SYARAT PERLU DAN CUKUP KETERBATASAN PERUMUMAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL PADA RUANG MORREY KLASIK

SKRIPSI

OLEH
KURNIA SHINTA LATUSINDAH
NIM. 15610060

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SYARAT PERLU DAN CUKUP KETERBATASAN PERUMUMAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL PADA RUANG MORREY KLASIK

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Kurnia Shinta Latusindah
NIM. 15610060

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SYARAT PERLU DAN CUKUP KETERBATASAN PERUMUMAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL PADA RUANG MORREY KLASIK

SKRIPSI

Oleh
Kurnia Shinta Latusindah
NIM. 15610060

Telah Diperiksa dan Disetujui

untuk Diuji Tanggal 01 November 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Hairur Rahman, M.Si	Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003	NIDT. 19900511 20160801 1 057

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SYARAT PERLU DAN CUKUP KETERBATASAN PERUMUMAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL PADA RUANG MORREY KLASIK

SKRIPSI

Oleh
KURNIA SHINTA LATUSINDAH
NIM. 15610060

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 2 Desember 2019

Penguji Utama	: Dr. Elly Susanti, S.Pd, M.Sc	....
Ketua Penguji	: Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji	: Muhammad Khudzaifah, M.Si	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Kurnia Shinta Latusindah
NIM	:	15610060
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Syarat Perlu dan Cukup Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Klasik

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan saya tersebut.

Malang, 01 November 2019
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
8B57BAHF127367731
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Kurnia Shinta Latusindah
NIM.15610060

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTO

"*Never let world to change your smile*"

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Imam Sutikno dan Reno Wati selaku orang tua sebagai hadiah ulang tahun yang mereka inginkan, serta yang telah memberikan do'a, semangat, dan motivasi. Terimakasih juga untuk Lalisa Manoban dan Kim Taehyung yang memberikan semangat.

Dan teman-teman yang mendukung dalam perjalanan pengerjaan skripsi ini.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarokatuh

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi dengan judul "Syarat Perlu dan Cukup Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Klasik" ini dengan baik. Shalawat serta salam selalu terlimpahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad Saw, yang telah menuntun umat Islam ke jalan keselamatan.

Skripsi ini penulis susun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar sarjana matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Dengan ini, penulis mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya dan penghargaan setinggi-tingginya terutama kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik IbrahimMalang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah membimbing penulis dengan segala ilmu yang dimiliki serta doa, arahan, nasihat, dan motivasi dalam penyusunan skripsi ini.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

5. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan berbagai ilmunya kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini.
6. Moh. Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen wali dan segenap dosen jurusan matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan bantuan dan semangat selama menjalankan kuliah, serta memberikan ilmunya.
7. Kedua orang tua penulis dan seluruh keluarga penulis yang selalu memberikan perhatian, dukungan, materi, doa, semangat, kasih sayang, serta motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Semua pihak yang secara langsung dan tidak langsung telah ikut memberikan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini.

Dalam penulisan laporan hasil penelitian atau skripsi ini, penulis menyadari terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis berharap pembaca memakhlumi. Semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca. *Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Malang, 01 November 2019

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Latusindah, Kurnia Shinta. 2019. **Syarat Perlu dan Cukup Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Klasik**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Kata kunci: Keterbatasan perumuman operator integral fraksional, ruang Morrey klasik, syarat perlu, syarat cukup

Operator integral fraksional I_α banyak dibahas mengenai keterbatasannya dari suatu ruang kelas ekuivalen fungsi yang dilengkapi dengan suatu norma ke suatu ruang kelas ekuivalen fungsi yang dilengkapi suatu norma lainnya. Hardy, Littlewood dan Sobolev membahasnya dalam ruang Lebesgue yang dikenal sebagai ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev, kemudian dikembangkan oleh Imam Utoyo yang menyatakan bahwa operator ini terbatas pada ruang morrey klasik non- homogen. Tujuan penelitian ini adalah menentukan syarat perlu dan syarat cukup untuk keterbatasan operator integral fraksional pada ruang Lebesgue dan ruang Morrey klasik dimana pembuktian hasilnya serupa dengan teorema Hardy-Littlewood-Sobolev dan teorema Imam Utoyo tetapi untuk kasus $n = 1$. Berdasarkan penggunaan fungsi karakteristik dan ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev diperoleh hasil bahwa syarat perlu dan syarat cukup untuk keterbatasan operator integral fraksional pada ruang Morrey klasik adalah $\mu(B(x,r)) \leq Cr^S$ dimana $s = \frac{pq(1-\alpha)}{pq+p-q}$, dengan μ memenuhi kondisi *growth*. Pada penelitian selanjutnya, diharapkan dapat melakukan pembuktian syarat cukup dan syarat perlu untuk keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada ruang lain.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Latusindah, Kurnia S. 2019. **The Necessary Condition and Sufficient Condition for The Boundedness of Fractional Integral Generalized Operator on Classic Morrey Spaces**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Keywords: Fractional integral generalized operator, classic Morrey spaces, the boundedness, necessary conditin, sufficient condition

Fractional integral operator I_α was discussed on its boundedness from a equivalent function class space that completed with norm to another equivalent function class space that completed with norm. Hardy, Littlewood and Sobolev had discuss it on Lebesgue spaces known as Hardy-Littlewood-Sobolev inequality, afterthat it is developed by Imam Utoyo, who declare this operator is bounded on non- homogeneous classic Morrey space. The purpose of this research is to determine the necessary condition of the boundedness of fractional integral operator on Lebesgue spaces and classic Morrey spaces which a similar result with Hardy-Littlewood-Sobolev inequality and Imam Utoyo's theorem only for $n = 1$. Using characteristic function and Hardy-Littlewood-Sobolev inequality produce the necessary condition and sufficient condition for the boundedness of fractional integral operator on classic Morrey space to get thecondition, where the necessary is $\mu(B(x,r)) \leq Cr^S$ for $s = \frac{pq(1-\alpha)}{pq+p-q}$ with μ satisfy growth condition. For the next research, we expected to prove the necessary condition and sufficient condition of the boundedness of fractional integral generalized operator on another spaces.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ملخص

لاتوساناداه، سا كورنيا. ٢٠١٩. **الشرط الضروري والشرط الكافي لحدوث المشغل المعمم المتكامل الكسري على مسافات Morrey الكلاسيكية**. أطروحة. قسم الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة الدولة الإسلامية في مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشارون: (١) حور الرحمن ، م. (٢) محمد خديفة ، م.

الكلمات المفتاحية: عامل تعميم متكامل كسري ، مساحات Morrey كلاسيكية ، الحدود ، الشروطاللازمة ، حالة كافية

تمت مناقشة عامل التشغيل التكاملي الكسري *bound* حول حدوده من مساحة فئة دالة مكافئة أكملت بالمعايير إلى مساحة فئة دالة مكافئة أخرى أكملت بالمعايير. كان هاردي وليتلوود وسوبوليف قد ناقشوه في مساحات Lebesgue المعروفة باسم عدم مساواة هاردي ليتل وود سوبوليف ، بعد أن تم تطويره من قبل الإمام أوتويو ، الذي أعلن أن هذا المشغل مرتبط بمساحة Morrey الكلاسيكية غير المتجانسة. الغرض من هذا البحث هو تحديد الشرط الضروري لحدود المشغل المتكامل الكسري على مسافات Lebesgue ومساحات Morrey الكلاسيكية التي تنتج عنها نتيجة عدم مساواة Sobolev-Littlewood-Hardy ونظرية Imam Utoyo فقط من أجل $n = 1$. استخدام الوظيفة المميزة و ينتج عن عدم انتظام هاردي–ليتل وود–سوبوليف الشرط الضروري والشرط الكافي لحدود المشغل المتكامل الكسري على مساحة Morrey الكلاسيكية للحصول على الشرط ، حيث تكون الضرورة هي $\mu(B(x,r)) \leq Cr^{s}$ لـ $s = \frac{pq(1-\alpha)}{pq+p-q}$ مع μ إرضاء حالة النمو. بالنسبة إلى البحث التالي ، توقعنا أن نثبت الشرط الضروري والشرط الكافي لحدود المشغل المعمم المتكامل الكسري في المساحات الأخرى.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Operator riez atau operator integral fraksional, salah satu bagian yang sudah dipelajari oleh S.H Hardi, J.E. Little Wood dan Sergei Sobolev pertama kali pada tahun 1930. Operator integral fraksional banyak digunakan sebagai bahan utama dalam permasalahan ketaksamaan HLS (Hardi-Little-Sobolev). Operator riez atau operator integral fraksional, $0 < \alpha < n$, didefinisikan dengan bentuk:

$$\mathrm{I}_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy,$$

operator integral fraksional terbatas apabila terbukti terbatas di $L^p(\mathbb{R})$ ke $L^q(\mathbb{R})$, jika dan hanya jika $\|I_\alpha f: L^q(\mu)\| \leq C\|f: L^p(\mu)\|$, dengan $1 < q < p < \frac{n}{\alpha}$, $C > 0$ dan $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ untuk setiap $\mu(B(x, r)) \leq Cr^n$. Pernyataan ini merupakan bentuk biimpilikasi, dikatakan terbatas apabila memenuhi:

