SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN KORTEWEG-DE VRIES DENGAN MENGGUNAKAN METODE *SINE-COSINE*

SKRIPSI

OLEH
AHMAD ULUL HAZMI
NIM. 15610074

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN KORTEWEG-DE VRIES DENGAN MENGGUNAKAN METODE *SINE-COSINE*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
AHMAD ULUL HAZMI
NIM. 15610074

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN KORTEWEG-DE VRIES DENGAN MENGGUNAKAN METODE *SINE-COSINE*

SKRIPSI

Oleh
AHMAD ULUL HAZMI
NIM. 15610074

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 01 November 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si	Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIP. 19770521 200501 2 004	NIP. 19900511 20160801 1 057

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN KORTEWEG-DE VRIES DENGAN MENGGUNAKAN METODE *SINE-COSINE*

SKRIPSI

Oleh
Ahmad Ulul Hazmi
NIM. 15610074

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai salah satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 19 November 2019

Penguji Utama	: Mohammad Jamhuri, M.Si	....
Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si	....
Anggota Penguji	: Muhammad Khudzaifah, M.Si	....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ahmad Ulul Hazmi

NIM : 15610074

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Solusi Analitik Persamaan Korteweg-de Vries dengan Metode *Sine-Cosine*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 01 November 2019
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
F18EEAHF125625993
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Ahmad Ulul Hazmi
NIM. 15610074

MOTO

"*You Are Your Thinking*"

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Alhamdulillahi Robbil‘alamin, dengan mengucap syukur kepada Allah Swt., skripsi ini penulis persembahkan untuk kedua orang tua, Bapak Muhammad Idham dan Ibu Ashofa, serta kakak Aim, Shofro’a dan Shofro’i, yang tak hanya karena mereka membuat penulis menjadi sesosok pria yang lebih dewasa, tetapi juga karena mereka memberikan cinta tanpa syarat yang tumpah ruah dan tak pernah sia-sia.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Pertama-tama dan paling utama, syukur *Alhamdulillah* penulis haturkan ke hadirat Allah Swt yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

Skripsi ini ditulis dengan dorongan hati paling besar oleh penulis yang masih jauh dari kata ulung dalam hal kepenulisan sehingga penulis membutuhkan banyak uluran tangan untuk memahat skripsi ini hingga rapi dan mudah dipahami. Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring doa dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan motivasi belajar kepada penulis.

4. Ari kusumastuti, M.Pd, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi I, yang telah menyisihkan waktu untuk memberikan arahan dan bimbingan selama proses penulisan skripsi ini.
5. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi II, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan arahan dan bimbingan selama penulisan skripsi ini.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Kedua orang tua yang tak punya ruang jeda untuk berdoa serta berkerja bersimbah peluh demi pendidikan, kebahagiaan, dan kesuksesan penulis.
8. Kakak-kakak yang tak pernah meragukan kasih sayang di antara kita dan tak pernah berkata tidak kala kita saling membutuhkan.
9. Sahabat-sahabat seperjuangan, mahasiswa Matematika angkatan 2015, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan yang terukir rapi dan abadi.
10. Sahabat-sahabat "Ahlul Qahwah", terima kasih atas segala peristiwa yang terjadi di atas meja tempat bercengkerama dan segala canda tawa yang menggema sampai detik ini.
11. Sahabat-sahabat kontrakan "Homestay", terima kasih untuk semua dukungan dan pepelingnya kala penulis jatuh pada titik terbawah.
12. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu terima kasih atas keikhlasan bantuan moral, material dan spiritual yang sudah diberikan kepada penulis.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin*.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Malang, 01 November 2019

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Hazmi, Ahmad Ulul. 2019. **Solusi Analitik Persamaan Korteweg-de Vries dengan Menggunakan Metode *Sine-cosine*.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Kata kunci: analitik, persamaan Korteweg-de Vries nonlinier, metode *sine-cosine*

Penelitian ini mengkaji tentang metode analitik untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinier: persamaan Korteweg-de Vries. Persamaan tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode *sine-cosine*. Langkah pertama pada metode ini adalah mentransformasikan dari persamaan awal bentuk PDP ke dalam bentuk PDB dengan menggunakan permisalan bentuk umum gelombang $\xi = x - ct$. Langkah selanjutnya adalah melakukan proses substitusi dari hasil transformasi ke dalam persamaan dari metode yang mengandung fungsi sin dan cos sehingga diperoleh beberapa parameter, diantaranya: λ, μ dan β. Dari beberapa parameter tersebut disubstitusikan kembali ke persamaan awal yang terdapat pada metode. Metode *sine-cosine* bertujuan untuk mencari parameter-parameter tersebut, sehingga akan mudah untuk mencari solusi analitik yang berupa fungsi $u(x,t)$.

ABSTRACT

Hazmi, Ahmad Ulul. 2019. **Analytical Solution of Korteweg-de Vries Equation Using The Sine-Cosine Method.** Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim Malang State Islamic University of. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si. (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Keyword: analytic, nonlinear Korteweg-de Vries equation, sine-cosine method

This study examines analytical methods for solving nonlinear partial differential equations: the Korteweg-de Vries equation. The equation is solved using the sine-cosine method. The first step in this method is to transform the initial equation of the PDE form into the ODE form by assuming the general wave form $\xi = x - ct$. The next step is to carry out the substitution process of the transformation into the equation of the method containing the sin and cos functions so that several parameters are obtained, including: λ, μ and β. From some of these parameters substituted back to the initial equation contained in the method. The sine-cosine method aims to find these parameters, so that it will be easy to find analytical solutions in the form of functions $u(x, t)$.

ملخص

حزم، أحمدأولول. ٢٠١٩.**حل التحليلية لمعادلة Korteweg-de Vries باستخدام طريقة Sine-Cosine**. شعبة الرياضيات، كلية العلوم و التكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) أري كسومستت الماجستير (٢) محمد حذيفة الماجستير.

الكلمات الرئيسية: تحليلي، معادلة korteweg-de vries خطية، طريقة sine-cosine

تتناول هذه الدراسة في الطرق التحليلية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية: معادلة korteweg-de vrieS. يتم حل المعادلة باستخدام طريقة sine-cosine. تتمثل الخطوة الأولى في هذه الطريقة في التحويل المعادلة الأولية لمعادلة تفاضلية جزئية إلى شكل معادلة تفاضلية عادية باستخدام تمثيل الشكل الموجي. $\xi = x - ct$. والخطوة التالية هي تنفيذ عملية الاستبدال للتحول إلى معادلة الطريقة التي تحتوي على دالات sin و cos بحيث يتم الحصول على العديد من المعلمات ، بما في ذلك: λ و μ و β. استبدال بعض هذه المعلمات إلى المعادلة الأولية الواردة. تهدف طريقة sine-cosine إلى إيجاد هذه المعلمات ، بحيث يكون من السهل إيجاد حلول تحليلية في شكل دالات $u(x,t)$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Gelombang merupakan peristiwa naik turunnya permukaan yang berupa bukit dan lembah yang mudah dilihat atau mudah diamati. Namun ada pula gerak gelombang yang sulit dilihat secara kasat mata yaitu gelombang internal. Contoh dari gelombang internal adalah gelombang soliter atau dikenal sebagai nama gelombang soliton. Gelombang soliton merupakan suatu gelombang berjalan yang dalam perambatannya mempertahankan bentuk dan kecepatannya. Formulasi yang digunakan untuk menggambarkan gerak gelombang internal adalah persamaan Korteweg-de Vries atau sering disingkat sebagai KdV (Lestari, 2013).

Persamaan KdV pertama kali diperkenalkan oleh Boussinesq (1877, catatan kaki di halaman 360) dan ditemukan kembali oleh Diederik Korteweg dan Gustav de Vries (1895) yang dinyatakan sebagai persamaan diferensial parsial orde dua dengan variabel bebas u dan variabel-variabel tak bebas x dan t. Variabel bebas u merupakan suatu fungsi gelombang yang menggambarkan keadaan gerak sistem untuk partikel pada posisi x dan pada waktu t (Dehghan & Shokri, 2018).

