ESTIMASI PARAMETER MODEL SUKU BUNGA *VASICEK* MENGGUNAKAN *GENERALIZED METHOD OF MOMENTS*

SKRIPSI

OLEH
APRILIA HARVYE SOVIA DEWI
NIM. 15610081

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

ESTIMASI PARAMETER MODEL SUKU BUNGA *VASICEK* MENGGUNAKAN *GENERALIZED METHOD OF MOMENTS*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Aprilia Harvye Sovia Dewi
NIM. 15610081

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

ESTIMASI PARAMETER MODEL SUKU BUNGA *VASICEK* MENGGUNAKAN *GENERALIZED METHOD OF MOMENTS*

SKRIPSI

Oleh
Aprilia Harvye Sovia Dewi
NIM. 15610081

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 29 November 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Abdul Aziz, M.Si	Evawati Alisah, M.Pd
NIP.19760318 200604 1 002	NIP.19720604 199903 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER MODEL SUKU BUNGA *VASICEK* MENGGUNAKAN *GENERALIZED METHOD OF MOMENTS*

SKRIPSI

Oleh
Aprilia Harvye Sovia Dewi
NIM. 15610081

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai salah satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 20 Desember 2019

Penguji Utama	: Dr. Sri Harini, M.Si	....
Ketua Penguji	: Juhari, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Abdul Aziz, M.Si	....
Anggota Penguji	: Evawati Alisah, M.Si	....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: Aprilia Harvye Sovia Dewi
NIM	: 15610081
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Estimasi Parameter Model Suku Bunga *Vasicek* Menggunakan *Generalized Method of Moments*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencamtumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 29 November 2019
Yang membuat pernyataan,

Aprilia Harvye Sovia Dewi
NIM. 15610081

MOTO

“ Kemenangan yang seindah-indahnya dan sesukar-sukarnya yang boleh direbut oleh manusia ialah menundukan diri sendiri”

(Ibu Kartini)

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Skripsi ini dipersembahkan untuk:

Orang tua penulis Bapak Hari Sutrisno dan Ibu Efi Diana Rosida yang selalu menyebutkan penulis dalam doanya, yang selalu memberikan semangat serta kasih sayang tak ternilai,serta untuk adik penulis, Reynaldy Harvye Putra yang selalu menjadi kebanggaan bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si,selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Bapak Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.
5. Ibu Evawati Alisah, M.Pd. selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Bapak Abdussakir, M.Pd, selaku dosen wali yang selalu memberikan motivasi dan arahan kepada penulis.
7. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam proses perkuliahan.
8. Bapak dan Ibu serta adik tercinta yang selalu memberikan do'a, semangat dan motivasi demi keberhasilan penulis.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 29 November 2019

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III METODE PENELITIAN

BAB IV PEMBAHASAN

BAB V PENUTUP

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$\boldsymbol{Y_i}$	: Variabel terikat periode ke-*i*
$\boldsymbol{X_i}$	: Variabel bebas periode ke-*i*
$\boldsymbol{e_i}$	: Galat periode ke-*i*
$\boldsymbol{\beta}$	: Parameter
$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$	: Estimasi Parameter
$\boldsymbol{x}$	: Matriks data
$\boldsymbol{x'}$	: Transpos matriks *x*
$\boldsymbol{y}$	: Vektor kolom dari variabel $\boldsymbol{Y}$
$\boldsymbol{n}$	: sampel ukuran data
r	: Suku bunga
t	: Waktu
$W(\mathrm{t})$	: Proses Wiener
v	: Simpangan baku
v^2	: Variansi
b	: Level rata-rata *long run*
a	: Kelajuan r menuju level θ
$\widehat{\boldsymbol{w}}$	: Matriks pembobot
$\overline{g}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$	: Momen kondisi sampel
$\boldsymbol{Q}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$	: Bentuk kuadrat dari kodisi momen sampel yang teboboti

ABSTRAK

Dewi, Aprilia Harvye Sovia. 2019. **Estimasi Parameter Model Suku Bunga *Vasicek* Menggunakan *Generalized Method of Moments*.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing : (I) Abdul Aziz, M.Si., (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Kata kunci : Model Suku Bunga *Vasicek, Generalized Method of Moments,* Suku Bunga Bank Indonesia.

Model Suku Bunga *Vasicek* merupakan salah satu contoh dari suku bunga stokastik. Suku bunga berubah-ubah dalam suatu periode tertentu. Penelitian ini membahas bentuk estimasi parameter Model Suku Bunga *Vasicek* menggunakan *Generalized Method of Moments* (GMM). GMM adalah metode penaksiran parameter perluasan dari metode momen. GMM menyamakan momen kondisi dari populasi dengan momen kondisi dari sampel dan merupakan salah satu metode yang dapat mengatasi kondisi data dengan pelanggaran asumsi-asumsi pada analisis regresi. Langkah-langkah yang harus dilakukan adalah pertama-tama dicari solusi rekursif dari Model Suku Bunga *Vasicek*, selanjutnya dicari ekspektasi dan variansi dari solusi yang telah diperoleh, kemudian solusi tersebut diubah ke dalam persamaan regresi dan bentuk matriks. Setelah dilakukan estimasi parameter, maka langkah selanjutnya adalah melakukan implementasi data Suku Bunga Bank Indonesia tahun 2006-2016. Langkah-langkah yang harus dilakukan adalah dengan melakukan perhitungan pada data Suku Bunga Bank Indonesia dengan menggunakan hasil dari bentuk estimasi parameter Model Suku Bunga *Vasicek* dengan Metode GMM. Dengan melakukan langkah-langkah tersebut, maka dapat diperoleh hasil nilai parameter Model Suku Bunga *Vasicek* sebesar $a = 0{,}6037$, $b = 3{,}7710$, dan $v = 0{,}6278$.

ABSTRACT

Dewi, Aprilia Harvye Sovia. 2019. **Parameter Estimation of *Vasicek* Interest Rate Model using Generalized Method of Moments.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisor: (I) Abdul Aziz, M.Si., (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Keywords: *Vasicek* Interest Rate Model, Generalized Method of Moments, BI rate.

The *Vasicek* Interest Model is an example of a stochastic interest rate. Interest rates varied within a certain period. This study discusses the estimated parameters of the *Vasicek* Interest Model with the Generalized Method of Moments (GMM). GMM is a parameter estimation method taken from the moment method. GMM equates the moment of participation with the condition moment of the sample and represents one method that can overcome the data condition by overcoming the assumptions in the regression analysis. The steps that must be taken are first to look for a recursive solution from the *Vasicek* Interest Rate Model, then to find the expectations and variances of the solutions that have been obtained, then the solution is converted into a regression equation and matrix. After estimating the parameters, the next step is to implement Bank Indonesia Interest Rate data on 2006-2016. The steps that must be taken are to calculate the Bank Indonesia Interest Rate data using the results of the estimated parameters of the *Vasicek* Interest Rate Model using the GMM. By doing these steps, it can be obtained the result of the *Vasicek* interest rate model parameter of $a = 0{,}6037$, $b = 3{,}7710$, and $v = 0{,}6278$.

.

ملخص

ديوي ، أبريليا هارفي سوفيا. ٢٠١٩ تقدير المعلمة لنموذج سعر الفائدة *Vasicek* باستخدام *Generalized Method of Moments*. أطروحة. قسم الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الحكومية الإسلامية في مالانج. المشرف: (١) عبدالعزيز، ماجستير ، (٢) ايفاواتي اليسله ، ماجستير

الكلمة الرئيسية : طريقة التوسع *Vasicek*، معادلة , *Generalized Method of Moments*, سعر الفائدة في البنك اندونيسيا

نموذج الفائدة *Vasicek* هو مثال على سعر الفائدة العشوائية. أسعار الفائدة نفسها في الواقع لا تستحق التغيير أو التغيير في فترة معينة. تتناول هذه الدراسة شكل المعلمات المقدرة لنموذج مصلح *Vasicek* باستخدام اللحظات المعمم *Generalized Method of Moments* (GMM). GMM هي طريقة تقدير لتمديد المعلمات من طريقة اللحظة GMM. تعادل لحظة حالة السكان مع لحظة حالة العينة وهي إحدى الطرق التي يمكنها التغلب على حالة البيانات عن طريق انتهاك الافتراضات في تحليل الانحدار. الخطوات التي يجب اتخاذها هي أولاً للبحث عن حل تكراري من نموذج معدل الفائدة *Vasicek* ، ثم البحث عن توقعات وفروق الحلول التي تم الحصول عليها ، ثم يتم تحويل الحل إلى معادلة الانحدار وشكل المصفوفة. بعد تقدير المعلمات ، تتمثل الخطوة التالية في تطبيق بيانات سعر الفائدة لبنك إندونيسيا للفترة 2006-2016. الخطوات التي يجب اتخاذها هي حساب بيانات سعر الفائدة لبنك إندونيسيا باستخدام نتائج المعلمات المقدرة لنموذج سعر الفائدة *Vasicek*باستخدام طريقة .GMM من خلال القيام بهذه الخطوات ، يمكن الحصول على نتائج المعلمة $.v = 0{,}6278$, $b = 3{,}7710$, $a = 0{,}6037$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Estimasi adalah proses yang menggunakan sampel (statistik) untuk memperkirakan hubungan parameter dengan populasi yang tidak diketahui. Estimasi juga merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan sampel. Dalam hal ini, peubah acak yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi, dengan estimasi ini, keadaan parameter populasi dapar diketahui (Hasan, 2002).

Estimasi disebutkan dalam suatu hadits Shahih Muslim:

"Hadist riwayat Ibnu Abbas r.as., ia berkata : Rasulullah SAW. melarang menjual pohon kurma sebelum ia memakan sebagian buahnya atau dimakan orang lain dan sebelum ditimbang. Aku bertanya: Apa yang dimaksud dengan ditimbang? Seorang lelaki yang berada di sebelahnya menjawab: Yaitu ditaksir (Shahih Muslim No.2833)"

Pada hadits tersebut disebutkan bahwa Rasulullah SAW. menganjurkan untuk memakan sebagian buah kurma sebelum ditimbang untuk dijual. Dalam hal ini yang dimaksud dengan ditimbang yaitu ditaksir atau diperkirakan. Sama halnya dengan istilah dalam matematika yaitu estimasi yang artinya memperkirakan.

Metode yang dapat digunakan untuk mengestimasi parameter diantaranya adalah metode *Generalized Method of Moments* (GMM). Metode GMM diperkenalkan oleh Hansen (1982) sebagai estimasi parameter yang meminimalkan bentuk kuadrat dari kondisi momen sampel yang terboboti (Taurif, dkk, 2014).

Tingkat suku bunga merupakan besar suku bunga bebas risiko yang diterbitkan oleh bank sentral. Biasanya suku bunga ini dapat dilihat dari suku bunga deposito satu tahun atau suku bunga yang digunakan untuk mendiskon harga obligasi tanpa kupon (*zero coupon bond)* dengan waktu jatuh tempo satu tahun. Oleh karena itu tingkat suku bunga selalu berubah-ubah dan perubahannya dipengaruhi oleh banyak faktor. Perubahan tingkat suku bunga dapat dimodelkan menjadi model suku bunga stokastik (Erlangga, 2016).

Sampai awal tahun 1990-an telah banyak model tingkat suku bunga stokastik yang diperkenalkan. Contoh model suku bunga stokastik yang sudah diperkenalkan antara lain model *Vasicek* oleh Oldrich *Vasicek* (1977). Model ini merupakan salah satu model matematika yang menjelaskan evolusi tingkat bunga dan termasuk dalam persamaan diferensial stokastik yang mampu menggambarkan fluktuasi pergerakan short-rate (tingkat suku bunga sesaat) dari yield obligasi selama masa obligasi (Manullang, 2012).

Beberapa penelitian tentang GMM telah dilakukan. Penelitian Taurif dkk. (2014) terkait GMM yang digunakan untuk mengestimasi model regresi logistik. Dalam penelitian tersebut, menyimpulkan bahwa hasil estimasi GMM untuk regresi logistik biner ditentukan pada kriteria nilai Odds ratio dan penerapan estimasi GMM lebih efisien untuk mengatasi masalah heteroskedastisitas.

Penelitian tentang GMM juga dilakukan oleh Wahyuni (2017). Dalam penelitian ini menggunakan GMM untuk mengestimasi model *Capital Assets*

Pricing dalam perhitungan Value at Risk. Hasil penelitian menunjukan bahwa model *Capital Assets Pricing* dapat diestimasi menggunakan GMM.