(i) Syarat cukup, yaitu dimisalkan $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$, dan $1 < q < p < \frac{n}{\alpha}$. Terdapat konstansta $C > 0$, memenuhi $\mu(B(x,r)) \leq Cr^n$ maka $\|I_\alpha f: L^q(\mu)\| \leq C\|f: L^p(\mu)\|$.

(ii) Syarat Perlu, yaitu dianggap bahwa operator tersebut terbatas sehingga $\|I_\alpha f: L^q(\mu)\| \leq C\|f: L^p(\mu)\|$, maka memenuhi $\mu(B(x,r)) \leq Cr^n$ dengan $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$, $1 < q < p < \frac{n}{\alpha}$, dan $C > 0$.

Pada ruang lebesgue, misalkan f adalah ruang terukur μ pada $\mathbb{R}$ di ruang lebesgue $L^p = L^p(\mu)$, $1 < p < q < \infty$ yang merupakan ruang kelas-kelas

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ekuivalen f untuk setiap $y \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $L^p(\mu) \coloneqq \{f : \|f\|_{L^p(\mu)} < \infty\}$, dimana $\|f\|_{L^p(\mu)} = \|f \ : L^p(\mu)\|$ yang didefinisikan,

$$\|f \ : L^p(\mu)\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p \, d\mu(y)\right)^{1/p} < \infty,$$

dan

$$\|I_\alpha f : L^q(\mu)\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |I_\alpha f(y)|^q \, d\mu(y)\right)^{1/q}.$$

Bentuk ruang lebesgue $\|f \ : L^p(\mu)\|$ memiliki kesamaan dengan bentuk ruang morrey saat $\lambda = 0$ atau disebut ruang morrey klasik. Ruang morrey $\|f : L^{p,\lambda}(\mathbb{R})\| \coloneqq \sup_{B(a,r)} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_B |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, dengan $0 \leq \lambda < n - \alpha p$, $1 \leq p \leq q < \infty$, $B(a,r)$ merupakan bola buka berdimensi 1 dengan pusat $a \in \mathbb{R}$, dan berjari-jari $r > 0$ sedemikian sehingga bentuk ruang morrey klasik dengan dengan $\lambda = 0$ yaitu $\|f \ : L^{p,0}(\mu)\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p \, d\mu(y)\right)^{1/p} < \infty$.

Pada tahun 2001 nakai dalam jurnalnya menggunakan perumuman dari integral fraksiomal, dimana suatu fungsi $\rho : (0, \infty) \to (0, \infty)$ dan sebarang f pada operator integral fraksional, didefinisikan pemetaan $f \to T_\rho f$, dengan

$$T_\rho f(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y),$$

sehingga $T_\rho f = I_\alpha f$ untuk $\rho(t) = t^\alpha, 0 < \alpha < n$, maka dapat disebut sebagai perumuman operator integral fraksional.

Kajian tentang perkembangan dalam ilmu matematika terus dilakukan untuk dapat membuktikan suatu kebenaran dari penemuan-penemuan baru, salah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

satunya pada keterbatasan perumuman operator integral fraksional. Hal ini berdasarkan dari al-Qur’an surat al-Imron ayat 189-191, yang berbunyi:

وَلِلَّهِ مُلْكُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ ۗ وَاللَّهُ عَلَىٰ كُلِّ شَيْءٍ قَدِيرٌ ﴿١٨٩﴾ إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَاوَاتِ
وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِأُولِي الْأَلْبَابِ ﴿١٩٠﴾ الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَامًا وَقُعُودًا
وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَٰذَا بَاطِلًا سُبْحَانَكَ فَقِنَا
عَذَابَ النَّارِ ﴿١٩١﴾

“Kepunyaan Allah-lah kerajaan langit dan bumi, dan Allah Maha Perkasa atas segala sesuatu. Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal. (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "YaTuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka.”.

Hikmah dari ayat diatas, bahwa manusia memiliki kewajiban memperdalam ilmu untuk berfikir serta mencari atau membuktikan suatu kebenaran karena manusia memiliki akal-akal yang sempurna dan memiliki kecerdasan, kemudian pada akhirnya sampai kepada hakikat dari apa yang dicari, tak lupa membagikannya kepada sesama, sehingga ilmu pun akan terus mengalami perkembangan.

Perkembangan keterbatasan operator integral fraksional salah satunya pada sifat ukurannya. Hal tersebut telah dilakukan oleh banyak matematikawan, salah satunya adalah Eiichi Nakai yang telah membuktikan perumuman $I_\alpha f$ terbatas di ruang Morrey pada tahun 2001. Imam Utoyo, Toto Nusantara, Basuki Widodo dan Suhariningsih pada tahun 2012 telah membuktikan syarat perlu dari keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada ruang Morrey dan ruang Lebesgue dan klasik tak-homogen dengan syarat kondisi *growth* $\mu(B(x, r)) \leq Cr^n$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sebagai pengembangan dari hasil tersebut, maka dalam penelitian ini akan dibuktikan bahwa syarat perlu dan syarat cukup keterbatasan dari perumaman operator integral fraksional $I_\alpha f$ dari ruang Morrey klasik tak-homogen $L^{p,\lambda}(\mathbb{R})$ keruang Morrey klasik tak-homogen $L^{q,\mu}(\mathbb{R})$ adalah $\mu(B(x,r)) \leq Cr^S$, dimana $s = \frac{pq(1-\alpha)}{pq+p-q}$.

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana syarat perlu dan syarat cukup untuk keterbatasan dari perumuman operator integral fraksional dari ruang Morrey Klasik $L^{p,\lambda}(\mu)$ ke $L^{q,\mu}(\mu)$?

1.3 Tujuan Penelitian

Mengetahui syarat perlu dan syarat cukup untuk keterbatasan dari perumuman operator integral fraksional dari ruang Morrey Klasik $L^{p,\lambda}(\mu)$ ke $L^{q,\mu}(\mu)$.

1.4 Manfaat Penelitian

Memberikan informasi tentang syarat perlu dan syarat cukup pada keterbatasan dari perumuman operator integral fraksional dari ruang morrey klasik $L^{p,\lambda}(\mu)$ ke $L^{q,\mu}(\mu)$. Serta, keterkaitan dari beberapa topic dalam matematika, khususnya keterbatasan operator, keterbatasan fungsi dan integral fraksional.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini menggunakan dimensi satu, n=1.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*library research*). Metode ini dilakukan dengan mengumpulkan informasi atau rujukan yang berasal dari buku, jurnal dan sumber lainnya yang berkaitan dengan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

integral fraksional sebagai landasan teori. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membuktikan syarat perlu dan syarat cukup keterbatasan dari perumuman operator integral fraksional di ruang Lebesgue melalui teorema Hardy-Littlewood-Sobolev, dengan memanfaatkan fungsi karakteristik.
2. Membuktikan syarat perlu dan syarat cukup keterbatasan dari perumuman operator integral fraksional di ruang Morrey klasik melalui teorema Hardy-Littlewood-Sobolev, dengan memanfaatkan fungsi karakteristik.
3. Kesimpulan.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari empat bagian, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini terdiri dari teori-teori yang digunakan untuk mendukung pembahasan dan menjawab rumusan masalah. Kajian Pustaka dalam penelitian ini meliputi: ukuran dan integral lebesgue, ruang Metrik, teorema Hardy-Little-Sobolev, fungsi maksimal Hardy-Littlewood, operator integral fraksional, perumuman operator integral fraksional, serta ruang Morrey Klasik dan perintah Allah untuk mengembangkan imu.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bab III Pembahasan

Bab ini menguraikan secara keseluruhan langkah-langkah yang disebutkan dalam metode penelitian dan menjawab semua rumusan masalah. Pembahasan dalam penelitian ini meliputi: syarat perlu dan syarat cukup keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada ruang Lebesgue, dan ruang Morrey klasik.