Mitchell (1980) telah memperkenalkan metode *sine-cosine* yang dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan differensial nonlinier secara analitik. Konsep metode *sine-cosine* mengacu pada jurnal utama yang ditulis Raslan, dkk (2017) yang berawal dari variabel gelombang dan diperoleh persamaan diferensial parsial yang di transformasi ke dalam persamaan diferensial biasa. Setelah melalui beberapa tahap didapatkan persamaan nonlinier yang mengandung unsur *sin* dan *cos* yang kemudian disubstitusikan dengan suatu persamaan nonlinier, sehingga menghasilkan solusi persamaan differensial nonlinier yang berupa periodik. Metode *sine-cosine* sering diterapkan untuk mencari solusi gelombang berjalan (*travelling wave*) pada persamaan differensial nonlinier (Jawad, 2012). Allah berfirman dalam surat az-Zumar ayat 18:

الَّذِينَ يَسْتَمِعُونَ الْقَوْلَ فَيَتَّبِعُونَ أَحْسَنَهُ ۚ أُولَٰئِكَ الَّذِينَ هَدَاهُمُ اللَّهُ ۖ وَأُولَٰئِكَ هُمْ أُولُو الْأَلْبَابِ

"*yang mendengarkan perkataan lalu mengikuti apa yang paling baik diantaranya. Mereka itulah orang-orang yang telah diberi petunjuk Allah dan mereka itulah orang-orang yang mempunyai akal*" (Q.S. az-Zumar : 18).

Menurut (Shihab, 2002), dalam ayat ini kita dianjurkan untuk selalu berbuat baik kepada siapapun. Seseorang yang senang melakukan kebaikan, akan semakin tertarik dengan kebaikan itu. Apabila dihadapkan dengan dua hal yaitu baik dan buruk, maka ia cenderung memilih mengerjakan yang baik. Lalu apabila ia menemukan hal yang lebih baik, maka ia akan memilih hal yang lebih baik itu. Kemudian apabila mereka menemukan dua hal yang benar dan yang lebih benar. Maka ia akan mengambil jalan yang lebih benar tersebut. Hal itu dikarenakan mereka bersungguh-sungguh dalam mendengarkan sebuah perkataan.

Sejatinya, itulah salah satu hakikat manusia yang diberikan akal supaya berpikir dan bisa menentukan mana yang baik dan mana yang buruk. Demikian pula jika diberikan suatu persoalan. Ada banyak cara yang digunakan untuk menyelesaikannya. Akan tetapi, manusia tentu saja memilih cara yang lebih mudah dalam menyelesaikan persoalan tersebut. Hal ini dapat diimplementasikan dalam matematika. Apabila menemukan sebuah persoalan matematika yang rumit, maka ditentukan metode yang paling tepat dalam menyelesaikan persamaan tersebut. Selanjutnya analisis hasil yang diperoleh dilakukan dengan cara membandingkannya dengan beberapa metode untuk dapat diperoleh kesimpulan hasil analisis yang baik.

Pada penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh (Jawad, 2012) yang menjabarkan tentang aplikasi metode *sine-cosine* dengan menggunakan beberapa persamaan differensial parsial nonlinier yang menghasilkan suatu solusi eksak. Dari penelitian tersebut peneliti mengemukakan bahwa metode *sin-cosine* telah berhasil diterapkan untuk menemukan solusi persamaan diferensial parsial nonlinier dan dapat diperluas untuk memecahkan masalah persamaan diferensial parsial nonlinier yang timbul dalam teori soliton dan bidang lainnya. Dari beberapa aplikasi metode *sine-cos*ine tersebut, penulis tertarik untuk menggunakan metode *sine-cosine* namun dengan persamaan yang berbeda. (Astreandini, 2016) telah menggunakan persamaan KdV nonlinier dalam penelitiannya dengan menggunakan metode dekomposisi adomain Laplace dan menghasilkan suatu solusi hampirannya.

Penelitian ini menggunakan metode *sine-cosine* dalam penyelesaian persamaan KdV nonlinier agar mempermudah penelitian selanjutnya dalam mencari solusi untuk persamaan nonlinier yang pada umumnya dianggap sulit untuk mendapatkan solusi eksaknya.

Berdasarkan penelitian-penelitian sebelumnya, maka penelitian ini bertujuan untuk menyesaikan suatu persamaan nonlinier dengan menggunakan metode *sine-cosine*. Persamaan yang digunakan kali ini adalah persamaan Korteweg-de Vries. Dari beberapa jenis persamaan KdV yang ada, penelitian ini memilih persamaan KdV dengan jenis homogen. Berdasarkan uraian sebelumnya, maka penulis mengangkat penelitian kali ini dengan judul "*Solusi Analitik Persamaan Korteweg-de Vries Dengan Menggunakan Metode* Sine-cosine".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang sebelumnya, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana penerapan metode *sine-cosine* pada penyelesaian persamaan KdV?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah sebelumnya, tujuan penelitian ini adalah untuk mencari solusi analitik metode *sine-cosine* dengan menggunakan persamaan KdV.

1.4 Manfaat Penelitian

Dengan memahami analisis metode sine-cosine pada penyelesaian persamaan KdV nonlinier dapat dipakai acuan untuk mengevaluasi keabsahan metode numerik pada hasil yang sama untuk penelitian berikutnya.

1.5 Batasan Masalah

Penilitian ini mengkaji masalah dari jurnal yang ditulis oleh (Raslan, El-Danaf, & Ali, 2017) dengan metode *sine-cosine*. Persamaan yang digunakan pada penelitian ini adalah (Wazwaz, 2009). Persamaan yang digunakan adalah persamaan KdV yang berjenis homogen

1. Persamaan yang digunakan adalah persamaan KdV yang berjenis homogen

$$u_t(x,t) - 6u(x,t)u_x(x,t) + u_{xxx}(x,t) = 0,$$

2. Asumsi kondisi awal yang digunakan adalah

$$u(x,0) = f(x),$$

1.6 Metode Penelitian

Teknik penelitian yang digunakan dalam penelitian ini yaitu deskriptif kuantitatif. Adapun langkah-langkah dalam penulisan penelitian ini merujuk pada jurnal (Raslan, El-Danaf, & Ali, 2017) adalah sebagai berikut:

1. Mentransformasikan persamaan KdV homogen $u_t(x,t) - 6u(x,t)u_x(x,t) + u_{xxx}(x,t) = 0$ ke dalam persamaan diferensial biasa. Dengan mengasumsikan bawha $u(x,t) = u(\xi)$ dan $\xi = x - ct$ maka menghasilkan sebuah persamaan diferensial biasa yang bergantung pada ξ. Hasil dari transformasi persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa tersebut kemudian diintegralkan terhadap ξ dan mengasumsikan konstanta menjadi nol.
2. Mensubtitusikan fungsi *sine-cosine* ke dalam persamaan hasil pengintegralan dari langkah ke-1.
3. Menyamakan eksponen-eksponen dan koefisien-koefisien pada setiap pasangan fungsi *cosine* yang dihasilkan dari langkah ke-2 sehingga menghasilkan beberapa sistem persamaan untuk setiap parameter λ, μ dan β.
4. Mensubstitusikan parameter yang diperoleh dari langkah ke-3 ke dalam persamaan dari metode *sine-cosine*, sehingga diperoleh solusi analitik persamaan KdV dengan menggunakan metode *sine-cosine*.

1.7 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan yang digunakan penulis terdiri dari empat bab yang masing-masing terdapat beberapa subbab seperti berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini berisi tentang definisi, maupun teorema-teorema yang mendukung topik yaitu definisi metode *sine-cosine*, persamaan KdV, serta kajian agama yang akan dipakai dalam pembahasan.

Bab III Pembahasan

Bab ini membahas tentang mencari solusi eksak pada persamaan KdV menggunakan metode *sine-cosine* sekaligus dengan simulasinya, serta pembahasan keagamaan.

Bab IV Penutup

Bab ini menyajikan poin-poin dari hasil dan pembahasan secara garis besar berupa kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Gelombang Soliton

Gelombang soliton adalah gelombang soliter (gelombang tunggal) yang memiliki sifat-sifat terlokalisasi dan merambat tanpa perubahan bentuk dan kecepatan. Gelombang ini memiliki sifat seperti partikel, yaitu jika gelombang soliton bertumbukan dengan gelombang soliton yang lain, profil dan kecepatannya tidak mengalami perubahan setelah tumbukan (Dinnullah, 2015).