Penelitian selanjutnya tentang model suku bunga *Vasicek*, telah dilakukan oleh Yuda dkk. (2018) tentang perhitungan aktuaria manfaat pensiun-normal dengan model suku bunga *Vasicek*, yang menggunakan Metode *Entry Age Normal*. Dalam penelitian tersebut, menyimpulkan bahwa manfaat pensiun mengalami penurunan seiring dengan bertambahnya usia masuk kerja. Nilai iuran normal suku bunga konstan dan suku bunga *Vasicek* menggunakan metode *Entry Age Normal* (EAN) mengalami kenaikan ketika usia masuk kerja semakin bertambah. Sebaliknya nilai kewajiban aktuaria suku bunga konstan dan suku bunga *Vasicek* mengalami penurunan ketika usia masuk kerja semakin bertambah. Hasil tersebut juga menunjukkan bahwa iuran normal dan kewajiban aktuaria dengan menggunakan suku bunga *Vasicek* memiliki nilai lebih kecil dari pada iuran normal dan kewajiban aktuaria yang menggunakan suku bunga konstan.

Berdasarkan penelitian tersebut maka penelitian ini fokus untuk membahas tentang estimasi parameter model suku bunga *Vasicek* menggunakan GMM, dan implementasi data tingkat suku bunga Bank Indonesia.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut maka didapatkan rumusan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana bentuk estimasi parameter model suku bunga *Vasicek* menggunakan *Generalized Method of Moments ?*

2. Bagaimana hasil perhitungan estimasi parameter model suku bunga *Vasicek* menggunakan *Generalized Method of Moments* pada data tingkat suku bunga Bank Indonesia ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut maka didapatkan tujuan penelitian sebagai berikut :

1. Untuk mengetahui bentuk estimasi parameter model suku bunga *Vasicek* menggunakan *Generalized Method of Moments.*
2. Untuk mengetahui hasil perhitungan estimasi parameter model suku bunga *Vasicek* menggunakan *Generalized Method of Moments* pada data tingkat suku bunga Bank Indonesia

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan makalah ini adalah:

1. Sebagai tambahan informasi dan pengetahuan mengenai bentuk estimasi parameter model suku bunga *Vasicek* menggunakan *Generalized Method of Moments*.
2. Sebagai pengetahuan untuk mengetahui hasil perhitungan estimasi parameter model suku bunga *Vasicek* menggunakan *Generalized Method of Moments* pada data tingkat suku bunga Bank Indonesia.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah :

1. Bunga yang digunakan adalah bunga majemuk.
2. Data yang digunakan adalah data sekunder rata-rata tingkat suku bunga tahunan Bank Indonesia tahun 2006-2016.

1.6 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

BAB I : Pendahuluan

Meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II : Kajian pustaka.

Meliputi teori-teori yang berhubungan dengan pembahasan antara lain tingkat suku bunga, tingkat suku bunga stokastik, tingkat suku bunga model *Vasicek*, metode momen, *Generalized Method of Moments* dan beberapa definisi serta pengertian penting baik dalam segi matematika maupun segi keagamaan yang diambil dari berbagai literatur (buku, internet, jurnal, dan lain-lain) yang berkaitan dengan penelitian.

BAB III : Metode Penelitian

Meliputi pendekatan penelitian, jenis dan sumber data, serta metode analisis.

BAB IV : Pembahasan

Meliputi analisis literatur (teoritis) yang terdiri dari pembahasan proses estimasi parameter model suku bunga *Vasicek* dengan *Generalized Method of Moments.*

BAB V : Penutup.

Meliputi kesimpulan dan saran.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Menurut Finizio (1982) persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan-turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Meskipun disebut sebagai "persamaan turunan", namun istilah "persamaan diferensial" (*aequatio differentialis*) telah dikemukakan oleh Leibniz pada tahun 1676. Seperti contoh berikut:

$$y' + xy = 3 \tag{2. 1}$$

$$y'' + 5y' + 6y \tag{2. 2}$$

$$y'' = (1 + y'^2)(x^2 + y^2) \tag{2. 3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{2. 4}$$

Contoh (2. 1) – (2. 4) adalah persamaan-persamaan diferensial. Persamaan tersebut memuat suatu fungsi yang tidak diketahui y dan turunannya terhadap variabel bebas. Persamaan diferensial dapat dibagi menjadi persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa

Menurut kartono (2012) dengan memperhatikan banyaknya variabel bebas yang terlibat, Persamaan Diferensial Biasa (PDB)apabila ada satu variabel bebas yang terlibat. Bentuk umum PDB adalah

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{2.5}$$

Persamaan (2.5) menunjukkan bahwa terdapat hubungan antara variabel bebas x dan variabel terikat y beserta turunan-turunannya dalam bentuk himpunan persamaan yang secara identik sama dengan nol yang menyatakan model matematika dari fenomena perubahan yang terjadi. Sebuah persamaan diferensial disebut mempunyai orde n jika orde turunan tertinggi yang terlibat adalah n, sedangkan jika turunan dengan orde tertinggi itu berderajat k maka persamaan itu dinamakan persamaan diferensial berderajat k.

Dalam contoh persamaan (2. 1) - (2. 3) fungsi yang tidak diketahui adalah y dan fungsi satu peubah bebasnya adalah x, dengan $y = f(x)$. Argumen x dalam $f(x)$ beserta turunanya biasanya dihilangkan untuk menyederhanakan notasi. Simbol $y'' = f'(x)$ menunjukkan turunan pertama dan $y'' = f''(x)$ adalah turunan kedua dan seterusnya. Dikarenakan contoh (2. 1) - (2. 3) hanya memiliki satu peubah bebas, maka dikatakan PDB (Finizio, 1982).

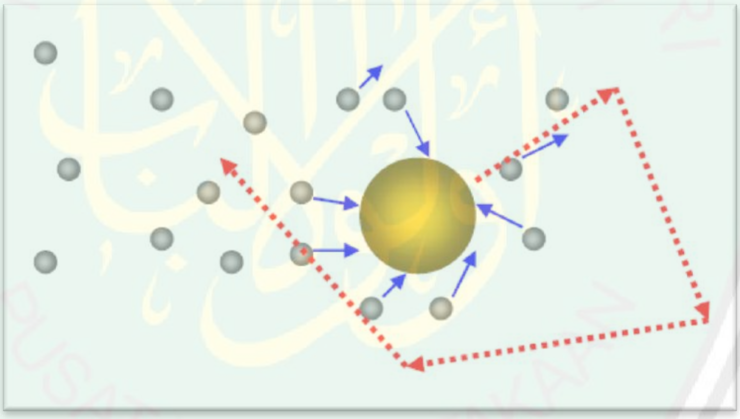
2.2 Stokastik

Pemanfaatan model yang menggunakan probabilitas lebih diminati dibanding model yang deterministik. Pengamatan dilakukan pada saat-saat yang berbeda, tidak dilakukan pada suatu periode waktu tertentu, sehingga menyangkut masalah probabilitas. Banyak fenomena fisika, sosial, teknik dan manajemen saat ini diselidiki merupakan fenomena yang random dengan suatu probabilitas. Proses Stokastik (*Stochastic Processes*) adalah himpunan variabel random yang merupakan fungsi dari "waktu" (*time*). Parameter "waktu" diartikan dalam arti luas. Proses stokastik sering juga disebut Proses Random (*Random Processes*) (Srinadi,2013).

2.2.1 Gerak *Brown*

Gerak *Brown* adalah gerak acak atau gerak terus-menerus dari partikel saat dimasukkan dalam suatu fluida (cair ataupun gas). Gerak ini dinamakan gerak *Brown* karena yang pertama kali mengamati adalah seorang botanis asal Skotlandia bernama Robert Brown pada tahun 1827. Menggunakan mikroskop, Brown menemukan gejala gerak acak saat mengamati partikel dari serbuk sari ketika dilarutkan dalam air dimana partikel menyebar ke segala arah dengan lintasan yang tidak teratur. Brown kemudian mengambil kesimpulan bahwa lintasan dari gerak partikel sangat tidak teratur dan gerakan akan semakin cepat bila temperatur dinaikkan (Taylor dan Karlin,1998).

Skema Gerak *Brown* ditunjukkan pada Gambar 2. 1 sebagai berikut:



Gambar 2. 1 Skema Gerak Brown

Setelah Brown, Seorang peneliti bernama Gouy melakukan eksperimen untuk membuktikan keberadaan gerak *Brown* dan mendapatkan kesimpulan sebagai berikut:

1. Gerakan ini sangat tidak teratur, gabungan dari translasi dan rotasi dan lintasannya nampak tidak mempunyai garis singgung.

2. Dua partikel nampak bergerak secara saling bebas, bahkan ketika mereka mendekati satu samalain dalam jarak yang lebih dekat dibandingkan diamete rmereka.
3. Gerakan ini semakin cepat untuk partikelyang semakin kecil.
4. Gerakan ini tidak dipengaruhi oleh komposisi dan rapatan partikel.
5. Gerakan ini semakin cepat dalam fluida yang viskositasnya semakin kecil.
6. Gerakan ini semakin cepat pada suhu yang semakin tinggi.
7. Gerakan ini tidak pernah berhenti.

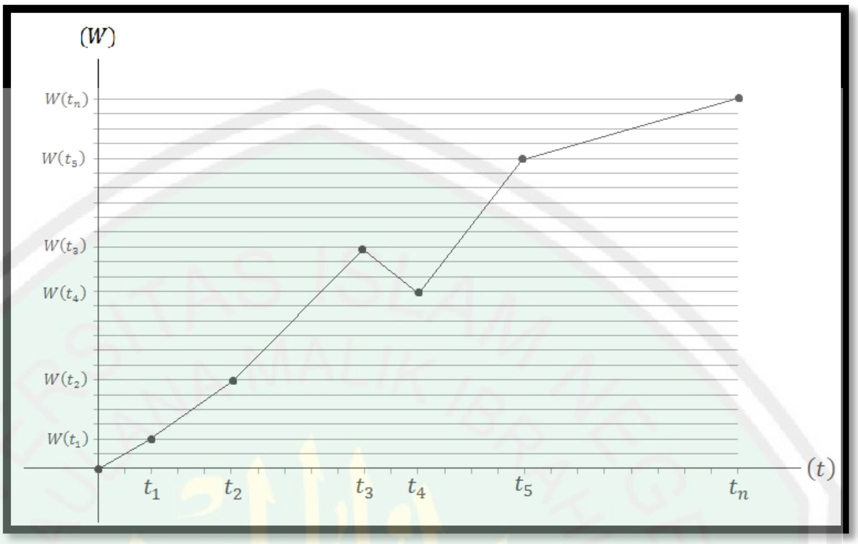
Penelitian dari kedua ilmuwan tersebut tidak memberikan penjelasan mengenai penyebab gerak *Brown* namun hanya menyatakan sifat-sifat gerak Brown tersebut. Penjelasan mengenai asal usul gerak *Brown* pertama kali dilakukan oleh Einstein. Melalui disertasinya. Einstein mengasumsikan bahwa gerak acak dari partikel-partikel serbuk sari tersebut berasal dari tumbukan molekul-molekul penyusun fluida yang bergerak terus-menerus dalam fluida dan pergerakan dari partikel serbuk sari sangat tidak teratur sehingga hanya dapat dijelaskan menggunakan konsep probabilistik (Taylor dan Karlin,1998).

2.2.2 Proses *Wiener*

Menurut Wiersema (2008) proses *Wiener* adalah bentuk dari proses stokastik pada waktu kontinu, terdefinisi pada ruang keadaan, tidak ada pengaruh gaya luar serta berangkat dari waktu dan posisi 0. Sesuai definisi diatas, proses stokastik $W(t)$disebut gerak Brown jika memenuhi:

1. $W(t) = 0$ untuk $t = 0$, maka $W(0) = 0$

2. $W(t)$ memiliki kenaikan yang independen, yakni untuk setiap $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n, W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ merupakan kumpulan peubah acak yang independen atau saling bebas.



Gambar 2. 2 Proses *Wiener*

Dari grafik diatas terlihat kenaikan yang dimiliki tidak selalu naik, kenaikan yang dimiliki grafik tersebet bersifat independen atau kenaikannya bebas sehingga bisa turun bisa saja naik.

3. Untuk setiap pergerakan atau kenaikan yang terjadi pada interval waktu dengan panjang $0 \leq t < t + dt$ hampir semua lintasan sampel dari $W(t + dt) - W(t) = dW(t)$ berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi sama dengan panjang interval waktu tersebut.

2.2.3 Proses Stokastik

Menurut Ross (2010) Sebuah proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ adalah kumpulan variabel acak. Yaitu, untuk setiap $t \in T, X(t)$ adalah variabel acak. t didefinisikan sebagai waktu. $X(t)$ didefinisikan sebagai proses pada waktu t.