Bab IV Penutup

Penutup berisi kesimpulan dari hasil pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Ruang Terukur

Definisi 2.1

Ukuran adalah suatu fungsi bernilai riil diperpanjang μ yang terdefinisi pada aljabar-σ $\mathcal{X}$ dari subhimpunan A sedemikian sehingga:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(A) \geq 0$ untuk semua $A \in \mathcal{X}$, dan

(iii) μ penjumlahan dapat dihitung jika (A_n) sebarang barisan disjoin dari himpunan di $\mathcal{X}$, maka

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Dengan barisan disjoin yaitu $A_n \cap A_m = \emptyset$ jika $n \neq m$, (Bartle, 1995: 19). Papadimitrakis, dalam bukunya *Measure Theory* mendefinisikan ruang terukur dan fungsi terukur.

Definisi 2.2

Misalkan Y himpunan tak kosong, A sebarang himpunan, dan $\mathcal{X}$ merupakan suatu koleksi dari sub himpunan Y. Dengan tiga syarat yaitu:

(i) $A \subseteq Y$ sehingga memenuhi $A, \emptyset \in \mathcal{X}$,

(ii) Jika $A \in \mathcal{X}$, maka $A^c \in \mathcal{X}$, dimana $A^c = Y \setminus A$, dan

(iii) Jika $A_n \in \mathcal{X}$ untuk setiap $n \in N$, maka $\bigcup A_n \in \mathcal{X}$,

Maka $\mathcal{X}$ disebut sebuah σ-aljabar (aljabar sigma) dari himpunan Y, dan pasangan berurutan $(\mathrm{Y}, \mathcal{X})$ disebut ruang terukur, (Papadimitrakis M, 2004).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 2.3

Diberikan $(Y, \mathcal{X})$ ruang terukur dan suatu fungsi real $f: x \rightarrow \mathbb{R}$, maka fungsi terukur jika untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, himpunan $\{x \in Y | f(x) < \alpha\} \in \mathcal{X}$, (Papadimitrakis M, 2004).

2.2 Supremum Fungsi

Notasi supremum digunakan dalam pendefisian di Ruang Morrey klasik dan norma. Sebelum membahas keterbatasan perumuman operator, diberikan definisi mengenai keterbatasan dari suatu fungsi yaitu,

Definisi 2.4

Misalkan diberikan fungsi $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ yaitu $f(A) = \{f(x): x \in A\}$ dipetakan ke bilangan riil sehingga $f(A) \in \mathbb{R}$ maka dikatakan bahwa f terbatas di atas apabila himpunan $f(A) = \{f(x): x \in A\}$terbatas di atas, yaitu terdapat $C \in R$ sedemikian sehingga $f(x) \leq C$,$\forall x \in C$, C disebut sebagai batas atas dari fungsi f. Menggunakan cara yang sama, f terbatas di bawah jika himpunan $f(A) = \{f(x): x \in A\}$ terbatas di bawah, yaitu terdapat $D \in R$ sedemikian sehingga $D \leq f(x)$,$\forall x \in D$, D disebut sebagai batas bawah dari fungsi f. Apabila fungsi f terbatas di atas dan juga terbatas di bawah maka dapat katakan bahwa fungsi f terbatas, (Bartle, 2000).

Definisi 2.5

Misalkan $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(A) = \{f(x): x \in A\}$, adalah fungsi yang terbatas dan $A \neq \emptyset$, maka supremum dari f dinotasikan dengan sup f yang didefinisikan sebagai, Sup$f$ = sup$\{f(x)$: x∈A$\}$ = sup $R(f)$, (Bartle, 2000).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh 2.5

Fungsi $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh$h(x) = 1 - x, 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}$ memiliki daerah hasil $R(f) = \{y: 0 \leq y \leq 1\}$. Berdasarkan definisi supremum suatu himpunan, jika $v < 1$, ambil $s' = \frac{v+1}{2} \in \mathbb{R}(f)$, maka $v < s'$, Sehingga $sup\ h(x) = sup\ R(f) = 1$, (Trench, 2013).

Pembuktian keterbatasan operator integral fraksional menggunakan lemma tentang supremmum.

Lemma 2.1

Misalkan $f, h: B \rightarrow \mathbb{R}$, $f(B) = \{f(x): x \in B\}$, dan $h(B) = \{h(x): x \in B\}$ adalah fungsi-fungsi yang terdefinisi pada himpunan B yang dipetakan ke bilang riil positif, dengan $inf\ h(x) > 0$, dan terdapat konstanta $C > 0$ untuk $\forall x \in B$. Maka,

$$\sup_{x \in B} f(x) \leq \sup_{x \in B} h(x),$$

$$f(x) \leq Ch(x)$$

Bukti:

Misalkan $f, h: B \rightarrow \mathbb{R}$, $f(B) = \{f(x): x \in B\}, h(B) = \{h(x): x \in B\}$, dan $\inf_{x \in B} h(x) > 0, \forall x \in B$. Sehingga, $\sup_{x \in B} f(x) \leq \sup_{x \in B} h(x)$. Maka, berdasarkan definisi supremum, $\sup_{x \in B} h(x)$ merupakan batas atas dari $f(x)$, yaitu

$$f(x) \leq \sup_{x \in B} h(x) \tag{2.1}$$

maka dengan demikian lemma 2.1 terbukti.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.3 Keterbatasan Operator Integral Fraksional

Kajian terhadap keterbatasan operator integral fraksional telah dilakukan sejak tahun 1932 hingga saat ini.Keterbatasan operator ini telah dikaji pada ruang Lebesgue, ruang Morrey Klasik dan ruang Morrey diperumum baik homogeny mau pun tak homogen.

2.3.1 Integral Fraksional

Definisi 2.6

Misalkan f merupakan fungsi terukur bernilai riil pada $\mathbb{R}$, dan $0 < \alpha < 1$. Maka bentuk integral fraksional pada dimensi satu yaitu:

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}} dy,$$

dengan $x \in \mathbb{R}$, (Wheeden, 2015:415).

Contoh 2.6

Bola $B = \{x \in \mathbb{R}: \|x\| < 1\}$ dan fungsi $f_{\chi_B}(x)$ merupakan fungsi karakteristik pada bola B. Operator integral fraksional dari f adalah

$$I_\alpha f(y) = \int_B \frac{f(x)}{|x-y|^{1-\alpha}} dx$$

$$= \int_B \frac{f(x)}{|x-y|^{1-\alpha}} dx + \int_{B^c} \frac{f(x)}{|x-y|^{1-\alpha}} dx$$

$$= \int_B \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}} dx + \int_{B^c} \frac{0}{|x-y|^{1-\alpha}} dx$$

$$= \int_B \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}} dx$$

$$= \int_{\|x\|<1} \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}} dx$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk $y = 0$ maka,

$$I_\alpha f(0) = \int_{\|x\|<1} \frac{1}{|x|^{1-\alpha}} dx$$

$$= \int_{\|x\|<1} |x|^{\alpha-1} dx$$

Misalkan $|x| = r$, maka $dx = dr$. Sedemikian sehingga,

$$I_\alpha f(0) = C \int_0^1 r^{1-1} r^{\alpha-1} dr$$

$$= C \int_0^1 r^{\alpha-1} dr$$

$$= C$$

Untuk $y \in \mathbb{R}$ maka,

$$I_\alpha f(y) = \int_{\|x\|<1} \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}} dx$$

$$= \int_{\|x\|<1} |x-y|^{\alpha-1} dx$$

$$\leq \int_{\|x\|<1} |x|^{\alpha-1} dx - \int_{\|x\|<1} |y|^{\alpha-1} dx$$

$$= C - |y|^{\alpha-1} |Q|$$

$$= C - C_1 |y|^{\alpha-1}$$

Karena $\|y\| > 0$ dan $\alpha - 1 < 0$ maka,

$$I_\alpha f(y) = C - C_1 |y|^{\alpha-1}$$

$$= C - \frac{C_1}{|y|^{1-\alpha}},$$

(Nurjannah, 2018:21-22).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.3.2 Ruang Morrey

C.B. Morrey merupakan orang pertama yang memperkenalkan ruang morrey pada suatu penelitian tentang suatu solusi persamaan diferensial parsial ekliptik.