Fenomena soliton tidak hanya diprediksi secara teori tetapi juga telah dibuktikan secara eksperimen. Pengamatan pertama dilakukan pada tahun 1844 oleh ilmuwan Skotlandia, John Scott-Russel (1808-1882). Pada tahun 1834, Russel mengamati fenomena gelombang air di kanal Eidenberg-Glaslow. Russel menyebut ini sebagai gelombang besar translasi. Gelombang air tersebut menjalar dengan bentuk yang tidak berubah sepanjang kanal dalam rentang waktu yang relatif lama (Agrawal, 2003).

2.2 Persamaan Korteweg-de Vries (KdV)

Persamaan KdV pertama kali diformulasikan sebagai bagian dari analisis gelombang air dangkal, kemudian ditemukan terlibat dalam berbagai fenomena fisika, terutama yang menunjukkan gelombang kejut, gelombang perjalanan, dan soliton. Fenomena teoritis teoretis tertentu dalam domain mekanika kuantum dijelaskan dengan menggunakan model KdV ini digunakan dalam dinamika fluida, aerodinamika, dan mekanika kontinum sebagai model untuk pembentukan gelombang, soliton, turbulensi, perilaku lapisan batas, dan transportasi massa (Xiang, 2015).

Persamaan KdV diperoleh dari persamaan dasar fluida ideal. Fluida ideal adalah fluida *incompressible* dan *invicid*, Fluida *incompressible* merupakan fluida yang tidak dapat dimampatkan, artinya volume dan massa jenisnya tidak berubah karena pengaruh tekanan (Tipler, 1998). Sedangkan fluida *invicid* adalah fluida tak kental. Persamaan dasar fluida ideal dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\rho_t + A\rho_x + w\rho_z = 0,$$

$$u_x + w_z = 0,$$

$$\rho(A_t + AA_x + wA_z) + p_x = 0,$$

$$\rho(w_t + Aw_x + ww_z) + p_z + \rho g = 0$$

pada seluruh domain fluida dan syarat batasnya berbentuk:

$$w = 0, di\ z = -h,$$

$$\eta_{ot} + A\eta_{ox} = w\ di\ z = \eta_0(x,t)$$

$$p = 0\ di\ z = \eta_0(x,t)$$

dengan $A(x,z,t)$ dan $w(x,z,t)$ masing-masing menyatakan kecepatan partikel dalam arah horizontal dan arah vertikal, $\rho(x,z,t)$ menyatakan rapat massa, p menyatakan tekanan, g menyatakan percepatan gravitasi, serta $x, z,$ dan t masing-masing menyatakan koordinat horizontal, vertikal dan waktu.

Penurunan persamaan gerak gelombang (persamaan KdV) dilakukan dengan memperkenalkan suatu parameter kecil α dan ε, yang masing-masing mengukur ketaklinearan dan dispersif. Persamaan KdV diperoleh dengan asumsi $\alpha = \varepsilon^2$, dan penyelesaian untuk A dinyatakan oleh

$$A = \alpha u_1(\theta,z,t) + \alpha^2 u_2(\theta,z,t) + \cdots \tag{2.1}$$

dengan $\tau = \varepsilon \alpha t, \theta = \varepsilon(x - ct)$. Fungsi u memenuhi

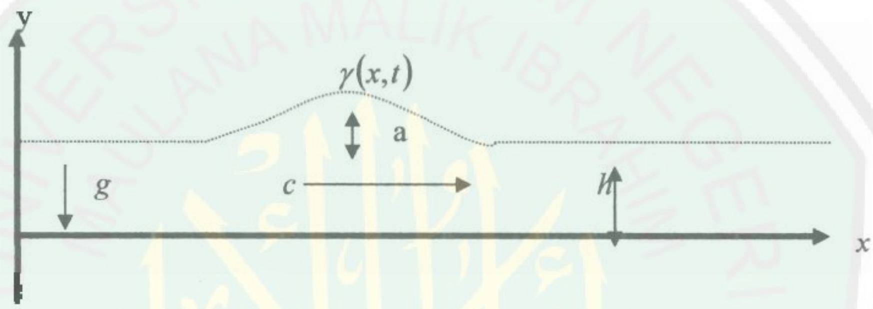
$$u_\tau + \delta u_{\theta\theta\theta} + \mu u u_\theta = 0$$

yang dikenal dengan persamaan KdV, dengan u menyatakan simpangan gelombang, δ dan μ masing-masing koefisien untuk suku dispersif dan taklinear (Grimshaw, 1997). Dengan menetapkan nilai $\delta = 1$ dan $\mu = -6$ maka didapatkan

$$u_\tau - 6uu_\theta + u_{\theta\theta\theta} = 0$$

kemudian memisalkan $\tau = t$ dan $\theta = x$:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.2)$$



Gambar 2.1 Bentuk Gelombang J.S Russell

Keterangan:

a = amplitudo gelombang

g = percepatan gravitasi

h = kedalaman tanpa gangguan

c = cepat rambat gelombang

persamaan gelombang air dangkal yang digunakan adalah tak rotasional (tak berotasi), tak kompresibel (tak termampatkan), invisid (tak kental) dan dibatasi oleh permukaan bebas pada bagian tas dan dibatasi oleh permukaan horizontal pada bagian bawah, sehingga diperoleh tiga persamaan dasar itu yaitu persamaan

Laplace, persamaan Bernoulli, dan potensial kecepatan yang menghasilkan persamaan KdV (Hidayati, 2006).

2.3 Metode *Sine-cosine*

Menurut (Raslan, El-Danaf, & Ali, 2017), sebuah variabel gelombang $\xi = x - ct$ mengubah setiap bentuk persamaan diferensial parsial

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots) = 0, \tag{2.3}$$

kedalam bentuk persamaan diferensial biasa

$$Q(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \tag{2.4}$$

Persamaan (2.4) diintegralkan selama semua unsur mengandung turunan, di mana kita mengabaikan konstanta integral. Solusi dari beberapa persamaan nonlinier dapat diekspresikan dalam bentuk berikut:

$$u(x,t) = \lambda sin^{\beta}(\mu\xi), \ \ |\xi| \leq \frac{\pi}{\mu}, \tag{2.5}$$

karena jika $-1 \leq \sin(\mu\xi) \leq 1$ maka $0 \leq (\mu\xi) \leq n\pi$

atau dalam bentuk

$$u(x,t) = \lambda cos^{\beta}(\mu\xi), \ \ |\xi| \leq \frac{\pi}{2\mu}, \tag{2.6}$$

Di mana λ, μ dan β adalah parameter yang akan ditentukan, μ dan c adalah nomer gelombang dan kecepatan gelombang.

Kita menggunakan

$$u(\xi) = \lambda sin^{\beta}(\mu\xi) \tag{2.7}$$

$$u^n(\xi) = \lambda^n sin^{n\beta}(\mu\xi) \tag{2.8}$$

$$(u^n)_{\xi} = n\mu\beta\lambda^n \cos(\mu\xi) sin^{n\beta-1}(\mu\xi) \tag{2.9}$$

$$(u^n)_{\xi\xi} = -n^2\mu^2\beta^2\lambda^n sin^{n\beta}(\mu\xi) + n\mu^2\lambda^n\beta(n\beta - 1) sin^{n\beta-2}(\mu\xi) \tag{2.10}$$

dan turunan dari (2.6) menjadi

$$u(\xi) = \lambda cos^{\beta}(\mu\xi) \tag{2.11}$$

$$u^n(\xi) = \lambda^n cos^{n\beta}(\mu\xi) \tag{2.12}$$

$$(u^n)_{\xi} = n\mu\beta\lambda^n \sin(\mu\xi) cos^{n\beta-1}(\mu\xi) \tag{2.13}$$

$$(u^n)_{\xi\xi} = -n^2\mu^2\beta^2\lambda^n cos^{n\beta}(\mu\xi) + n\mu^2\lambda^n\beta(n\beta-1)cos^{n\beta-2}(\mu\xi) \tag{2.14}$$

begitu juga dengan turunan lainnya. Kita substitusikan hasil turunan tersebut ke dalam persamaan (2.4), menyetarakan unsur-unsur dari fungsi *sin* ketika (2.7) digunakan untuk menyeimbangkan unsur dari fungsi *cos*.