Contoh untuk proses stokastik adalah $X(t)$ merupakan jumlah total pelanggan yang telah memasuki supermarket pada waktu t.

Himpunan T disebut himpunan indeks dari proses. Ketika T adalah himpunan yang dapat dihitung, maka proses stokastik dikatakan sebagai proses diskrit. Contoh, $\{X_n, n = 0,1,\dots\}$ adalah proses stokastik diskrit yang indeksnya oleh bilangan bulat non negatif. Ketika T adalah interval pada garisnya, maka proses stokastik dikatakan sebagai proses waktu kontinu. Contoh $\{X(t), t \geq 0\}$ adalah proses stokastik kontinu yang indeksnya oleh bilangan real non-negatif (Ross,2010)

Menurut Wiersema (2008) Sebuah proses stokastik $\{W(t), t \geq 1\}$ disebut sebagai proses *Wiener* jika memenuhi beberapa syarat, salah satunya yaitu fungsi kepadatan peluang dari variabel random yang berdistribusi normal, dengan rata-rata adalah μ dan variansi σ^2 adalah

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Kumpulan dari sebuah proses *Wiener* pada interval $[t, t + dt]$ berdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan variansi sama dengan panjang interval. Fungsi distribusi dari kenaikan tersebut ditulis sebagai berikut:

$$P[W(t + dt) - W(t) \leq a] = \int_{x=-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{dt}\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{dt}}\right)^2\right] dx$$

Kovarians dari proses *Wiener* pada waktu s dan t dimana $s < t$ merupakan nilai harapan dari variabel random tersebut, yaitu:

$$Cov[W(s), W(t)] = E[\{W(s) - E[W(s)]\}\{W(t) - E[W(t)]\}]$$

Jika mengikuti syarat dari proses *Wiener* nilai dari $E[W(s)]$ dan $E[W(t)]$ adalah 0, sehingga

$$Cov[W(s), W(t)] = E[W(s)W(t)]$$

Dengan sedikit modifikasi pada $W(t)$ maka dapat ditulis:

$$W(t) = W(s) + \{W(t) — W(s)\}$$

maka

$$\begin{aligned}
E[W(s)W(t)] &= Cov(W(s)W(t)) \\
&= E[\{W(s) - E(W(s))\}\{W(t) - E(W(t))\}] \\
&= E[\{W(s) - E(W(s))\}\{W(s) + (W(t) - W(s)) \\
&\qquad - E(W(s) + (W(t) - W(s))\}] \\
&= E[W(s)^2 + (W(s)W(b) - W(s)^2) - E(W(s)^2 \\
&\qquad + (W(s)W(b) - W(s)^2) - E(W(s)^2 \\
&\qquad + E(W(s)W(t) - W(s)^2) \\
&\qquad + (E\big(W(s)\big)^2 + E(W(s)W(t) \\
&\qquad - W(s)^2)] \\
&= E[W(s)^2 + (W(s)W(t) - W(s)^2) - 0] \\
&= E[W(s)^2 + (W(s)W(b) - W(s)^2)]
\end{aligned}$$

Apabila $t < s$ maka $E[W(s)W(t)] = t$ untuk sembarang waktu s dan t sehingga ditulis

$$E[W(s)W(t)] = \min(s, t)$$

2.2.4 Proses Ito

Jenis selanjutnya dari proses stokastik dikenal dengan proses ito. Proses ito adalah proses wiener umum dimana parameter c dan d adalah fungsi-fungsi dari nilai variabel yang bersangkutan x dan t, yaitu (Hull, 1946) :

$$dx = c(x,t)dt + d(x,t)dW(t)$$

Baik laju drift maupun laju variansi dari proses ito dapat berubah dari waktu ke waktu. Dalam interval waktu yang kecilantara$t$ dan $t + \Delta t$, variabelnya berubah dari x ke $x + \Delta x$, dimana

$$\Delta x = c(x,t)\Delta t + d(x,t)\epsilon\sqrt{\Delta t} \quad (2.6)$$

Hubungan ini melibatkan perkiraan yang kecil. Diasumsikan bahwa laju drift dan laju variansi x tetap konstan, nilai-nilainya sama padawaktu t, selama interval waktu antara t dan $t + \Delta t$ (Hull, 1946).

Menurut Øksendal (2000) bentuk umum dari persamaan diferensial stokastik adalah sebagai berikut:

$$dX(t) = d(t, X(t))dt + v(t, X(t))dWt$$

Atau bisa juga ditulis dalam bentuk integral stokastik

$$\int_0^t dX(t) = \int_0^t d(s, X(s))ds + \int_0^t v(s, X(s))dWs$$

$$X(t) - X(0) = \int_0^t d(s, X(s))ds + \int_0^t v(s, X(s))dWs$$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t d(s, X(s))ds + \int_0^t v(s, X(s))dWs$$

Dalam matematika, terdapat istilah Ito Isometri, yaitu fakta penting tentang integral stokastik Ito . Salah satu aplikasi utamanya adalah untuk memungkinkan penghitungan varian untuk variabel acak yang diberikan sebagai Ito integral. Terdapat $W: [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ menunjukkan proses *Wiener* bernilai real kanonik yang ditentukan hingga waktu $T > 0$, dan terdapat $X: [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ menjadi proses stokastik yang disesuaikan dengan filtrasi alami dari Proses *Wiener*. Ito Isometri dirumuskan sebagai berikut :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X(t)\, dW(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T X(t)^2\, dt\right]$$

dimana $\mathbb{E}$ menunjukkan ekspektasi sehubungan dengan ukuran *Wiener* klasik (Øksendal, 2000).

2.2.5 Proses *Ornstein-Uhlenbeck*

Menurut Carmona dan Tehranchi (2005), proses *Ornstein-Uhlenbeck* (OU) satu dimensi didefinisikan sebagai solusi persamaan diferensial stokastik sebagai berikut :

$$dX(t) = -aX(t)dt + vdW(t) \tag{2.7}$$

dimana a dan v adalah bilangan real, serta $\{W(t)\}\ t \geq 0$ adalah Proses *Wiener* satu dimensi. Koefisien a yang muncul dalam drift tersebut sering diasumsikan bernilai positif, karena drift a pada akhirnya akan kembali menuju rata-rata $X(t)$. Kondisi awal, $X(0)$, diasumsikan bergantung pada pergerakan proses *Wiener*. Karena persamaan (2.7) merupakan persamaan diferensial linier yang berbentuk $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, dengan P dan Q fungsi x atau konstanta, maka persamaan tersebut dapat dicari solusinya dengan menggunakan faktor integrasi $e^{\int Pdx}$.

Persamaan (2.7) dapat ditulis dalam bentuk

$$dX(t) + aX(t)dt = vdW(t) \tag{2. 8}$$

Dari persamaan (2. 8) diperoleh $P = a$, dan $Q = v$, maka

$$X(t) = e^{-\int Pdt} \int Qe^{\int Pdt}\, dW(t) + ce^{-\int Pdt}$$

$$X(t) = e^{-\int adt} \int ve^{\int \kappa dt}\, dW(t) + ce^{-\int adt}$$

$$X(t) = e^{-at} \int ve^{at}\, dW(t) + ce^{-at}$$

$$X(t) = e^{-at} \int_0^t ve^{as}\, dW(s) + ce^{-at}$$

$$X(t) = ce^{-at} + v \int_0^t e^{-(t-s)a}\ dW(s)$$

atau dapat ditulis dalam bentuk,

$$X(t) = e^{-ta} + v \int_0^t e^{-(t-s)a} dW(s), \quad 0 \leq t < +\infty$$

Solusi untuk rata-rata dan kovariansi adalah sebagai berikut :

$$E\{X(t)\} = e^{-ta} E\{X(0)\}$$

$$cov\{X(s), X(t)\} = \left[var\{X(0) + \frac{v^2}{2a}(e^{2(s+t)} - 1)\right] e^{-(s+t)a}$$

Perhatikan bahwa $X(t)$ adalah proses Gaussian, dan setiap $X(0)$ adalah Gaussian. Solusi dari proses Gaussian adalah proses Markov.

2.3 Analisis Regresi

Analisis regresi merupakan studi kasus yang berkaitan dengan variabel terikat dan satu atau lebih variabel bebas dengan tujuan untuk mengetahui pengaruhnya. Dengan cara memperkirakan atau memprediksi rata-rata suatu populasi dalam pengambilan sampel yang berulang (Gujarati, 2004). Adapun pembagian model regresi salah satunya regresi linier.

Regresi linier yaitu terdapat satu variabel terikat (Y) dan satu atau lebih variabel bebas (X). Dalam model ini digunakan untuk mengetahui pengaruh antara variabel terikat dan variabel bebasnya. Adapun pembagian regresi linier sebagai berikut (Gujarati, 2004):

a. Regresi Linier Sederhana

Regresi yang paling dasar adalah model regresi linier sederhana yang diberikan dalam bentuk sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + e_i \tag{2. 9}$$

dimana:

Y_i = Variabel terikat priode ke - i

β_1 = Intersep (titik potong kurva terhadap sumbu Y)

β_2 = Koefisien kemiringan (*slope*)

X_i = Variabel bebas periode ke- i

e_i = $error(e_i \sim N(0, \sigma^2))$

n = banyak data penelitian

Untuk $i = 1,2,3 \dots n$, sehingga diperoleh:

$$\begin{matrix} Y_1 = \beta_1 & + \beta_2 X_1 & + e_1 \\ Y_2 = \beta_1 & + \beta_2 X_2 & + e_2 \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_n = \beta_1 & + \beta_2 X_n & + e_n \end{matrix}$$

Kemudian dinotasikan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

Dari bentuk matriks tersebut diperoleh bentuk sederhana:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x\beta} + \boldsymbol{e}$$

dimana:

$\boldsymbol{y}$ = vektor kolom dari variabel terikat Y

$\boldsymbol{x}$ = matriks data dari banyak pengamatan n

$\boldsymbol{\beta}$ = vektor kolom dari parameter yang belum diketahui β_1 sampai β_n

$\boldsymbol{e}$ = vektor kolom dari *error*

b. Regresi Linier Berganda

Regresi linier berganda merupakan bentuk persamaan yang digunakan untuk menunjukkan pengaruh antara satu variabel terikat (Y) dan satu atau lebih variabel bebas (X). Dengan rumus sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \cdots + \beta_k X_{ki} + e_i$$

dimana:

Y_i = Variabel terikat peride ke-*i*

β_1 = intersep

$\beta_{2,} \ldots . \beta_k$ = Koefisien regresi

$X_2, \ldots . X_k$ = Variabel bebas periode ke-*i*

e_i = error ($e_i \sim N(0, \sigma^2)$)

n = banyak data penelitian

k = index dari variabel bebas

Untuk $i = 1,2,3 \ldots n$, sehingga diperoleh:

$$\begin{gathered} Y_1 = \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \cdots + \beta_k X_{k1} + e_1 \\ Y_2 = \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \cdots + \beta_k X_{k2} + e_2 \\ \vdots \\ Y_n = \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \cdots + \beta_k X_{kn} + e_n \end{gathered}$$

Kemudian dinotasikan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & \ldots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & \ldots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

Dari bentuk matriks tersebut diperoleh bentuk sederhana:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x\beta} + \boldsymbol{e}$$

dimana:

$\boldsymbol{y}$ = vektor kolom dari variabel terikat Y

$\boldsymbol{x}$ = matriks data dari banyak pengamatan n pada index $k-1$ pada variabel X_2 sampai X_k

$\boldsymbol{\beta}$ = vektor kolom dari parameter yang belum diketahui β_1 sampai β_n

$\boldsymbol{e}$ = vektor kolom dari *error*

2.4 Estimasi

2.4.1 Pengertian Estimasi dan Estimator

Estimasi adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Estimasi merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan informasi dari sampel, dalam hal ini sampel random, yang diambil dari populasi bersangkutan. Jadi dengan estimasi itu, keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002).

Estimator adalah suatu nilai statistika (harga sampel) yang digunakan untuk menduga suatu parameter. Dengan estimator, dapat diketahui seberapa jauh suatu parameter populasi yang tidak diketahui berada di sekitar sampel (statistik sampel). Secara umum, parameter diberi lambang θ (dibaca: *theta*) dan estimator diberi lambang $\hat{\theta}$ (dibaca: *theta* topi atau *theta cap*). Untuk lebih jelasnya perhatikan tabel berikut ini:

Tabel 2. 1 Parameter dan Estimatornya

Parameter (θ)	Estimator ($\hat{\theta}$)
μ (rata-rata populasi)	$\bar{X}$ atau$\hat{\mu}$
P (populasi/presentase)	$\hat{p}$
σ^2 (variansi)	S^2 atau $\hat{S}^2$
σ (simpangan baku)	S atau $\hat{S}$
ρ (parameter korelasi)	ρ atau $\hat{r}$
β (parameter regresi)	β atau $\hat{b}$

Selain penduga parameter, dikenal juga parameter statistik, yaitu nilai-nilai atau angka yang diperoleh dari penduga prameter. Karena penduga merupakan fungsi dari nilai-nilai sampel, maka penduga termasuk variabel random dan memiliki distribusi *sampling* (distribusi pemilihan sampel) (Hasan, 2002).