Definisi 2.7

Suatu himpunan untuk setiap $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$, dengan $1 \leq p \leq q < \infty$, $a \in \mathbb{R}^n$ sedemikian hingga bentuk ruang morrey yaitu,

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{a \in \mathbb{R}^n, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|B(a,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

(Hendra Gunawan, 2018).

Ruang morrey diatas, apabila $\lambda = 0$, $B(a,r)$ merupakan bola buka, berdimensi 1 atau $n = 1$ dengan pusat $a \in \mathbb{R}$, dan berjari-jari $r > 0$, maka

$$\|f : L^{p,\lambda}(\mu)\| := \sup_{B(a,r)} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_B |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Bentuk ruang morrey ini dikenal dengan ruang morrey klasik, (Imam Utoyo,dkk: 2012).

2.3.3 Ruang Lebesgue

Ruang lebesgue merupakan bentuk khusus dari ruang morrey. Ruang morrey klasik merupakan bentuk dari ruang morrey yang $\lambda = 0$. Setiap anggota ruang morrey klasik merupakan anggota dari ruang lebesgue lokal. Ruang lebesgue $L^p = L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq q \leq p < \infty$ didefinisikan sebagai ruang kelas-kelas ekuivalen f. Sehingga bentuk ruang lebesgue :

$$\|f : L^{p,\lambda}(\mathbb{R})\| := \sup_{B(a,r)} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_B |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\|f: L^{p,0}(\mu)\| \coloneqq \sup_{B(a,r)} \left(\frac{1}{r^0} \int_B |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$$\|f: L^{p,0}(\mu)\| \coloneqq \sup_{B(a,r)} \left(1 \int_B |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

(Imam Utoyo, dkk, 2012:227-229).

Pada ruang lebesgue, hendra gunawan pada tahun 2006 dalam jurnalnya, memisalkan f adalah ruang terukur μ pada $\mathbb{R}$ di ruang lebesgue $L^p = L^p(\mu)$, $1 < p < q < \infty$ yang merupakan ruang kelas-kelas ekuivalen f untuk setiap $y \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $L^p(\mu) \coloneqq \{f: \|f\|_{L^p(\mu)} < \infty\}$, dimana $\|f\|_{L^p(\mu)} = \|f : L^p(\mu)\|$ yang didefinisikan $\|f: L^p\| \coloneqq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Sehingga $\|f: L^{p,0}(\mu)\| = \|f: L^p\|$, dikarenakan $I_\alpha f$ juga merupakan ruang terukur μ pada $\mathbb{R}$ di ruang lebesgue $L^p = L^p(\mu)$ maka,

$$\|I_\alpha f: L^q(\mu)\| \coloneqq \sup_{B(a,r)} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_B |I_\alpha f(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

2.3.4 Fungsi Maksimal Hardy-Littlewood

Fungsi maksimal diperlukan dalam membuktikan keterbatasan operator integral dalam ruang Lebesgue maupun ruang lainnya.

Definisi 2.8

Definisikan fungsi maksimal fraksional untuk $0 < \alpha < n$ dengan,

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy,$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selain itu, digunakan juga fungsi maksimal Hardy-Littlewood pada fungsi terintegral lokal f yaitu,

$$M_0 f(x) = Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy,$$

(Adams, 1996: 3).

2.3.5 Keterbatasan Operator

Di ruang Lebesgue, diketahui $I_\alpha f$ bersifat terbatas apabila ruang lebesgue tersebut tak homogen. Berikut teorema-teorema yang membahas keterbatasan operator.

Teorema 2.1 (Hardy-Littlewood-Sobolev)

Misalkan bahwa $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p < \frac{1}{\alpha}$ dan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$.

(i) Jika $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(1 < p < \frac{1}{\alpha})$, maka $\|I_\alpha f\|_q \leq C\|f\|_p$

(ii) Jika $f \in L^1(\mathbb{R})$, maka untuk setiap $\lambda > 0$, $|\{x \in \mathbb{R} : |I_\alpha f| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_1\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, di mana $C = C(\alpha, n, p)$, (Lu, Shanzen, dkk, 2007:136).

Bukti:

(i) Ingat bahwa $\left(1 - \frac{\alpha p}{n}\right) q = p$ dengan keterbatasan-L^p dari operator maksimal Hardy-Littlewood M untuk $1 < p < \infty$,

$$I_\alpha f(x) \leq \int\limits_{|x-y|\leq r} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy + \int\limits_{|x-y|>r} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

$$|I(x)| \leq Cr^\alpha Mf$$

$$|II(x)| \leq Cr^{\alpha - \frac{n}{p}} \|f\|_p$$

$$|I_\alpha f(x)| \leq C\left(r^\alpha Mf(x) + r^{\alpha - \frac{n}{p}} \|f\|_p\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$r = \left(\frac{\|f\|_p}{Mf(x)}\right)^{\frac{p}{n}}$$

$$r^\alpha Mf(x) = r^{\alpha-\frac{n}{p}}\|f\|_p = \|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}} Mf(x)^{1-\frac{\alpha p}{n}}$$

Didapatkan,

$$\|I_\alpha f\|_q \leq C\|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}} \|Mf\|_p^{1-\frac{\alpha p}{n}} \leq C\|f\|_p.$$

(ii) Menggunakan keterbatasan-(1,1) lemah dari operator M, dengan $p = 1$ dan $r^\alpha Mf(x) = r^{\alpha-\frac{n}{p}}\|f\|_p = \|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}} Mf(x)^{1-\frac{\alpha p}{n}}$ didapatkan,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}| = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : \|f\|_1^{\frac{\alpha}{n}} Mf(x)^{1-\frac{\alpha}{n}} > \lambda\right\}\right|$$

$$= \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \left(\frac{\lambda}{C\|f\|_1^{\frac{\alpha}{n}}}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}\right\}\right|$$

$$\leq C_1 \left(\frac{C\|f\|_1^{\frac{\alpha}{n}}}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n}-\alpha} \|f\|_1$$

$$\leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_1\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}.$$

Teorema terbukti. ∎

Teorema 2.2 (Adam)

Jika $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ dan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$, diberikan $0 < \alpha < 1$ maka $I_\alpha f$ terbatas dari $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu)$.

Bukti:

Misalkan $1 < p < \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$, dan $0 < \alpha < 1$ maka $I_\alpha f$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$I_\alpha f(x) \leq \int\limits_{|x-y|\leq r} \frac{f(y)}{|x-y|^{1-\alpha}} d\mu(y) + \int\limits_{|x-y|>r} \frac{f(y)}{|x-y|^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$|I(x)| \leq \int\limits_{|x-y|\leq r} \frac{f(y)}{|x-y|^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

Kemudian dipartisi sehingga,

$$|I(x)| \leq Cr^\alpha \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{\mu(B(x,r))} |f(y)| d\mu(y)$$

$$|I(x)| \leq Cr^\alpha Mf$$

Selanjutnya,

$$|II(x)| \leq \int\limits_{|x-y|>r} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\leq Cr^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int\limits_{|x-y|<r} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{|x-y|<r} 1^q \mu(y) \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$|II(x)| \leq Cr^{\alpha-\frac{1}{p}} \|f: L^p\|$$

$$|I_\alpha f(x)| \leq C\left(r^\alpha Mf(x) + r^{\alpha-\frac{1}{p}} \|f: L^p\| \right)$$