Metode yang dijelaskan di atas tentu bekerja dengan baik untuk kelas besar persamaan gelombang nonlinier yang sangat menarik. Keuntungan utama dari metode *sine-cosine* yang disajikan di atas, adalah bahwa kemampuan besar mengurangi ukuran pekerjaan komputasi dibandingkan dengan teknik yang ada seperti metode spektral semu, metode hamburan terbalik, metode hamburan terbalik, metode bilinear Hirota dan ekspansi Painlev'e terpotong. Seluruh pekerjaan akan diubah dari penyelesaian persamaan diferensial nonlinier menjadi sekadar penyelesaian sistem persamaan aljabar yang dapat digunakan oleh program komputer manipulasi seperti Mathematica atau Maple (Wazwaz, 2009).

2.4 Metode Karakteristik

Merujuk pada (Zauderer, 2006), persamaan diferensial parsial linear orde pertama yang paling umum memiliki bentuk

$$a(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + b(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c(x,t)u(x,t) + d(x,t) \tag{2.15}$$

dimana $a, b, c.$ dan d merupakan suatu fungsi. Kecuali dinyatakan sebaliknya, fungsi-fungsi ini diasumsikan dapat terus diturunkan. Pada setiap titik (x, t) dimana vektor $[a(x,t), b(x,t)]$ didefinisikan dan bukan nol, sisi kiri (2.15) (dasarnya) mewakili turunan arah $u(x,t)$ ke arah $[a(x,t), b(x,t)]$. Persamaan

$$\frac{dx}{ds} = a(x,t), \qquad \frac{dt}{ds} = b(x,t) \tag{2.16}$$

menententukan sekelompok kurva $x = x(s), t = t(s)$. (Kurva tertentu dalam kelompok diberikan dengan menentukan titik di mana kurva harus lewat.) Vektor garis singgung ke kurva $x = x(s), t - t(s)$ adalah $[x'(s), t'(s)]$. Sistem (2.16) menyatakan bahwa vektor singgung bertepatan dengan arah vektor $[a(x,t), b(x,t)]$ pada setiap titik di mana $[a(x,i), b(x:t)]$ didefinisikan dan bukan nol. Oleh karena itu, turunan dari $u(x,t)$ di sepanjang kurva ini menjadi

$$\frac{du}{ds} = \frac{du[x(s),t(s)]}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{ds} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial t} = cu + d \tag{2.17}$$

dengan menggunakan aturan rantai dari (2.15) dan (2.16).

Keluarga kurva $a = x(s), t = t(s), u = u(s)$ ditentukan dengan memecahkan sistem persamaan diferensial biasa (2.16)-(2.17), disebut kurva karakteristik persamaan diferensial parsial (2.15). Karena persamaan (2.16) dapat diselesaikan secara independen dari (2.17), kurva dalam bidang (x,t) yang ditentukan dari (2.15) kadang-kadang juga disebut sebagai kurva karakteristik atau kurva basis karakteristik. Pendekatan yang kami kembangkan untuk memecahkan (2.15) dengan menggunakan solusi (2.16) - (2.17) disebut metode karakteristik. Seperti yang ditunjukkan, ini didasarkan pada interpretasi geometris dari persamaan diferensial parsial (2.15).

Masalah nilai awal untuk (2.15) diselesaikan dengan metode karakteristik sebagai berikut. Menggambarkan kurva awal C dengan parametrik sebagai

$$x = x(\tau), \qquad t = t(\tau), \quad u = u(\tau) \tag{2.18}$$

diberikan rentang nilai parameter τ. Kurva mungkin terbatas atau tidak terbatas dan harus memiliki vektor tangen kontinu di setiap titik. Setiap nilai τ menentukan titik di C yang melaluinya kurva karakteristik unik. Kelompok kurva karakteristik yang ditentukan oleh titik C dapat diparameterisasi sebagai

$$x = x(s,\tau), \qquad t = t(s,\tau), \quad u = u(s,\tau) \tag{2.19}$$

dimana $s = 0$ sesuai dengan kurva awal C. Artinya, memiliki $x(0,\boldsymbol{\tau}) = x(\tau), t(0,\tau) = t(\tau)$, dan $u(0,\tau) = u(\tau)$.

Berawal dari penggunaan aturan *wave motion* dengan persamaan karakteristik gelombang bergerak satu arah

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0 \tag{2.20}$$

dengan koefisien kosntan dan diberikan kondisi awal $u(x,0) = f(x)$. Untuk memecahkan masalah nilai awal dari persamaan tersebut, perlu membuat parameter dengan kurva awal

$$x = \tau, \qquad t = 0, \qquad u = f(\tau), \tag{2.21}$$

Dengan persamaan karakteristiknya

$$\frac{dx}{ds} = c, \quad \frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{du}{ds} = 0, \tag{2.22}$$

dengan kondisi awal ketika $s = 0$ diberikan (2.21). Sehingga

$$u(s,\tau) = u(0,\tau) = f(\tau) \tag{2.23}$$

dengan menggunakan (2.21), sehingga didapatkan

$$x(s,\tau) = \tau + sc, \quad t(s,\tau) = s \tag{2.24}$$

dengan menggunakan dua persamaan awal untuk menyelesaikan s dan τ sebagai fungsi x dan t menghasilkan

$$s = t, \;\; \tau = x - ct \tag{2.25}$$

substitusikan (2.25) ke dalam persamaan (2.24), sehingga

$$u(s,\tau) = f\big(\tau(x,t)\big) = f(x - ct)$$

dengan fungsi awal $u(x,0) = f(x)$ menunjukkan suatu bentuk gelombang. Maka solusi dari $u(s,\tau) = f(x - ct)$ menunjukkah bahwa suatu titik x yang mana $x - ct =$ konstan saat t bertambah, akan selalu menempati posisi yang sama pada bentuk gelombang. Jika $c > 0$, titik x tersebut bergerak ke kanan dengan kecepatan $\frac{dx}{dt} = c$. Karena x titik penentu, perhatikan bahwa seluruh bentuk gelombang awal $f(x)$ bergerak ke kanan dengan kecepatan c tanpa perubahan bentuk. Jika $c < 0$, maka arah gerakannya terbalik.

2.5 Kajian Agama

Dalam Al-Quran, Allah Swt berfirman:

إِنَّ فِي خَلۡقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَٱخۡتِلَٰفِ ٱلَّيۡلِ وَٱلنَّهَارِ وَٱلۡفُلۡكِ ٱلَّتِي تَجۡرِي فِي ٱلۡبَحۡرِ بِمَا يَنفَعُ ٱلنَّاسَ وَمَآ أَنزَلَ ٱللَّهُ مِنَ ٱلسَّمَآءِ مِن مَّآءٖ فَأَحۡيَا بِهِ ٱلۡأَرۡضَ بَعۡدَ مَوۡتِهَا وَبَثَّ فِيهَا مِن كُلِّ دَآبَّةٖ وَتَصۡرِيفِ ٱلرِّيَٰحِ وَٱلسَّحَابِ ٱلۡمُسَخَّرِ بَيۡنَ ٱلسَّمَآءِ وَٱلۡأَرۡضِ لَأٓيَٰتٖ لِّقَوۡمٖ يَعۡقِلُونَ ١٦٤

Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya malam dan siang, bahtera yang berlayar di laut membawa apa yang berguna bagi manusia, dan apa yang Allah turunkan dari langit berupa air, lalu dengan air itu Dia hidupkan bumi setelah mati (kering)-nya dan Dia sebarkan di bumi itu segala jenis hewan,dan pengisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi; sungguh (terdapat) tanda-tanda (keesaan dan kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan. (Q.S Al-Baqoroh:164)

Dalam ayat ini Allah Subhanahu wa Ta'ala menyebutkan mengenai tanda-tanda kebesaran-NYA dalam penciptaan seluruh makhluk-NYA dan tidak ada yang mampu mengambil pelajaran dari segala kebesaran penciptaan-NYA kecuali orang-orang yang berakal dan memakai akalnya untuk mentafakurinya. Pada tafsir

(Asyqar, 2007) diantara tanda-tanda kebesaran Allah yang disebutkan dalam ayat ini adalah sebagai berikut:

Pertama, Allah menciptakan langit yang kita lihat sekarang dengan ketinggiannya, keluasannya, keindahannya, bintang-bintangnya yang bertebaran, matahari yang menjadi pusat tatasurya, bulan yang peredarannya menajadi patokan penanggalan manusia, dan segala benda langit lainnya yang Allah ciptakan demi kemaslahat manusia. Kemudia Allah ciptakan bumi sebagai hamparan dengan tingkap kepadatannya, lembah-lembahnya, gunung-gunungnya, lautannya, padang saharanya, hutan-hutannya yang lebat, keramaiannya serta segala sesuatu yang ada padanya yang bermanfaat untuk manusia.