2.4.2 Sifat-Sifat Estimator

Terdapat beberapa sifat untuk menentukan apakah sebuah penduga tergolong baik atau tidak. Suatu penduga dikatakan baik apabila memiliki sifat berikut:

a. Tak Bias (*Unbiased*)

Estimator tidak bias jika, untuk setiap ukuran sampel n, nilai rata-rata estimator atas semua sampel yang mungkin adalah nilai parameter populasi. Semua estimator adalah jumlah acak. Untuk beberapa sampel, penaksir akan terlalu besar, dan untuk sampel lain, penaksir yang sama akan terlalu kecil. Rata-rata estimator yang tidak bias akan tepat.

Misalkan T adalah statistik sampel, digunakan sebagai penduga untuk parameter populasi θ, jadi $\hat{\theta} = T$. Bias dari estimator T adalah $E[T] - \theta$, yang merupakan nilai rata-rata yang diharapkan dari parameter populasi θ. Estimator T dikatakan tidak bias jika $E[T] = \theta$ (Sleeper, 2006).

b. Konsisten

Estimator konsisten jika seiring n bertambah besar, penaksiran mendekati nilai parameter populasi sebenarnya. Jika sampel ukuran tak terbatas dapat dianalisis, penaksir yang konsisten akan memberikan nilai parameter populasi yang tepat, sedangkan penaksir yang tidak konsisten tidak akan memberikan nilai parameter populasi yang tepat.

Misalkan sampel ukuran n dipilih dari suatu populasi. θ menjadi parameter populasi, dan T_n menjadi penaksir θ berdasarkan sampel ukuran n. T_n membentuk urutan penaksir saat n bertambah besar. Urutan estimator T_n dikatakan konsisten jika untuk setiap nilai $a > 0$ (a adalah urutan estimator) untuk setiap kemungkinan θ. $P[|T_n - \theta| > a] \rightarrow 0$ dengan $n \rightarrow \infty$ (Sleeper, 2006).

2.4.3 Metode Momen

Metode Momen berasal dari estimasi momen pertama distribusi dengan mengasumsikan distribusi suatu populasi memiliki nilai rata-rata dan variansi sama dengan 1. Metode Momen merupakan salah satu metode yang digunakan untuk memperoleh suatu *estimator* untuk parameter β dengan ide dasar berupa penyamakan antara momen-momen populasi dengan momen-momen sampel (Taurif dkk., 2014).

Momen pertama dari suatu populasi dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$E(X) = \Sigma\, x\, p(x) \tag{2. 10}$$

Sedangkan momen keduanya dinyatakan dengan menguadratkan nilai X pada persamaan $E(X^2) = \Sigma x^2\, p(x)$. Selanjutnya nilai variansi dari X dinyatakan dalam persamaan berikut (Davidson dan MacKinnon, 1999):

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \tag{2. 11}$$

Metode estimasi tertua yang dikenalkan oleh Pearson (1895) adalah Metode Momen. Momen yang dimaksud adalah nilai ekspektasi suatu produk seperti mean, varians, atau median. Metode momen melibatkan penggantian kondisi momen populasi dengan kondisi momen sampel. Kondisi momen populasi didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1 Misalkan β adalah vektor parameter $K \times 1$, maka $g(\beta_0)$ adalah vektor kondisi momen $R \times 1$ yang didefinisikan sebagai:

$$g(\beta_0) = E[f(R_t, \beta_0)] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f(R_t, \beta_0) = 0 \tag{2. 12}$$

Dengan R_t merupakan seluruh data yang diamati. Oleh karena tidak memungkinkan untuk mengestimasi seluruh populasi data, maka fungsi kondisi momen dianalogkan ke dalam fungsi momen sampel (Nielsen, 2005).

Definisi 2.2 Kondisi momen sampel didefinisikan sebagai berikut:

$$g_T(\beta) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} g(\beta) \tag{2. 13}$$

dengan $g(\beta)$ disebut sebagai fungsi momen sampel. Kondisi momen sampel inilah yang akan digunakan untuk mengestimasi parameter β (Nielsen, 2005).

Dari persamaan (2. 12) maka metode momen didefinisikan sebagai:

$$g_T(\hat{\beta}) = E[z_t, \varepsilon_t] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t, \varepsilon_t = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t\left(R_t - X_t\hat{\beta}\right) = 0$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t R_t - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t X_t \hat{\beta} = 0$$

akan diperoleh solusi yang tunggal yaitu:

$$\hat{\beta} = \frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{T} z_t X_t\right)^{-1} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t R_t = \hat{\beta}_{MM} \tag{2. 14}$$

dengan $\hat{\beta}_{MM}$ disebut *estimator* Metode Momen. Solusi ini identik dengan *estimator Least Square.*

2.4.4 *Generalized Method of Moment* (GMM)

Generalized Method of Moment (GMM) merupakan metode penaksiran parameter perluasan dari metode momen. Metode momen tidak dapat digunakan apabila banyaknya variabel instrumen lebih besar dibandingkan dengan jumlah parameter yang akan ditaksir. GMM menyamakan momen kondisi dari populasi dengan momen kondisi dari sampel. Metode GMM merupakan salah satu metode yang dapat mengatasi kondisi data dengan pelanggaran asumsi-asumsi pada analisis regresi. GMM didapat dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat terboboti dari momen kondisi sampel (Taurif dkk, 2014).

Asumsi mendasar dari GMM yaitu menformulasikan himpunan dari momen kondisi. Anggap bahwa vektor parameter β memuat p parameter yang tidak diketahui dan *Data Generating Precess* (DGP) dengan parameter β_0. Anggap bahwa setiap observasi $(t = 1, \dots, T)$ DGP memenuhi m momen kondisi yang berbeda, yaitu:

$$E[g_t(\beta_0)] = 0. t = 1. \dots . T \tag{2. 15}$$

Dengan g_t adalah fungsi yang diketahui $g_t: R^{-} \to R^{m}$ yang tergantung pada data yang telah diobservasi. Asumsi krusial yakni bahwa DGP memenuhi m perbedaan pada (2. 15) untuk setiap observasi $t = 1. \dots . T$. Jika jumlah momen kondisi m sama dengan jumlah parameter yang tidak diketahui *(p)* pada β, maka persamaan (2. 15) disebut *exactly identified*, dan jika $m > p$ maka persamaan (2. 15) disebut *over-identified. Estimator* GMM $\hat{\beta}$ didefinisikan sebagai solusi dari m persamaan yang diperoleh dengan mengganti populasi rata-rata E pada (2. 15) dengan sampel rata-rata yaitu:

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} g_T(\hat{\beta}) = 0 \qquad (2.\ 16)$$

Untuk memperoleh solusi dari $\hat{\beta}$, secara umum perlu diketahui setidaknya ada banyak momen kondisi karena ada parameter yang tidak diketahui $m \geq p$. Pada kasus *exactly identified* (tepat teridentifikasi) yaitu $m = p$, sistem persamaan m ini pada p (parameter yang tidak diketahui) memiliki solusi tunggal (dibawah kondisi yang cocok). Pada kasus *over-identified* ($m > p$), ada banyak persamaan dari pada parameter yang tidak diketahui dan akan tidak ada atau lebih sulit untuk menemukan solusi eksak untuk sistem persamaan ini (Nielson, 2005).

Pada kasus *over-identified* ini, didefinisikan suatu pembobot $\widehat{W}$, yaitu suatu matriks simetri berukuran $L \times L$ yang bukan fungsi dari β dengan notasi sebagai berikut: (Taurif, 2014)

$$\boldsymbol{Q}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \overline{\boldsymbol{g}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})'\widehat{\boldsymbol{W}}\overline{\boldsymbol{g}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) \qquad (2.\ 17)$$

dengan mengacu pada model regresi

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2.\ 18)$$

dan diasumsikan model regresi tersebut mengandung variabel instrumen Z, maka momen kondisi dari sampelnya yaitu:

$$\bar{g}(\hat{\beta}) = T^{-1}(Z'R - Z'X\hat{\beta}) \qquad (2.\ 19)$$

dengan T = jumlah observasi, Z = vektor instrumen dan Z' Transpos Z.

Estimasi GMM untuk β merupakan suatu estimasi $\hat{\beta}$ yang meminimumkan fungsi jumlah kuadrat error dari data regresi yang berbobot, disimbulkan dengan $Q(\hat{\beta})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
Q(\hat{\beta}) &= \bar{g}(\hat{\beta})'\widehat{W}\bar{g}(\hat{\beta}) \\
&= \left(T^{-1}(Z'R - Z'X\hat{\beta})\right)' \widehat{W} \left(T^{-1}(Z'R - Z'X\hat{\beta})\right) \\
&= \left(T^{-1}(Z'R - Z'X\hat{\beta})\right)' \widehat{W} \left(T^{-1}(Z'R - Z'X\hat{\beta})\right) \\
&= \left(T^{-1}(R'Z - \hat{\beta}'XZ)\right)\left(T^{-1}(Z'R - Z'X\hat{\beta})\right)\widehat{W} \\
&= (T^{-1}R'Z\widehat{W}Z'R - T^{-1}\hat{\beta}'XZ\widehat{W}Z'R - T^{-1}Z'R\widehat{W}Z'X\hat{\beta} + \\
&\quad T^{-1}\hat{\beta}'XZWZ'X\hat{\beta})
\end{aligned}$$

Dengan menyamakan dengan nol diperoleh:

$$\begin{aligned}
0 &= -2(T^{-1})X'Z\widehat{W}Z'R + 2(T^{-1})X'Z\widehat{W}Z'X\hat{\beta} \\
2(T^{-1})X'Z\widehat{W}Z'R &= 2(T^{-1})X'Z\widehat{W}Z'X\hat{\beta} \\
X'Z\widehat{W}Z'R &= X'Z\widehat{W}Z'X\hat{\beta} \qquad (2.\ 20)
\end{aligned}$$

Inilah yang dinamakan sebagai persamaan normal, dan persamaan (2.20) tersebut dikalikan dengan $\left(X'Z\widehat{W}Z'X\right)^{-1}$ pada masing-masing ruas sehingga diperoleh:

$$\hat{\beta}_{GMM} = \left(X'Z\widehat{W}Z'X\right)^{-1} X'Z\widehat{W}Z'R \qquad (2.\ 21)$$

Yang disebut sebagai *Generalized Method of Moments Estimator* (Nielsen, 2005)

2.5 Tingkat Suku Bunga

Pengertian tingkat suku bunga *(interest rate)* menurut Samuelson dan Nordhaus (1995) adalah sebagai berikut:

"The interest rate is the amount of interest paid per unit of time. In other words, people must pay for the opportunity to borrow money. The cost of borrowing money, measured in dollar per year per dollar borrowed, is the interest rate".

Tingkat suku bunga adalah jumlah dari tingkat pembayaran per unit tiap waktu. Dengan kata lain seseorang harus membayar sesuai dengan berapa banyaknya uang yang dipinjam. Banyaknya uang yang dipinjam ini diukur atau diasumsikan salam nilai dollar. Sehingga jumlah yang dipinjam ini akan diakumulasikan dalam dollar tiap tahunnya.

Menurut Keynes dalam Kuncoro (2001), menyatakan bahwa tingkat bunga terjadi karena adanya permintaan dan penawaran akan uang dari masyarakat, sedangkan perubahan naik-turunnya tingkat suku bunga mempengaruhi keinginan untuk mengadakan investasi, misalnya pada surat berharga, dimana harga dapat naik atau turun tergantung pada tingkat bunga (bila tingkat bunga naik maka surat berharga turun dan sebaliknya), sehingga ada kemungkinan pemegang surat berharga akan menderita *capital loss* atau *gain*.

2.5.1 Suku Bunga Stokastik

Sehubungan dengan tingkat suku bunga, selama ini perhitungan premi dilakukan dengan menggunakan suku bunga tetap, sedangkan berdasarkan kenyataan yang ada suku bunga selalu berubah-ubah secara tidak menentu dalam periode tertentu karena berbagai faktor yang memengaruhinya yang disebut sebagai suku bunga stokastik (Zeytun dan Gupta, 2007).

