaan (3.6)')
axis([0 1,min(min(u2)) max(max(u2))]);
legend('v(t_i)');
xlabel('t');

figure(4)
plot(t,s,'bo','LineWidth',3);
title('Solusi Numerik')
axis([0 1,min(min(s)) max(max(s))]);
legend('u(t_i)');
xlabel('t');

figure(5)
hold on;
plot(t,s,'bo',t,u1,'c-',t,u2,'g-','LineWidth',3);
title('Solusi Numerik')
axis([0 1,min(min(u2)) max(max(u1))]);
legend('u(t_i)= Solusi numerik','y(t_i)= Runge-Kutta persamaan
(3.5)','v(t_i)= Runge-Kutta persamaan (3.6)');
xlabel('t');
ylabel('u(t)');
hold off;
```

```
figure(6)
hold on;
plot(t,w,'rd',t,s,'bo','LineWidth',3);
axis([0.09 0.9, min(min(w)) max(max(w))]);
title('Solusi Analitik dan Solusi Numerik')
legend('Solusi Analitik','Solusi Numerik')
xlabel('t')
hold off;

figure (7)
plot(t,err,'kh','LineWidth',3)
title('Error')
axis([0.09 0.9, 0 max(max(err))]);
```

RIWAYAT HIDUP

Ghina Ayu Kusumaning Dewi, lahir di Malang pada tanggal 15 September 1997, biasa dipanggil Ghina. Anak pertama dari dua bersaudara, pasangan bapak M.Cholil Arifin dan ibu Mariya Suliya. Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Tlogomas II dan lulus pada tahun 2009. Setelah itu melanjutkan sekolah di SMP Al-Rifa'ie, lulus pada tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di MAN 1 Malang dan lulus pada tahun 2015. Selanjutnya pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil jurusan Matematika.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ghina Ayu Kusumaning Dewi
NIM : 15610087
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Numerik Persamaan Vibrasi Menggunakan Metode *Shooting*
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M.Si
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	27 Mei 2019	Konsultasi BAB I, II	1.
2.	23 April 2019	Konsultasi Keagamaan BAB I	2.
3.	18 Juni 2019	Konsultasi BAB II & III	3.
4.	30 Juli 2019	Konsultasi Keagamaan BAB II	4.
5.	29 Agustus 2019	ACC Keagamaan BAB I & II	5.
6.	27 Agustus 2019	ACC BAB I, II, III	6.
7.	4 November 2019	Konsultasi BAB III & IV	7.
8.	21 November 2019	Konsultasi Keagamaan BAB III	8.
9.	21 November 2019	Konsultasi Keseluruhan	9.
10.	28 November 2019	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 28 November 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001