Kedua, yaitu pergantian siang dan malam yang dengan teraturnya silih berganti tidak terlambat sedikitpun. Tidak ada malam yang mendahului siang dan begitupula sebaliknya. Allah berfirman :

لَا الشَّمْسُ يَنْبَغِي لَهَا أَنْ تُدْرِكَ الْقَمَرَ وَلَا اللَّيْلُ سَابِقُ النَّهَارِ وَكُلٌّ فِي فَلَكٍ يَسْبَحُونَ

"Tidaklah mungkin bagi matahari mendapatkan bulan dan malampun tidak dapat mendahului siang. Dan masing-masing beredar pada garis edarnya". (QS : Yasin :40)

Adakalanya disebagian tempat lamanya siang lebih panjang dari malam, dan adakalanya juga lamanya malam lebih panjang dari siang. Dan hal itu silih berganti dengan teraturnya. Tidak ada yang mampu mengatur ritme peredaran matahari dan bulan ini kecuali Allah Subhanahu wa Ta'ala.

Ketiga, menundukan laut untuk bisa dilalui perahu berlayar diatasnya, firman-NYA:

وَالْفُلْكِ الَّتِي تَجْرِي فِي الْبَحْرِ بِمَا يَنْفَعُ النَّاسَ

"*Dan bahtera yang berlayar di laut membawa apa yang berguna bagi manusia*"

Yakni Allah tundukan laut agar dapat membawa berlayar perahu-perahu diatasnya, tidak membuat perahu tersebut tenggelam walaupun membawa beban yang berat. Perahu-perahu tersebut berlayar dari satu pantai ke pantai yang lain membawa barang-barang yang bermanfat bagi manusia. Menjadikan laut sebagai salah satu jalur transportasi manusia guna membawa barang-barang kebutuhan mereka dari satu pulau ke pulau yang lain.

Keempat, Allah turunkan hujan untuk menghidupkan bumi, firman-NYA :

وَمَا أَنْزَلَ اللَّهُ مِنَ السَّمَاءِ مِنْ مَاءٍ فَأَحْيَا بِهِ الْأَرْضَ بَعْدَ مَوْتِهَا

"*Dan apa yang Allah turunkan dari langit berupa air, lalu dengan air itu Dia hidupkan bumi sesudah mati (kering)-nya*".

Ayat ini semakna dengan ayat lain, yaitu firman-NYA :

وَآيَةٌ لَهُمُ الْأَرْضُ الْمَيْتَةُ أَحْيَيْنَاهَا وَأَخْرَجْنَا مِنْهَا حَبًّا فَمِنْهُ يَأْكُلُونَ *وَجَعَلْنَا فِيهَا جَنَّاتٍ مِنْ نَخِيلٍ وَأَعْنَابٍ وَفَجَّرْنَا فِيهَا مِنَ الْعُيُونِ *لِيَأْكُلُوا مِنْ ثَمَرِهِ وَمَا عَمِلَتْهُ أَيْدِيهِمْ أَفَلَا يَشْكُرُونَ * سُبْحَانَ الَّذِي خَلَقَ الْأَزْوَاجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنْبِتُ الْأَرْضُ وَمِنْ أَنْفُسِهِمْ وَمِمَّا لَا يَعْلَمُونَ*

"*Dan suatu tanda (kekuasaan Allah yang besar) bagi mereka adalah bumi yang mati. Kami hidupkan bumi itu dan Kami keluarkan dari padanya biji-bijian, maka daripadanya mereka makan.* Dan Kami jadikan padanya kebun-kebun kurma dan anggur dan Kami pancarkan padanya beberapa mata air,*supaya mereka dapat makan dari buahnya, dan dari apa yang diusahakan oleh tangan mereka. Maka mengapakah mereka tidak bersyukur?* Maha Suci Tuhan yang telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka maupun dari apa yang tidak mereka ketahui*". (QS. Yasin :33-36).

Kelima, Allah ciptakan hewan-hewan di bumi. Firman-NYA :

وَبَثَّ فِيهَا مِنْ كُلِّ دَابَّةٍ

"*Dan Dia sebarkan di bumi itu segala jenis hewan*"

Allah Subhanahu wa Ta'ala ciptakan di bumi ini berbagai jenis hewan dengan berbagai jenis bentuk,warna dan manfaat. ada yang kecil ada yang besar, ada hewan yang bisa dijadikan makanan untuk manusia ada juga yang bisa diminum susunya dan ada juga yang bisa dijadikan tunggangan untuk berkendara bepergian ke beragai tempat. Semua itu semata-mata sebagai rezeki bagi manusia di dunia.

Keenam, kisaran angin dan awan antara langit dan bumi, sebagaimna firman-NYA :

وَتَصْرِيفِ الرِّيَاحِ وَالسَّحَابِ الْمُسَخَّرِ بَيْنَ السَّمَاءِ وَالْأَرْضِ

"*Dan pengisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi*".

yakni adakalanya angin datang membawa rahmat dan adakalanya datang membawa azab. Adakalanya angin datang membawa tanda-tanda yang akan menggembirakan seperti awan yang datang sebelum turunnya hujan, dan adakalanya kadetangannya sebagai tanda yang menakutkan yang dapat menghancurkan apapun yang disapunya. Adakalanya angin datang dari arah timur ke barat adakalanya juga sebaliknya. Hal ini merupakan tanda-tanda kebesaran Allah Subhanahu wa Ta'ala yang meniupkan angin tersebut dari berbagai arah yang Allah kehendaki.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai penyelesaian secara analitik persamaan KdV menggunakan metode *sine-cosine*.

3.1 Penerapan Metode Transformasi Diferensial pada Penyelesaian Persamaan Difusi

Bentuk persamaan KdV nonlinier yang digunakan dalam penelitian ini merujuk pada (Wazwaz, 2009). yang dinyatakan dalam:

$$u_t(x,t) - 6u(x,t)u_x(x,t) + u_{xxx}(x,t) = 0, \tag{3.1}$$

Langkah 1

Solusi dari persamaan KdV dapat dimisalkan sebagai sebuah paket gelombang. Sedangkan profil dari gelombang itu sendiri memiliki bilangan gelombang, periode gelombang, dan panjang gelombang. Berawal dari penggunaan aturan *wave motion* dengan persamaan karakteristik gelombang bergerak satu arah yang berdasarkan pada kajian pustaka tentang metode karakteristik. Penggunaan permisalan gelombang pada persamaan tersebutlah yang digunakan sebagai acuan untuk mentransformasikan bentuk persamaan KdV ke dalam persamaan differensial biasa. Artinya solusi yang seharusnya bergantung pada dua variabel bebas, diubah terlebih dahulu ke dalam bentuk solusi yang hanya bergantung pada satu variabel bebas. Dengan memisalkan

$$\xi = x - ct \tag{3.2}$$

maka solusi persamaan dapat dituliskan sebagai

$$u(x,t) = u(\xi(x,t)) \tag{3.3}$$

sehingga dari permisalan tersebut, maka langkah selanjutnya adalah mentransformasikan dari Persamaan KdV ke PDB yang dapat menggunakan aturan rantai.