Menurut Hull (1946), terdapat beberapa model suku bunga stokastik, diantaranya yaitu model keseimbangan. Model keseimbangan pada umumnya dimulai dengan asumsi tentang variabel ekonomi dan proses penurunan bunga jangka pendek, r. Model keseimbangan tersebut kemudian dikembangkandan diimplikasikan untuk menentukan harga *bond* dan harga opsi. Pada umumnya proses-proses dengan resiko netral dijelaskan sebagai proses Ito dalam bentuk :

$$dr = m(r)dt + s(r)dW \tag{2.22}$$

Secara singkat, drift m, dan standar deviasi s, diasumsikan menjadi fungsi terhadap r. Persamaan umum (2.22) terus dikembangkan, sehingga didapatkan beberapa model suku bunga yaitu :

$m(r) = a(b - r); s(r) = v$ (Model *Vasicek*)

$m(r) = a(b - r); s(r) = v\sqrt{r}$ (Model Cox Ingersoll Ross)

2.5.2 Suku Bunga *Vasicek*

Menurut Zeytun dan Gupta (2007), model *Vasicek* adalah suatu metode pemodelan terhadap pergerakan suku bunga sebagai nilai risiko pasar, dimana terdapat r yang diasumsikan mengikuti proses OU dan berubah sebagai fungsi terhadap waktu dengan koefisien konstan. Persamaan model suku bunga *Vasicek* adalah sebagai berikut :

$$dr(t) = a\big(b - r(t)\big)dt + vdW(t), \quad r(0) = r_0 \tag{2. 23}$$

dimana :

r : suku bunga

a : kelajuan r menuju level b

b : level rata-rata (*reversion level*)

v : suku difusi (simpangan baku sesaat dari r)

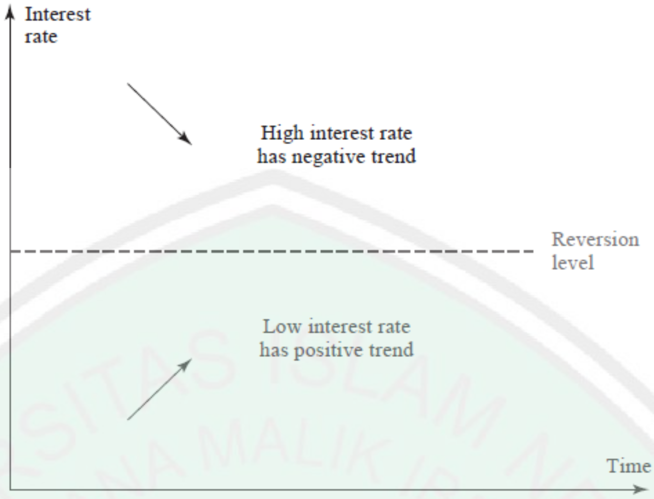
$W(t)$: gerak *Brown*

serta r_0, a, b dan v tersebut merupakan konstanta positif.

Hal terpenting dari model ini adalah *mean reversion*, yaitu suatu kecenderungan nilai $r(t)$ berada disekitar level rata-rata atau dapat dikatakan bahwa tingkat suku bunga bergerak dalam range terbatas. Sebagai ilustrasi jikatingkat suku bunga lebih besar dari rata-rata jangka panjang $(r > b)$, maka koefisien $a(> 0)$ membuat drift akan bernilai negatif, sehingga laju tingkat suku bunga akan ditarikturun searah dengan b. Demikian pula jika tingkat suku bunga lebih kecil dari rata-rata jangka panjang $(r < b)$, maka koefisien $a(> 0)$ membuat drift menjadi positif, sehingga laju tingkat suku bunga akan ditarik ke atas searah dengan b. Oleh karena itu, koefisien $a$adalah kecepatan penyesuaian tingkat suku bunga menuju level rata-rata.

Sebuah argumentasi ekonomi yang mendukung mengenai *mean reversion* menyatakan bahwa ketika suku bunga tinggi, ekonomi cenderung melambat dan mengakibatkan rendahnya permintaan dana dari peminjam. Oleh karena itu, suku bunga akan ditarik kembali ke nilai keseimbangannya. Sebaliknya, ketika suku bunga rendah, akan terjadi kecenderungan naiknya permintaan dana dari peminjam. Teori *mean reversion* sangat tepat untuk menggambarkan tingkat suku bunga, karena jika tanpa teori tersebut, pergerakan suku bunga dapat meningkat secara permanen seperti halnya harga saham, yang di dalam kehidupan nyata seharusnya tingkat suku bunga bergerak secara tidak permanen (dapat naik ataupun turun dalam periode tertentu). (Zeytun dan Gupta, 2007) .

Teori *mean reversion* ditunjukkan pada Gambar 2. 3 sebagai berikut, (Hull, 1946) :



Gambar 2. 3 *Mean Reversion*

Menurut Zeytun dan Gupta (2007), hal menarik lainnya dari model *Vasicek* adalah ketersediaan solusi bentuk tertutup untuk $r(t)$ yang diperoleh dengan mengintegralkan persamaan risiko-netral. Salah satu konsekuensi dari tingkat suku bunga yang terdistribusi normal adalah kemungkinan tingkat suku bunga tersebut menjadi negatif. Namun, dengan $t \to \infty$, limit dari ekspektasi tingkat suku bunga konvergen terhadap b dan variansi konvergen terhadap $v^2/2a$, dimana $a > 0$.

2.6 Kajian nilai Al-Quran tentang Estimasi

Al-Quran adalah sumber dari segala macam ilmu. Salah satu contoh ayat al-Quran tentang Estimasi yaitu terdapat pada surat As-Shaffat ayat 147, yang artinya:

"Dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih." (Q.S. As-Shaffat 37:147).

Asbabun nuzul pada ayat ayat diatas adalah menceritakan tentang kisah nabi Yunus saat diancam akan disiksa oleh kaumnya, maka dia keluar dari kalangan mereka sebelum mendapat perintah dari Allah SWT untuk hijrah. Lalu dia naik kapal, namun kapal itu tidak dapat berjalan dan para awak kapal menyangka bahwa apabila memuat seorang budak yang melarikan diri, maka kapal tidak dapat berjalan. Oleh karena itu mereka melakukan undian dan ternyata undian keluar untuk Yunus, maka dilemparlah dirinya kedalam air (Al-Maraghi, 2010).

Menurut Abdussakir (2007), ayat diatas menjelaskan bahwa nabi Yunus diutus kepada umatnya yang berjumlah 100.000 orang atau lebih. Jika membaca ayat tersebut secara seksama, maka terdapat rasa atau kesan ketidakpastian dalam menentukan jumlah umat nabi Yunus. Mengapa harus menyatakan 100.000 atau lebih dan tidak menyatakan dengan jumlah yang sebenarnya. Bukankah Allah SWT maha mengetahui segala sesuatu, dan tidak ada sesuatu pun yang menandingi kekuasaanNya.

.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Pendekatan Penelitian

Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan literatur dan kuantitatif. Pendekatan literatur dilakukan dengan cara mengkaji buku-buku yang berkaitan dengan penelitian. Studi kasus digunakan untuk mengimplementasikan tingkat suku Bank Indonesia.

3.2 Jenis dan Sumber Data

Sumber data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder. Data tersebut diambil dari https://mjurnal.com/data-bi-rate-lengkap/ yang merupakan data tingkat suku bunga Bank Indonesia dari tahun 2006-2016.

3.3 Metode Analisis

Langkah–langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengestimasi parameter model *Vasicek* menggunakan GMM:
   a. Menentukan solusi rekursif dari model suku bunga *Vasicek*.
   b. Mengubah persamaan pada solusi rekursif kedalam model regresi.
   c. Mengubah model regresi menjadi bentuk matriks.
   d. Mengestimasi menggunakan GMM
2. Melakukan implementasi data suku bunga Bank Indonesia sebagai berikut:
   a. Mengumpulkan data tingkat bunga bank Indonesia tahun 2006-2016

b. Menentukan statistika deskriptif pada data Suku Bunga Bank Indonesia tahun 2006-2016
c. Melakukan uji normalitas
d. Melakukan perhitungan pendugaan parameter model suku bunga *Vasicek* pada suku bunga Bank Indonesia menggunakan GMM

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Estimasi Paramater Model Suku Bunga *Vasicek* dengan GMM

4.1.1 Penentuan Solusi Rekursif Model Suku Bunga *Vasicek*

Model suku bunga *Vasicek* merupakan contoh dari Proses *Ornstein Uhlenbeck* (OU). Maka dari itu perlu dicari solusi rekursif dari persamaan model *Vasicek* tersebut. Dengan mengikuti Proses OU, maka solusi dapat dicari dengan cara mengalikan $X(t)$ dengan fungsi eksponensial $e^{\kappa t}$. Berdasarkan model suku bunga *Vasicek* pada (2. 23) misalkan,

$$X(t) = r(t) - b \tag{4. 1}$$

dan

$$Y(t) = uv = e^{at}X(t) \tag{4. 2}$$

maka diperoleh turunannya sebagai berikut :

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(uv)$$

$$= \frac{du}{dt}v + \frac{dv}{dt}u$$

$$dY(t) = du(v) + u(dv)$$

$$= ae^{at}\, X(t) + e^{at}\, dX(t) \tag{4. 3}$$

dengan mengikuti persamaan pada Proses OU, maka persamaan (2.7) disubstitusikan kedalam persamaan (4. 3) sebagai berikut :

$$dY(t) = ae^{at}\, X(t) + e^{at}[-aX(t)dt + vdW(t)]$$

$$= ae^{at}\, X(t) - ae^{at}\, X(t) + e^{at} vdW(t)$$

$$= e^{at} v dW(t) \tag{4. 4}$$

sehingga dapat dicari solusi dari $Y(t)$ dengan cara mengintegralkan ruas kanan dan ruas kiri pada persamaan (4. 4), dengan memberi batas $0 \leq s \leq t$

$$\int dY(t) = \int e^{at} v dW(t)$$

$$Y(t) = Y(0) + \int_{o}^{t} e^{as} v dW(s) \tag{4. 5}$$

dari (4. 2), ketika $t = 0$ maka

$$Y(0) = e^{a.0} X(0)$$

$$Y(0) = X(0) \tag{4. 6}$$

dari (4.2), (4.5) dan (4.6) diperoleh :

$$e^{at} X(t) = X(0) + \int_{o}^{t} e^{as} v dW(s)$$

$$X(t) = e^{-at} \left(X(0) + \int_{o}^{t} e^{as} v dW(s) \right) \tag{4. 7}$$

persamaan (4. 1) disubstitusikan ke (4. **7)** sehingga diperoleh solusi : $r(t) - b = e^{-at} \left(X(0) + \int_{o}^{t} e^{as} v dW(s) \right)$

$$r(t) = e^{-at}(r(0) - b) + v e^{-at} \int_{o}^{t} e^{as} dW(s) + b$$

$$= e^{-at}(r(0) - b) + v \int_{o}^{t} e^{-a(t-s)} dW(s) + b$$

$$= e^{-at} r(0) + b(1 - e^{-at}) + v \int_{o}^{t} e^{-v(t-s)} dW(s) \tag{4. 8}$$

sehingga solusi untuk mode suku bunga *Vasicek* pada setiap $s \leq t$ adalah

$$r(t) = r(0)e^{-a(t-s)} + b\left(1 - e^{-a(t-s)}\right) + v\int_{s}^{t} e^{-a(t-u)}dW(u) \quad (4.\,9)$$

4.1.2 Solusi Rekursif Model Regresi

Untuk mensimulasikan r pada waktu $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, persamaan (4. 9) didiskritisasi menggunakan model euler, yaitu:

$$y_{i+1} = y_i + y_i'\Delta x$$

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$$

sehingga diperoleh

$$dr(t) = a\big(b - r(t)\big)dt + vdW(t)$$

$$\frac{r(t_{i+1}) - r(t_i)}{\Delta t} = a\big(b - r(t)\big)dt + vdW(t)$$

$$r(t_{i+1}) - r(t_i) = a\big(b - r(t)\big)\Delta t + v\sqrt{\Delta t}Z_i$$

$$= a\big(b - r(t)\big)\Delta t + v\Delta W_i \quad (4.\,10)$$

dimana $i = 0, \ldots, n-1$ dan $\sqrt{\Delta t}Z_i$ berdistribusi sama dengan $\Delta W_i = W_{(t_{i+1})} - W_{(t_i)}$ persamaan (4. 10) dapat ditransformasikan ke dalam bentuk sebagai berikut:

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + a\big(b - r(t)\big)\Delta t + v\Delta W_i$$

$$= r(t_i)(1 - a\Delta t) + ab\Delta t + v\Delta W_i \quad (4.\,11)$$

Salah satu cara untuk mengestimasi parameter $a, b,$ dan v pada model suku bunga *Vasicek* adalah dengan menggunakan metode GMM. Dengan mengikuti persamaan (2. 9), persamaan (4. 11) diubah ke dalam bentuk persamaan regresi seperti berikut :

$$Y_i = pX_i + q + e_i \tag{4. 12}$$

Dimana

$Y_i = \ r(t_{i+1})$

$X_i = r(t_i)$

$p = (1 - a\Delta t)$

$q = ab\Delta t$

$e_i = v\Delta W_i$

4.1.3 Bentuk Matriks Model Regresi

Persamaan (4. 12) diasumsikan q bernilai nol mengandung variabel instrumen Z_i dengan Z_i tidak berkorelasi dengan e_i sebagai berikut:

$$Z_iY_i = Z_iX_i\beta + Z_ie_i, \qquad i = 1,2,\dots,n-1$$

Karena Z_i tidak berkorelasi dengan e_i, maka ditulis $E[Z_i, e_i] = 0$ sehingga rata-rata error sampel menjadi:

$$\bar{g}(\hat{\beta}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_iY_i - Z_iX_i\hat{\beta})$$

$$= \frac{1}{n}\Big((Z_1Y_1 - Z_1X_1\hat{\beta}) + (Z_2Y_2 - Z_2X_2\hat{\beta}) + \cdots + (Z_nY_n - Z_nX_n\hat{\beta})\Big)$$

$$= \frac{1}{n}\Big((Z_1Y_1 + Z_2Y_2 + Z_nY_n) - (Z_1X_1 + Z_2X_2 + Z_nX_n)\hat{\beta}\Big)$$

persamaan ini kemudian diubah menjadi bentuk matriks sebagai berikut:

$$\bar{\boldsymbol{g}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = n^{-1}(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) \tag{4. 13}$$

dimana

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ \vdots \\ r(t_n) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} r(t_1) & 1 \\ r(t_2) & 1 \\ \vdots & \\ r(t_{n-1}) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{bmatrix}$$

Persamaan (4. 13) inilah yang kemudian disebut sebagai momen kondisi sampel.

4.1.4 Estimasi Metode GMM

Metode GMM didefinisikan sebagai suatu estimasi parameter yang meminimumkan bentuk kuadrat dari kondisi momen sampel data regresi yang terboboti, yang secara simbolis dituliskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Q}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \overline{\boldsymbol{g}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})'\,\widehat{\boldsymbol{w}}\overline{\boldsymbol{g}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) \tag{4. 14}$$

dari (4. 13) dan (4. 14) diperoleh:

$$\boldsymbol{Q}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \overline{\boldsymbol{g}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})'\widehat{\boldsymbol{w}}\overline{\boldsymbol{g}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$$

$$= \left(\boldsymbol{n}^{-1}(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}})\right)'\,\widehat{\boldsymbol{w}}\left(\boldsymbol{n}^{-1}(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}})\right)$$

$$= \left(\boldsymbol{n}^{-1}(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}})\right)'\,\widehat{\boldsymbol{w}}\left(\boldsymbol{n}^{-1}(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}})\right)$$

$$= \left(\boldsymbol{n}^{-1}(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{z} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z})\right)\left(\boldsymbol{n}^{-1}(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}})\right)\widehat{\boldsymbol{w}}$$

$$= \left(\boldsymbol{n}^{-1}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{z}\widehat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{n}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\widehat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{n}^{-1}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y}\widehat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{n}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\widehat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\right)$$

karena $n^{-1}\mathbf{z}'\mathbf{y}\widehat{\mathbf{w}}\mathbf{z}'\mathbf{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ berukuran 1×1 atau skalar, dan transposnya

$$\boldsymbol{n^{-1}\widehat{\beta}'x'z\widehat{w}z'y}$$

juga skalar yang sama, maka:

$$\boldsymbol{Q(\widehat{\beta}) = n^{-1}y'z\widehat{w}z'y - (n^{-2})\widehat{\beta}'x'z\widehat{w}z'y + n^{-1}\widehat{\beta}'x'z\widehat{w}z'x\widehat{\beta}} \tag{4. 15}$$

persamaan (4. 15) diturunkan terhadap $\hat{\beta}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q(\widehat{\beta})}}{\partial \boldsymbol{\widehat{\beta}}} = 0 - \boldsymbol{n^{-2}x'z\widehat{w}z'y + n^{-1}x'z\widehat{w}z'x\widehat{\beta}} + \left(\boldsymbol{n^{-1}\widehat{\beta}'x'z\widehat{w}z'x}\right)'$$

$$= \boldsymbol{n^{-2}x'z\widehat{w}z'y + n^{-1}x'z\widehat{w}z'x\widehat{\beta} + n^{-1}x'z\widehat{w}z'x\widehat{\beta}}$$

kemudian disamakan dengan nol sebagai berikut:

$$0 = \boldsymbol{n^{-2}x'z\widehat{w}z'y + n^{-2}x'z\widehat{w}z'x\widehat{\beta}}$$

$$\boldsymbol{n^{-2}x'z\widehat{w}z'y = n^{-2}x'z\widehat{w}z'x\widehat{\beta}}$$

$$\boldsymbol{x'z\widehat{w}z'y = x'z\widehat{w}z'x\widehat{\beta}}$$

sehingga diperoleh estimator parameter $\boldsymbol{\widehat{\beta}}$ sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\widehat{\beta}} = (\boldsymbol{x'z\widehat{w}z'x})^{-1}\boldsymbol{x'z\widehat{w}z'y} \tag{4. 16}$$

Dalam memperoleh matriks pembobot, dilakukan dengan dua langkah penting, sebagai berikut:

1. Persamaan (4. 16) dioperasikan dengan $\boldsymbol{w = I}$ (matriks identitas berukuran $n\ x\ n$) untuk mendapatkan estimator $\boldsymbol{\widehat{\beta}}$ awal

$$\boldsymbol{\widehat{\beta}_0} = (\boldsymbol{x'zIz'x})^{-1}\boldsymbol{x'zIz'y} \tag{4. 17}$$

2. Hasil estimasi $\boldsymbol{\widehat{\beta}_0}$ pada (4. 17) digunakan kembali untuk menghitung $\boldsymbol{J_0}$ dengan substitusi persamaan (4. 13) sebagai berikut

$$\boldsymbol{J_0} = E\left[\boldsymbol{\overline{g}(\widehat{\beta}_0)\overline{g}(\widehat{\beta}_0)'}\right]$$

$$= E\left[\boldsymbol{n^{-1}(z'y - z'x\widehat{\beta}_0)'n^{-1}(z'y - z'x\widehat{\beta}_0)}\right]$$

$$= n^{-2}E\left[\left(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{0}}\right)'\left(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{0}}\right)\right]$$

$$= n^{-2}E\left[\left(\boldsymbol{z}'\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{0}}\right)\right)'\left(\boldsymbol{z}'\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{0}}\right)\right)\right]$$

dengan menggunakan $\boldsymbol{J_0}^{-1} = \widehat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{1}}$, diperoleh nilai estimator $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{1}}$.

Dari (4. 16) didapatkan estimator parameter p dan q, tetapi untuk parameter yang ditaksir dalam model suku bunga *Vasicek* adalah $a, b,$ dan v. Maka untuk memperoleh estimator parameter tersebut nilai p dan q disubstitusikan ke dalam persamaan berikut:

$$a = \frac{1-p}{\Delta t} \tag{4. 18}$$

$$b = \frac{q}{1-p} \tag{4. 19}$$

$$v = \sqrt{\frac{var(e)}{\Delta t}} \tag{4. 20}$$

4.2 Implementasi Data Suku Bunga Bank Indonesia

4.2.1 Data Suku Bunga Bank Indonesia

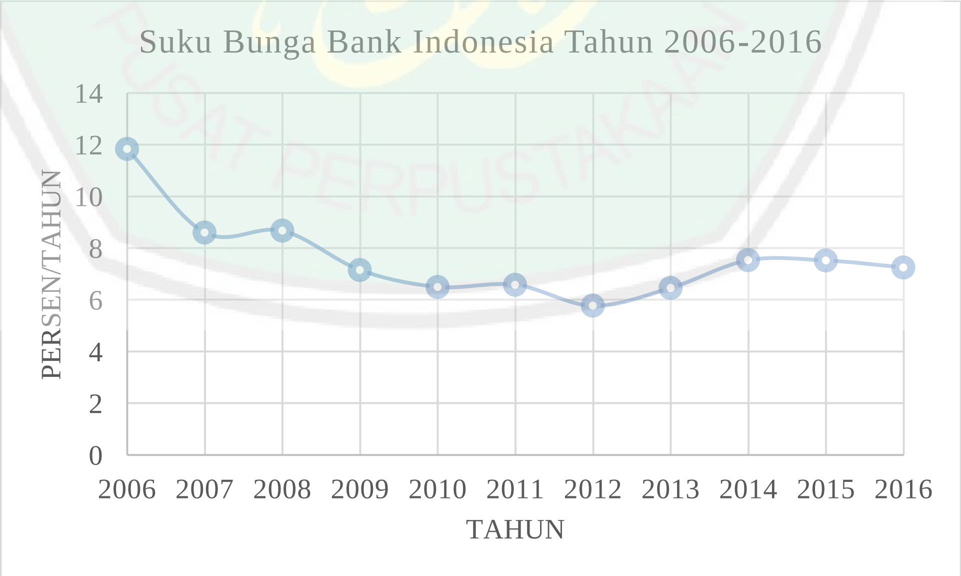
Untuk melakukan estimasi parameter a, b, dan v pada model suku bunga *Vasicek* digunakan data rata-rata tingkat suku bunga tahunan Bank Indonesia (BI *Rate)* pada tahun 2006-2016. Data rata-rata suku bunga tahunan Bank Indonesia secara rinci dapat dilihat pada Tabel 4. 1.

Tabel 4. 1 Rata-rata Tingkat Suku Bunga Bank Indonesia tahun 2006-2016

t_i	Tahun	Rata-Rata BI / $r(t)$ (%)
1	2006	11,83
2	2007	8,60
3	2008	8,67
4	2009	7,15
5	2010	6,50
6	2011	6,58
7	2012	5,77
8	2013	6,46
9	2014	7,53
10	2015	7,52
11	2016	7,25

4.2.2 Statistika Deskriptif Data Suku Bunga Bank Indonesia

Berikut ini merupakan statistika deskriptif data Suku Bunga Bank Indonesia dari tahun 2006 hingga tahun 2016 :



Gambar 4.1 Pergerakan Suku Bunga Bank Indonesia Tahun 2006-2016

Berdasarkan Gambar 4.1 dapat dilihat bahwa pada tahun pertama, yaitu pada tahun 2006, suku bunga berada pada nilai paling tinggi dibandingkan tahun-tahun sesudahnya. Pada tahun 2007 hingga 2012 suku bunga terus mengalami penurunan, hingga akhirnya pada tahun 2013 suku bunga mengalami kenaikan hingga tahun 2014. Pada tahun 2015 dan 2016 suku bunga kembali mengalami penurunan meskipun tidak signifikan.

Untuk statistika deskriptif data selanjutnya dapat dilihat pada Tabel 4.2 sebagai berikut :

Tabel 4.2 Statistika Deskriptif Bagian I

	N	Minimum	Maximum	Mean
	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic
X	10	5.77	11.83	7.6610
Y	10	5.77	8.67	7.2030
Valid N (listwise)	10			

Pada Tabel 4.2 dapat diketahui bahwa pada kolom kedua, terdapat kolom N yang artinya bahwa setiap x dan y jumlah datanya sebanyak 10 data. Kemudian pada kolom selanjutnya terdapat *Minimum* yang artinya nilai paling kecil dari setiap varibel. Pada variabel x dan y nilai *minimum* atau nilai yang paling kecil adalah sama-sama bernilai 5,77. Sedangkan, untuk kolom *Maximum* merupakan nilai terbesar dari setiap variabel. Untuk variabel x nilai terbesarnya adalah 11,83 sedangkan untuk variabel y nilai *maximum*nya sebesar 8,67. Kemudian untuk kolom selanjutnya yaitu *Mean* atau rata-rata untuk setiap variabel. Variabel x memiliki rata-rata 7,6610 dan variabel y memiliki rata-rata 7,2030.