Misalkan $r^\alpha Mf(x) = r^{\alpha-\frac{1}{p}} \|f: L^p\|$,

$$r = C\left(\frac{\|f: L^p\|}{Mf(x)} \right)^p$$

$$|I_\alpha f(x)| \leq C\left(\frac{\|f: L^p\|}{Mf(x)} \right)^p Mf(x)$$

$$|I_\alpha f(x)| \leq C(\|f: L^p\|)^p (Mf(x))^{1-p}$$

$$|I_\alpha f(x)| \leq C(\|f: L^p\|)^p (Mf(x))^{\frac{p}{q}}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\left\{\int_B |I_\alpha f(x)|^q \, d\mu(x)\right\}^{\frac{1}{q}} \leq C(\|f:L^p\|)^{pq} \int_B (Mf(x))^p \, d\mu(x)$$

$$\left\{\int_B |I_\alpha f(x)|^q \, dx\right\}^{\frac{1}{q}} \leq C(\|f:L^p\|)^p$$

$\|I_\alpha f: L^q\| \leq C\|f: L^p(\mu)\|.$

Teorema terbukti. ■

Fungsi f di $\mathbb{R}$ disebut fungsi radial, jika nilai $f(x)$ hanya bergantung pada $|x|$ untuk $x \in \mathbb{R}$. Selain itu, digunakan juga fungsi maksimal Hardy-Littlewood pada fungsi terintegral lokal f, fungsi ini oleh adam di peroleh dengan $\alpha = 0$. Sehingga bentuk fungsinya menjadi :

$M_0 f(x) = Mf(x) = \sup\limits_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy,$

(Adams, 1996: 3).

Teorema 2.3 (Chiarenza & Frasca)

Misalkan $0 < \lambda < 1 - \alpha$ $p$dan $1 < p < \frac{1}{\alpha}$. Jika $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{1-\lambda}$, maka terdapat konstanta $C_{p,q} > 0$ sehingga untuk semua, $f \in L^{p,\lambda}$ berlaku

$$\left\|I_\alpha f: L^{q,\lambda}\right\| \leq C\left\|f: L^{p,\lambda}\right\|,$$

(Chiarenza & Frasca: 1987).

Bukti:

Misalkan $0 < \lambda < 1 - \alpha\, p$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, dan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{1-\lambda}$ maka $I_\alpha f$

$$I_\alpha f(x) \leq \int\limits_{|x-y|\leq r} \frac{f(y)}{|x-y|^{1-\alpha}} d\mu(y) + \int\limits_{|x-y|>r} \frac{f(y)}{|x-y|^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$|I(x)| \leq \int\limits_{|x-y|\leq r} \frac{f(y)}{|x-y|^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$|I(x)| \leq Cr^{\alpha} \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int\limits_{\mu(B(x,r))} |f(y)| d\mu(y)$$

$$|I(x)| \leq Cr^{\alpha} Mf$$

Selanjutnya,

$$|II(x)| \leq \int\limits_{|x-y|>r} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\leq Cr^{\alpha-1} \mu(B)^{\frac{\lambda}{p}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int\limits_{|x-y|<r} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{|x-y|<r} 1^q \mu(y) \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$|II(x)| \leq Cr^{\alpha-\frac{1}{p}} \mu(B)^{\frac{\lambda}{p}} \|f: L^{p,\lambda}\|$$

$$|I_\alpha f(x)| \leq C\left(r^{\alpha} Mf(x) + r^{\alpha-\frac{1}{p}} \mu(B)^{\frac{\lambda}{p}} \|f: L^{p,\lambda}\| \right)$$

Misalkan $r^{\alpha} Mf(x) = r^{\alpha-\frac{1}{p}} \mu(B)^{\frac{\lambda}{p}} \|f: L^{p,\lambda}\|$,

$$r = C\left(\frac{\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}} \|f: L^{p,\lambda}\|}{Mf(x)} \right)^{p}$$

$$|I_\alpha f(x)| \leq C\left(\frac{\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}} \|f: L^{p,\lambda}\|}{Mf(x)} \right)^{p} Mf(x)$$

$$|I_\alpha f(x)| \leq C\left(\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}} \|f: L^{p,\lambda}\| \right)^{p} (Mf(x))^{1-p}$$

$$|I_\alpha f(x)| \leq C\left(\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}} \|f: L^{p,\lambda}\| \right)^{p} (Mf(x))^{\frac{p}{q}}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\left\{\int_B |I_\alpha f(x)|^q \, d\mu(x)\right\}^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}}\|f: L^p\|\right)^{pq} \int_B (Mf(x))^p \, d\mu(x)$$

$$\left\{\frac{1}{\mu(B)^\lambda}\int_B |I_\alpha f(x)|^q \, dx\right\}^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\left\|f: L^{p,\lambda}\right\|\right)^p$$

$$\left\|I_\alpha f: L^{q,\lambda}(\mu)\right\| \leq C\left\|f: L^{p,\lambda}(\mu)\right\|.$$

Teorema terbukti. ■

2.4 Perumuman Operator Integral Fraksional

Perumuman operator integral fraksional yang digunakan untuk membuktikan keterbatasannya diruang morrey diambil dari jurnal nakai tahun 2001, yaitu perumuman operator atau disimbolkan dengan $T_\rho f$ dengan suatu fungsi $\rho: (0, \infty) \to (0, \infty)$ dan sebarang f, didefinisikan operator $T_\rho f$ sebagai berikut:

$$T_\rho f(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} f(y) \, d\mu(y),$$

(Nakai, 2001).

$T_\rho f$ merupakan operator integral fraksional $I_\alpha f$, apabila $T_\rho f = I_\alpha f$ dan untuk $\rho(t) = t^\alpha, 0 < \alpha < n$. Untuk penilitian ini, diambil $n = 1$ atau didimensi satu, sehingga bentuk perumuman yang digunakan,

$$I_\rho f(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)} f(y) \, d\mu(y),$$

dengan $T_\rho f = I_\alpha f$ untuk $\rho(t) = t^\alpha, 0 < \alpha < 1$, dan $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$, (Hendra gunawan, 2000).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.5 Syarat Cukup dan Perlu

Untuk membuktikan keterbatasan operator integral fraksional, digunakan syarat perlu dan cukup. Terdapat teorema yang memuat syarat cukup dan perlu pada keterbatasan potensial Riesz di ruang Morrey klasik. Teoremanya yaitu,

Teorema 2.4

Misalkan $0 < \lambda < n - \alpha\, p$dan $1 < p < \frac{n}{\alpha}$. Syarat perlu dan cukup untuk keterbatasan $I_{\alpha} f$ dari ruang $L^{p,\lambda}$ ke ruang $L^{q,\lambda}$ adalah $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n-\lambda}$, (Utoyo, dkk:2012 : 228-229).

2.6 Perintah Allah untuk Mengembangkan Ilmu

Pada pembahasan sebelumnya telah dijelaskan tentang perintah berfikir di dalam al-Quran. Selanjutnya akan dibahas bahwa setiap manusia memiliki kewajiban untuk memperdalam ilmu dan kemudian membagikannya kepada sesama, sehingga ilmu pun akan terus mengalami perkembangan. Karena ilmu, seseorang dapat memahami berbagai macam dan mendapatkan kedudukan di kalangan manusia serta di sisi Allah. BerikutHadits yang menjelaskannya:

حَدَّثنَا هِشَامُ بْنُ عَمَّارٍ حَدَّثنَا حَفْصُ بْنُ سُلَيْمَانَ حَدَّثنَا كَثِيْرُ بْنُ شِنْظِيْرٍ عَنْ مُحَمَّدِ بْنِ شِيْرِيْنَ عَنْ أَنَسِ بْنِ مَالِكٍ قَالَ : قَالَ رَسُوْلُ اللهِ صَلَّ اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ طَلَبُ الْعِلْمِ فَرِيْضَةٌ عَلَى كُلِّ مُسْلِمٍ وَ وَاضَعُ الْعِلْمِ عِنْدَ غَيْرِ أَهْلِهِ كَمُقَلِّدِ الْخَنَازِيْرِ الْجَوْهَرَ وَاللُّؤْلُؤَ وَالذَّهَبَ

Artinya : *Hisyam bin 'Ammar menceritakan kepada kami, Hafs bin Sulaiman menceritakan kepada kami, Katsir bin Syindzir menceritakan kepada kami dari Muhammad bin Syirin, dari Anas bin Malik berkata, Rasulullah SAW. bersabda : "Mencari ilmu itu wajib bagi setiap muslim, dan orang yang meletakkan ilmu pada selain ahlinya bagaikan menggantungkan permata mutiara dan emas pada babi hutan". (HR. Ibnu Majjah).*