Untuk mentransformasikan persamaan (3.1) ke dalam persamaan differensial biasa digunakan aturan rantai yaitu:

$$-c\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -c\frac{du(\xi)}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = u'(\xi)(-c) = -cu'(\xi)$$

$$6u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 6u(\xi)\left(\frac{du(\xi)}{d\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = 6u(\xi)\cdot u'(\xi) \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial u''(\xi)}{\partial x} = \frac{du''(\xi)}{d\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} = u'''(\xi)$$

Selanjutnya persamaan (3.4) disubstitusi ke persamaan (3.1) sehingga menjadi

$$-cu'(\xi) - 6u(\xi)\,u'(\xi) + u'''(\xi) = 0 \tag{3.5}$$

Kemudian mengintegralkan masing-masing ruas terhadap ξ dengan konstanta dianggap nol. Hal ini dilakukan untuk mencari suatu nilai yang akan dibahas selanjutnya.

$$\int \left(-cu'(\xi) - 6u(\xi)\,u'(\xi) + u'''(\xi)\right) d\xi = \int 0\, d\xi$$

$$\int -cu'(\xi)\, d\xi - \int 6u(\xi)u'(\xi)\, d\xi + \int u'''(\xi) d\xi = \int 0\, d\xi$$

$$\int -c\frac{du(\xi)}{d\xi} d\xi - \int 6u(\xi)\frac{du(\xi)}{d\xi} d\xi + \int \frac{d^3u(\xi)}{d\xi^3}\, d\xi = \int 0\, d\xi$$

Untuk yang $\int 6u(\xi)\frac{du(\xi)}{d\xi} d\xi$ dengan cara menggunakan aturan turunan parsial , dengan permisalan:

1. $v = u(\xi)$ maka $dv = du(\xi)$

2. $dw = \frac{du(\xi)}{d\xi} d\xi$ maka $w = u(\xi)$

kemudian disubstitusikan $\int v\, dw = v\, w - \int w\, dv$, sehingga

$$6\int v\, dw = 6\left(u(\xi)u(\xi) - \int u(\xi)\, du(\xi)\right)$$

$$= 6\left(u^2(\xi) - \frac{1}{2}u^2(\xi)\right)$$

$$= 6\left(\frac{1}{2}u^2(\xi)\right)$$

$$= 3u^2(\xi)$$

Sehingga didapat

$$-cu(\xi) - 3u^2(\xi) + u''(\xi) = C$$

dimana C adalah konstanta integrasi. Perhatikan bahwa untuk memperoleh solusi persamaan KdV, sifat $u(\xi)$ beserta semua turunan-turunan terhadap ξ menuju nol sebagaimana $|\xi| \to \pm\infty$. Oleh karena itu, nilai konstanta C haruslah nol, sehingga

$$-cu(\xi) - 3u^2(\xi) + u''(\xi) = 0 \qquad (3.6)$$

Langkah 2

Selanjutnya mensubtitusikan persamaan (2.11), (2.12), dan (2.14) ke dalam persamaan (3.6)

$$-cu(\xi) - 3u^2(\xi) + u''(\xi) = 0$$

Dari persamaan tersebut setiap suku disubstitusikan ke persamaan dari metode:

$$-cu(\xi) = -c\lambda cos^{\beta}(\mu\xi)$$

$$3u^2(\xi) = 3\lambda^2 cos^{2\beta}(\mu\xi)$$

$u''(\xi) = -\lambda\mu^2\beta^2 cos^{\beta}(\mu\xi) + \lambda\mu^2\beta(\beta-1)cos^{\beta-2}(\mu\xi)$

Sehingga diperoleh

$$-c\lambda cos^{\beta}(\mu\xi) - 3\lambda^2 cos^{2\beta}(\mu\xi) - \lambda\mu^2\beta^2 cos^{\beta}(\mu\xi) + \lambda\mu^2\beta(\beta - 1)\, cos^{\beta-2}(\mu\xi) = 0 \tag{3.7}$$

Langkah 3

Menyetarakan pangkat dan koefisien pada setiap pasangan fungsi *cosine* yang dihasilkan dari langkah ke-2 sehingga menghasilkan beberapa sistem persamaan untuk setiap parameter λ, μ dan β.

Dari persamaan (3.7) dapat ditulis seperti berikut

$$(-c\lambda - \lambda\mu^2\beta^2)cos^{\beta}(\mu\xi) - 3\lambda^2 cos^{2\beta}(\mu\xi) + \lambda\mu^2\beta(\beta - 1)\, cos^{\beta-2}(\mu\xi) = 0 \tag{3.8}$$

dari persamaan (3.8) agar bernilai nol, sehingga diperoleh

$$-c\lambda - \lambda\mu^2\beta^2 = 0 \tag{3.9}$$

dan

$$-3\lambda^2 cos^{2\beta}(\mu\xi) + \lambda\mu^2\beta(\beta-1)\, cos^{\beta-2}(\mu\xi) = 0 \tag{3.10}$$

kemudian diproses (3.10) dengan syarat terlebih dahulu menyetarakan pangkat agar dapat dikelompokkan

$2\beta = \beta - 2$

$2\beta - \beta = -2$

sehingga diperoleh $\beta = -2$ dan disubstitusikan ke dalam (3.10)

$$-3\lambda^2 cos^{-4}(\mu\xi) + \lambda\mu^2\beta(\beta-1)\, cos^{-4}(\mu\xi) = 0 \tag{3.11}$$

dan sekaligus dapat dikelompokkan menjadi

$$\left(-3\lambda^2 + \lambda\mu^2\beta(\beta-1)\right) cos^{-4}(\mu\xi) = 0 \tag{3.12}$$

agar (3.12) bernilai nol, sehingga didapat

$$-3\lambda^2 + \lambda\mu^2\beta(\beta - 1) = 0 \tag{3.13}$$

kemudian menyelesaikan beberapa sistem untuk mendapatkan nilai λ, μ dan β

1. Mencari nilai μ dari (3.9)

$-c\lambda = \lambda\mu^2\beta^2$

$-c = \mu^2\beta^2$

$\mu^2 = -\frac{c}{\beta^2}$

mensubstitusikan $\beta = -2$

$\mu^2 = -\frac{c}{(-2)^2}$

$\mu^2 = -\frac{c}{4}$

$\mu = \sqrt{-\frac{c}{4}}$

sehingga diperoleh $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{-c}$

2. Mencari nilai λ dari (3.13)

$-3\lambda^2 = -\lambda\mu^2\beta(\beta - 1)$

$\frac{3\lambda^2}{\lambda} = \mu^2\beta(\beta - 1)$

$3\lambda = \mu^2\beta(\beta - 1)$

mensubstitusikan $\beta = -2$

$3\lambda = \mu^2(-2)\big((-2) - 1\big)$

$3\lambda = \mu^2(-2)(-3)$

$3\lambda = \mu^2 6$

$\lambda = 2\mu^2$

mensubstitusikan $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{-c}$

$$\lambda = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\right)^2$$

sehingga diperoleh $\lambda = -\frac{1}{2}c$

Langkah 4

Mensubtitusikan parameter yang diperoleh dari langkah ke-3 yaitu $\beta = -2$, $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{-c}$, dan $\lambda = -\frac{1}{2}c$ ke dalam persamaan dari metode *sine-cosine* (2.11) yang masih dalam bentuk persamaan diferensial biasa, sehingga diperoleh solusi analitik persamaan KdV dengan menggunakan metode *sine-cosine*, sebagai berikut:

$$u(\xi) = -\frac{1}{2}c\, cos^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,\xi\right) \tag{3.14}$$

Langkah 5

Langkah terakhir yaitu mengecek apakah persamaan (3.14) merupakan solusi eksak dari persamaan KdV. Langkah ini dilakukan dengan cara mensubstitusikan persamaan (3.14) ke dalam persamaan (3.5).

1. Mencari turunan pertama terhadap ξ dari persamaan (3.14)

$$\frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\left[-\frac{1}{2}c\, cos^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,\xi\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}c\frac{d}{d\xi}\left[\, cos^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,\xi\right)\right]$$

menggunakan aturan $\frac{du(\xi)^n}{d\xi} = n\, u(\xi)^{n-1}u'(\xi)$ sehingga

$$\frac{du(\xi)}{d\xi} = -\frac{1}{2}(-2)\, cos^{-3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,\xi\right)\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-c}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,\xi\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{-c}\, c\;\; cos^{-3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,\xi\right)\, \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,\xi\right)$$

$$\frac{du(\xi)}{d\xi}=-\frac{\sqrt{-c}\,c\ \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,\xi\right)}{2\,cos^3\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,\xi\right)}$$