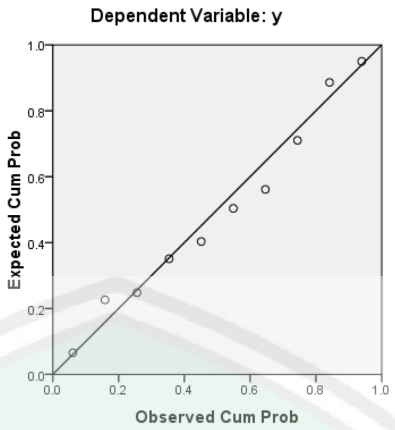
Tabel 4. 3 Statistika Deskriptif Bagian II

	Std. Deviation	Variance	Skewness		Kurtosis	
	Statistic	Statistic	Statistic	Std. Error	Statistic	Std. Error
x	1.73568	3.013	1.670	.687	3.405	1.334
y	.93119	.867	.345	.687	-.456	1.334

Selanjutnya, untuk *standard deviation* atau simpangan baku variabel x sebesar 1,73568 dan variabel y sebesar 0,93119. Untuk *variance* atau variansi merupakan nilai kuadrat dari simpangan baku, yaitu sebesar 3,013 untuk variabel x dan 0,867 untuk variabel y. *Skewness* adalah kemencengan dari data yaitu sebesar 1,670 untuk variabel x dan 0,345 untuk variabel y, dengan *standard error* sebesar 0,687. Sedangkan *Kurtosis* adalah keruncingan atau puncak dari sebuah distribusi data. Untuk variabel x sebesar 3,405 dan variabel y sebesar $-0{,}456$ dengan *standard error* sebesar 1,334.

4.2.3 Uji Normalitas

Uji normalitas dilakukan dengan teknik statistik non-parametrik. Uji normalitas bertujuan untuk mengetahui apakah data berdistribusi normal atau data tidak berditribusi normal yang didapatkan dengan menggunakan bantuan komputer, dan hasilnya adalah seperti dibawah ini :



Gambar 4.2 Plot Uji Normalitas

Plot tersebut menunjukan bahwa data telah mendekati garis diagonal, yang artinya data tersebut telah berdistribusi normal. Namun plot tersebut belum sepenuhnya mewakili kenormalan data. Untuk megetahui kepastian sebaran, diperlukan uji *Kolmogorov-Smirnov* yang merupakan bagian dari uji statistic non-parametrik. Dengan menggunakan bantuan komputer diperoleh hasil pada tabel berikut :

Tabel 4.4 Uji Normalitas Kolmogorov-Smirnov

		X	Y
N		10	10
Normal Parameters[a]	Mean	7.6610	7.2030
	Std. Deviation	1.73568	.93119
Most Extreme Differences	Absolute	.230	.163
	Positive	.230	.163
	Negative	-.144	-.133
Kolmogorov-Smirnov Z		.728	.515
Asymp. Sig. (2-tailed)		.665	.954

a. Test distribution is Normal.

Berdasarkan Tabel 4.4 terlihat bahwa nilai *Kolmogorov-Smirnov* nilai x dan y bernilai 0,728 dan 0,515, dengan nilai *P-value* nilai x dan y bernilai 0,665 dan 0,954 yang lebih dari nilai α sebesar 0,05. Karena nilai-nilai tersebut lebih besar daripada α, maka dapat disimpulkan bahwa data berdistribusi normal.

4.2.4 Perhitungan Estimasi Parameter Model Suku Bunga *Vasicek* pada Suku Bunga Bank Indonesia

Untuk menghitung Estimasi Parameter Model Suku Bunga *Vasicek* pada Suku Bunga Bank Indonesia pada, maka Tabel 4. 1 dapat ditulis :

Tabel 4. 5 Perhitungan Suku Bunga Bank Indonesia

t_i	$r(t_i)$	$r(t_{i+1})$
1	11,83	8,60
2	8,60	8,67
3	8,67	7,15
4	7,15	6,50
5	6,50	6,58
6	6,58	5,77
7	5,77	6,46
8	6,46	7,53
9	7,53	7,52
10	7,52	7,25

Hasil estimasi parameter dengan metode GMM diperoleh dengan mencari nilai $\hat{\beta}$ sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 11,83 \\ 8,60 \\ \vdots \\ 7,52 \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} 8,60 \\ 8,67 \\ \vdots \\ 7,25 \end{bmatrix}, \text{dan } \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 11,83 \\ 8,60 \\ \vdots \\ 7,52 \end{bmatrix}$$

dengan $\widehat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{I}$ maka,

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{0}} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\boldsymbol{I}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\boldsymbol{I}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}3963 \\ 4{,}1673 \end{bmatrix}$$

dengan $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{0}} = \begin{bmatrix} 0{,}3963 \\ 4{,}1673 \end{bmatrix}$, diperoleh

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{0}} = n^{-2}E\left[\left(z'\left(y - x\hat{\beta}_0\right)\right)\left(z'\left(y - x\hat{\beta}_0\right)\right)'\right]$$

$$= 2.1131e - 20$$

$\widehat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{0}}^{-\boldsymbol{1}}$, maka $\widehat{\boldsymbol{w}}_{\boldsymbol{1}} = 4{,}7324e + 19$, sehingga

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = (x'z\widehat{w}_1 z'x)^{-1}x'z\widehat{w}_1 z'y$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}3963 \\ 4{,}1673 \end{bmatrix}$$

Didapatkan parameter $p = 0{,}3963,\ q = 4{,}1673$. Sehingga persamaan (4. 12) menjadi :

$$r(t_{i+1}) = 0{,}3963r(t_i) + 4{,}1673 + e$$

Kemudian untuk mendapatkan parameter yang diinginkan, yaitu a, b, dan v maka nilai p, dan q disubstitusikan ke dalam persamaan berikut :

- $a = \frac{1-p}{\Delta t}$

  $= 0{,}6037$

- $b = \frac{q}{1-p}$

  $= 3{,}7710$

- $v = \sqrt{\frac{var(e)}{\Delta t}}$

  $= 0{,}6278$

Sehingga diperoleh parameter a sebesar $0{,}6037$; b sebesar $3{,}7710$; dan v sebesar $0{,}6278$. Dengan demikian, diperoleh Model Suku Bunga *Vasicek* setelah dilakukan estimasi parameter menggunakan Metode GMM sebagai berikut :

$$r(t_{i+1}) = r(t_i)(1 - 0{,}6037\Delta t) + 2{,}2765\Delta t + 0{,}6278\Delta W_i$$

4.2.5 *Forecasting*

Setelah memperoleh hasil estimasi parameter kemudian dilakukan peramalan *(forecasting)* untuk periode selanjutnya. Dalam penelitian ini akan dilakukan peramalan tingkat suku bunga Bank Indonesia untuk tahun 2017-2019.

Tabel 4. 6 Data Tahunan Suku Bunga Bank Indonesia

Tahun	Rata-Rata tahunan BI *Rate* (%)
2006	11,83
2007	8,60
2008	8,67
2009	7,15
2010	6,50
2011	6,58
2012	5,77
2013	6,46
2014	7,53
2015	7,52
2016	7,25

Tabel 4.6 merupakan tabel data asli dari tingkat suku bunga Bank Indonesia dari bulan tahun 2006 sampai tahun 2016. Kemudian dari data asli tingkat suku bunga akan di bandingkan dengan hasil *forecasting* pada tahun 2017

– 2019. Berikut merupakan hasil *forecasting* tingkat suku bunga Bank Indonesia tahun 2017-2019.

Tabel 4. 7 Hasil *Forecasting* data BI rate tahun 2017-2019

Tahun	Rata-Rata tahunan BI *Rate* (%)
2017	4,93
2018	4,94
2019	4,69

Tabel 4.7 merupakan hasil forecasting untuk data tingkat suku bunga Bank Indonesia tahun 2017 sampai 2019 yang mengalami deflasi. Deflasi terjadi karena kinerja neraca perdagangan Indonesia yang positif dalam beberapa bulan terakhir, laju nilai tukar rupiah cenderung stabil, dan suku bunga turun agar mendorong pertumbuhan ekonomi dalam negeri yang melambat. Pada *forecasting* data tingkat suku bunga Bank Indonesia 2017-2019 tidak jauh berbeda dengan data asli.

4.3 Kajian Nilai Al-Quran dan Pembahasan

Pada pembahasan diatas terdapat penduga parameter $a, b,$dan v yang belum diketahui nilainya, seperti halnya pada surat as-Shaffat ayat 147 yang bertujuan untuk menjelaskan bahwa nabi Yunus diutus kepada umatnya yang berjumlah 100.000 atau lebih, pada ayat tersebut tidak disebutkan secara jelas dan rinci jumlah objeknya, tetapi hanya menyebutkan perkiraan jumlah umat nabi Yunus dikisaran angka 100.000.

Didalam kehidupan sehari-hari terdapat beberapa contoh pendugaan jumlah yaitu pendugaan terhadap jumlah banyaknya suatu objek yang tidak bisa dihitung dengan pasti jumlah sebenarnya, seperti contoh banyaknya orang yang masuk kedalam pasar, tentunya tidak bias dihitung secara rinci berapa jumlah orang yang masuk kedalam pasar tersebut, tetapi setidaknya bisa diduga berapa kisaran orang yang ada, bisa berjumlah puluhan atau bahkan ratusan.

Dari penjelasan diatas dapat dikatakan bahwa pendugaan itu bisa dihitung, hal ini sesuai dengan penjelasan pada Al-Quran surat As-Shaffat ayat 147 bahwa ayat tersebut menjelaskan tentang pendugaan. Dengan demikian pendugaan pada penelitian ini dapat dicari dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat terboboti dari momen kondisi sampel.

Disebutkan pula dalam hadist yang diriwayatkan oleh Bukhari tentang masalah estimasi yaitu

“Sesungguhnya Rasulullah SAW memberi keringanan kepada mereka yang mempunyai ariyah untuk menjualnya dengan kira-kira(ditaksir)”

Arti kata mengira-ngira dalam hadits ini dalam statistika dapat diartikan sebagai estimasi. Hadits ini menyatakan bahwa Rasulullah SAW memberi keringanan terhadap jual beli ariyah, yaitu jual beli kurma kering dan menukarnya dengan kurma basah dengan memperkirakan atau menaksir berapa banyak jumlahnya setelah kering.

Dalam hal ini perlu diketahui bahwa ilmu pengatahuan umum seperti matematika khususnya statistika dalam konsep estimasi parameter diyakini bahwa konsep tersebut diciptakan oleh orang-orang non muslim, namun semuanya itu ternyata telah ada dalam al-Quran. Ini membuktikan bahwa al-Quran tidak hanya membahas tentang ilmu agama, akan tetapi membahas tentang ilmu pengetahuan umum. Namun dalam al-Quran, konsep-konsep ilmu pengetahuan tidak disajikan secara langsung, akan tetapi membutuhkan penafsiran secara mendalam tentang ilmu pengetahuan tersebut.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Adapun kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian ini adalah :

1. Bentuk estimasi parameter model suku bunga *Vasicek*,

$$r(t_{i+1}) = r(t_i)(1 - a\Delta t) + ab\Delta t + v\Delta W_i$$

menggunakan GMM adalah

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = (\boldsymbol{x'z\widehat{w}z'x})^{-1}\boldsymbol{x'z\widehat{w}z'y}$$

dimana nilai dari $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ di substitusikan ke dalam persamaan

$$a = \frac{1-p}{\Delta t}$$

$$b = \frac{q}{1-p}$$

$$v = \sqrt{\frac{var(e)}{\Delta t}}$$

2. Berdasarkan hasil perhitungan estimasi parameter model suku bunga *Vasicek* menggunakan GMM pada data tingkat suku bunga Bank Indonesia diperoleh a sebesar 0,6037 ; b sebesar 3,7710 ; dan v sebesar 0,6278, sehingga model suku bunga *Vasicek* setelah diestimasi adalah

$$r(t_{i+1}) = r(t_i)(1 - 0{,}6037\Delta t) + 2{,}2765\Delta t + 0{,}6278\Delta W_i$$

5.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya disarankan untuk melakukan estimasi Model Suku Bunga *Vasicek* beserta impelementasinya dengan metode lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika.* Malang: UIN Malang Press.

Al-Maraghi, A.M.. 2010. *Terjemahan Tafssir Al-Maraghi.* Jakarta: PT. Darul Kutub.

Astutik, D. 2013. *Estimasi Parameter Model Data Panel Dinamis dengan Metode Momen Ahn dan Schmidt*. Skripsi tidak Dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Carmona, Rene A. dan Tehranchi, Michael R.. 2005. *Interest Rate Models:an Infinite Dimensional Stochastic Analysis Perspective*. Germany: Cambridge University & Princeton University.

Davidson, Russel. Dan MacKinnon, James G.. 1999. *Econometric Theory and Methods.* New York: Oxford University Press.