,(Software CD, al-kutub at-tis'ah).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari hadits di atas, menuntut ilmu itu wajib, ilmu itu luas, ilmu itu banyak, tiada batasnya. Sehingga manusia yang memiliki akal diwajibkan untuk belajar tanpa henti dalam mengembangkan ilmu dan kemudian membagikan kepada sesama hingga Allah yang berkehendak menghentikan nafas hidupnya. Begitu pula dengan keterbatasanperumuman operator integral fraksional yang terus dilakukan perkembangan untuk mendapatkan penemuan-penemuan baru sehingga

dapat digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Sehingga kajian keterbatasan perumuman operator integral fraksional merupakan salah satu bentuk implementasi dari hasil berfikir dalam mengembangkan ilmu.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Syarat Perlu Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional Pada Ruang Morrey Klasik

Untuk membuktikan keterbatasan operator integral fraksional, digunakan syarat perlu dan cukup. Operator dikatakan terbatas apabila dibuktikan secara biimplikasi yaitu "jika dan hanya jika". Syarat perlu pada keterbatasan apabila memenuhi,

Teorema 3.1

Misalkan $a, r \in \mathbb{R}$, $1 < p < q < \infty, \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$, dan $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$. Terdapat konstanta C > 0 sehingga $I_\rho f$ terbatas di $L^{p,\lambda}(\mu)\ ke\ L^{q,\mu}(\mu)$. Dengan Dengan $\rho(r) \leq C \int_B \frac{\rho(r)}{r} dr \leq C\,\rho(r)$. Jika $\|I_\rho f: L^{q,\mu}\| \leq C\,\|f: L^{p,\lambda}\|$ maka $\mu(B) \leq Cr^s$.

Bukti :

Dengan memanfatkan ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev pada ruang morrey klasik, maka

$$\|I_\rho f: L^{q,\mu}\| \leq C\,\|f: L^{p,\lambda}\|$$

$$\sup_{B(a,r)} \left(r^{-\mu} \int_B |I_\rho f(x)|^q\, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \sup_{B(a,r)} \left(r^{-\lambda} \int_B |f(x)|^p\, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

Ambil f sebagai fungsi karakteristik pada bola B (a,r), maka

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\sup_{B(a,r)}\left(r^{-\mu}\int_B \left| I_\rho \mathcal{X}_B(x)\right|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \sup_{B(a,r)}\left(r^{-\lambda}\int_B |\mathcal{X}_B(x)|^p\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\sup_{B(a,r)}\left(r^{-\mu}\int_B \left| I_\rho \mathcal{X}_B(x)\right|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \sup_{B(a,r)}\left(r^{-\lambda}\int_B d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\sup_{B(a,r)}\left(r^{-\mu}\int_B \left| I_\rho \mathcal{X}_B(x)\right|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \sup_{B(a,r)}\left(r^{-\lambda}\mu(B(a,r))\right)^{\frac{1}{p}}$$

Dengan menggunkan lemma 2.1 maka,

$$\left(r^{-\mu}\int_B \left| I_\rho \mathcal{X}_B(x)\right|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(r^{-\lambda}\mu(B(a,r))\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(r^{-\mu}\int_B \left|\int_B \frac{\rho(\delta(x,y))\mathcal{X}_B(y)}{\delta(x,y)} d\mu(y)\right|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(r^{-\lambda}\mu(B)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(r^{-\mu}\int_B \left|\int_B \frac{\rho(r)\mathcal{X}_B(y)}{r} d\mu(y)\right|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(r^{-\lambda}\mu(B)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(r^{-\mu}\int_B \left|r^{\alpha-1}\int_B \mathcal{X}_B(y)\, d\mu(y)\right|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(r^{-\lambda}\mu(B)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(r^{-\mu}\int_B |r^{\alpha-1}\mu(B)|^q\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(r^{-\lambda}\mu(B)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(r^{-\mu}r^{q(\alpha-1)}\int_B |\mu(B)|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(r^{-\lambda}\mu(B)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$r^{\alpha-1-\frac{\mu}{q}}\left(\int_B |\mu(B)|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(r^{-\lambda}\mu(B)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$r^{\alpha-1-\frac{\mu}{q}}\left(\mu(B)^q\mu(B)\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(r^{-\lambda}\mu(B)\right)^{\frac{1}{p}}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$r^{\alpha-1-\frac{\mu}{q}}\mu(B)^{1+\frac{1}{q}} \leq C \quad \left(r^{-\lambda}\mu(B)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan $\frac{1}{\mu(B)^{\frac{1}{p}}}$ maka,

$$r^{\alpha-1-\frac{\mu}{q}}\mu(B)^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq Cr^{-\frac{\lambda}{p}}$$

Menggunakan kondisi dimana $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$ maka,

$$r^{\alpha-1-\frac{\lambda}{p}}\mu(B)^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq Cr^{-\frac{\lambda}{p}}$$

$$r^{\alpha-1}\mu(B)^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq C$$

Dengan mengalihkan kedua ruas dengan $r^{1-\alpha}$ maka diperoleh,

$$\mu(B)^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq Cr^{1-\alpha}$$

$$\mu(B)^{\frac{pq+p-q}{pq}} \leq Cr^{1-\alpha}$$

Dengan memangkatkan kedua ruas dengan $\frac{pq}{pq+p-q}$ maka diperoleh hasil,

$$\mu(B) \leq Cr^{\frac{pq(1-\alpha)}{pq+p-q}}$$

$$\mu(B) \leq Cr^{s}$$

Dimana $s = \frac{pq(1-\alpha)}{pq+p-q}$, dengan demikian terbukti bahwa terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga berlaku $\|I_\alpha f: L^{q,\mu}\| \leq C \left\|f: L^{p,\lambda}\right\|$ maka $\mu(B) \leq Cr^{s}$.

3.2 Syarat Cukup Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional Pada Ruang Morrey Klasik

Untuk membuktikan keterbatasan operator integral fraksional, digunakan syarat perlu dan cukup. Operator dikatakan terbatas apabila dibuktikan secara biimplikasi yaitu "jika dan hanya jika". Syarat cukup pada keterbatasan apabila memenuhi,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema 3.2

Misalkan $a, r \in \mathbb{R}$, $1 < p < q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$, dan $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$. Terdapat konstanta C > 0 sehingga $I_\rho f$ terbatas di $L^{p,\lambda}(\mu)\ ke\ L^{q,\mu}(\mu)$. Dengan $\rho(r) \leq C \int_B \frac{\rho(r)}{r}\, dr \leq C\, \rho(r)$. Jika $\mu(B) \leq Cr^s$ maka $\|I_\rho f : L^{q,\mu}\| \leq C\, \|f : L^{p,\lambda}\|$.

Bukti :

$$I_\rho\, f(x) = \int_{\delta(x,y)<r} f(y) \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)} d\mu(y) + \int_{\delta(x,y)\geq r} f(y) \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)} d\mu(y)$$

$$= I(x) + II(x)$$

$$|I(x)| = \left| \int_{\delta(x,y)<r} f(y) \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)} d\mu(y) \right|$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)<r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)} \mathrm{d\mu(y)}$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)<\frac{1}{2}r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)} d\mu(y) + \int_{\frac{1}{2}r\leq\delta(x,y)<r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)<\frac{1}{4}r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)} d\mu(y) + \int_{\frac{1}{4}r\leq\delta(x,y)<\frac{1}{2}r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}r\leq\delta(x,y)<r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)} d\mu(y)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\leq \int\limits_{\delta(x,y)<\frac{1}{8}r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)} d\mu(y) + \int\limits_{\frac{1}{8}r\leq\delta(x,y)<\frac{1}{4}r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)} d\mu(B)$$

$$+ \int\limits_{\frac{1}{4}r\leq\delta(x,y)<\frac{1}{2}r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)} d\mu(y)$$

$$+ \int\limits_{\frac{1}{2}r\leq\delta(x,y)<r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)} d\mu(y)$$

$$\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{1}{2^k r}\leq\delta(x,y)<\frac{1}{2^{k-1} r}} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)} d\mu(y)$$