2. Mencari turunan kedua terhadap ξ dari persamaan (3.14)

$$\frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2}=\frac{d}{d\xi}\left[-\frac{\sqrt{-c}\,c\ \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,\xi\right)}{2\,cos^3\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,\xi\right)}\right]$$

$$=-\frac{\sqrt{-c}\,c}{2}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,\xi\right)}{cos^3\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,\xi\right)}\right]$$

dengan menggunakan aturan $\frac{d}{d\xi}\left(\frac{u(\xi)}{v(\xi)}\right)=\frac{u\prime(\xi)v(\xi)-u(\xi)v\prime(\xi)}{v(\xi)^2}$ sehingga

$$\frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2}=-\frac{\sqrt{-c}\,c}{2}\left(\frac{\frac{\sqrt{-c}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)cos^3\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)}{\left(cos^3\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,\xi\right)\right)^2}\right.$$
$$\left.-\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)3\,cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)\left(-\frac{\sqrt{-c}}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)}{\left(cos^3\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,\xi\right)\right)^2}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{-c}\,c}{2}\left(\frac{\frac{\sqrt{-c}}{2}cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)+\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\right)3\,cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)}{\left(cos^3\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,\xi\right)\right)^2}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{-c}\,c\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)+\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\right)3\,cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)\right)}{2\,cos^6\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)}$$

$$=-\frac{\sqrt{-c}\,c\left(\frac{\sqrt{-c}cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)}{2}+\frac{3\sqrt{-c}\,cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)}{2}\right)}{2\,cos^6\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)}$$

$$=-\frac{\frac{c^2cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)}{2}+\frac{3\,c^2\,cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)}{2}}{2\,cos^6\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)}$$

$$= \frac{c^2 cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right) + 3\,c^2\, cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right) sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)}{4\, cos^6\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)}$$

$$= \frac{c^2}{4\, cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)} + \frac{3\,c^2\, sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)}{4\, cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)}$$

$$\frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} = \frac{c^2\left(3\, sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right) + cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)\right)}{4\, cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)}$$

3. Mencari turunan ketiga terhadap ξ dari persamaan (3.14)

$$\frac{d^3u(\xi)}{d\xi^3} = \frac{d}{d\xi}\left[\frac{c^2\left(3\, sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right) + cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)\right)}{4\, cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)}\right]$$

$$= \frac{c^2}{4}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{\left(3\, sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right) + cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)\right)}{cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)}\right]$$

dengan menggunakan aturan $\frac{d}{d\xi}\left(\frac{u(\xi)}{v(\xi)}\right) = \frac{u\prime(\xi)v(\xi) - u(\xi)v\prime(\xi)}{v(\xi)^2}$ sehingga

$$\frac{d^3u(\xi)}{d\xi^3} = \frac{c^2}{4}\left[\frac{\frac{d}{d\xi}\left(3\, sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right) + cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)\right) cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)}{\left(cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)\right)^2} - \frac{\left(3\, sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right) + cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)\right)\frac{d}{d\xi}\left(cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)\right)}{\left(cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)\right)^2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{-c}\; c^2 sin\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)\left(3\, sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right) + cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)\right)}{2\, cos^5\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)} + \frac{\sqrt{-c}\; c^2 sin\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)}{2\, cos^3\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\,\xi\right)}$$

$$\frac{d^3u(\xi)}{d\xi^3} = \frac{\sqrt{-c}\; c^2 sin\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)\left(3\; sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right) + 2\; cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\;\xi\right)\right)}{2\; cos^5\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\;\xi\right)}$$

kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (3.5):

$$-cu'(\xi) - 6u(\xi)\, u'(\xi) + u'''(\xi) = 0$$

$$-c\left(-\frac{\sqrt{-c}\; c\;\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\;\xi\right)}{2\; cos^3\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\;\xi\right)}\right) - 6\left(-\frac{1}{2}c\; cos^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\;\xi\right)\right)\left(-\frac{\sqrt{-c}\; c\;\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\;\xi\right)}{2\; cos^3\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\;\xi\right)}\right)$$

$$+\frac{\sqrt{-c}\; c^2 sin\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right)\left(3\; sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\xi\right) + 2\; cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\;\xi\right)\right)}{2\; cos^5\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\;\xi\right)} = 0$$

Solusi pada persamaan (3.14) merupakan solusi yang masih bergantung pada ξ. Meski begitu, solusi ini juga terbukti eksak karena telah dilakukan pembuktian keabsahan solusi. Selanjutnya, perlu mengubah persamaan (3.14) menjadi sebuah solusi yang bergantung pada x dan t dengan merujuk pada (3.2), sehingga didapat:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}c\; cos^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\;(x-ct)\right) \tag{3.15}$$

Hasil dari solusi pada persamaan (3.15) perlu dilakukan pengecekan keabsahan dari solusi tersebut. Dengan cara mensubstitusikan persamaan (3.15) ke dalam persamaan (3.1).

1. Mencari turunan pertama terhadap t dari persamaan (3.15)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[-\frac{1}{2}c\; cos^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\;(x-ct)\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}c\,.\frac{\partial}{\partial t}\left[cos^{-2}\left(\frac{\sqrt{-c}\;(x-ct)}{2}\right)\right]$$

menggunakan aturan $\frac{\partial u(x,t)^n}{dt} = n\; u(x,t)^{n-1}u'(x,t)$ sehingga

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{(-2)\ c\ cos^{-3}\left(\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right).\frac{\partial}{\partial t}\left[cos^{-2}\left(\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right)\right]}{2}$$

$$= \frac{c\ \left(-sin\left(\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right)\right).\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right]}{cos^3\left(\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right)}$$

$$= -\frac{(-c\sqrt{-c})\ c\ sin\left(\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right)}{2\ cos^3\left(\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{-c}\ c^2\ sin\left(\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right)}{2\ cos^3\left(\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right)}$$

2. Mencari turunan pertama terhadap x dari persamaan (3.15)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{1}{2}c\ cos^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\ (x-ct)\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}c\ .\frac{\partial}{\partial x}\left[cos^{-2}\left(\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right)\right]$$

menggunakan aturan $\frac{\partial u(x,t)^n}{dx} = n\ u(x,t)^{n-1}u'(x,t)$ sehingga

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = -\frac{(-2)\ c\ cos^{-3}\left(\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right).\frac{\partial}{\partial x}\left[cos^{-2}\left(\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right)\right]}{2}$$

$$= \frac{c\ \left(-sin\left(\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right)\right).\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right]}{cos^3\left(\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right)}$$

$$= -\frac{\sqrt{-c}\ (1)\ c\ sin\left(\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right)}{2\ cos^3\left(\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right)}$$

$$= -\frac{\sqrt{-c}\ c\ sin\left(\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right)}{2\ cos^3\left(\frac{\sqrt{-c}\ (x-ct)}{2}\right)}$$

3. Mencari turunan kedua terhadap x dari persamaan (3.15)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\sqrt{-c}\,c\,sin\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}{2\,cos^3\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}\right]$$

$$=-\frac{\sqrt{-c}\,c}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{sin\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}{cos^3\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}\right]$$

dengan menggunakan aturan $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u(x,t)}{v(x,t)}\right)=\frac{u\prime(x,t)v(x,t)-u(x,t)v\prime(x,t)}{v(x,t)^2}$ sehingga

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=-\sqrt{-c}\,c\left(\frac{cos\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right]cos^3\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}{2\,cos^6\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}\right.$$
$$\left.-\frac{3\,cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[cos\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\right]sin\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}{2\,cos^6\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}\right)$$

$$=-\sqrt{-c}\,c\left(\frac{\frac{\sqrt{-c}}{2}\,cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}{2\,cos^6\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}\right.$$
$$\left.+\frac{3\,\frac{\sqrt{-c}}{2}\,cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\,sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}{2\,cos^6\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}\right)$$

$$=-\sqrt{-c}\,c\left(\frac{\frac{\sqrt{-c}\,cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}{2}}{2\,cos^6\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}\right.$$
$$\left.+\frac{3\,\frac{\sqrt{-c}\,cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\,sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}{2}}{2\,cos^6\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}\right)$$

$$= \frac{3\,c^2 sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}{4\,cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)} + \frac{c^2}{4\,cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{c^2\left(3\,sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right) + cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\right)}{4\,cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}$$

4. Mencari turunan ketiga terhadap x dari persamaan (3.15)

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{c^2\left(3\,sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right) + cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\right)}{4\,cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{c^2}{4}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{3\,sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right) + cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}{cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}\right]$$

dengan menggunakan aturan $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u(x,t)}{v(x,t)}\right) = \frac{u\prime(x,t)v(x,t) - u(x,t)v\prime(x,t)}{v(x,t)^2}$ sehingga