Erlangga, Chandra Nugroho, dan Kusumawati, Rosita. 2016. Aplikasi Model Suku Bunga Stokastik Black-Derman-Toy dengan Forward Induction dalam Penghitungan Anuitas. *Jurnal Pendidikan Matematika dan Sains*: 1-6.

Finizio, N dan G. Ladas. 1982. *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.

Gujarati, Damodar N. 2004. *Basic Econometrics*. Fourth edition. Singapore: McGraw-Hill Inc.

Hasan, Iqbal. 2002. *Pokok-pokok Materi Statistik I (Statistik Deskriptif*). Jakarta: Bumi Aksara.

Hull, J.C. 1946. *Option, Future, and Other Derivatives, ed*. Prentice Hall, USA. *Investasi di Pasar Modal Indonesia*. Edisi Revisi 1. Jakarta: PT. Bursa Efek.

Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Kuncoro, Mudrajad. 2001. *Manajemen Keuangan Internasonal*.Yogya: BPFE.

Manullang, Sudianto. 2012. Application Of *Vasicek*'s Rate Interest Model In Term Insurance Premiums Calculation. *Jurnal Generasi Kampus.* 5 (2). 120-129.

Nielsen, Heino Bohn. 2005. *Generalized Method of Moments Estimation*. Slovakia: Matej Bel University.

Øksendal, B. 2000. *Stochastics Differensial Equation (An Introductions with Applications)*. Ed.Ke-5. Germany: Springer Verlag.

Ross, Sheldon M. 2010. *Introduction to Probability Models Tenth Edition*. Los Angeles: Academic Press.

Samuelson, Paul A., dan Nordhaus, William D. 1995. *Economics 15st edition*. New York: McGraw-Hill.

Sleeper, Andrew. 2006. *Design for Six Sigma Statistics*. United States: The McGraw-Hill Compnies, Inc.

Srinadi, I.Gusti, A. M. 2013. *Pengantar Proses Stokastik*. Denpasar: Universitas Udayana.

Taurif, Muhammad, Otok, Bambang W., dan Latra, I Nyoman. 2014. Estimation of Generalized Method of Moment in Logistic Regression Model. *Prosiding Seminar Nasional Matematika Unej 2014*.

Taylor, H.M., dan S. Karlin. 1998. *An In troduction to Stochastic Modeling*. California: Academic Press

Vasicek, O. 1977. *An Equilibrium Characterization of Term Structure*. Journal of Economics

Wahyuni, Dian Maghfiroh. 2017. *Estimasi Parameter pada Capital Assets Pricing Model menggunakan Metode Generalized Method of Moments dalam Perhitungan Value at Risk*. Skripsi. Malang: UIN Maliki Malang.

Wiersema, Ubbo F. 2008. Brownian Motion Calclus. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Yuda, Wimas Astari, Widana, I Nyoman, dan Sumarjaya, I Wayan. 2018. Perhitungan Aktuaria Manfaat Pensiun-Normal Suku Bunga *Vasicek* Menggunakan Metode Entry Age Normal. *E-Jurnal Matematika*. 7 (02). 134-140.

Zeytun S., dan Gupta, A. 2007. *A Comparative Study of the Vasicek and the CIR Model of the Short Rate*. Germany: Fraunhofer Institut Techno-und Wirtschaftsmathematik.

LAMPIRAN

Lampiran 1 : Data Suku Bunga Bank Indonesia tahun 2006-2016

Tahun	Bulan	BI Rate (%)
2006	Januari	12,75
	Februari	12,75
	Maret	12,75
	April	12,75
	Mei	12,5
	Juni	12,5
	Juli	12,25
	Agustus	11,75
	September	11,25
	Oktober	10,75
	November	10,25
	Desember	9,75
2007	Januari	9,5
	Februari	9,25
	Maret	9
	April	9
	Mei	8,75
	Juni	8,5
	Juli	8,25
	Agustus	8,25
	September	8,25
	Oktober	8,25
	November	8,25
	Desember	8
2008	Januari	8
	Februari	8
	Maret	8
	April	8
	Mei	8,25
	Juni	8,5
	Juli	8,75
	Agustus	9
	September	9,25
	Oktober	9,5
	November	9,5
	Desember	9,25

Lampiran 1 : (lanjutan)

2009	Januari	8,75
	Februari	8,25
	Maret	7,75
	April	7,5
	Mei	7,25
	Juni	7
	Juli	6,75
	Agustus	6,5
	September	6,5
	Oktober	6,5
	November	6,5
	Desember	6,5
2010	Januari	6,5
	Februari	6,5
	Maret	6,5
	April	6,5
	Mei	6,5
	Juni	6,5
	Juli	6,5
	Agustus	6,5
	September	6,5
	Oktober	6,5
	November	6,5
	Desember	6,5
2011	Januari	6,5
	Februari	6,75
	Maret	6,75
	April	6,75
	Mei	6,75
	Juni	6,75
	Juli	6,75
	Agustus	6,75
	September	6,75
	Oktober	6,5
	November	6
	Desember	6

Lampiran 1 : (lanjutan)

2012	Januari	6
	Februari	5,75
	Maret	5,75
	April	5,75
	Mei	5,75
	Juni	5,75
	Juli	5,75
	Agustus	5,75
	September	5,75
	Oktober	5,75
	November	5,75
	Desember	5,75
2013	Januari	5,75
	Februari	5,75
	Maret	5,75
	April	5,75
	Mei	5,75
	Juni	6
	Juli	6,5
	Agustus	7
	September	7,25
	Oktober	7,25
	November	7,5
	Desember	7,5
2014	Januari	7,5
	Februari	7,5
	Maret	7,5
	April	7,5
	Mei	7,5
	Juni	7,5
	Juli	7,5
	Agustus	7,5
	September	7,5
	Oktober	7,5
	November	7,75
	Desember	7,75

Lampiran 1 : (lanjutan)

2015	Januari	7,75
	Februari	7,5
	Maret	7,5
	April	7,5
	Mei	7,5
	Juni	7,5
	Juli	7,5
	Agustus	7,5
	September	7,5
	Oktober	7,5
	November	7,5
	Desember	7,5
2016	Januari	7,25
	Februari	7
	Maret	6,75
	April	6,75
	Mei	6,75
	Juni	6,5
	Juli	6,5
	Agustus	5,25
	September	5
	Oktober	4,75
	November	4,75
	Desember	4,75

Lampiran 1 : (lanjutan)

Diperoleh rata-rata tahunan

Tahun	Rata-Rata tahunan BI *Rate* (%)
2006	11,83
2007	8,60
2008	8,67
2009	7,15
2010	6,50
2011	6,58
2012	5,77
2013	6,46
2014	7,53
2015	7,52
2016	7,25

Dalam bentuk matriks, diperoleh :

$$\begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ r(t_4) \\ \vdots \\ r(t_{11}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t_1) & 1 \\ r(t_2) & 1 \\ r(t_3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{10}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

dimana :

$$y = \begin{bmatrix} r(t_2) \\ r(t_3) \\ r(t_4) \\ \vdots \\ r(t_{11}) \end{bmatrix}, \; x = \begin{bmatrix} r(t_1) & 1 \\ r(t_2) & 1 \\ r(t_3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ r(t_{10}) & 1 \end{bmatrix}, \text{ dan } \beta = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

Sehingga, data tersebut dapat ditulis menjadi :

Lampiran 1 : (lanjutan)

$$\begin{bmatrix} 8,60 \\ 8,67 \\ 7,15 \\ 6,50 \\ 6,58 \\ 5,77 \\ 6,46 \\ 7,53 \\ 7,52 \\ 7,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,83 & 1 \\ 8,60 & 1 \\ 8,67 & 1 \\ 7,15 & 1 \\ 6,50 & 1 \\ 6,58 & 1 \\ 5,77 & 1 \\ 6,46 & 1 \\ 7,53 & 1 \\ 7,52 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

Lampiran 2 : Output Statistika Deskriptif dengan SPSS

Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	Variance	Skewness		Kurtosis	
	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Statistic	Std. Error	Statistic	Std. Error
X	10	5.77	11.83	7.6610	1.73568	3.013	1.670	.687	3.405	1.334
Y	10	5.77	8.67	7.2030	.93119	.867	.345	.687	-.456	1.334
Valid N (listwise)	10									

Lampiran 3 : Output Uji Normalitas

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		X	y
N		10	10
Normal Parameters[a]	Mean	7.6610	7.2030
	Std. Deviation	1.73568	.93119
Most Extreme Differences	Absolute	.230	.163
	Positive	.230	.163
	Negative	-.144	-.133
Kolmogorov-Smirnov Z		.728	.515
Asymp. Sig. (2-tailed)		.665	.954

a. Test distribution is Normal.

Lampiran 4 : Skrip Estimasi Parameter dengan Aplikasi Matlab

```
clc, clear

n=10;
Zts=xlsread('DATAFIX.xlsx');
x1=Zts(:,1);
n=length(x1(:,1));
rt=x1;
display(rt)

Y=Zts(:,2);
n=length(Y(:,1));
display(Y)

deltat=1
for t=1:n
    X(t,1)=rt(t);
    X(t,2)=deltat;
 end;
display (X)

Z=X;
display(Z);

%untuk W=I (identitas)
I=[1]
BetaGMM=inv(X'*Z*I*Z'*X)*X'*Z*I*Z'*Y;
B0=BetaGMM;
display(B0)

Error=Y-X*B0;

%pembobot W=invj0
 j0=(1/n^2)*(Z'*Error)'*(Z'*Error);
display(j0)

j=inv(j0);
display(j)

W1=j;
BetaGMM1=inv(X'*Z*W1*Z'*X)*X'*Z*W1*Z'*Y;
B1=BetaGMM1;
display(B1)

p=B1(1,1);
q=B1(2,1);

E=Y-X*B1;
display(E)
b=(q/1-p);
display(b)
a=(1-p/deltat);
display(a)
v=sqrt(var(E)/deltat);
display(v)
```

RIWAYAT HIDUP

Aprilia Harvye Sovia Dewi, lahir di Malang tanggal 2 April 1996. Anak pertama dari 2 bersaudara dari pasangan Bapak Hari Sutrisno dan Ibu Efi Diana Rosida. Memiliki 1 adik laki-laki yang bernama Reynaldy Harvye Putra. Pendidikan Sekolah Dasar ditempuh di SDIT Ya Bunayya Ngroto Pujon. Kemudian setelah lulus Sekolah Dasar melanjutkan pendidikan ke SMP Plus Fityani Ngroto Pujon kemudian dilanjutkan ke SMA Negeri 1 Batu. Selanjutnya pada tahun 2015, penulis menempuh studi S1 Jurusan Matematika di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama menjadi murid SD, SMP dan SMA, penulis aktif mengikuti kegiatan organisasi maupun ekstrakurikuler, diantaranya anggota OSIS, anggota pramuka, serta ekstrakurikuler Badan Dakwah Islam (BDI). Ketika menjadi mahasiswa, penulis berperan aktif dalam organisasi intra kampus dan ekstra kampus. Seperti menjadi pengurus HMJ Integral Matematika periode 2015-2016 dan periode 2016-2017 divisi *eksternal Public Relation*, pengurus DEMA fakultas sains dan teknologi periode 2017-2018, serta komunitas Bahasa Inggris (MEC).

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Aprilia Harvye Sovia Dewi
NIM : 15610081
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Estimasi Parameter Model Suku Bunga *Vasicek* dengan Metode *Generalized Method of Moments*
Pembimbing I : Abdul Aziz, M. Si
Pembimbing II : Evawati Alisah, M. Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	25 Maret 2019	Konsultasi Bab I	1.	
2	01 April 2019	Revisi Bab I		2.
3	08 April 2019	ACC Bab I & Konsultasi Bab II	3.	
4	15 April 2019	Revisi Bab II		4.
5	29 April 2019	Revisi Bab II	5.	
6	06 Mei 2019	Revisi Bab II		6.
7	20 Mei 2019	Revisi Bab II	7.	
8	25 Juni 2019	ACC Bab II		8.
9	09 Juli 2019	Konsultasi Bab III & Bab IV	9.	
10	05 Agustus 2019	ACC Bab III & Revisi Bab IV		10.
11	05 Agustus 2019	Konsultasi Agama Bab II & IV	11.	
12	07 Agustus 2019	ACC Sempro		12.
13	28 November 2019	Revisi Bab IV	13.	
14.	28 November 2019	ACC Sidang		14.
15.	28 November 2019	ACC Agama Bab II & IV	15.	
16.	26 Desember 2019	Revisi Bab IV		16.
17.	26 Desember 2019	ACC Agama Keseluruhan	17.	
18.	26 Desember 2019	ACC Keseluruhan		18.

Malang, 29 November 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001