$$\leq C \sum_{k=-\infty}^{1} \int\limits_{2^k r\leq\delta(x,y)<2^{k+1} r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)} d\mu(y)$$

$$\leq C \sum_{k=-\infty}^{1} \frac{\rho(2^k r)}{(2^k r)} \int\limits_{\delta(x,y)<2^{k+1} r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$= C \sum_{k=-\infty}^{1} (2^{k+1} r)^{-1} \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\rho(r)}{r}\, dr \int\limits_{\delta(x,y)<2^{k+1} r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C \sum_{k=-\infty}^{1} \rho(r) \frac{1}{\mu\big(B(x,2^{k+1} r)\big)} \int\limits_{B(x,2^{k+1} r)} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C\rho(r) \sum_{k=-\infty}^{1} \frac{1}{\mu\big(B(x,2^{k+1} r)\big)} \int\limits_{B(x,2^{k+1} r)} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C r^{\alpha} Mf$$

$$\leq C r^{\frac{q-p}{pq}} Mf$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga,

$$|I(x)| \leq Cr^{\frac{q-p}{pq}} Mf$$

Selanjutnya,

$$|II(x)| = \left| \int_{\delta(x,y)\geq r} f(y) \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)} d\mu(y) \right|$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)\geq r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)\geq 2r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)} d\mu(y)$$

$$+ \int_{2r\leq\delta(x,y)\leq r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)\geq 4r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)} d\mu(y)$$

$$+ \int_{4r\leq\delta(x,y)\leq 2r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)} d\mu(y)$$

$$+ \int_{2r\leq\delta(x,y)\leq r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k r\leq\delta(x,y)\leq 2^{k+1}r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{B=0}^{\infty} \frac{\rho(2^k r)}{(2^k r)} \int_{\delta(x,\})\leq 2^{k+1}r} |f(y)| d\mu(y)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} (2^k r)^{-1} \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\rho(r)}{r} dr \int_{\delta(x,y)\leq 2^{k+1} r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C\rho(r) \sum_{k=0}^{\infty} (2^k r)^{-1} \left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1} r} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1} r} 1^q d\mu(y) \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1} r} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1} r} 1^q d\mu(y) \right)^{\frac{1}{q}} \rho(r)\,(2^k r)^{-1}$$

$$\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B)^{\frac{\lambda}{p}} \left(\mu(B)^{-\lambda} \int_{\delta(x,y)<2^{k+1} r} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1} r} 1^q d\mu(y) \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\rho(r)(2^k r)^{-1}$$

$$\leq C \| f : L^{p,\lambda}(\mu) \| \mu(B)^{\frac{\lambda}{p}} \sum_{k=0}^{\infty} \mu\left(B(x, 2^{k+1} r) \right)^{\frac{1}{q}} \rho(r) \frac{1}{\mu\left(B(x, 2^{k+1} r) \right)}$$

$$\leq C r^{\alpha} r^{\frac{s}{q} - s} \mu(B)^{\frac{\lambda}{p}} \| f : L^{p,\lambda} \|$$

$$\leq C r^{-\frac{p}{pq}} \mu(B)^{\frac{\lambda}{p}} \| f : L^{p,\lambda} \|$$

Maka,

$$|I_\rho f| \leq |I(x) + II(x)|$$

$$|I_\rho f| \leq C r^{\frac{q-p}{pq}} M(f) + C r^{-\frac{p}{pq}} \mu(B)^{\frac{\lambda}{p}} \| f : L^{p,\lambda} \|$$

Jika dipilih $r > 0 \ni C r^{\frac{q-p}{pq}} M(f) = \ C r^{-\frac{p}{pq}} \mu(B)^{\frac{\lambda}{p}} \| f : L^{p,\lambda} \|$ maka,

$$C r^{\frac{q-p}{pq}} M(f) = \ C r^{-\frac{p}{pq}} \mu(B)^{\frac{\lambda}{p}} \| f : L^{p,\lambda} \|$$

$$\frac{r^{\frac{q-p}{pq}}}{r^{-\frac{p}{pq}}} = C \left(\frac{\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}} \| f : L^{p,\lambda} \|}{M f} \right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$r^{\frac{q-p}{pq}-\left(-\frac{p}{pq}\right)} = C\left(\frac{\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}}\|f: L^{p,\lambda}\|}{Mf}\right)$$

$$r^{\frac{1}{p}} = C\left(\frac{\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}}\|f: L^{p,\lambda}\|}{Mf}\right)$$

$$r = C\left(\frac{\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}}\|f: L^{p,\lambda}\|}{Mf}\right)^{p}$$

$$|I_\rho f| \leq C\left(\frac{\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}}\|f: L^{p,\lambda}\|}{Mf}\right)^{p} Mf$$

$$= C\left(\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}}\|f: L^{p,\lambda}\|\right)^{p} (Mf)^{1-p}$$

$$= C\left(\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}}\|f: L^{p,\lambda}\|\right)^{p} (Mf)^{\frac{p}{q}}$$

$$|I_\rho f|^q \leq C\left(\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}}\|f: L^{p,\lambda}\|\right)^{pq} (Mf)^{p}$$

$$\int_\mu |I_\rho f|^q \, d\mu(x) = C\left(\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}}\|f: L^{p,\lambda}\|\right)^{pq} \int_{\mu(B)} (Mf)^p \, d\mu(x)$$

$$\leq C\left(\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}}\|f: L^{p,\lambda}\|\right)^{pq} \left(\|f: L^{p,\lambda}\|\right)^{p}$$

$$= CB\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}}\left(\|f: L^{p,\lambda}\|\right)^{p(1+q)}$$

$$\leq C\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}}\left(\|f: L^{p,\lambda}\|\right)^{p\left(\frac{q}{p}\right)}$$

$$= C\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}}\left(\|f: L^{p,\lambda}\|\right)^{q}$$

$$\left\{\frac{1}{\mu(B)^\mu}\int_\mu |I_\alpha f|^q \, d\mu(x)\right\}^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\|f: L^{p,\lambda}\|\right)^{p}$$

$$\|I_\rho f: L^{q,\mu}\| \leq C\|f: L^{p,\lambda}\|$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan demikian terbukti bahwa terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga berlaku $\|I_\rho f: L^{q,\mu}\| \leq C\|f: L^{p,\lambda}\|$ dengan syarat $\mu(B) \leq Cr^s$.

Contoh 3.1

Himpunan $H(x) = \{x \in \mathbb{R}: \|x\| < 1\}$. Dimana $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x^4}, & x \in H \\ 0, & x \notin H \end{cases}$, maka $I_a f(x)$ terbatas dari ruang $L^{4,0.25}(\mu)$ ke $L^{8,0.25}(\mu)$.

Bukti :

$f \in L^{4,0.25}(\mu)$ maka $\|f\|_{L^{4,0.25}} < \infty$ sehingga,

$$\|f\|_{L^{4,0.25}} = \sup_B \left(\int_B |f(x)|^4 d\mu(x) + \int_{B^c} |f(x)|^4 d\mu(x) \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \sup_B \left(\int_B |5x^{-4}|^4 d\mu(x) \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \sup_B -\frac{5}{5}|x|^{-4}\Big|_{-\infty}^{1}$$

$$= \sup_B -1$$

$$= -1$$

$$\|f\|_{L^{2,0.25}} < \infty.$$

Karena $\|f\|_{L^{4,0.25}} < \infty$, maka akan ditunjukan bahwa $I_a f \in L^{8,0.25}(\mu)$ dengan $I_a f(y) < \infty$.

$$I_a f(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho(\delta(x,y)) f(x)}{\delta(x,y)} d\mu(x)$$

$$= \int_B \frac{\rho(\delta(x,y))\, f(x)}{\delta(x,y)} d\mu(x) + \int_{B^c} \frac{\rho(\delta(x,y))\, f(x)}{\delta(x,y)} d\mu(x)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \int_B \frac{\rho(\delta(x,y))\ 5x^{-4}}{\delta(x,y)} d\mu(x) + \int_{B^c} \frac{\rho(\delta(x,y)) 5x^{-4}}{\delta(x,y)} d\mu(x)$$

$$= \int_B 5x^{-4} \rho(\delta(x,y)) \delta(x,y)^{a-1} d\mu(x)$$

$$= \int_{\|x\|<1} 5x^{-4} \rho(\delta(x,y)) \delta(x,y)^{a-1} d\mu(x) \qquad (1)$$