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = c^2\left(\cos^4\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\frac{\left(3\cdot\frac{d}{dx}\left[sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\right] + \frac{d}{dx}\left[cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\right]\right)}{4\cos^8\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}\right.$$

$$- \frac{\cdot\left(3\sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\right)}{4\cos^8\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)} 4\cos^3\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)$$

$$\left.\cdot\frac{d}{dx}\left[cos\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\right]\right)$$

$$= c^2\left(\frac{2\sqrt{-c}\,cos^3\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right) sin\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\left(3\,sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right) + cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\right)}{4\cos^8\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}\right.$$

$$\left. + \frac{2\sqrt{-c}\,cos^5\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right) sin\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}{4\cos^8\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{-c}\,c^2\,sin\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\left(3\,sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)+cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\right)}{2\cos^5\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)} + \frac{\sqrt{-c}\,c^2\,sin\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}{2\cos^3\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}$$

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = \frac{\sqrt{-c}\,c^2\,sin\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\left(3\,sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)+\,2\,cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\right)}{2\cos^5\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}$$

kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (3.1)

$$\frac{\sqrt{-c}\,c^2\,sin\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}{2\,cos^3\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}$$

$$-\,6\left(-\frac{1}{2}c\,cos^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,(x-ct)\right)\right)\left(-\frac{\sqrt{-c}\,c\,sin\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}{2\,cos^3\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)}\right)$$

$$+\frac{\sqrt{-c}\,c^2\,sin\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\left(3\,sin^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)+\,2\,cos^2\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)\right)}{2\cos^5\left(\frac{\sqrt{-c}\,(x-ct)}{2}\right)} = 0$$

Setelah dilakukan pengecekan keabsahan solusi (3.15) terhadap persamaan awal, kemudian dilakukan pengecekan terhadap kondisi awal $u(x,0) = f(x)$

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}c\,cos^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,(x-ct)\right)$$

dengan mensubstitusikan nilai $t = 0$, sehingga diperoleh

$$u(x,0) = -\frac{1}{2}c\,cos^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,\left(x-c(0)\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}c\,cos^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,(x)\right)$$

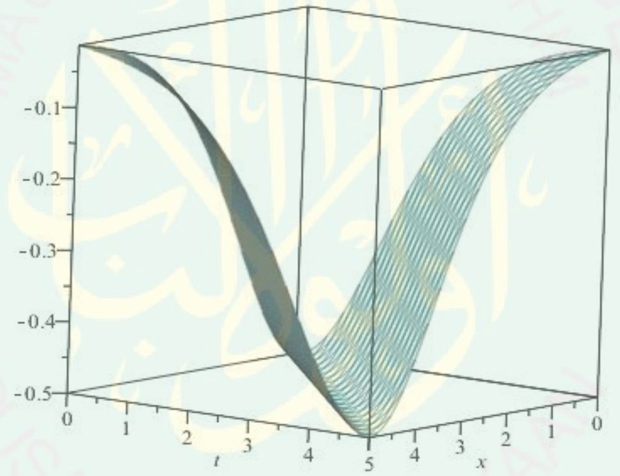
$$f(x) = -\frac{1}{2}c\,cos^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\,(x)\right)$$

artinya, apapun solusi yang dihasilkan dari $u(x,t)$ jika disubstitusikan nilai $t = 0$, maka akan menghasilkan suatu fungsi yang bergantung pada x dan dapat dianggap sebagai $f(x)$. Dari langkah tersebut, maka terbukti bahwa solusi (3.14) merupakan solusi analitik dari persamaan KdV nonlinier.

Langkah 6

Mensimulasikan solusi persamaan KdV yang telah diperoleh dengan menggunakan metode *sine-cosine*. Berikut diberikan plot solusi dari persamaan KdV untuk $u(x,t) = -\frac{1}{2}c\ cos^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\ (x-ct)\right)$

> $restart$
> $c := 1:$
> $pers := -\frac{1}{2}\cdot c\cdot \cos^{-2}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-c}\,(x-c\cdot t)\right):$
> $plot3d(pers, x = 0..5, t = 0..5, grid = [100, 100], color = \text{"SkyBlue"})$



Dari hasil simulasi tersebut ketika x dan t nilainya 0, tinggi gelombangnya berada pada 0. Prilaku gelombang untuk solusi $u(x,t) = -\frac{1}{2}c\ cos^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\ (x-ct)\right)$ yaitu terus turun sesuai dengan pertambahan nilai x dan t. Lembah terendah gelombang yang didapatkan yaitu sebesar -0.5.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Adapun kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian ini adalah bahwa metode *sine-cosine* telah berhasil diterapkan dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinier terutama pada persamaan Korteweg-De Vries. Dari penelitian ini diperoleh solusi analitik dari persamaan Korteweg-De Vries yaitu:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}c\ cos^{-2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-c}\ (x-ct)\right)$$

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk membahas lebih detail mengenai metode *sine-cosine* dalam penerapan pada persamaan diferensial parsial nonlinier terutama pada persamaan Korteweg-De Vries nonlinier maupun persamaan diferensial parsial nonlinier lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

Agrawal, Y. S. (2003). Optical Solution. *Fiber to Photonic Crystal, Amsterdam*, 39-44.

Astreandini, Y. (2016). *Penyelesaian Persamaan Kortwege-De Vries (KdV) Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace.* Malang.

Asyqar, S. D. (2007). *ubdatut Tafsir Min Fathil Qadir.* Madinah: Tafsir Web.

Dehghan, M., & Shokri, A. (2018). Numerical Solution of the nonlinier Klein-Gordon Equation using radial basis function. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 400-410.

Dinnullah, R. N. (2015). Solusi Eksak Gelombang Soliton: Persamaan Schrodinger Nonlinear Nonlokal (NNLS) . *Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Kanjuruhan Malang*, 39-44.

Grimshaw, J. (1997). Internal Solitary Waves : Advances in Coastal and Ocean Engineering. *P.L.F Liu, World Scientific Publ. Comp*, 1-30.

Hidayati. (2006). *Model Analitik Persamaan Gelombang Nonlinear J.S Russell dan Solusinya melalui Transformasi backlund.* Padang: Universitas Negeri Padang.

Jawad, A. J. (2012). *The Sine-Cosine Function Method for the Exact Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations.* Baghdad Iraq: ResearchGate.

Lestari, D. (2013). *Analisis Solusi Persamaan Korteweg-De Vries (KdV) Dengan Menggunakan Metode Lax Wendroff.* Universitas Negeri Jember.

Raslan, K. R., El-Danaf, T. S., & Ali, K. K. (2017). New exact solution of coupled general equal width wave equation using sine-cosine function method. *Journaal of the Egyptian Mathematical Society*, 1-5.

Shihab, M. Q. (2002). *Tafsir Al-Misbah Volume 15*. Jakarta : Lentera Hati.

Wazwaz, A. (2009). *Partial Differential Equation and Solitary Waves Theory*. Beijing : Higher Education Press.

Xiang, T. (2015). *A Summary of the Korteweg-De Vries Equation*. Beijing: Research.

Zauderer, E. (2006). *Partial Differential Equations of Applied Mathematics.* Canada: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

RIWAYAT HIDUP

Ahmad Ulul Hazmi, pria kelahiran Gresik pada tanggal 12 April tahun 1998, adalah putra terakhir dari empat bersaudara.

Pria yang akrab disapa Hazmi ini telah mengenyam pendidikan formal mulai dari TK DWP Pegundan, lalu beralih menjadi siswa sekolah dasar di SDN Pegundan, kemudian, di tahun 2009, tercatat sebagai siswa MTs Assa'adah I Bungah Gresik dan pada 2012 beranjak ke seragam "putih abu-abu" di MA Assa'adah Bungah kabupaten Gresik. Di tahun 2015, ia melangkah menjadi mahasiswa di salah satu kampus negeri di Malang, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, dengan mengambil jurusan matematika dan pernah menjadi pengurus HMJ selama dua semester atau satu periode.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ahmad Ulul Hazmi
NIM : 15610074
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Solusi Analitik Persamaan Korteweg-de Vries dengan Metode *Sine-Cosine*
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	20 Agustus 2018	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	21 Agustus 2019	Konsultasi Agama Bab I	2.
3.	26 Agustus 2019	Revisi Bab II	3.
4.	26 Agustus 2019	Konsultasi Agama Bab II	4.
5.	27 Agustus 2019	Konsultasi Bab III	5.
6.	30 Agustus 2019	ACC Kajian Agama	6.
7.	30 Agustus 2019	ACC Proposal Skripsi	7.
8.	31 Oktober 2019	Konsultasi Bab III dan Bab IV	8.
9.	01 November 2019	ACC Kajian Keagamaan	9.
10.	04 November 2019	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 04 November 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001