Jika $y = 0$ maka persamaan (1) menjadi

$$I_a f(0) = \int_{\|x\|<1} 5x^{-4} \rho(\delta(x,0)) \delta(x,0)^{-1} d\mu(x)$$

Misal $\delta(x,0) = r \rightarrow d\mu(x) = dr$ sehingga,

$$I_a f(0) \leq \int_0^1 5r^{a-5} dr$$

$$\leq \frac{1}{a-5} 5r^{a-5} \Big|_0^1$$

$$\leq \frac{5}{a-5}$$

Berdasarkan teorema 3.2 maka,

$$\frac{5}{\frac{1}{8}-5} = -\frac{40}{31} < \infty$$

Karena$I_a f(y) \leq -\frac{40}{31} < \infty$ untuk $y = 0$ maka,

$$\|I_a f : L^{8,0.25}(\mu)\| = \sup_B r^{-\frac{0,25}{8}} \left(\int_B |I_a f(y)|^8 d\mu(y) \right)^{\frac{1}{8}}$$

$$= \sup_B \left(\int_B \left| -\frac{40}{31} \right|^8 d\mu(y) \right)^{\frac{1}{8}}$$

$$= \sup_B -\frac{40}{31} \mu(B)$$

$$= C \sup_B -\frac{40}{31} \mu$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sedemikian sehingga,

$$\|I_a f : L^{8,0.25}(\mu)\| = C \sup_B -\frac{40}{31}\mu < \infty,$$

Jadi $I_a f(0) \in L^{8,0.25}(\mu)$.

Jika $y \in \mathbb{R}$ maka persamaan (1) menjadi,

$$I_a f(y) = \int_{\|x\|<1} 5x^{-4}\rho\big(\delta(x,y)\big)\delta(x,y)^{-1}d\mu(x)$$

$$\leq \int_{\|x\|<1} 5x^{-4}\rho\big(\delta(x,0)\big)\delta(x,0)^{-1}d\mu(x)$$

$$+ \int_{\|x\|<1} 5x^{-4}\rho\big(\delta(0,y)\big)\delta(0,y)^{-1}d\mu(x)$$

$$= -\frac{40}{31} + \delta(0,y)^{a-1}$$

Karena $\delta(0,y) = |y|$, dan $a - 1 = -\frac{7}{8}$,

$$I_a f(y) = -\frac{4}{7} + |y|^{-\frac{7}{8}} < \infty.$$

Karena $I_a f(y) < \infty$ untuk $y \in \mathbb{R}$ maka,

$$\|I_a f : L^{8,0.25}(\mu)\| = \sup_B r^{-\frac{0,25}{8}}\left(\int_B |I_a f(y)|^8 d\mu(y)\right)^{\frac{1}{8}}$$

$$= \sup_B \left(\int_B \left|-\frac{40}{31} + |y|^{a-1}\right|^8 d\mu(y)\right)^{\frac{1}{8}}$$

$$= \sup_B \frac{40}{31}\left(\mu(B) + \int_B |y|^{-7} d\mu(y)\right)^{\frac{1}{8}}$$

$$= \sup_B \frac{40}{31}\left(\mu(B) - \frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{8}} < \infty$$

$$\|I_a f : L^p(u)\| \leq \sup_B \frac{40}{31}\left(\mu(B) - \frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{8}} < \infty,$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jadi $I_a f(y) \in L^{8,0.25}(\mu)$.

Berdasarkan hasil di atas bahwa $I_a f \in L^{8,0.25}(\mu)$ dan $f \in L^{4,0.25}(\mu)$ maka terbukti bahwa $I_a f$ terbatas dari ruang $L^{4,0.25}(\mu)$ ke $L^{8,0.25}(\mu)$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh hasil bahwa untuk $\rho(t) = t^{\alpha},\ 0 < \alpha < 1$. Perumuman operator integral fraksional $I_{\rho}f$ yang didefinisikan sebagai:

$$I_{\rho}f(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)} f(y)\, d\mu(y),$$

merupakan operator yang terbatas berdasarkan syarat perlu yaitu jika $I_{\rho}f$ terbatas di $L^{p,\lambda}(\mu)\ ke\ L^{q,\mu}(\mu)$. Dengan $\rho(r) = r^{\alpha}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$, dan $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$, memenuhi $\rho(r) \leq C \int_B \frac{\rho(r)}{r} \leq C\ \rho(r)$, maka $\mu(B) \leq Cr^{s}$, dan berdasarkan syarat cukup yaitu jika $\mu(B) \leq Cr^{s}$, maka $I_{\rho}f$ terbatas di $L^{p,\lambda}(\mu)\ ke\ L^{q,\mu}(\mu)$. Dengan $\rho(r) = r^{\alpha}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \alpha$, dan $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$ memenuhi $\rho(r) \leq C \int_B \frac{\rho(r)}{r} \leq C\ \rho(r)$. Sehingga dari kedua syarat tersebut maka perumumn operator integral fraksional terbatas diruang morrey klasik jika dan hanya jika, $\mu(B) \leq Cr^{s}$.

4.2 Saran

Berdasarkan pembahasan di atas, disarankan untuk penelitian selanjutnya dapatdilakukan pembuktian keterbatasan perumaman operator menggunakan syarat perlu dan cukup pada ruang companato.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Adams, David R dan Hedberg L.I. 1996. *Function Spaces and Potential Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Bartle, Robert G. 1995. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Willey & Sons, Inc.

Chiarenza ,F & Fraca, M. 1987. Morrey Spaces and Hardy-littlewood Maximal Function. *Rend Mat* 7:273-279.

Darmawijaya, Soeparna. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak.* Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Nakai, E. 2001. Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces.*Math. Nachr* 166: 95-103.

Papadimitrakis, M. 2004. *Measure Theory*. New York: Crete University.

Stein, E.M. 1993. *Harmonic Analysis: real variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*. New Jersey: Princenton University Press.

Software CD, al-kutub at-tis'ah

Utoyo M.I, dkk. 2012. Syarat Perlu dan Cukup untuk Ketrbatasan Potensial Riez di Ruang Morrey Klasik.

Utoyo M.I. 2016. Ketrbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional Di Ruang Lebesgue Pada Ruang Kuasi Metrik Tak Homogen, Seminar Nasional Matematika X Universitas Negeri Semarang.

Wheeden, R.L., Zygmund, A. 2015. *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis, Second Edition*. Boca Raton: CRC Press/Chapman and Hall.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

RIWAYAT HIDUP

Kurnia Shinta Latusindah, lahir di Sidoarjo pada 30Agustus 1997. Biasa dipanggil Nia ketika di lingkungan kampus, sedangkan di lingkungan rumah dipanggil Tutus. Merupakan anak terakhir dari tiga bersaudara pasangan Bapak Imam dan Ibu Reno.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Sumorame selama empat tahun, kemudian pindah ke SDN Sugihwaras ketika kelas 5, hingga pada kelas 5 semester 2, kemudian pindah ke SDN Durung Bedug selama satu semester, setelah itu pindah kembali ke SDN Sugihwaras ketika kelas 6 dan lulus pada tahun 2009. Setelah itu melanjutkan sekolah di SMPN 2 Sidoarjo dan lulus pada tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMAN 1 Sidoarjo jurusan IPA dan lulus pada tahun 2015. Selanjutnya pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang jurusan matematika murni.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Kurnia Shinta Latusindah
NIM : 15610060
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Syarat Perlu dan Cukup Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Klasik

Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	22 Maret 2019	Konsultasi Bab I & II	1.
2.	22 Maret 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	2.
3.	5 April 2019	Konsultasi Bab II	3.
4.	8 April 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	4.
5.	6 September 2019	Konsuktasi Revisi Bab I	5.
6.	12 September 2019	Konsultasi Revisi Bab II & III	6.
7.	17 September 2019	Konsultasi Contoh Bab III	7.
8.	21 September 2019	Konsultasi Bab II	8.
9.	01 November 2019	ACC Sidang Skripsi Dos. I	9.
10.	01 November 2019	ACC Sidang Skripsi Dos. II	10.

Malang, 01 November 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG