SPEKTRUM *ADJACENCY*, LAPLACE, DAN *SIGNLESS*-LAPLACE PADA GRAF PEMBAGI NOL DAN KOMPLEMENNYA DARI RING KOMUTATIF DENGAN UNSUR KESATUAN

SKRIPSI

OLEH
NADIA WALINDRA
NIM. 15610055

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

SPEKTRUM *ADJACENCY*, LAPLACE, DAN *SIGNLESS*-LAPLACE PADA GRAF PEMBAGI NOL DAN KOMPLEMENNYA DARI RING KOMUTATIF DENGAN UNSUR KESATUAN

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Mat)

Oleh
Nadia Walindra
NIM. 15610055

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

SPEKTRUM *ADJACENCY, LAPLACE,* DAN *SIGNLESS*-LAPLACE PADA GRAF PEMBAGI NOL DAN KOMPLEMENNYA DARI RING KOMUTATIF DENGAN UNSUR KESATUAN

SKRIPSI

Oleh
Nadia Walindra
NIM. 15610055

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 5 November 2019

Pembimbing I,

Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003

Pembimbing II,

Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd
NIP. 19630502 198703 1 005

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

SPEKTRUM *ADJACENCY*, LAPLACE, DAN *SIGNLESS*-LAPLACE PADA GRAF PEMBAGI NOL DAN KOMPLEMENNYA DARI RING KOMUTATIF DENGAN UNSUR KESATUAN

SKRIPSI

Oleh
Nadia Walindra
NIM. 15610055

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 18 Desember 2019

Penguji Utama	: Dr. Hairur Rahman, M.Si	....
Ketua Penguji	: Dewi Ismiarti, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nadia Walindra

NIM : 15610055

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Spektrum *Adjacency,* Laplace, dan *Signless*-Laplace pada Graf Pembagi Nol dan Komplemennya dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 5 November 2019
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
0CC01AHF127367704
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Nadia Walindra
NIM. 15610055

MOTO

Jangan bergantung pada orang lain,

tetapi manfaatkan dirimu sendiri sebaik mungkin

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Edi Supriono dan ibunda Sriwijiati yang senantiasa ikhlas mendoakan dan sabar dalam merawat, mendidik, dan membesarkan penulis hingga mengantarkan sampai pada pendidikan sarjana.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah swt yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.
5. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan pengalaman berharga kepada penulis.
6. Dr. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen wali yang selalu memberikan motivasi dan arahan kepada penulis.

7. Kedua orang tua penulis dan seluruh keluarga penulis yang selalu mendoakan keberhasilan penulis.
8. Teman-teman mahasiswa jurusan Matematika angkatan 2015, terima kasih atas dukungan dan motivasi yang tak terlupakan.

Semoga Allah Swt. melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca dan khususnya bagi penulis secara pribadi.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, November 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Walindra, Nadia. 2019. **Spektrum *Adjacency*, Laplace, dan *signless*-Laplace pada Graf Pembagi Nol dan Komplemennya dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Kata kunci: spektrum, matriks *adjacency*, laplace, dan *signless*-laplace, graf pembagi nol, ring komutatif dengan unsur kesatuan

Misalkan R adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan 1 dan himpunan pembagi nolnya adalah $Z(R)$. Sebuah graf pembagi nol, $\Gamma(R)$ adalah graf sederhana dengan titik-titiknya adalah anggota pembagi nol dari ring komutatif tersebut. Kedua titik misalkan x dan y akan terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan rumus spektrum *adjacency*, laplace, dan *signless*-laplace pada graf pembagi nol dan komplemennya dari ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{2p} untuk p bilangan prima, $p \geq 3$. Metode penelitian yang digunakan adalah studi kepustakaan dengan menggunakan beberapa buku dan jurnal sebagai bahan rujukan. Hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Spektrum Laplace dan *signless*-Laplace dari graf $\Gamma(Z_{2p})$ untuk p bilangan prima, $p \geq 3$ adalah
$\boldsymbol{Spec}_{L(\Gamma(Z_{2p}))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{Spec}_{L^+(\Gamma(Z_{2p}))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$.
2. Spektrum *adjacency* titik, Laplace dan *signless*-Laplace graf $\overline{\Gamma(\mathbb{Z}_{2p})}$ untuk p bilangan prima, $p \geq 3$ adalah
$\boldsymbol{Spec}_{A(\overline{\Gamma(Z_{2p})})} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & p-2 \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{Spec}_{L(\overline{\Gamma(Z_{2p})})} = \begin{bmatrix} 0 & p-1 \\ 2 & p-2 \end{bmatrix}$, dan
$\boldsymbol{Spec}_{L^+(\overline{\Gamma(Z_{2p})})} = \begin{bmatrix} 0 & p-3 & 2p-4 \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$.

ABSTRACT

Walindra, Nadia. 2019. **Adjacency, Laplace, and signless-Laplace Spectrum on Zero Divisor Graph and Its Complement from Commutative Ring with Unity.** Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Dr. H. Wahyu H. Irawan, M. Pd. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M. Pd.

Key Words: Spectrum, Adjacency, Laplace, and signless-Laplace Matrix, Zero Divisor Graph, Commutative Ring with Unity

Let R be a commutative ring with unity 1 and $Z(R)$ be the set of zero divisors. A zero divisor graph $\Gamma(R)$ is a simple graph with points. It is the zero divisor member of the commutative ring. The two points, x and y will be directly connected if and only if $x \cdot y = 0$. This study aims to determine the formula of adjacency, laplace, and signless-laplace spectrum on zero divisor graph and its complement from commutative ring with unity Z_{2p} to p primes, $p \geq 3$. The method used to carry out this study is by using several books and journals as references. The result of this study is:

1. Laplace spectrum and signless-Laplace of graph $\Gamma(Z_{2p})$ to p primes, $p \geq 3$ is $\boldsymbol{Spec}_{L(\Gamma(Z_{2p}))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$ and $\boldsymbol{Spec}_{L^+(\Gamma(Z_{2p}))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$.
2. Adjacency spectrum of points, Laplace and signless-Laplace of graph $\overline{\Gamma(Z_{2p})}$ to p primes, $p \geq 3$ is

   $\boldsymbol{Spec}_{A(\overline{\Gamma(Z_{2p})})} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & p-2 \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{Spec}_{L(\overline{\Gamma(Z_{2p})})} = \begin{bmatrix} 0 & p-1 \\ 2 & p-2 \end{bmatrix}$, and

   $\boldsymbol{Spec}_{L^+(\overline{\Gamma(Z_{2p})})} = \begin{bmatrix} 0 & p-3 & 2p-4 \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$.

ملخص

ناديا, واليندرا. ٢٠١٩. **الطيف *Adjacency*, Laplace, *signless*-Laplace على الرسم البياني كفاصل الصفر و تكملته من حلقة تبديلية مع عناصر الوحدة.** البحث العلمي. قسم الرياضيات. كلية العلوم و التكنولوجي, الجامعة مولانا مالك إبراهيم مالانج الإسلامية الحكومية. المشرف: (I) الحاج وحي هـ. إراوان الماجستر. (II) الدّكتور الحاج إمام سوجروو الماجستر.

الْكلماتُ المفتاحاتُ: الطيف *Adjacency*, Laplace, *signless*-Laplace, الرسم البيانيكفاصل الصفر , حلقة تبديلية مع عناصر الوحدة

مثل, يكون R حلقة تبديلية مع عناصر الوحدة 1 و يكون فاصل الصفر $Z(R)$. يكون **الرسم** البياني كفاصل الصفر $\Gamma(R)$. و هو رسم بياني بسيط مع النقاط كعضو فاصل الصفر عن **الحلقة** التبديلية. و نقطتين, مثل x و y سيتمان على الفور إذا و فقد إذا $x \cdot y = 0$. يهدف هذا **البحث** لتحديد صيغة الطيف *Adjacency*, Laplace, *signless*-Laplace على الرسم البياني **كفاصل** الصفر و تكملته من حلقة تبديلية مع عناصر الوحدة Z_{2p} ل p عدد أولى $p \geq 3$. و تكون **كيفية** البحث دراسة الأدب باستخدام العديد من الكتب و المجلات كمراجع. و يكون حاصل **البحث**:

1. الطيف Laplace و *signless*-Laplace عن الرسم البياني $(\mathbb{Z}_{2p})$ ل p عدد أولى $p \geq 3$ هو:

$$\boldsymbol{Spec}_{L(\Gamma(Z_{2p}))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } \boldsymbol{Spec}_{L^+(\Gamma(Z_{2p}))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. الطيف *Adjacency* النقطة, Laplace, و *signless*-Laplace عن الرسم البياني (Z_{2p}) ل p عدد أولى $p \geq 3$ هو:

$$\boldsymbol{Spec}_{A(\overline{\Gamma(Z_{2p})})} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & p-2 \\ 1p-2 & & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{Spec}_{L(\overline{\Gamma(Z_{2p})})} = \begin{bmatrix} 0p-1 \\ 2p-2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Spec}_{L^+(\overline{\Gamma(Z_{2p})})} = \begin{bmatrix} 0p-3 & 2p-4 \\ 1p-2 & 1 \end{bmatrix} \text{ و}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Allah SWT berfirman di dalam al-Qur'an surat an-Nisa' (4:1), yang berbunyi :

يَاأَيُّهَا النَّاسُ اتَّقُوا رَبَّكُمُ الَّذِي خَلَقَكُم مِّن نَّفْسٍ وَاحِدَةٍ وَخَلَقَ مِنْهَا زَوْجَهَا وَبَثَّ مِنْهُمَا رِجَالًا كَثِيرًا وَنِسَاءً ۚ وَاتَّقُوا اللَّهَ الَّذِي تَسَاءَلُونَ بِهِ وَالْأَرْحَامَ ۚ إِنَّ اللَّهَ كَانَ عَلَيْكُمْ رَقِيبًا (١)

Artinya: "*Wahai manusia! Bertakwalah kepada Tuhanmu yang telah menciptakan kamu dari diri yang satu (Adam) dan (Allah) menciptakan pasangannya (Hawa) dari (diri)nya; dan dari keduanya Allah memperkembangbiakkan laki-laki dan perempuan yang banyak. Bertakwalah kepada Allah yang dengan nama-Nya kamu saling meminta dan (peliharalah) hubungan kekeluargaan. Sesungguhnya Allah selalu menjaga dan mengawasimu.*"

Al-Qur'an surat an-Nisa' (4:1) menjelaskan bahwa Allah memerintahkan kepada makhluk-Nya agar bertakwa hanya kepada-Nya dan tidak menyekutukan-Nya. Allah SWT memerintahkan manusia agar senantiasa bertakwa kepada-Nya, yang berarti bahwa, bertakwalah kalian kepada Allah SWT dengan taat kepada-Nya. Bertakwalah kalian kepada Allah SWT dengan silaturrahim, yang berarti bahwa janganlah kalian memutuskan silaturrahim melainkan hubungkan dan berbaktilah untuknya (Katsir, 2001:228).

Berdasarkan hikmah dari al-Qur'an surat an-Nisa' (4:1), kita sebagai umat manusia diperintahkan untuk saling menjaga hubungan silaturrahim dan tidak memutuskannya. Silaturrahim bertujuan menyambung kasih sayang atau kekerabatan yang menghendaki kebaikan. Dengan silaturrahim, kita bisa menjalin hubungan yang baik dan mempererat hubungan satu sama lain. Kajian tentang keterhubungan dalam ilmu matematika juga dijelaskan yakni dalam teori graf.

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika dengan perhitungan yang teliti. Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi (Abdussakir, dkk, 2009).

Misalkan G graf dengan order $p(p \geq 1)$ dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. *Matriks keterhubungan titik (atau matriks Adjacency)* dari graf G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}(G)$, adalah matriks $(p \times p)$ dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain, matriks keterhubungan dapat ditulis $\boldsymbol{A}(G) = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq p$ (Abdussakir, dkk, 2009).

Matriks derajat dari matriks G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{D}(G)$, adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-j adalah derajat dari $v_i, \boldsymbol{i} = 1, 2, 3, \dots, p$. Jadi, matriks derajat dari graf G dapat ditulis $\boldsymbol{D}(G) = [d_{ij}], 1 \leq \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \leq p$, dengan

$$d_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Matriks $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$ disebut matriks Laplace dan matriks $\boldsymbol{L}^+(G) = \boldsymbol{D}(G) + \boldsymbol{A}(G)$ disebut matriks *signless*-Laplace dari graf G (Brouwer dan Haemers, 2011).

Pembahasan matriks Laplace $\boldsymbol{L}(G)$ dan matriks *signless*-Laplace $\boldsymbol{L}^+(G)$ dari graf G dapat dikaitkan dengan konsep nilai eigen dan vektor eigen pada topik aljabar linier yang menghasilkan konsep *spectrum*. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ dengan

$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari matriks suatu graf, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing λ_i. Matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut *spectrum* graf G, dan dinotasikan dengan $Spec(G)$ (Biggs, 1993:8). Jadi, spectrum graf G dapat ditulis dengan

$$\boldsymbol{Spec}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

Spectrum yang diperoleh dari matriks $\boldsymbol{L}(G)$ disebut spektrun Laplace dan dari matriks $\boldsymbol{L}^+(G)$ disebut spectrum *signless*-Laplace.

Beberapa penelitian mengenai spektrum suatu graf yang sudah pernah dilakukan adalah spektrum keterhubungan titik dan spektrum Laplace pada graf G_1 yang diperoleh dari graf komplit K_1 dengan menambahkan pohon isomorfik berakar untuk masing-masing titik K_1 oleh Shuhua Yin (2006). Penelitian spektrum keterhubungan titik pada graf komplit (K_n), graf star (S_n), graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$, dan graf lintasan (P_n) oleh Abdussakir, dkk (2009). Penelitian spektrum *detour* pada beberapa graf yang meliputi graf $K(n,n)$, graf korona G dan K_1, graf perkalian kartesius G dengan K_2, graf perkalian leksikografik G dengan K_2, dan perluasan dobel kover dari graf beraturan oleh Ayyaswamy & Balachandran (2010).

Graf juga dapat diperoleh dari struktur aljabar dengan dua operasi biner atau ring. Ring R didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yang terdefinisi yakni penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$ yang memenuhi sifat grup abelian terhadap operasi penjumlahan, asosiatif terhadap operasi perkalian, dan distributif terhadap penjumlahan dan perkalian. Apabila ring tersebut bersifat komutatif terhadap operasi perkalian dan memiliki unsur kesatuan pada operasi kedua maka disebut dengan ring komutatif dengan unsur kesatuan (Gilbert & Gilbert, 2015).

Daerah integral merupakan salah satu contoh ring komutatif. Menurut Gallian (2012) daerah integral merupakan ring komutatif dengan unsur kesatuan dan tidak memiliki unsur pembagi nol. Ring $\mathbb{Z}_p$ adalah ring himpunan bilangan bulat modulo p dengan p bilangan prima merupakan ring komutatif yang tidak memiliki pembagi nol sehingga ring tersebut merupakan daerah integral.

Pada penelitian kali ini ring yang digunakan adalah ring komutatif yang memiliki unsur pembagi nol. Dengan kata lain, ring yang digunakan merupakan ring komutatif yang bukan merupakan daerah integral. Sehingga ring yang digunakan adalah ring $\mathbb{Z}_{mp}$, dengan m bilangan bulat dan p bilangan prima.

Graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan telah diperkenalkan oleh Beck pada tahun 1988 dalam jurnalnya yang berjudul "Coloring of commutative rings". Penelitian mengenai graf pembagi nol dilanjutkan oleh Anderson dan Livingston pada tahun 1999 yang mendefinisikan graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan adalah suatu graf dengan titik-titiknya adalah himpunan pembagi nol yang tak nol $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$ dengan $Z(R)$ adalah himpunan pembagi nol, dan untuk dua titik $x, y \in Z(R)^*$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $xy = 0$. Selanjutnya penelitian tersebut dikaji kembali oleh Wicaksono dan Sholeha pada tahun 2015 yang membahas tentang sifat-sifat graf pembagi nol dari ring komutatif dengan elemen kesatuan.

Berdasarkan uraian tersebut, maka belum ada penelitian terkait spektrum yang diperoleh dari graf pembagi nol. Dengan demikian, penulis mengambil judul

"Spektrum *Adjacency*, Laplace, dan *Signless* Laplace pada Graf Pembagi Nol dan Komplemennya dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{2p}".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana spektrum *adjacency*, laplace, dan *signless* laplace pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{2p}?
2. Bagaimana spektrum *adjacency*, laplace, dan *signless* laplace pada komplemen graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{2p}?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Mengetahui spektrum *adjacency*, laplace, dan *signless* laplace pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{2p}.
2. Mengetahui spektrum *adjacency*, laplace, dan *signless* laplace pada komplemen graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{2p}.

1.4 Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian, maka manfaat dari penelitian ini dibedakan menjadi beberapa bagian berdasarkan kepentingan beberapa pihak, yaitu:

1. Memberikan informasi mengenai spektrum *adjacency*, laplace, dan *signless* laplace pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{2p}.
2. Memberikan informasi mengenai spektrum *adjacency*, laplace, dan *signless* laplace pada komplemen graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{2p}.

1.5 Batasan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini dibatasi hanya pada graf pembagi nol dan ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{2p} untuk p bilangan prima, $p \geq 3$.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan penulis adalah dengan pendekatan penelitian kualitatif. Jenis penelitian yang digunakan berupa studi kepustakaan (*library research*), yaitu teknik pengumpulan data dengan mengadakan studi penelaahan terhadap buku-buku, catatan-catatan, dan hasil penelitian ilmiah lain yang berhubungan dengan objek permasalahan.

Langkah-langkah yang dilakukan untuk menentukan spektrum *adjacency*, laplace, dan *signless* laplace pada graf pembagi nol dan komplemennya dari ring komutatif dengan unsur kesatuan sebagai berikut:

1. Menentukan anggota dari ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{2p} untuk p bilangan prima, $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$.
2. Menentukan Tabel Cayley dari ring komutatif dengan unsur kesatuan.
3. Menentukan himpunan pembagi nol dan komplemennya dari ring komutatif dengan unsur kesatuan.
4. Menggambar graf pembagi nol dan komplemennya dari ring komutatif dengan unsur kesatuan kemudian menyatakan ke dalam bentuk matriks (*Adjacency*, Laplace dan *Signless* Laplace).
5. Menentukan nilai eigen dan vector eigen matriks graf pembagi nol dan komplemennya dari ring komutatif dengan unsur kesatuan untuk memperoleh nilai eigen serta spektrumnya.
6. Membuat dugaan (konjektur) berdasarkan pola yang ditemukan untuk masing-masing kasus.
7. Merumuskan konjektur sebagai suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.
8. Membuat kesimpulan dari analisis data.
9. Menulis laporan hasil penelitian.

1.7 Sistematika Penulisan

Penelitian ini dibagi menjadi 4 bab dengan rincian masing-masing bab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Membahas tentang teori-teori yang digunakan dalam penelitian ini sebagai pendukung pada bab selanjutnya. Teori-teori tersebut meliputi graf, derajat titik, graf terhubung, graf komplemen, graf dan matriks, spektrum graf, ring, ring dengan pembagi nol, graf pembagi nol, dan kajian silaturrahmi menurut pandangan islam.

Bab III Pembahasan

Membahas tentang spektrum *Adjacency*, Laplace dan *Signless* Laplace pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan.

Bab IV Penutup

Membahas tentang kesimpulan dan saran yang diperoleh dari pembahasan yang telah dilakukan di dalam penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Graf

2.1.1 Graf

Graf G adalah pasangan $\big(V(G), E(G)\big)$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q (Abdussakir, dkk, 2009).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut terkait langsung *(incident)*, dan titik u dan v disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung *(adjacent)*, jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Bondy & Murthy, 2008).

2.1.2 Derajat Titik

Derajat titik q dari graf G merupakan banyaknya titik di G yang terhubung langsung dengan q. Derajat dari titik q pada graf G dinotasikan dengan $\deg_G q$ atau $\deg q$. Suatu titik yang berderajat 0 disebut titik terasing dan titik yang berderajat 1 disebut titik ujung atau daun. Derajat terbesar dari semua titik di G disebut derajat maksimum dari G dan dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Derajat minimum dari G dinotasikan dengan $\delta(G)$. Oleh karena itu, jika q merupakan titik dari graf G dengan order n, maka $0 \leq \delta(G) \leq \deg q \leq \Delta(G) \leq n-1$ (Abdussakir, dkk, 2009).

2.1.3 Graf Terhubung

Misalkan G graf. Misalkan u dan v adalah titik di G (yang tidak harus berbeda). Jalan $u-v$ pada graf G adalah barisan berhingga yang berselang-seling $W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n = v$ antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan $e_i = v_{i-1}v_i, i = 1,2,3, \ldots, n$ adalah sisi di G. v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, titik $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut jalan terbuka. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut jalan tertutup. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut jalan trivial (Abdussakir, dkk, 2009).

Karena dalam graf dua titik hanya akan dihubungkan oleh tepat satu sisi, maka jalan $u-v$

$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n = v$ dapat ditulis menjadi

$W: u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} = v$.

Jalan W yang semua sisinya berbeda disebut trail. Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut lintasan. Dengan demikian setiap lintasan pasti merupakan trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan (Abdussakir, dkk, 2009).

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Titik u dan v dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u-v$ di G. Suatu graf G dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terhubung. Dengan kata lain, suatu graf G dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terdapat lintasan $u-v$ di G. Sebaliknya, jika ada dua titik u dan v di G, tetapi tidak ada lintasan $u-v$ di G, maka G dikatakan tak terhubung (*disconnected*) (Bondy & Murthy, 2008).

2.1.4 Graf Komplemen

Misalkan G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Komplemen dari graf G, ditulis $\bar{G}$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ sedemikian hingga dua titik akan terhubung langsung jika dan hanya jika dua titik tersebut tidak terhubung langsung di G. Jadi, diperoleh bahwa $V(\bar{G}) = V(G)$ dan $uv \in E(\bar{G})$ jika dan hanya jika $uv \notin E(G)$ (Abdussakir, dkk, 2009).

2.2 Graf dan Matrik

2.2.1 Matriks *Adjacency* Titik

Misalkan G graf dengan order $p(p \geq 1)$ dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. *Matriks keterhubungan titik (atau matriks keterhubungan)* dari graf G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}(G)$, adalah matriks $(p \times p)$ dengan unsur pada baris ke-*I* dan kolom ke-*j* bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain, matriks keterhubungan dapat ditulis $\boldsymbol{A}(G) = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{, jika } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks keterhubungan suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya. Hal ini karena graf tidak memuat *loop* dan tidak memuat sisi pararel (Abdussakir, dkk, 2009).

2.2.2 Matriks Laplace

Misal $G(V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E, dimisalkan $|V| = n$ dan $|E| = m$. Jadi, G adalah graf dengan n titik dan m sisi. Matriks Laplace dari G adalah matriks $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$; dengan $\boldsymbol{D}(G)$ adalah diagonal matriks yang entrinya adalah derajat titik dari G dan $\boldsymbol{A}(G)$ adalah matriks *adjacency* titik dari G (Biyikoglu, dkk, 2007).

2.2.3 Matriks *Signless* Laplace

Matriks *signless* Laplace dari G adalah matriks $\boldsymbol{L}^{+}(G) = \boldsymbol{D}(G) + \boldsymbol{A}(G)$; dengan $\boldsymbol{D}(G)$ adalah diagonal matriks yang entrinya adalah derajat titik dari G dan $\boldsymbol{A}(G)$ adalah matriks *adjacency* titik dari G (Biyikoglu, dkk, 2007).

2.3 Spektrum

2.3.1 Determinan

Determinan sebuah matriks dapat dihitung dengan mereduksi matriks tersebut pada bentuk eselon baris. Metode ini penting untuk menghindari perhitungan panjang yang terlibat dalam penerapan definisi determinan secara langsung. Jika $\boldsymbol{A}$ adalah sebarang matriks persegi yang mengandung sebaris bilangan nol, maka $\det(\boldsymbol{A}) = 0$. Karena hasil kali elementer bertanda dari $\boldsymbol{A}$ mengandung satu factor dari setiap baris $\boldsymbol{A}$, maka tiap-tiap hasil kali elementer bertanda memuat factor dari baris bilangan nol dan sebagai konsekuensinya juga akan mempunyai nilai nol. Karena $\det(\boldsymbol{A})$ adalah jumlah semua hasil kali elementer bertanda, maka didapatkan $\det(\boldsymbol{A}) = 0$ (Anton, 2000).

Matriks persegi dinamakan segitiga atas (*upper triangular*) jika semua entri di bawah diagonal utama adalah nol. Jika semua entri nol ada di atas diagonal utama, maka dinamakan segitiga bawah (*lower triangular*). Suatu matriks yang semua entrinya bernilai nol baik di atas maupun di bawah diagonal utama disebut segitiga (*triangular*). Jika $\boldsymbol{A}$ adalah suatu matriks $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau segitiga), maka $\det(\boldsymbol{A})$ adalah hasil kali anggota-anggota pada diagonal utamanya, yaitu $\det(\boldsymbol{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$ (Anton, 2000).

2.3.2 Polinomial Karakteristik

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $n \times n$, maka polinomial kaarakteristik $\boldsymbol{A}$ memiliki derajat n dan koefisien variabel λ^n adalah 1, maka polinomial karakteristik $p(x)$ dari suatu matriks $n \times n$ memiliki bentuk

$$p(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n$$

Berdasarkan teorema dasar aljabar, maka persamaan karakteristik dapat ditulis sebagai berikut

$p(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n = 0$ (Anton dan Rorres, 2004).

2.3.3 Eliminasi Gauss

Suatu matriks dikatakan dalam bentuk eselon baris tereduksi (*reduce row-echelon form*) jika mempunyai sifat-sifat berikut:

1. Jika baris tidak terdiri dari seluruhnya nol, maka bilangan tak nol pertama dalam baris tersebut adalah 1 (dinamakan 1 utama).

2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama-sama di bagian matriks paling bawah.
3. Dalam sebarang dua baris yang berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol, maka 1 utama dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan dari 1 utama dalam baris yang lebih tinggi.
4. Masing-masing kolom yang mengandung 1 utama mempunyai nol di tempat lain.

Jika suatu matriks hanya mempunyai sifat sampai pada nomor 3, maka langkah yang telah dilakukan untuk mendapatkannya disebut eliminasi Gauss. Tetapi jika mempunyai sifat sampai nomor 4, maka langkah yang telah dilakukan untuk mendapatkannya disebut eliminasi Gauss Jordan (Anton & Rorres, 2004).

2.3.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan G graf berorder p dan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks keterhubungan dari graf G. Suatu vektor tak nol x disebut vektor Eigen *(Eigen vector)* dari $\boldsymbol{A}$ jika $\boldsymbol{A}x$ adalah suatu kelipatan scalar dari x yakni, $\boldsymbol{A}x = \lambda x$, untuk sebarang scalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen *(eigen value)* dari $\boldsymbol{A}$, dan x disebut sebagai vector eigen dari $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan λ (Anton dan Rorres, 2014:291). Untuk menentukan nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$, persamaan $\boldsymbol{A}x = \lambda x$ ditulis kembali dalam bentuk

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})x = 0,$$

Dengan $\boldsymbol{I}$ adalah matriks identitas berordo $(p \times p)$. Persamaan ini akan mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0.$$

Persamaan $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$ akan menghasilkan persamaan polinomial dalam variabel λ dan disebut persamaan karakteristik dari matriks $\boldsymbol{A}$. Scalar-skalar λ yang memenuhi persamaan karakteristik ini tidak lain adalah nilai-nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$ (Anton dan Rorres, 2014:292).

2.3.5 Spektrum

Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks *adjacency* titik dan misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari $\boldsymbol{A}$, dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya dimensi untuk ruang vektor eigen masing-masing λ_i, maka matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut *spectrum* graf G, dan dinotasikan dengan $Spec(G)$. Jadi, spectrum graf G dapat ditulis dengan

$$\boldsymbol{Spec}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}$$ (Biggs, 1993).

2.4 Ring

2.4.1 Definisi Ring

Ring R merupakan suatu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner, operasi penjumlahan (dinotasikan oleh $a + b$) dan operasi perkalian (dinotasikan oleh $a \cdot b$), sedemikian sehingga untuk setiap $a, b, c \in R$:

1. $a + b = b + a$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Terdapat identitas pada operasi penjumlahan yaitu 0. Sehingga, terdapat elemen 0 di R sedemikian sehingga $a + 0 = a$ untuk semua a di R.

4. Terdapat suatu elemen $-a$ di R sedemikian sehingga $a + (-a) = 0$.

5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(b + c) \cdot a = a \cdot b + c \cdot a$

Jadi, ring adalah suatu grup Abelian di bawah operasi penjumlahan, serta asosiatif terhadap perkalian pada distributive kiri dan kanannya atas penjumlahan (Gallian, 2012).

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah ring. Terdapat suatu unsur e di R sedemikian sehingga $x \cdot e = e \cdot x = x$ untuk setiap x di R, maka e disebut unsur satuan, dan R adalah ring dengan satuan. Perkalian di R komutatif, maka R disebut ring komutatif. Sehingga, R adalah ring komutatif dengan satuan (Gilbert & Gilbert, 2015).

2.4.2 Ring Komutatif

Suatu ring $(R,*,\cdot)$ disebut ring komutatif jika dan hanya jika operasi kedua $(\cdot)$ bersifat komutatif di R (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:314).

Contoh:

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring komutatif, karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $a \times b = b \times a$, yang berarti operasi kedua $(\times)$ bersifat komutatif di $\mathbb{Z}$. Jadi, $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring komutatif.

2.4.3 Ring dengan Unsur Kesatuan

Suatu ring $(R,*,\cdot)$ disebut ring dengan unsur kesatuan jika dan hanya jika R mempunyai unsur identitas terhadap operasi kedua $(\cdot)$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:314)

Contoh:

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring dengan unsur kesatuan, karena ada $1 \in \mathbb{Z}$ sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, maka $a \times 1 = 1 \times a = a$, yang berarti terdapat unsur identitas di $\mathbb{Z}$ terhadap operasi kedua $(\times)$. Jadi, $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring dengan unsur kesatuan.

2.4.4 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan

Suatu ring $(R, *, \cdot)$ disebut ring komutatif dengan unsur kesatuan jika dan hanya jika operasi kedua bersifat komutatif dan R mempunyai unsur identitas terhadap operasi kedua yaitu operasi $(\cdot)$. Dengan kata lain R merupakan ring komutatif sekaligus ring dengan unsur kesatuan (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:314)

Contoh:

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring komutatif sekaligus ring dengan unsur kesatuan, sehingga $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan.

2.5 Ring dengan Pembagi Nol

Misalkan $(R, *, \cdot)$ adalah ring, jika a dan b keduanya unsur tidak nol di R sehingga $a \cdot b = 0$, maka a dan b disebut pembagi nol (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:314)

Contoh:

Misalkan $(\mathbb{Z}_6, +, \times)$ adalah ring, dengan $\mathbb{Z}_6$ adalah himpunan bilangan bulat modulo 6.

$\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ sehingga $\bar{0} = \bar{6} = \overline{12} = \overline{18} = \overline{24} = \overline{30}$

$\bar{2}$ merupakan pembagi nol karena terdapat $\bar{3}$ sehingga $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{6} = \bar{0}$

$\overline{3}$ merupakan pembagi nol karena terdapat $\overline{2}$ sehingga $\overline{3} \times \overline{2} = \overline{6} = \overline{0}$

$\overline{4}$ merupakan pembagi nol karena terdapat $\overline{3}$ sehingga $\overline{4} \times \overline{3} = \overline{12} = \overline{0}$

Jadi, pembagi nol dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $\overline{2}, \overline{3}$, dan $\overline{4}$.

2.6 Graf Pembagi Nol Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan

Misalkan R adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan 1 dan pembagi nolnya adalah $Z(R)$. Sebuah graf pembagi nol, $\Gamma(R)$ adalah graf sederhana dengan titik-titiknya adalah anggota pembagi nol dari suatu ring komutatif tersebut. Kedua titik misalkan x dan y akan terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$ dengan $x, y \neq 0$ (Wicaksono dan Sholeha, 2013)

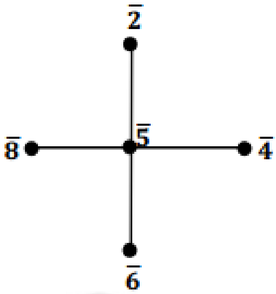
Contoh :

Diberikan ring modulo 10 adalah $Z_{10} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}\}$ dengan operasi perkalian dapat dinyatakan dalam tabel Cayley sebagai berikut:

Tabel 2.1 Tabel Cayley Ring Komutatif dari $\boldsymbol{Z_{10}}$

$\cdot$	$\overline{\mathbf{0}}$	$\overline{\mathbf{1}}$	$\overline{\mathbf{2}}$	$\overline{\mathbf{3}}$	$\overline{\mathbf{4}}$	$\overline{\mathbf{5}}$	$\overline{\mathbf{6}}$	$\overline{\mathbf{7}}$	$\overline{\mathbf{8}}$	$\overline{\mathbf{9}}$
$\overline{\mathbf{0}}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{\mathbf{1}}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{\mathbf{2}}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{\mathbf{3}}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$
$\overline{\mathbf{4}}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$
$\overline{\mathbf{5}}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$
$\overline{\mathbf{6}}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{\mathbf{7}}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{\mathbf{8}}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{\mathbf{9}}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh himpunan semua unsur pembagi nol dari ring Z_{10} adalah $Z(Z_{10}) = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}\}$. Berdasarkan definisi graf pembagi nol, maka diperoleh graf pembagi nol ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{10} adalah



Gambar 2. 1 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{10}

2.7 Kajian Islam tentang Silaturrahim

Al-Quran yang menjelaskan tentang keterhubungan yaitu silaturrahim. Silaturrahim berasal dari kata *silah* yang berarti hubungan dan *ar-rahim* yang berarti Rahim atau kerabat. Sehingga secara bahasa, silaturrahim merupakan hubungan kekerabatan. Perintah silaturrahim terdapat pada al-Quran surat an-Nisa/4:1, yang berbunyi

يَاأَيُّهَا النَّاسُ اتَّقُوا رَبَّكُمُ الَّذِي خَلَقَكُم مِّن نَّفْسٍ وَاحِدَةٍ وَخَلَقَ مِنْهَا زَوْجَهَا وَبَثَّ مِنْهُمَا رِجَالًا كَثِيرًا

وَنِسَاءً ۚ وَاتَّقُوا اللَّهَ الَّذِي تَسَاءَلُونَ بِهِ وَالْأَرْحَامَ ۚ إِنَّ اللَّهَ كَانَ عَلَيْكُمْ رَقِيبًا ﴿١﴾

Artinya: "*Hai sekalian manusia, bertakwalah kepada Tuhan kalian yang telah menciptakan kalian dari seorang diri, dan darinya Allah menciptakan istrinya; dan dari keduanya Allah memperkembangbiakkan laki-laki dan perempuan yang banyak. Dan bertakwalah kepada Allah yang dengan (mempergunakan) nama-Nya kalian saling meminta satu sama lain, dan peliharalah hubungan silaturrahim. Sesungguhnya Allah selalu menjaga dan mengawasi kalian.*"

Ayat tersebut menjelaskan tentang perintah Allah Swt. Kepada umatnya agar senantiasa saling menyambung silaturrahim dan tidak memutuskannya. Seperti ditekankan pada penggalan al-Quran surat an-Nisa/4:1, yaitu

وَاتَّقُوا اللَّهَ الَّذِي تَسَاءَلُونَ بِهِ وَالْأَرْحَامَ ۚ

Artinya: "*Dan bertakwalah kepada Allah yang dengan (mempergunakan) nama-Nya kalian saling meminta satu sama lain, dan peliharalah hubungan silaturrahim.*"

Terdapat beberapa cara atau bentuk yang bisa dilakukan untuk mewujudkan silaturrahim. Salah satunya yakni dengan memberi bantuan kepada kerabat seperti yang dituliskan dalam al-Quran surat an-Nahl/16:90, yang berbunyi

إِنَّ اللَّهَ يَأْمُرُ بِالْعَدْلِ وَالْإِحْسَانِ وَإِيتَاءِ ذِي الْقُرْبَىٰ وَيَنْهَىٰ عَنِ الْفَحْشَاءِ وَالْمُنكَرِ وَالْبَغْيِ ۚ يَعِظُكُمْ لَعَلَّكُمْ تَذَكَّرُونَ

(٩٠)

Artinya: "*Sesungguhnya Allah menyuruh (kamu) berlaku adil dan berbuat kebajikan, memberi kepada kaum kerabat, dan Allah melarang dari perbuatan keji, kemungkaran, dan permusuhan. Dia memberi pengajaran kepada kalian agar kalian dapat mengambil pelajaran.*"

Allah Swt. menyebutkan bahwa Dia memerintahkan kepada hamba-hambaNya untuk berlaku adil, yakni pertengahan dan seimbang. Allah Swt. memerintahkan untuk berbuat kebajikan. Yang dimaksud dengan firman-Nya

وَإِيتَاءِ ذِي الْقُرْبَىٰ

Artinya: "*dan memberi kepada kaum kerabat*". (An-Nahl:90) yaitu hendaknya Dia menganjurkan untuk bersilaturrahim (Katsir, 2003:97).

Selain itu, dalam surat ar-Rum/30:38 juga tertulis ayat tentang memberi bantuan kepada kerabat, orang miskin, dan orang yang sedang dalam perjalanan.

فَآتِ ذَا الْقُرْبَىٰ حَقَّهُ وَالْمِسْكِينَ وَابْنَ السَّبِيلِ ۚ ذَٰلِكَ خَيْرٌ لِّلَّذِينَ يُرِيدُونَ وَجْهَ اللَّهِ ۖ وَأُولَٰئِكَ هُمُ الْمُفْلِحُونَ

(٣٨)

Artinya: "*Maka berikanlah kepada kerabat yang terdekat akan haknya, demikian (pula) kepada fakir miskin dan orang-orang yang dalam perjalanan. Itulah yang lebih baik bagi orang-orang yang mencari keridhaan Allah; dan mereka itulah orang-orang yang beruntung.*"

Allah swt. berfirman, memerintahkan (kepada kaum muslim) agar memberikan kepada kerabat terdekat mereka akan haknya, yakni berbuat dan menghubungkan silaturrahim, juga orang miskin. Yang dimaksud orang miskin ialah orang yang tidak mempunyai sesuatu pun untuk ia belanjakan buat dirinya atau memiliki sesuatu tetapi masih belum mencukupinya. Juga kepada *ibnu sabil*, yaitu seorang musafir yang memerlukan biaya dan keperluan hidupnya dalam perjalanan, karena biayanya kehabisan ditengah jalan (Katsir, 2004:377).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Spektrum *Adjacency* Titik, Laplace, dan *Signless* Laplace pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{2p}

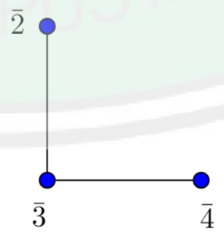
3.1.1 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_6

Dua unsur di ring bilangan bulat modulo Z_6 jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian dapat disajikan dengan Tabel Cayley berikut.

Tabel 3.1 Tabel Cayley Ring Komutatif dari $\boldsymbol{Z_6}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Himpunan semua unsur pembagi nol dari ring komutatif Z_6 adalah $Z(Z_6) = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Titik graf pembagi nol $\Gamma(Z_6)$ dari ring komutatif Z_6 adalah $V(\Gamma(Z_6) = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Dua titik berbeda $u, v \in V(\Gamma(Z_6)$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$. Dari Tabel 3.1 dapat digambarkan graf pembagi nol berikut.



Gambar 3.1 Gambar Graf Pembagi Nol $\boldsymbol{\Gamma(Z_6)}$

Dari Gambar 3.1 dapat diperoleh matriks *adjacency* titik dan matriks derajat dari $\Gamma(Z_6)$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\big(\Gamma(Z_6)\big) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}\big(\Gamma(Z_6)\big) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\Gamma(Z_6)$

$$\boldsymbol{L}\big(\Gamma(Z_6)\big) = \boldsymbol{D}\big(\Gamma(Z_6)\big) - \boldsymbol{A}\big(\Gamma(Z_6)\big) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det\Big(\boldsymbol{L}\big(\Gamma(Z_6)\big) - \lambda I\Big) = det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\lambda^2 - 3\lambda + 1}{\lambda - 1} & -1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3)}{\lambda^2 - 3\lambda + 1} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}\big(\Gamma(Z_6)\big)$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$$p(\lambda) = (1-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2 - 3\lambda + 1}{\lambda - 1}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3)}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}\right) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 3$. Kemudian akan dicari multiplisitas dari nilai eigen tersebut.

Untuk $\lambda_1 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}\left(\Gamma(Z_6)\right) - \lambda I\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_1) = 1$.

Untuk $\lambda_2 = 1$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}\left(\Gamma(Z_6)\right) - \lambda I\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_2) = 1$.

Untuk $\lambda_2 = 3$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}\left(\Gamma(Z_6)\right) - \lambda I\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\Gamma(Z_6)$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_6))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_6))$ adalah 0, 1, dan 3. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 1, dan 1.

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\Gamma(Z_6)$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^{+}\big(\Gamma(Z_6)\big) = \boldsymbol{D}\big(\Gamma(Z_6)\big) + \boldsymbol{A}\big(\Gamma(Z_6)\big) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det\big(\boldsymbol{L}^{+}\big(\Gamma(Z_6)\big) - \lambda I\big) = det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda^2-3\lambda+1}{\lambda-1} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda(\lambda^2-4\lambda+3)}{\lambda^2-3\lambda+1} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^+\big(\Gamma(Z_6)\big)$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$$p(\lambda) = (1-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2-3\lambda+1}{\lambda-1}\right)\left(-\frac{\lambda(\lambda^2-4\lambda+3)}{\lambda^2-3\lambda+1}\right) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 3$. Kemudian akan dicari multiplisitas dari nilai eigen tersebut.

Untuk $\lambda_1 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\big(\boldsymbol{L}^+\big(\Gamma(Z_6)\big) - \lambda I\big)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_1) = 1$.

Untuk $\lambda_2 = 1$ disubstitusikan ke dalam $\big(\boldsymbol{L}^+\big(\Gamma(Z_6)\big) - \lambda I\big)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_2) = 1$.

Untuk $\lambda_2 = 3$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma(Z_6)\right) - \lambda I\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless* Laplace dari $\Gamma(Z_6)$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{L^+(\Gamma(Z_6))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^+(\Gamma(Z_6))$ adalah 0, 1, dan 3. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 1, dan 1.

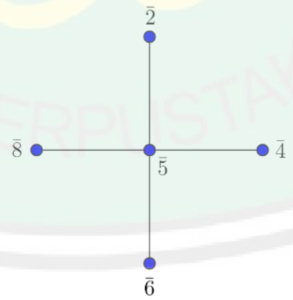
3.1.2 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{10}

Dua unsur di ring bilangan bulat modulo Z_{10} jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian dapat disajikan dengan Tabel Cayley berikut.

Tabel 3.2 Tabel Cayley Ring Komutatif dari $\boldsymbol{Z_{10}}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Himpunan semua unsur pembagi nol dari ring komutatif Z_{10} adalah $Z(Z_{10}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$. Titik graf pembagi nol $\Gamma(Z_{10})$ dari ring komutatif Z_{10} adalah $V(\Gamma(Z_{10})) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$. Dua titik berbeda $u, v \in V(\Gamma(Z_{10}))$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$. Dari Tabel 3.2 dapat digambarkan graf pembagi nol berikut.



Gambar 3.2 Gambar Graf Pembagi Nol $\boldsymbol{\Gamma(Z_{10})}$

Dari Gambar 3.2 dapat diperoleh matriks *adjacency* titik dan matriks derajat dari $\Gamma(Z_{10})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}(\Gamma(Z_{10})) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}(\Gamma(Z_{10})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\Gamma(Z_{10})$

$$\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_{10})) = \boldsymbol{D}(\Gamma(Z_{10})) - \boldsymbol{A}(\Gamma(Z_{10})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_{10})) - \lambda I) = det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda^2 - 5\lambda + 2}{-1+\lambda} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda^3 - 6\lambda^2 + 6\lambda - 1}{\lambda^2 - 5\lambda + 2} & \dfrac{-1+\lambda}{\lambda^2 - 5\lambda + 2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{(\lambda^2 - 6\lambda + 5)\lambda}{\lambda^2 - 5\lambda + 1} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_{10}))$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$p(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)^3(\lambda-5)$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 5$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 3$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\Gamma(Z_{10})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{L(\Gamma(Z_{10}))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_6))$ adalah 0, 1, dan 5. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 3, dan 1.

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\Gamma(Z_{10})$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^+(\Gamma(Z_{10})) = \boldsymbol{D}(\Gamma(Z_{10})) + \boldsymbol{A}(\Gamma(Z_{10})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{L}^+(\Gamma(Z_{10})) - \lambda I) = det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda^2-5\lambda+2}{-1+\lambda} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda^3-6\lambda^2+6\lambda-1}{\lambda^2-5\lambda+2} & \dfrac{-1+\lambda}{\lambda^2-5\lambda+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{(\lambda^2-6\lambda+5)\lambda}{\lambda^2-5\lambda+1} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^+(\Gamma(Z_{10}))$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$p(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)^3(\lambda-5)$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 5$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = 3$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless* Laplace dari $\Gamma(Z_{10})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{L^+(\Gamma(Z_{10}))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^+(\Gamma(Z_{10}))$ adalah 0, 1, dan 5. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 3, dan 1.

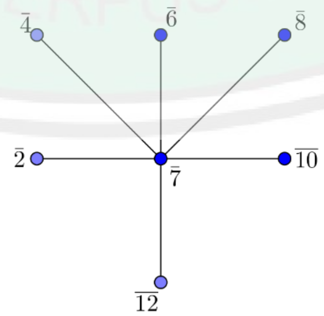
3.1.3 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{14}

Dua unsur di ring bilangan bulat modulo Z_{14} jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian dapat disajikan dengan Tabel Cayley berikut.

Tabel 3.3 Tabel Cayley Ring Komutatif dari $\boldsymbol{Z_{14}}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{11}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Himpunan semua unsur pembagi nol dari ring komutatif Z_{14} adalah $Z(Z_{14}) = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$. Titik graf pembagi nol $\Gamma(Z_{14})$ dari ring komutatif Z_{14} adalah $V(\Gamma(Z_{14})) = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$. Dua titik berbeda $u, v \in V(\Gamma(Z_{14}))$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$. Dari Tabel 3.3 dapat digambarkan graf pembagi nol berikut.



Gambar 3.3 Gambar Graf Pembagi Nol $\boldsymbol{\Gamma(Z_{14})}$

Dari Gambar 3.3 dapat diperoleh matriks *adjacency* titik dan matriks derajat dari $\Gamma(Z_{14})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\big(\Gamma(Z_{14})\big)=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\1&1&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}\big(\Gamma(Z_{14})\big)=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&6&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\Gamma(Z_{14})$

$$\boldsymbol{L}\big(\Gamma(Z_{14})\big)=\boldsymbol{D}\big(\Gamma(Z_{14})\big)-\boldsymbol{A}\big(\Gamma(Z_{14})\big)=\begin{bmatrix}1&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0&0\\-1&-1&-1&6&-1&-1&-1\\0&0&0&-1&1&0&0\\0&0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\det\big(\boldsymbol{L}\big(\Gamma(Z_{14})\big)-\lambda I\big)=$$

$$det\left(\begin{bmatrix}1&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0&0\\-1&-1&-1&6&-1&-1&-1\\0&0&0&-1&1&0&0\\0&0&0&-1&0&1&0\\0&0&0&-1&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)=$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-7\lambda+3}{-1+\lambda} & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-8\lambda^2+9\lambda-2}{\lambda^2-7\lambda+3} & \frac{-1+\lambda}{\lambda^2-7\lambda+3} & \frac{-1+\lambda}{\lambda^2-7\lambda+3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-8\lambda^2+8\lambda-1}{\lambda^2-7\lambda+2} & \frac{-1+\lambda}{\lambda^2-7\lambda+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda^2-8\lambda+7)\lambda}{\lambda^2-7\lambda+1} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $L(\Gamma(Z_{14}))$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)^5(\lambda-7)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 7$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 5$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\Gamma(Z_{14})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_{14}))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_{14}))$ adalah 0, 1, dan 7. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 5, dan 1.

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\Gamma(Z_{14})$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^{+}\big(\Gamma(Z_{14})\big) = \boldsymbol{D}\big(\Gamma(Z_{14})\big) + \boldsymbol{A}\big(\Gamma(Z_{14})\big) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det\big(\boldsymbol{L}^{+}\big(\Gamma(Z_{14})\big) - \lambda I\big) = det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 6-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-7\lambda+3}{-1+\lambda} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-8\lambda^2+9\lambda-2}{\lambda^2-7\lambda+3} & \frac{-1+\lambda}{\lambda^2-7\lambda+3} & \frac{-1+\lambda}{\lambda^2-7\lambda+3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^3-8\lambda^2+8\lambda-1}{\lambda^2-7\lambda+2} & \frac{-1+\lambda}{\lambda^2-7\lambda+2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\lambda^2-8\lambda+7)\lambda}{\lambda^2-7\lambda+1} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^{+}(\Gamma(Z_{14}))$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)^5(\lambda - 7)$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 7$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 5$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless* Laplace dari $\Gamma(Z_{14})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{L^{+}(\Gamma(Z_{14}))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^{+}(\Gamma(Z_{14}))$ adalah 0, 1, dan 7. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 5, dan 1.

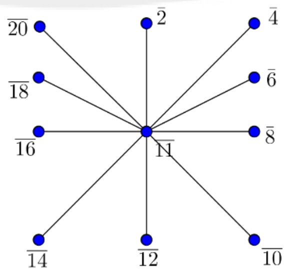
3.1.4 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{22}

Dua unsur di ring bilangan bulat modulo Z_{22} jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian dapat disajikan dengan Tabel Cayley berikut.

Tabel 3.4 Tabel Cayley Ring Komutatif dari $\boldsymbol{Z_{22}}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\overline{21}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{11}$	$\overline{14}$	$\overline{17}$	$\overline{20}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{19}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{20}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{13}$	$\overline{18}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{16}$	$\overline{21}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{14}$	$\overline{19}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{12}$	$\overline{17}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$	$\overline{20}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{19}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{18}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{17}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{16}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{15}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{18}$	$\overline{5}$	$\overline{14}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{19}$	$\overline{6}$	$\overline{15}$	$\overline{2}$	$\overline{11}$	$\overline{20}$	$\overline{7}$	$\overline{16}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{21}$	$\overline{8}$	$\overline{17}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$
$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$
$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$	$\overline{17}$	$\overline{8}$	$\overline{21}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{16}$	$\overline{7}$	$\overline{20}$	$\overline{11}$	$\overline{2}$	$\overline{15}$	$\overline{6}$	$\overline{19}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{14}$	$\overline{5}$	$\overline{18}$	$\overline{9}$
$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$
$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{16}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{17}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{18}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{19}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{20}$	$\overline{13}$	$\overline{6}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$
$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{17}$	$\overline{0}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{19}$	$\overline{14}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{21}$	$\overline{16}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{18}$	$\overline{13}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{20}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{19}$	$\overline{0}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{20}$	$\overline{17}$	$\overline{14}$	$\overline{11}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{21}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{21}$	$\overline{20}$	$\overline{19}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Himpunan semua unsur pembagi nol dari ring komutatif Z_{22} adalah $Z(Z_{22}) = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}\}$. Titik graf pembagi nol $\Gamma(Z_{22})$ dari ring komutatif Z_{22} adalah $V(\Gamma(Z_{22})) = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}\}$. Dua titik berbeda $u, v \in V(\Gamma(Z_{22}))$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$. Dari Tabel 3.4 dapat digambarkan graf pembagi nol berikut.



Gambar 3.4 Gambar Graf Pembagi Nol $\boldsymbol{\Gamma(Z_{22})}$

Dari Gambar 3.4 dapat diperoleh matriks *adjacency* titik dan matriks derajat dari $\Gamma(Z_{22})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\big(\Gamma(Z_{22})\big) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}\big(\Gamma(Z_{22})\big) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\Gamma(Z_{22})$

$$\boldsymbol{L}\big(\Gamma(Z_{22})\big) = \boldsymbol{D}\big(\Gamma(Z_{22})\big) - \boldsymbol{A}\big(\Gamma(Z_{22})\big) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 10 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det\big(\boldsymbol{L}\big(\Gamma(Z_{22})\big) - \lambda I\big) =$$

$$det \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 10 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 10-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Hasil dari $\det(\boldsymbol{L}-\lambda I)$ dapat diperoleh menggunakan aplikasi Maple 18 yaitu

$p(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)^9(\lambda-11)$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, dan $\lambda_3=11$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1)=1$, $m(\lambda_2)=9$, dan $m(\lambda_3)=1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\Gamma(Z_{22})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_{22}))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 11 \\ 1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_{22}))$ adalah 0, 1, dan 11. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 9, dan 1.

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\Gamma(Z_{22})$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^+(\Gamma(Z_{22})) = \boldsymbol{D}(\Gamma(Z_{22})) + \boldsymbol{A}(\Gamma(Z_{22})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(\boldsymbol{L}^+(\Gamma(Z_{22})) - \lambda I) =$

$$det\left(\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&10&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)=$$

$$det\left(\begin{bmatrix}1-\lambda&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&1-\lambda&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1-\lambda&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1-\lambda&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1-\lambda&1&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&10-\lambda&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&1&1-\lambda&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&1-\lambda&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&1-\lambda&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&1-\lambda&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1-\lambda\end{bmatrix}\right)$$

Hasil dari $\det(\boldsymbol{L}^{+}-\lambda I)$ dapat diperoleh menggunakan aplikasi Maple 18 yaitu

$p(\lambda)=-\lambda(\lambda-1)^{9}(\lambda-11)$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,$ dan $\lambda_3=11.$ Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1)=1, m(\lambda_2)=9$, dan $m(\lambda_3)=1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless* Laplace dari $\Gamma(Z_{22})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{L^{+}(\Gamma(Z_{22}))}=\begin{bmatrix}0&1&11\\1&9&1\end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^{+}(\Gamma(Z_{22}))$ adalah 0, 1, dan 11. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 9, dan 1.

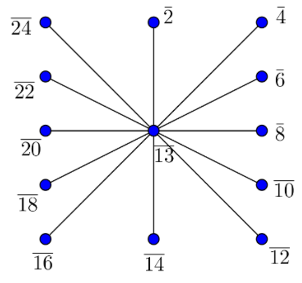
3.1.5 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{26}

Dua unsur di ring bilangan bulat modulo Z_{26} jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian dapat disajikan dengan Tabel Cayley berikut.

Tabel 3.5 Tabel Cayley Ring Komutatif dari $\boldsymbol{Z_{26}}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{22}$	$\overline{24}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{22}$	$\overline{24}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\overline{21}$	$\overline{24}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{19}$	$\overline{22}$	$\overline{25}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{11}$	$\overline{14}$	$\overline{17}$	$\overline{20}$	$\overline{23}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{24}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$	$\overline{22}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{24}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$	$\overline{22}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{20}$	$\overline{25}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{14}$	$\overline{19}$	$\overline{24}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{13}$	$\overline{18}$	$\overline{23}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{12}$	$\overline{17}$	$\overline{22}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{16}$	$\overline{21}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{24}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\overline{22}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{24}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\overline{22}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{16}$	$\overline{23}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{18}$	$\overline{25}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$	$\overline{20}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{15}$	$\overline{22}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{17}$	$\overline{24}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{19}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{24}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{22}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{24}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{22}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{18}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{19}$	$\overline{2}$	$\overline{11}$	$\overline{20}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{21}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$	$\overline{22}$	$\overline{5}$	$\overline{14}$	$\overline{23}$	$\overline{6}$	$\overline{15}$	$\overline{24}$	$\overline{7}$	$\overline{16}$	$\overline{25}$	$\overline{8}$	$\overline{17}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{24}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{22}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{24}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{22}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{22}$	$\overline{7}$	$\overline{18}$	$\overline{3}$	$\overline{14}$	$\overline{25}$	$\overline{10}$	$\overline{21}$	$\overline{6}$	$\overline{17}$	$\overline{2}$	$\overline{13}$	$\overline{24}$	$\overline{9}$	$\overline{20}$	$\overline{5}$	$\overline{16}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{23}$	$\overline{8}$	$\overline{19}$	$\overline{4}$	$\overline{15}$
$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{24}$	$\overline{10}$	$\overline{22}$	$\overline{8}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{24}$	$\overline{10}$	$\overline{22}$	$\overline{8}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{14}$
$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$
$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{20}$	$\overline{8}$	$\overline{22}$	$\overline{10}$	$\overline{24}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{20}$	$\overline{8}$	$\overline{22}$	$\overline{10}$	$\overline{24}$	$\overline{12}$
$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{4}$	$\overline{19}$	$\overline{8}$	$\overline{23}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{16}$	$\overline{5}$	$\overline{20}$	$\overline{9}$	$\overline{24}$	$\overline{13}$	$\overline{2}$	$\overline{17}$	$\overline{6}$	$\overline{21}$	$\overline{10}$	$\overline{25}$	$\overline{14}$	$\overline{3}$	$\overline{18}$	$\overline{7}$	$\overline{22}$	$\overline{11}$
$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{22}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{24}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{22}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{24}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$
$\overline{17}$	$\overline{0}$	$\overline{17}$	$\overline{8}$	$\overline{25}$	$\overline{16}$	$\overline{7}$	$\overline{24}$	$\overline{15}$	$\overline{6}$	$\overline{23}$	$\overline{14}$	$\overline{5}$	$\overline{22}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$	$\overline{21}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{20}$	$\overline{11}$	$\overline{2}$	$\overline{19}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{18}$	$\overline{9}$
$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{22}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{24}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{22}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{24}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$
$\overline{19}$	$\overline{0}$	$\overline{19}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{24}$	$\overline{17}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{22}$	$\overline{15}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{20}$	$\overline{13}$	$\overline{6}$	$\overline{25}$	$\overline{18}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{23}$	$\overline{16}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$
$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{22}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{24}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{22}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{24}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{21}$	$\overline{16}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{22}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{23}$	$\overline{18}$	$\overline{13}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{24}$	$\overline{19}$	$\overline{14}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{25}$	$\overline{20}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{22}$	$\overline{0}$	$\overline{22}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{24}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{22}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{24}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{23}$	$\overline{0}$	$\overline{23}$	$\overline{20}$	$\overline{17}$	$\overline{14}$	$\overline{11}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{25}$	$\overline{22}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{24}$	$\overline{21}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{24}$	$\overline{0}$	$\overline{24}$	$\overline{22}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{24}$	$\overline{22}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{25}$	$\overline{24}$	$\overline{23}$	$\overline{22}$	$\overline{21}$	$\overline{20}$	$\overline{19}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Himpunan semua unsur pembagi nol dari ring komutatif Z_{26} adalah $Z(Z_{26}) = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}\}$. Titik graf pembagi nol $\Gamma(Z_{26})$ dari ring komutatif Z_{26} adalah $V(\Gamma(Z_{26})) = \{\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}\}$. Dua titik berbeda $u, v \in V(\Gamma(Z_{26}))$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$. Dari Tabel 3.5 dapat digambarkan graf pembagi nol berikut.



Gambar 3.5 Gambar Graf Pembagi Nol $\boldsymbol{\Gamma(Z_{26})}$

Dari Gambar 3.5 dapat diperoleh matriks *adjacency* titik dan matriks derajat dari $\Gamma(Z_{26})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}(\Gamma(Z_{26})) = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}(\Gamma(Z_{26})) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\Gamma(Z_{26})$

$$\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_{26})) = \boldsymbol{D}(\Gamma(Z_{26})) - \boldsymbol{A}(\Gamma(Z_{26})) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0&0&0\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&12&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_{26})) - \lambda I) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0&0&0\\ -1&-1&-1&-1&-1&-1&12&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\ 0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 12-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Hasil dari $\det(\boldsymbol{L} - \lambda I)$ dapat diperoleh menggunakan aplikasi Maple 18 yaitu

$p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)^{11}(\lambda - 13)$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 13$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 11$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\Gamma(Z_{26})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{L(\Gamma(Z_{26}))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 13 \\ 1 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_{26}))$ adalah 0, 1, dan 13. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 11, dan 1.

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\Gamma(Z_{26})$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^{+}(\Gamma(Z_{26})) = \boldsymbol{D}(\Gamma(Z_{26})) + \boldsymbol{A}(\Gamma(Z_{26})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 12 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(\boldsymbol{L}^{+}(\Gamma(Z_{26})) - \lambda I) =$

$$det\left(\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&1&12&1&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)=$$

$$det\left(\begin{bmatrix}1-\lambda&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&1-\lambda&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1-\lambda&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1-\lambda&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1-\lambda&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1-\lambda&1&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&1&12-\lambda&1&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&1&1-\lambda&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&1-\lambda&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&1-\lambda&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1-\lambda&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1-\lambda&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1-\lambda\end{bmatrix}\right)$$

Hasil dari $\det(\boldsymbol{L}^{+}-\lambda I)$ dapat diperoleh menggunakan aplikasi Maple 18 yaitu

$p(\lambda)=-\lambda(\lambda-1)^{11}(\lambda-13)$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, dan $\lambda_3=13$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1)=1$, $m(\lambda_2)=11$, dan $m(\lambda_3)=1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless* Laplace dari $\Gamma(Z_{26})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{L}^{+}(\Gamma(Z_{26}))}=\begin{bmatrix}0&1&13\\1&11&1\end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^{+}(\Gamma(Z_{26}))$ adalah 0, 1, dan 13. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 11, dan 1.

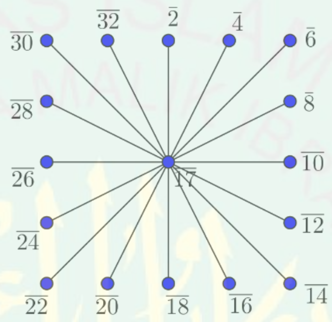
3.1.6 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{34}

Dua unsur di ring bilangan bulat modulo Z_{34} jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian dapat disajikan dengan Tabel Cayley berikut.

Tabel 3.6 Tabel Cayley Ring Komutatif dari Z_{34}

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{14}$	$\bar{15}$	$\bar{16}$	$\bar{17}$	$\bar{18}$	$\bar{19}$	$\bar{20}$	$\bar{21}$	$\bar{22}$	$\bar{23}$	$\bar{24}$	$\bar{25}$	$\bar{26}$	$\bar{27}$	$\bar{28}$	$\bar{29}$	$\bar{30}$	$\bar{31}$	$\bar{32}$	$\bar{33}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{14}$	$\bar{15}$	$\bar{16}$	$\bar{17}$	$\bar{18}$	$\bar{19}$	$\bar{20}$	$\bar{21}$	$\bar{22}$	$\bar{23}$	$\bar{24}$	$\bar{25}$	$\bar{26}$	$\bar{27}$	$\bar{28}$	$\bar{29}$	$\bar{30}$	$\bar{31}$	$\bar{32}$	$\bar{33}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$	$\bar{14}$	$\bar{16}$	$\bar{18}$	$\bar{20}$	$\bar{22}$	$\bar{24}$	$\bar{26}$	$\bar{28}$	$\bar{30}$	$\bar{32}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$	$\bar{14}$	$\bar{16}$	$\bar{18}$	$\bar{20}$	$\bar{22}$	$\bar{24}$	$\bar{26}$	$\bar{28}$	$\bar{30}$	$\bar{32}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{12}$	$\bar{15}$	$\bar{18}$	$\bar{21}$	$\bar{24}$	$\bar{27}$	$\bar{30}$	$\bar{33}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{11}$	$\bar{14}$	$\bar{17}$	$\bar{20}$	$\bar{23}$	$\bar{26}$	$\bar{29}$	$\bar{32}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{10}$	$\bar{13}$	$\bar{16}$	$\bar{19}$	$\bar{22}$	$\bar{25}$	$\bar{28}$	$\bar{31}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{12}$	$\bar{16}$	$\bar{20}$	$\bar{24}$	$\bar{28}$	$\bar{32}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{10}$	$\bar{14}$	$\bar{18}$	$\bar{22}$	$\bar{26}$	$\bar{30}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{12}$	$\bar{16}$	$\bar{20}$	$\bar{24}$	$\bar{28}$	$\bar{32}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{10}$	$\bar{14}$	$\bar{18}$	$\bar{22}$	$\bar{26}$	$\bar{30}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{10}$	$\bar{15}$	$\bar{20}$	$\bar{25}$	$\bar{30}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{11}$	$\bar{16}$	$\bar{21}$	$\bar{26}$	$\bar{31}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{12}$	$\bar{17}$	$\bar{22}$	$\bar{27}$	$\bar{32}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{13}$	$\bar{18}$	$\bar{23}$	$\bar{28}$	$\bar{33}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$	$\bar{14}$	$\bar{19}$	$\bar{24}$	$\bar{29}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{18}$	$\bar{24}$	$\bar{30}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{14}$	$\bar{20}$	$\bar{26}$	$\bar{32}$	$\bar{4}$	$\bar{10}$	$\bar{16}$	$\bar{22}$	$\bar{28}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{12}$	$\bar{18}$	$\bar{24}$	$\bar{30}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{14}$	$\bar{20}$	$\bar{26}$	$\bar{32}$	$\bar{4}$	$\bar{10}$	$\bar{16}$	$\bar{22}$	$\bar{28}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{14}$	$\bar{21}$	$\bar{28}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{15}$	$\bar{22}$	$\bar{29}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{16}$	$\bar{23}$	$\bar{30}$	$\bar{3}$	$\bar{10}$	$\bar{17}$	$\bar{24}$	$\bar{31}$	$\bar{4}$	$\bar{11}$	$\bar{18}$	$\bar{25}$	$\bar{32}$	$\bar{5}$	$\bar{12}$	$\bar{19}$	$\bar{26}$	$\bar{33}$	$\bar{6}$	$\bar{13}$	$\bar{20}$	$\bar{27}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{16}$	$\bar{24}$	$\bar{32}$	$\bar{6}$	$\bar{14}$	$\bar{22}$	$\bar{30}$	$\bar{4}$	$\bar{12}$	$\bar{20}$	$\bar{28}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{18}$	$\bar{26}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{16}$	$\bar{24}$	$\bar{32}$	$\bar{6}$	$\bar{14}$	$\bar{22}$	$\bar{30}$	$\bar{4}$	$\bar{12}$	$\bar{20}$	$\bar{28}$	$\bar{2}$	$\bar{10}$	$\bar{18}$	$\bar{26}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{18}$	$\bar{27}$	$\bar{2}$	$\bar{11}$	$\bar{20}$	$\bar{29}$	$\bar{4}$	$\bar{13}$	$\bar{22}$	$\bar{31}$	$\bar{6}$	$\bar{15}$	$\bar{24}$	$\bar{33}$	$\bar{8}$	$\bar{17}$	$\bar{26}$	$\bar{1}$	$\bar{10}$	$\bar{19}$	$\bar{28}$	$\bar{3}$	$\bar{12}$	$\bar{21}$	$\bar{30}$	$\bar{5}$	$\bar{14}$	$\bar{23}$	$\bar{32}$	$\bar{7}$	$\bar{16}$	$\bar{25}$
$\bar{10}$	$\bar{0}$	$\bar{10}$	$\bar{20}$	$\bar{30}$	$\bar{6}$	$\bar{16}$	$\bar{26}$	$\bar{2}$	$\bar{12}$	$\bar{22}$	$\bar{32}$	$\bar{8}$	$\bar{18}$	$\bar{28}$	$\bar{4}$	$\bar{14}$	$\bar{24}$	$\bar{0}$	$\bar{10}$	$\bar{20}$	$\bar{30}$	$\bar{6}$	$\bar{16}$	$\bar{26}$	$\bar{2}$	$\bar{12}$	$\bar{22}$	$\bar{32}$	$\bar{8}$	$\bar{18}$	$\bar{28}$	$\bar{4}$	$\bar{14}$	$\bar{24}$
$\bar{11}$	$\bar{0}$	$\bar{11}$	$\bar{22}$	$\bar{33}$	$\bar{10}$	$\bar{21}$	$\bar{32}$	$\bar{9}$	$\bar{20}$	$\bar{31}$	$\bar{8}$	$\bar{19}$	$\bar{30}$	$\bar{7}$	$\bar{18}$	$\bar{29}$	$\bar{6}$	$\bar{17}$	$\bar{28}$	$\bar{5}$	$\bar{16}$	$\bar{27}$	$\bar{4}$	$\bar{15}$	$\bar{26}$	$\bar{3}$	$\bar{14}$	$\bar{25}$	$\bar{2}$	$\bar{13}$	$\bar{24}$	$\bar{1}$	$\bar{12}$	$\bar{23}$
$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{24}$	$\bar{2}$	$\bar{14}$	$\bar{26}$	$\bar{4}$	$\bar{16}$	$\bar{28}$	$\bar{6}$	$\bar{18}$	$\bar{30}$	$\bar{8}$	$\bar{20}$	$\bar{32}$	$\bar{10}$	$\bar{22}$	$\bar{0}$	$\bar{12}$	$\bar{24}$	$\bar{2}$	$\bar{14}$	$\bar{26}$	$\bar{4}$	$\bar{16}$	$\bar{28}$	$\bar{6}$	$\bar{18}$	$\bar{30}$	$\bar{8}$	$\bar{20}$	$\bar{32}$	$\bar{10}$	$\bar{22}$
$\bar{13}$	$\bar{0}$	$\bar{13}$	$\bar{26}$	$\bar{5}$	$\bar{18}$	$\bar{31}$	$\bar{10}$	$\bar{23}$	$\bar{2}$	$\bar{15}$	$\bar{28}$	$\bar{7}$	$\bar{20}$	$\bar{33}$	$\bar{12}$	$\bar{25}$	$\bar{4}$	$\bar{17}$	$\bar{30}$	$\bar{9}$	$\bar{22}$	$\bar{1}$	$\bar{14}$	$\bar{27}$	$\bar{6}$	$\bar{19}$	$\bar{32}$	$\bar{11}$	$\bar{24}$	$\bar{3}$	$\bar{16}$	$\bar{29}$	$\bar{8}$	$\bar{21}$
$\bar{14}$	$\bar{0}$	$\bar{14}$	$\bar{28}$	$\bar{8}$	$\bar{22}$	$\bar{2}$	$\bar{16}$	$\bar{30}$	$\bar{10}$	$\bar{24}$	$\bar{4}$	$\bar{18}$	$\bar{32}$	$\bar{12}$	$\bar{26}$	$\bar{6}$	$\bar{20}$	$\bar{0}$	$\bar{14}$	$\bar{28}$	$\bar{8}$	$\bar{22}$	$\bar{2}$	$\bar{16}$	$\bar{30}$	$\bar{10}$	$\bar{24}$	$\bar{4}$	$\bar{18}$	$\bar{32}$	$\bar{12}$	$\bar{26}$	$\bar{6}$	$\bar{20}$
$\bar{15}$	$\bar{0}$	$\bar{15}$	$\bar{30}$	$\bar{11}$	$\bar{26}$	$\bar{7}$	$\bar{22}$	$\bar{3}$	$\bar{18}$	$\bar{33}$	$\bar{14}$	$\bar{29}$	$\bar{10}$	$\bar{25}$	$\bar{6}$	$\bar{21}$	$\bar{2}$	$\bar{17}$	$\bar{32}$	$\bar{13}$	$\bar{28}$	$\bar{9}$	$\bar{24}$	$\bar{5}$	$\bar{20}$	$\bar{1}$	$\bar{16}$	$\bar{31}$	$\bar{12}$	$\bar{27}$	$\bar{8}$	$\bar{23}$	$\bar{4}$	$\bar{19}$
$\bar{16}$	$\bar{0}$	$\bar{16}$	$\bar{32}$	$\bar{14}$	$\bar{30}$	$\bar{12}$	$\bar{28}$	$\bar{10}$	$\bar{26}$	$\bar{8}$	$\bar{24}$	$\bar{6}$	$\bar{22}$	$\bar{4}$	$\bar{20}$	$\bar{2}$	$\bar{18}$	$\bar{0}$	$\bar{16}$	$\bar{32}$	$\bar{14}$	$\bar{30}$	$\bar{12}$	$\bar{28}$	$\bar{10}$	$\bar{26}$	$\bar{8}$	$\bar{24}$	$\bar{6}$	$\bar{22}$	$\bar{4}$	$\bar{20}$	$\bar{2}$	$\bar{18}$
$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$	$\bar{0}$	$\bar{17}$
$\bar{18}$	$\bar{0}$	$\bar{18}$	$\bar{2}$	$\bar{20}$	$\bar{4}$	$\bar{22}$	$\bar{6}$	$\bar{24}$	$\bar{8}$	$\bar{26}$	$\bar{10}$	$\bar{28}$	$\bar{12}$	$\bar{30}$	$\bar{14}$	$\bar{32}$	$\bar{16}$	$\bar{0}$	$\bar{18}$	$\bar{2}$	$\bar{20}$	$\bar{4}$	$\bar{22}$	$\bar{6}$	$\bar{24}$	$\bar{8}$	$\bar{26}$	$\bar{10}$	$\bar{28}$	$\bar{12}$	$\bar{30}$	$\bar{14}$	$\bar{32}$	$\bar{16}$
$\bar{19}$	$\bar{0}$	$\bar{19}$	$\bar{4}$	$\bar{23}$	$\bar{8}$	$\bar{27}$	$\bar{12}$	$\bar{31}$	$\bar{16}$	$\bar{1}$	$\bar{20}$	$\bar{5}$	$\bar{24}$	$\bar{9}$	$\bar{28}$	$\bar{13}$	$\bar{32}$	$\bar{17}$	$\bar{2}$	$\bar{21}$	$\bar{6}$	$\bar{25}$	$\bar{10}$	$\bar{29}$	$\bar{14}$	$\bar{33}$	$\bar{18}$	$\bar{3}$	$\bar{22}$	$\bar{7}$	$\bar{26}$	$\bar{11}$	$\bar{30}$	$\bar{15}$
$\bar{20}$	$\bar{0}$	$\bar{20}$	$\bar{6}$	$\bar{26}$	$\bar{12}$	$\bar{32}$	$\bar{18}$	$\bar{4}$	$\bar{24}$	$\bar{10}$	$\bar{30}$	$\bar{16}$	$\bar{2}$	$\bar{22}$	$\bar{8}$	$\bar{28}$	$\bar{14}$	$\bar{0}$	$\bar{20}$	$\bar{6}$	$\bar{26}$	$\bar{12}$	$\bar{32}$	$\bar{18}$	$\bar{4}$	$\bar{24}$	$\bar{10}$	$\bar{30}$	$\bar{16}$	$\bar{2}$	$\bar{22}$	$\bar{8}$	$\bar{28}$	$\bar{14}$
$\bar{21}$	$\bar{0}$	$\bar{21}$	$\bar{8}$	$\bar{29}$	$\bar{16}$	$\bar{3}$	$\bar{24}$	$\bar{11}$	$\bar{32}$	$\bar{19}$	$\bar{6}$	$\bar{27}$	$\bar{14}$	$\bar{1}$	$\bar{22}$	$\bar{9}$	$\bar{30}$	$\bar{17}$	$\bar{4}$	$\bar{25}$	$\bar{12}$	$\bar{33}$	$\bar{20}$	$\bar{7}$	$\bar{28}$	$\bar{15}$	$\bar{2}$	$\bar{23}$	$\bar{10}$	$\bar{31}$	$\bar{18}$	$\bar{5}$	$\bar{26}$	$\bar{13}$
$\bar{22}$	$\bar{0}$	$\bar{22}$	$\bar{10}$	$\bar{32}$	$\bar{20}$	$\bar{8}$	$\bar{30}$	$\bar{18}$	$\bar{6}$	$\bar{28}$	$\bar{16}$	$\bar{4}$	$\bar{26}$	$\bar{14}$	$\bar{2}$	$\bar{24}$	$\bar{12}$	$\bar{0}$	$\bar{22}$	$\bar{10}$	$\bar{32}$	$\bar{20}$	$\bar{8}$	$\bar{30}$	$\bar{18}$	$\bar{6}$	$\bar{28}$	$\bar{16}$	$\bar{4}$	$\bar{26}$	$\bar{14}$	$\bar{2}$	$\bar{24}$	$\bar{12}$
$\bar{23}$	$\bar{0}$	$\bar{23}$	$\bar{12}$	$\bar{1}$	$\bar{24}$	$\bar{13}$	$\bar{2}$	$\bar{25}$	$\bar{14}$	$\bar{3}$	$\bar{26}$	$\bar{15}$	$\bar{4}$	$\bar{27}$	$\bar{16}$	$\bar{5}$	$\bar{28}$	$\bar{17}$	$\bar{6}$	$\bar{29}$	$\bar{18}$	$\bar{7}$	$\bar{30}$	$\bar{19}$	$\bar{8}$	$\bar{31}$	$\bar{20}$	$\bar{9}$	$\bar{32}$	$\bar{21}$	$\bar{10}$	$\bar{33}$	$\bar{22}$	$\bar{11}$
$\bar{24}$	$\bar{0}$	$\bar{24}$	$\bar{14}$	$\bar{4}$	$\bar{28}$	$\bar{18}$	$\bar{8}$	$\bar{32}$	$\bar{22}$	$\bar{12}$	$\bar{2}$	$\bar{26}$	$\bar{16}$	$\bar{6}$	$\bar{30}$	$\bar{20}$	$\bar{10}$	$\bar{0}$	$\bar{24}$	$\bar{14}$	$\bar{4}$	$\bar{28}$	$\bar{18}$	$\bar{8}$	$\bar{32}$	$\bar{22}$	$\bar{12}$	$\bar{2}$	$\bar{26}$	$\bar{16}$	$\bar{6}$	$\bar{30}$	$\bar{20}$	$\bar{10}$
$\bar{25}$	$\bar{0}$	$\bar{25}$	$\bar{16}$	$\bar{7}$	$\bar{32}$	$\bar{23}$	$\bar{14}$	$\bar{5}$	$\bar{30}$	$\bar{21}$	$\bar{12}$	$\bar{3}$	$\bar{28}$	$\bar{19}$	$\bar{10}$	$\bar{1}$	$\bar{26}$	$\bar{17}$	$\bar{8}$	$\bar{33}$	$\bar{24}$	$\bar{15}$	$\bar{6}$	$\bar{31}$	$\bar{22}$	$\bar{13}$	$\bar{4}$	$\bar{29}$	$\bar{20}$	$\bar{11}$	$\bar{2}$	$\bar{27}$	$\bar{18}$	$\bar{9}$
$\bar{26}$	$\bar{0}$	$\bar{26}$	$\bar{18}$	$\bar{10}$	$\bar{2}$	$\bar{28}$	$\bar{20}$	$\bar{12}$	$\bar{4}$	$\bar{30}$	$\bar{22}$	$\bar{14}$	$\bar{6}$	$\bar{32}$	$\bar{24}$	$\bar{16}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{26}$	$\bar{18}$	$\bar{10}$	$\bar{2}$	$\bar{28}$	$\bar{20}$	$\bar{12}$	$\bar{4}$	$\bar{30}$	$\bar{22}$	$\bar{14}$	$\bar{6}$	$\bar{32}$	$\bar{24}$	$\bar{16}$	$\bar{8}$
$\bar{27}$	$\bar{0}$	$\bar{27}$	$\bar{20}$	$\bar{13}$	$\bar{6}$	$\bar{33}$	$\bar{26}$	$\bar{19}$	$\bar{12}$	$\bar{5}$	$\bar{32}$	$\bar{25}$	$\bar{18}$	$\bar{11}$	$\bar{4}$	$\bar{31}$	$\bar{24}$	$\bar{17}$	$\bar{10}$	$\bar{3}$	$\bar{30}$	$\bar{23}$	$\bar{16}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{29}$	$\bar{22}$	$\bar{15}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{28}$	$\bar{21}$	$\bar{14}$	$\bar{7}$
$\bar{28}$	$\bar{0}$	$\bar{28}$	$\bar{22}$	$\bar{16}$	$\bar{10}$	$\bar{4}$	$\bar{32}$	$\bar{26}$	$\bar{20}$	$\bar{14}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{30}$	$\bar{24}$	$\bar{18}$	$\bar{12}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{28}$	$\bar{22}$	$\bar{16}$	$\bar{10}$	$\bar{4}$	$\bar{32}$	$\bar{26}$	$\bar{20}$	$\bar{14}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{30}$	$\bar{24}$	$\bar{18}$	$\bar{12}$	$\bar{6}$
$\bar{29}$	$\bar{0}$	$\bar{29}$	$\bar{24}$	$\bar{19}$	$\bar{14}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\bar{33}$	$\bar{28}$	$\bar{23}$	$\bar{18}$	$\bar{13}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\bar{32}$	$\bar{27}$	$\bar{22}$	$\bar{17}$	$\bar{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\bar{31}$	$\bar{26}$	$\bar{21}$	$\bar{16}$	$\bar{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{30}$	$\bar{25}$	$\bar{20}$	$\bar{15}$	$\bar{10}$	$\bar{5}$
$\bar{30}$	$\bar{0}$	$\bar{30}$	$\bar{26}$	$\bar{22}$	$\bar{18}$	$\bar{14}$	$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{32}$	$\bar{28}$	$\bar{24}$	$\bar{20}$	$\bar{16}$	$\bar{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{30}$	$\bar{26}$	$\bar{22}$	$\bar{18}$	$\bar{14}$	$\bar{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{32}$	$\bar{28}$	$\bar{24}$	$\bar{20}$	$\bar{16}$	$\bar{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{31}$	$\bar{0}$	$\bar{31}$	$\bar{28}$	$\bar{25}$	$\bar{22}$	$\bar{19}$	$\bar{16}$	$\bar{13}$	$\bar{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{32}$	$\bar{29}$	$\bar{26}$	$\bar{23}$	$\bar{20}$	$\bar{17}$	$\bar{14}$	$\bar{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{33}$	$\bar{30}$	$\bar{27}$	$\bar{24}$	$\bar{21}$	$\bar{18}$	$\bar{15}$	$\bar{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{32}$	$\bar{0}$	$\bar{32}$	$\bar{30}$	$\bar{28}$	$\bar{26}$	$\bar{24}$	$\bar{22}$	$\bar{20}$	$\bar{18}$	$\bar{16}$	$\bar{14}$	$\bar{12}$	$\bar{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{32}$	$\bar{30}$	$\bar{28}$	$\bar{26}$	$\bar{24}$	$\bar{22}$	$\bar{20}$	$\bar{18}$	$\bar{16}$	$\bar{14}$	$\bar{12}$	$\bar{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{33}$	$\bar{0}$	$\bar{33}$	$\bar{32}$	$\bar{31}$	$\bar{30}$	$\bar{29}$	$\bar{28}$	$\bar{27}$	$\bar{26}$	$\bar{25}$	$\bar{24}$	$\bar{23}$	$\bar{22}$	$\bar{21}$	$\bar{20}$	$\bar{19}$	$\bar{18}$	$\bar{17}$	$\bar{16}$	$\bar{15}$	$\bar{14}$	$\bar{13}$	$\bar{12}$	$\bar{11}$	$\bar{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Himpunan semua unsur pembagi nol dari ring komutatif Z_{34} adalah $Z(Z_{34}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}, \overline{28}, \overline{30}, \overline{32}\}$. Titik graf pembagi nol $\Gamma(Z_{26})$ dari ring komutatif Z_{34} adalah $V(\Gamma(Z_{26})) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}, \overline{28}, \overline{30}, \overline{32}\}$. Dua titik berbeda $u, v \in V(\Gamma(Z_{26}))$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$. Dari Tabel 3.6 dapat digambarkan graf pembagi nol berikut.



Gambar 3.6 Gambar Graf Pembagi Nol $\boldsymbol{\Gamma(Z_{34})}$

Dari Gambar 3.6 dapat diperoleh matriks *adjacency* titik dan matriks derajat dari $\Gamma(Z_{34})$ sebagai berikut

$$A(\Gamma(Z_{34})) = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$
\boldsymbol{D}(\Gamma(Z_{34})) = \begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&16&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}
$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\Gamma(Z_{34})$

$\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_{34})) = \boldsymbol{D}(\Gamma(Z_{34})) - \boldsymbol{A}(\Gamma(Z_{34}))$

$$
= \begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&16&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}
$$

$\det(\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_{34})) - \lambda I) =$

$$det\left(\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 16 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}
\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{bmatrix}\right) =$$

$$det\begin{pmatrix}
1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 16-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda
\end{pmatrix}$$

Hasil dari $\det(\boldsymbol{L} - \lambda I)$ dapat diperoleh menggunakan aplikasi Maple 18 yaitu

$p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)^{15}(\lambda - 17)$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 17$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 15$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\Gamma(Z_{34})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_{34}))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 17 \\ 1 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_{34}))$ adalah 0, 1, dan 17. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 15, dan 1.

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\Gamma(Z_{34})$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^{+}(\Gamma(Z_{34})) = \boldsymbol{D}(\Gamma(Z_{34})) + \boldsymbol{A}(\Gamma(Z_{34})) = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 16 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{L}^{+}(\Gamma(Z_{34})) - \lambda I) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 16 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}
\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{bmatrix}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix}
1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 16-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda
\end{bmatrix}\right)$$

Hasil dari $\det(\boldsymbol{L}^{+} - \lambda I)$ dapat diperoleh menggunakan aplikasi Maple 18 yaitu

$p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)^{15}(\lambda - 17)$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 17$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_{34} dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 15$, dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *signless* Laplace dari $\Gamma(Z_{34})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{L^{+}(\Gamma(Z_{34}))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 17 \\ 1 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^{+}(\Gamma(Z_{34}))$ adalah 0, 1, dan 17. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 15, dan 1.

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum Laplace graf pembagi nol dari ring komutatif Z_{2p} diantaranya

Tabel 3.7 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Beberapa Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif $\boldsymbol{Z_{2p}}$

p	Ring Komutatif Z_{2p} , $p > 2$	Polinomial Karakteristik Matriks Laplace
3	Z_6	$-\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$
5	Z_{10}	$-\lambda(\lambda-1)^3(\lambda-5)$
7	Z_{14}	$-\lambda(\lambda-1)^5(\lambda-7)$
11	Z_{22}	$-\lambda(\lambda-1)^9(\lambda-11)$
13	Z_{26}	$-\lambda(\lambda-1)^{11}(\lambda-13)$
17	Z_{34}	$-\lambda(\lambda-1)^{15}(\lambda-17)$
⋮		
p	Z_{2p}	$p(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)^{p-2}(\lambda-p)$

Tabel 3.8 Spektrum Laplace dari Beberapa Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif $\boldsymbol{Z_{2p}}$

p	Ring Komutatif Z_{2p} , $p > 2$	Spektrum Laplace
3	Z_6	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
5	Z_{10}	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
7	Z_{14}	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$
11	Z_{22}	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 11 \\ 1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$
13	Z_{26}	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 13 \\ 1 & 11 & 1 \end{bmatrix}$
17	Z_{34}	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 17 \\ 1 & 15 & 1 \end{bmatrix}$
⋮		
p	Z_{2p}	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$

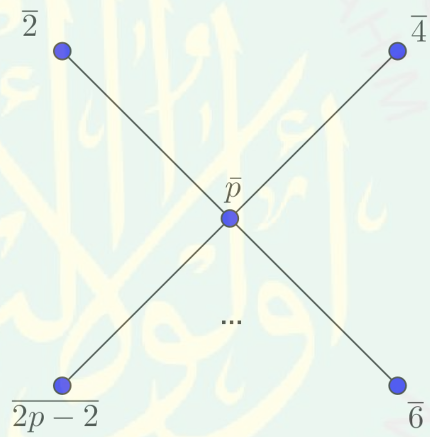
Teorema 1

Misalkan Z_{2p} merupakan ring bilangan bulat modulo $2p$, dengan p prima dan $p \geq 3$. Polinomial karakteristik matriks Laplace $\boldsymbol{L}\left(\Gamma\left(Z_{2p}\right)\right)$ adalah

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)^{p-2}(\lambda-p)$$

Bukti

Misalkan $(Z_{2p}, +, \cdot)$ untuk $p \geq 3$ dengan p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan yaitu $\bar{1}$ terhadap operasi kedua $(\cdot)$. Unsur pada himpunan bilangan bulat modulo $2p$ adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \cdots, \overline{2p-1}$. Maka diperoleh himpunan pembagi nol pada bilangan bulat modulo $2p$ yaitu $Z(Z_{2p}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \cdots, \overline{2p-2}, \bar{p}\}$. Kemudian unsur-unsur dari $Z(Z_{2p})$ akan membentuk titik pada graf sederhana dengan order p. Dua unsur dari $Z(Z_{2p})$ yang hasil perkaliannya $\bar{0}$ akan terhubung langsung. Sesuai definisi graf pembagi nol, maka diperoleh graf $\Gamma(Z_{2p})$ sebagai berikut.



Sehingga akan diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\Gamma(Z_{2p})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\left(\Gamma(Z_{2p})\right) = \begin{array}{c} \\ \bar{2} \\ \vdots \\ \overline{p-1} \\ \bar{p} \\ \overline{p+1} \\ \vdots \\ \overline{2p-2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \bar{2} & \cdots & \overline{p-1} & \bar{p} & \overline{p+1} & \cdots & \overline{2p-2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan matriks derajat dari $\Gamma(Z_{2p})$ adalah

$$\boldsymbol{D}\left(\Gamma\left(Z_{2p}\right)\right)=\begin{array}{c} \\ \bar{2} \\ \vdots \\ \overline{p-1} \\ \bar{p} \\ \overline{p+1} \\ \vdots \\ \overline{2p-2} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \bar{2} & \cdots & \overline{p-1} & \bar{p} & \overline{p+1} & \cdots & \overline{2p-2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks Laplace graf pembagi nol dari ring komutatif Z_{2p} adalah sebagai berikut

$$\boldsymbol{L}\left(\Gamma\left(Z_{2p}\right)\right)=\begin{array}{c} \\ \bar{2} \\ \vdots \\ \overline{p-1} \\ \bar{p} \\ \overline{p+1} \\ \vdots \\ \overline{2p-2} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \bar{2} & \cdots & \overline{p-1} & \bar{p} & \overline{p+1} & \cdots & \overline{2p-2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & -1 & p-1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}\left(\Gamma\left(Z_{2p}\right)\right)$ diperoleh dari $\det\left(\boldsymbol{L}\left(\Gamma\left(Z_{2p}\right)\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$.

Dengan eliminasi Gauss pada $\boldsymbol{L}\left(\Gamma\left(Z_{2p}\right)\right)-\lambda\boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$\begin{array}{c} \\ \bar{2} \\ \bar{p} \\ \overline{2p-2} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \bar{2} & \bar{p} & \overline{2p-2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\lambda^2-p\lambda+\dfrac{p-1}{2}}{\lambda-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-p)}{\lambda^2-p\lambda+\dfrac{p-1}{2}} \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka $\det\left(\boldsymbol{L}\left(\Gamma\left(Z_{2p}\right)\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian matriks segitiga atas. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}\left(\Gamma\left(Z_{2p}\right)\right)$ adalah

$$p(\lambda)=-\lambda(\lambda-1)^{p-2}(\lambda-p)$$

Teorema 2

Misalkan Z_{2p} merupakan ring bilangan bulat modulo $2p$, dengan p prima dan $p \geq 3$. Spektrum Laplace $\boldsymbol{L}\left(\Gamma(Z_{2p})\right)$ adalah

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_{2p}))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan teorema 1, polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}\left(\Gamma(Z_{2p})\right)$, p prima dan $p \geq 3$ adalah

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)^{p-2}(\lambda-p)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ dan $\lambda_3 = 1$ dan diperoleh multiplisitasnya $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = p-2$ dan $m(\lambda_3) = 1$. Spektrum Laplace graf pembagi nol dari ring komutatif Z_{2p} untuk p prima dan $p \geq 3$ adalah

$$\boldsymbol{Spec}_{L(\Gamma(Z_{2p}))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}\left(\Gamma(Z_{2p})\right)$ adalah 0, 1 dan p. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, $p-2$ dan 1.■

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *signless* Laplace graf pembagi nol dari ring komutatif Z_{2p} diantaranya

Tabel 3.9 Polinomial Karakteristik Matriks *signless* Laplace dari Beberapa Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif $\boldsymbol{Z_{2p}}$

p	Ring Komutatif Z_{2p} , $p > 2$	Polinomial Karakteristik Matriks *signless* Laplace
3	Z_6	$-\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$
5	Z_{10}	$-\lambda(\lambda-1)^3(\lambda-5)$
7	Z_{14}	$-\lambda(\lambda-1)^5(\lambda-7)$
11	Z_{22}	$-\lambda(\lambda-1)^9(\lambda-11)$
13	Z_{26}	$-\lambda(\lambda-1)^{11}(\lambda-13)$
17	Z_{34}	$-\lambda(\lambda-1)^{15}(\lambda-17)$
⋮		
p	Z_{2p}	$p(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)^{p-2}(\lambda-p)$

Tabel 3.10 Spektrum *signless* Laplace dari Beberapa Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif $\boldsymbol{Z_{2p}}$

p	Ring Komutatif Z_{2p} , $p > 2$	Spektrum *signless* Laplace
3	Z_6	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
5	Z_{10}	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
7	Z_{14}	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$
11	Z_{22}	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 11 \\ 1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$
13	Z_{26}	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 13 \\ 1 & 11 & 1 \end{bmatrix}$
17	Z_{34}	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 17 \\ 1 & 15 & 1 \end{bmatrix}$
⋮		
p	Z_{2p}	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$

Teorema 3

Misalkan Z_{2p} merupakan ring bilangan bulat modulo $2p$, dengan p prima dan $p \geq 3$. Polinomial karakteristik matriks *signless* Laplace $\boldsymbol{L^+}\left(\Gamma(Z_{2p})\right)$ adalah

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)^{p-2}(\lambda-p)$$

Bukti

Misalkan $(Z_{2p},+,\cdot)$ untuk $p \geq 3$ dengan p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan yaitu $\bar{1}$ terhadap operasi kedua $(\cdot)$. Unsur pada himpunan bilangan bulat modulo $2p$ adalah $\bar{0},\bar{1},\bar{2},\cdots,\overline{2p-1}$. Maka diperoleh himpunan pembagi nol pada bilangan bulat modulo $2p$ yaitu $Z(Z_{2p}) = \{\bar{2},\bar{4},\bar{6},\cdots,\overline{2p-2},\bar{p}\}$. Kemudian unsur-unsur dari $Z(Z_{2p})$ akan membentuk titik pada graf sederhana dengan order p. Dua unsur dari $Z(Z_{2p})$ yang hasil perkaliannya $\bar{0}$ akan terhubung langsung. Sesuai definisi graf pembagi nol, maka diperoleh graf $\Gamma(Z_{2p})$ seperti pada teorema 1. Sehingga akan diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\Gamma(Z_{2p})$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\left(\Gamma(Z_{2p})\right) = \begin{array}{c} \\ \bar{2} \\ \vdots \\ \overline{p-1} \\ \bar{p} \\ \overline{p+1} \\ \vdots \\ \overline{2p-2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \bar{2} & \cdots & \overline{p-1} & \bar{p} & \overline{p+1} & \cdots & \overline{2p-2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan matriks derajat dari $\Gamma(Z_{2p})$ adalah

$$\boldsymbol{D}\left(\Gamma(Z_{2p})\right) = \begin{array}{c} \\ \bar{2} \\ \vdots \\ \overline{p-1} \\ \bar{p} \\ \overline{p+1} \\ \vdots \\ \overline{2p-2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \bar{2} & \cdots & \overline{p-1} & \bar{p} & \overline{p+1} & \cdots & \overline{2p-2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & p-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks *signless* Laplace graf pembagi nol dari ring komutatif Z_{2p} adalah sebagai berikut

$$
\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma\left(Z_{2p}\right)\right)=
\begin{array}{c}
\\ \bar{2} \\ \vdots \\ \overline{p-1} \\ \bar{p} \\ \overline{p+1} \\ \vdots \\ \overline{2p-2}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} \bar{2} & \cdots & \overline{p-1} & \bar{p} & \overline{p+1} & \cdots & \overline{2p-2} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & \cdots & 1 & p-1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma\left(Z_{2p}\right)\right)$ diperoleh dari $\det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma\left(Z_{2p}\right)\right)-\lambda \boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi Gauss pada $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma\left(Z_{2p}\right)\right)-\lambda \boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$
\begin{array}{c}
\\ \bar{2} \\ \bar{p} \\ \overline{2p-2}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \bar{2} & \bar{p} & \overline{2p-2} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1-\lambda & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{\lambda^2-p\lambda+\frac{p-1}{2}}{\lambda-1} & 0 \\
0 & 0 & \dfrac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-p)}{\lambda^2-p\lambda+\frac{p-1}{2}}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Maka $\det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma\left(Z_{2p}\right)\right)-\lambda \boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian matriks segitiga atas. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma\left(Z_{2p}\right)\right)$ adalah

$$p(\lambda)=-\lambda(\lambda-1)^{p-2}(\lambda-p)$$

Teorema 4

Misalkan Z_{2p} merupakan ring bilangan bulat modulo $2p$, dengan p prima dan $p \geq 3$. Spektrum Laplace $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma\left(Z_{2p}\right)\right)$ adalah

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma\left(Z_{2p}\right)\right)}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan teorema 3, polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma\left(Z_{2p}\right)\right)$, p prima dan $p \geq 3$ adalah

$$p(\lambda)=-\lambda(\lambda-1)^{p-2}(\lambda-p)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ dan $\lambda_3 = 1$ dan diperoleh multiplisitasnya $m(\lambda_1) = 1, m(\lambda_2) = p - 2$ dan $m(\lambda_3) = 1$. Spektrum *signless* Laplace graf pembagi nol dari ring komutatif Z_{2p} untuk p prima dan $p \geq 3$ adalah

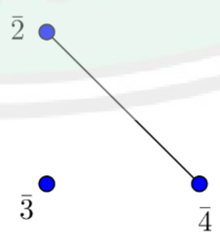
$$\boldsymbol{Spec}_{L^+\left(\Gamma(Z_{2p})\right)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L^+}\left(\Gamma\left(Z_{2p}\right)\right)$ adalah 0, 1 dan p. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, $p - 2$ dan 1.■

3.2 Spektrum *Adjacency* Titik, Laplace, dan *Signless* Laplace pada Komplemen Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\boldsymbol{Z_{2p}}$

3.2.1 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\boldsymbol{Z_6}$

Komplemen dari $\Gamma(Z_6)$ disimbolkan dengan $\overline{\Gamma(Z_6)}$ merupakan graf yang memuat himpunan titik $V(\overline{\Gamma(Z_6)})$ dengan dua titik akan terhubung langsung di $\overline{\Gamma(Z_6)}$ jika dan hanya jika kedua titik tersebut tidak terhubung langsung di $\Gamma(Z_6)$. Sehingga $V\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right) = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ dan komplemen graf pembagi nol ring komutatif $\overline{\Gamma(Z_6)}$ ditunjukkan pada gambar 3.7.



Gambar 3.7 Gambar Komplemen Graf Pembagi Nol $\overline{\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{Z_6})}$

Dari Gambar 3.7 dapat diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma(Z_6)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right) - \lambda I\right) = det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda^2 - 1}{\lambda} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$$p(\lambda) = (-\lambda)^2 \left(-\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda}\right) = -\lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ dan $\lambda_3 = 1$. Kemudian akan dicari multiplisitas dari nilai eigen tersebut.

Untuk $\lambda_1 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right) - \lambda I\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_1) = 1$.

Untuk $\lambda_2 = -1$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right) - \lambda I\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_2) = 1$.

Untuk $\lambda_3 = 1$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right) - \lambda I\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma(Z_6)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma(Z_6)})} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma(Z_6)})$ adalah 0, -1 dan 1. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 1 dan 1.

Selanjutnya dari Gambar 3.7 dapat diperoleh matriks derajat dari $\overline{\Gamma(Z_6)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_6)}$

$$\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right) = \boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right) - \boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right) - \lambda I\right) = det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 0 & -\lambda & 0\\ -1 & 0 & 1-\lambda\end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda(-2+\lambda)}{\lambda-1}\end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$$p(\lambda)=(-\lambda)(1-\lambda)\left(-\frac{\lambda(-2+\lambda)}{\lambda-1}\right)=-\lambda^2(\lambda-2)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=0$ dan $\lambda_2=2$. Kemudian akan dicari multiplisitas dari nilai eigen tersebut.

Untuk $\lambda_1=0$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right)-\lambda I\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_1) = 2$.

Untuk $\lambda_2 = 2$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right) - \lambda I\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_2) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_6)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{L(\overline{\Gamma(Z_6)})} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}(\overline{\Gamma(Z_6)})$ adalah 0 dan 2. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 2 dan 1.

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_6)}$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right) = \boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right) + \boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right) - \lambda I\right) = det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda(-2+\lambda)}{\lambda-1} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$$p(\lambda) = (-\lambda)(1-\lambda)\left(-\frac{\lambda(-2+\lambda)}{\lambda-1}\right) = -\lambda^2(\lambda-2)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 2$. Kemudian akan dicari multiplisitas dari nilai eigen tersebut.

Untuk $\lambda_1 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right) - \lambda I\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_1) = 2$.

Untuk $\lambda_2 = 2$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right) - \lambda I\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat dalam *software* Maple 18, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_2) = 1$.

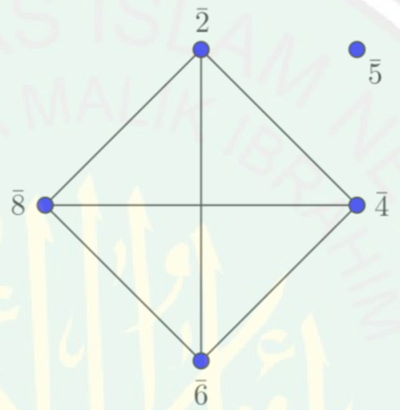
Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_6)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{L}^{+}(\overline{\Gamma(Z_6)})} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^{+}(\overline{\Gamma(Z_6)})$ adalah 0 dan 2. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 2 dan 1.

3.2.2 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\boldsymbol{Z_{10}}$

Komplemen dari $\Gamma(Z_{10})$ disimbolkan dengan $\overline{\Gamma(Z_{10})}$ merupakan graf yang memuat himpunan titik $V(\overline{\Gamma(Z_{10})})$ dengan dua titik akan terhubung langsung di $\overline{\Gamma(Z_{10})}$ jika dan hanya jika kedua titik tersebut tidak terhubung langsung di $\Gamma(Z_{10})$. Sehingga $V\left(\overline{\Gamma(Z_{10})}\right) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{8}\}$ dan komplemen graf pembagi nol ring komutatif $\overline{\Gamma(Z_{10})}$ ditunjukkan pada gambar 3.8.



Gambar 3.8 Gambar Komplemen Graf Pembagi Nol $\overline{\boldsymbol{\Gamma(Z_{10})}}$

Dari Gambar 3.8 dapat diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma(Z_{10})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{10})}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{10})}\right) - \lambda I\right) = det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{\lambda^2-1}{\lambda} & 0 & \frac{\lambda+1}{\lambda} & \frac{\lambda+1}{\lambda} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1} & \frac{\lambda+1}{\lambda-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{10})}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$$p(\lambda) = (-\lambda)^2\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\left(-\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1}\right)\left(-\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2}\right) = -\lambda(\lambda+1)^3(\lambda-3)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ dan $\lambda_3 = 3$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 3$ dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma(Z_{10})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma(Z_{10})})} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma(Z_{10})})$ adalah 0, -1 dan 3. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 3 dan 1.

Selanjutnya dari Gambar 3.8 dapat diperoleh matriks derajat dari $\overline{\Gamma(Z_{10})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma(Z_{10})}\right)=\begin{bmatrix}3&0&0&0&0\\0&3&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&3\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{10})}$

$$\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{10})}\right)=\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma(Z_{10})}\right)-\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{10})}\right)=\begin{bmatrix}3&-1&0&-1&-1\\-1&3&0&-1&-1\\0&0&0&0&0\\-1&-1&0&3&1\\-1&-1&0&-1&3\end{bmatrix}$$

$$\det\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{10})}\right)-\lambda I\right)=det\left(\begin{bmatrix}3&-1&0&-1&-1\\-1&3&0&-1&-1\\0&0&0&0&0\\-1&-1&0&3&1\\-1&-1&0&-1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)=$$

$$det\left(\begin{bmatrix}3-\lambda&-1&0&-1&-1\\-1&3-\lambda&0&-1&-1\\0&0&0&0&0\\-1&-1&0&3-\lambda&1\\-1&-1&0&-1&3-\lambda\end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\dfrac{\lambda^2-6\lambda+8}{\lambda-3} & 0 & -\dfrac{-4+\lambda}{\lambda-3} & -\dfrac{-4+\lambda}{\lambda-3} \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda^2-5\lambda+4}{\lambda-2} & -\dfrac{-4+\lambda}{\lambda-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{(-4+\lambda)\lambda}{\lambda-1} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{10})}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$p(\lambda) = -\lambda^2(\lambda-4)^3$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 4$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 2$ dan $m(\lambda_2) = 3$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{10})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{L(\overline{\Gamma(Z_6)})} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}(\overline{\Gamma(Z_{10})})$ adalah 0 dan 4. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 2 dan 3.

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{10})}$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^+\left(\overline{\Gamma(Z_{10})}\right) = \boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma(Z_{10})}\right) + \boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{10})}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_6)}\right)-\lambda I\right)=det\left(\begin{bmatrix}3&1&0&1&1\\1&3&0&1&1\\0&0&0&0&0\\1&1&0&3&1\\1&1&0&1&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)=$$

$$det\left(\begin{bmatrix}3-\lambda&1&0&1&1\\1&3-\lambda&0&1&1\\0&0&0&0&0\\1&1&0&3-\lambda&1\\1&1&0&1&3-\lambda\end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix}3-\lambda&1&0&1&1\\0&-\frac{\lambda^2-6\lambda+8}{\lambda-3}&0&\frac{\lambda-2}{\lambda-3}&\frac{\lambda-2}{\lambda-3}\\0&0&-\lambda&0&0\\0&0&0&-\frac{\lambda^2-7\lambda+10}{-4+\lambda}&\frac{\lambda-2}{-4+\lambda}\\0&0&0&0&-\frac{\lambda^2-8\lambda+12}{\lambda-5}\end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_{10})}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$p(\lambda)=-\lambda(\lambda-2)^3(\lambda-6)$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$ dan $\lambda_3=6$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1)=1$, $m(\lambda_2)=3$ dan $m(\lambda_3)=1$.

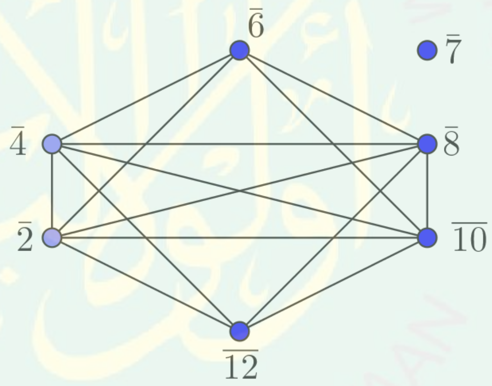
Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{10})}$ sebagai berikut

$$Spec_{L^+(\overline{\Gamma(Z_{10})})} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $L^+(\overline{\Gamma(Z_{10})})$ adalah 0, 2 dan 6. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 3 dan 1.

3.2.3 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{14}

Komplemen dari $\Gamma(Z_{14})$ disimbolkan dengan $\overline{\Gamma(Z_{14})}$ merupakan graf yang memuat himpunan titik $V(\overline{\Gamma(Z_{14})})$ dengan dua titik akan terhubung langsung di $\overline{\Gamma(Z_{14})}$ jika dan hanya jika kedua titik tersebut tidak terhubung langsung di $\Gamma(Z_{14})$. Sehingga $V\left(\overline{\Gamma(Z_{14})}\right) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}\}$ dan komplemen graf pembagi nol ring komutatif $\overline{\Gamma(Z_{14})}$ ditunjukkan pada gambar 3.9.



Gambar 3.9 Gambar Komplemen Graf Pembagi Nol $\overline{\Gamma(Z_{14})}$

Dari Gambar 3.9 dapat diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma(Z_{14})}$ sebagai berikut

$$A\left(\overline{\Gamma(Z_{14})}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{14})}\right)-\lambda I\right)=det\left(\begin{bmatrix}0&1&1&0&1&1&1\\1&0&1&0&1&1&1\\1&1&0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&1&1\\1&1&1&0&1&0&1\\1&1&1&0&1&1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)=$$

$$det\left(\begin{bmatrix}-\lambda&1&1&0&1&1&1\\1&-\lambda&1&0&1&1&1\\1&1&-\lambda&0&1&1&1\\0&0&0&-\lambda&0&0&0\\1&1&1&0&-\lambda&1&1\\1&1&1&0&1&-\lambda&1\\1&1&1&0&1&1&-\lambda\end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix}-\lambda&1&1&0&1&1&1\\0&-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}&\frac{\lambda+1}{\lambda}&0&\frac{\lambda+1}{\lambda}&\frac{\lambda+1}{\lambda}&\frac{\lambda+1}{\lambda}\\0&0&-\frac{\lambda^2-\lambda-2}{\lambda-1}&0&\frac{\lambda+1}{\lambda-1}&\frac{\lambda+1}{\lambda-1}&\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\\0&0&0&-\lambda&0&0&0\\0&0&0&0&-\frac{\lambda^2-2\lambda-3}{\lambda-2}&\frac{\lambda+1}{\lambda-2}&\frac{\lambda+1}{\lambda-2}\\0&0&0&0&0&-\frac{\lambda^2-3\lambda-4}{\lambda-3}&\frac{\lambda+1}{\lambda-3}\\0&0&0&0&0&0&-\frac{\lambda^2-4\lambda-5}{\lambda-4}\end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{14})}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$p(\lambda)=-\lambda(\lambda+1)^5(\lambda-5)$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$ dan $\lambda_3=5$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1)=1$, $m(\lambda_2)=5$ dan $m(\lambda_3)=1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma(Z_{14})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma(Z_{14})})} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma(Z_{14})})$ adalah 0, -1 dan 5. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 5 dan 1.

Selanjutnya dari Gambar 3.9 dapat diperoleh matriks derajat dari $\overline{\Gamma(Z_{14})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma(Z_{14})}\right) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{14})}$

$$\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{14})}\right) = \boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma(Z_{14})}\right) - \boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{14})}\right) = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$\det\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{10})}\right) - \lambda I\right) =$

$$det\left(\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 5-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 5-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 5-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{\lambda^2-10\lambda+24}{\lambda-5} & -\frac{-6+\lambda}{\lambda-5} & 0 & -\frac{-6+\lambda}{\lambda-5} & -\frac{-6+\lambda}{\lambda-5} & -\frac{-6+\lambda}{\lambda-5} \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-9\lambda+18}{\lambda-4} & 0 & -\frac{-6+\lambda}{\lambda-4} & -\frac{-6+\lambda}{\lambda-4} & -\frac{-6+\lambda}{\lambda-4} \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-8\lambda+12}{\lambda-3} & -\frac{-6+\lambda}{\lambda-3} & -\frac{-6+\lambda}{\lambda-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2-7\lambda+6}{\lambda-2} & -\frac{-6+\lambda}{\lambda-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(-6+\lambda)\lambda}{\lambda-1} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{14})}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$p(\lambda) = -\lambda^2(\lambda-6)^5$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 6$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 2$ dan $m(\lambda_2) = 5$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{14})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{L}(\overline{\Gamma(Z_{14})})} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}(\overline{\Gamma(Z_{14})})$ adalah 0 dan 6. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 2 dan 5.

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{14})}$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_{14})}\right)=\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma(Z_{14})}\right)+\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{14})}\right)=\begin{bmatrix}5&1&1&0&1&1&1\\1&5&1&0&1&1&1\\1&1&5&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&0&5&1&1\\1&1&1&0&1&5&1\\1&1&1&0&1&1&5\end{bmatrix}$$

$$\det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_{14})}\right)-\lambda I\right)=det\left(\begin{bmatrix}5&1&1&0&1&1&1\\1&5&1&0&1&1&1\\1&1&5&0&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&0&5&1&1\\1&1&1&0&1&5&1\\1&1&1&0&1&1&5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)=$$

$$det\left(\begin{bmatrix}5-\lambda&1&1&0&1&1&1\\1&5-\lambda&1&0&1&1&1\\1&1&5-\lambda&0&1&1&1\\0&0&0&-\lambda&0&0&0\\1&1&1&0&5-\lambda&1&1\\1&1&1&0&1&5-\lambda&1\\1&1&1&0&1&1&5-\lambda\end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang terdapat pada *software* Maple 18, diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix}5-\lambda&1&1&0&1&1&1\\0&-\frac{\lambda^2-10\lambda+24}{\lambda-5}&\frac{\lambda-4}{\lambda-5}&0&\frac{\lambda-4}{\lambda-5}&\frac{\lambda-4}{\lambda-5}&\frac{\lambda-4}{\lambda-5}\\0&0&-\frac{\lambda^2-11\lambda+28}{-6+\lambda}&0&\frac{\lambda-4}{-6+\lambda}&\frac{\lambda-4}{-6+\lambda}&\frac{\lambda-4}{-6+\lambda}\\0&0&0&-\lambda&0&0&0\\0&0&0&0&-\frac{\lambda^2-12\lambda+32}{\lambda-7}&\frac{\lambda-4}{\lambda-7}&\frac{\lambda-4}{\lambda-7}\\0&0&0&0&0&-\frac{\lambda^2-13\lambda+36}{\lambda-8}&\frac{\lambda-4}{\lambda-8}\\0&0&0&0&0&0&-\frac{\lambda^2-14\lambda+40}{\lambda-9}\end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_{14})}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal matriks segitiga atas sebagai berikut

$p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 4)^5(\lambda - 10)$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$ dan $\lambda_3 = 10$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 5$ dan $m(\lambda_3) = 1$.

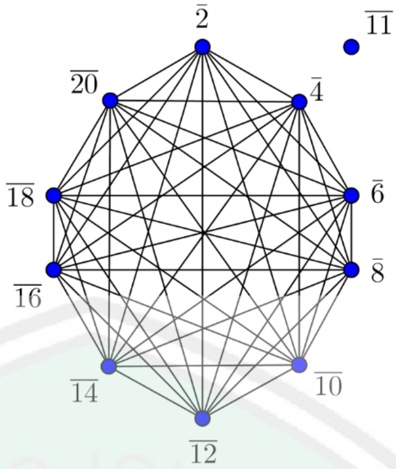
Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{14})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{L^{+}(\overline{\Gamma(Z_{14})})} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^{+}(\overline{\Gamma(Z_{14})})$ adalah 0, 4 dan 10. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 5 dan 1.

3.2.4 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{22}

Komplemen dari $\Gamma(Z_{22})$ disimbolkan dengan $\overline{\Gamma(Z_{22})}$ merupakan graf yang memuat himpunan titik $V(\Gamma(Z_{22}))$ dengan dua titik akan terhubung langsung di $\overline{\Gamma(Z_{22})}$ jika dan hanya jika kedua titik tersebut tidak terhubung langsung di $\Gamma(Z_{22})$. Sehingga $V\left(\overline{\Gamma(Z_{22})}\right) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}\}$ dan komplemen graf pembagi nol ring komutatif $\overline{\Gamma(Z_{22})}$ ditunjukkan pada gambar 3.10.



Gambar 3.10 Gambar Komplemen Graf Pembagi Nol $\overline{\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{Z}_{14})}$

Dari Gambar 3.10 dapat diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma(Z_{22})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{22})}\right)=\begin{bmatrix}0&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0\end{bmatrix}$$

$\det\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{22})}\right)-\lambda I\right)=$

$$det\left(\begin{bmatrix}0&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&1&0&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)=$$

$$det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Hasil dari $\det(\boldsymbol{L} - \lambda I)$ dapat diperoleh menggunakan aplikasi Maple 18 yaitu

$p(\lambda) = -\lambda(\lambda + 1)^9(\lambda - 9)$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ dan $\lambda_3 = 9$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 9$ dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma(Z_{22})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{A(\overline{\Gamma(Z_{22})})} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma(Z_{22})})$ adalah 0, -1 dan 9. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 9 dan 1.

Selanjutnya dari Gambar 3.10 dapat diperoleh matriks derajat dari $\overline{\Gamma(Z_{22})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{D}(\overline{\Gamma(Z_{22})}) = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{22})}$

$$\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{22})}\right) = \boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma(Z_{22})}\right) - \boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{22})}\right) = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 9 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$\det\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{22})}\right) - \lambda I\right) =$

$$det\left(\begin{bmatrix} 9 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 9 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 9 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 9 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 9 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 9 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 9 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 9-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9-\lambda & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 9-\lambda & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 9-\lambda & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 9-\lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 9-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 9-\lambda & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 9-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 9-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 9-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Hasil dari $\det(\boldsymbol{L} - \lambda I)$ dapat diperoleh menggunakan aplikasi Maple 18 yaitu

$p(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 10)^9$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 10$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 2$ dan $m(\lambda_2) = 9$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{22})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{22})}\right)} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{22})}\right)$ adalah 0 dan 10. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 2 dan 9.

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{22})}$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_{22})}\right)=\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma(Z_{22})}\right)+\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{22})}\right)=\begin{bmatrix}9&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&9&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&9&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&9&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&9&0&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&0&9&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&9&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&9&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&1&9&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&9\end{bmatrix}$$

$\det\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_{22})}\right)-\lambda I\right)=$

$$det\left(\begin{bmatrix}9&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&9&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&9&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&9&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&9&0&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&0&9&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&9&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&9&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&1&9&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)=$$

$$det\left(\begin{bmatrix}9-\lambda&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&9-\lambda&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&9-\lambda&1&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&9-\lambda&1&0&1&1&1&1&1\\1&1&1&1&9-\lambda&0&1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&-\lambda&0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1&0&9-\lambda&1&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&9-\lambda&1&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&9-\lambda&1&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&1&9-\lambda&1\\1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&9-\lambda\end{bmatrix}\right)$$

Hasil dari $\det(\boldsymbol{L}^{+}-\lambda I)$ dapat diperoleh menggunakan aplikasi Maple 18 yaitu

$p(\lambda)=-\lambda(\lambda-8)^{9}(\lambda-18)$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=0$, $\lambda_2=8$ dan $\lambda_3=18$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1)=1$, $m(\lambda_2)=9$ dan $m(\lambda_3)=1$.

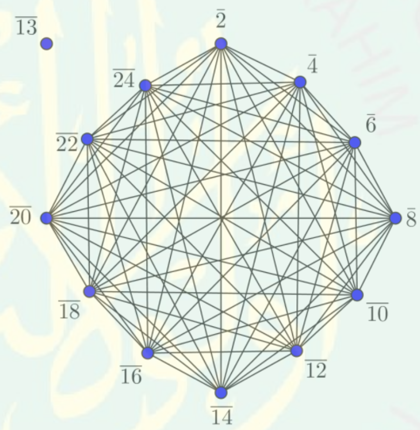
Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{22})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{L}^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_{22})}\right)}=\begin{bmatrix}0&8&18\\1&9&1\end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^{+}(\overline{\Gamma(Z_{22})})$ adalah 0, 8 dan 18. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 9 dan 1.

3.2.5 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\boldsymbol{Z_{26}}$

Komplemen dari $\Gamma(Z_{26})$ disimbolkan dengan $\overline{\Gamma(Z_{26})}$ merupakan graf yang memuat himpunan titik $V(\Gamma(Z_{26}))$ dengan dua titik akan terhubung langsung di $\overline{\Gamma(Z_{26})}$ jika dan hanya jika kedua titik tersebut tidak terhubung langsung di $\Gamma(Z_{26})$. Sehingga $V\left(\overline{\Gamma(Z_{26})}\right) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}\}$ dan komplemen graf pembagi nol ring komutatif $\overline{\Gamma(Z_{26})}$ ditunjukkan pada gambar 3.11.



Gambar 3.11 Gambar Komplemen Graf Pembagi Nol $\overline{\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{Z_{26}})}$

Dari Gambar 3.11 dapat diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma(Z_{26})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma(Z_{26})}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma(Z_{26})}) - \lambda I) =$

$$det\left(\begin{bmatrix} 0&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0&1\\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} -\lambda&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&-\lambda&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&-\lambda&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&-\lambda&1&1&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&-\lambda&1&0&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&-\lambda&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&-\lambda&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&0&-\lambda&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&0&1&-\lambda&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1&-\lambda&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&-\lambda&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&-\lambda&1\\ 1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Hasil dari $\det(\boldsymbol{A} - \lambda I)$ dapat diperoleh menggunakan aplikasi Maple 18 yaitu

$p(\lambda) = -\lambda(\lambda + 1)^{11}(\lambda - 11)$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ dan $\lambda_3 = 11$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 11$ dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma(Z_{26})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma(Z_{26})})} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 11 \\ 1 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma(Z_{26})})$ adalah 0, -1 dan 11. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 11 dan 1.

Selanjutnya dari Gambar 3.11 dapat diperoleh matriks derajat dari $\overline{\Gamma(Z_{26})}$ sebagai berikut

$$
\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma(Z_{26})}\right)=\begin{bmatrix}
11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11
\end{bmatrix}
$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{26})}$

$$
\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{26})}\right)=\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma(Z_{26})}\right)-\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{26})}\right)=\begin{bmatrix}
11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & 11 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & 11 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & 11 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 11 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 11 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 11 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11
\end{bmatrix}
$$

$\det\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{26})}\right)-\lambda I\right)=$

$$
det\left(\begin{bmatrix}
11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & 11 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & 11 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & 11 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 11 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 11 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 11 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11
\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}
\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{bmatrix}\right)=
$$

$$
det\left(\begin{bmatrix}
11-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & 11-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & 11-\lambda & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & 11-\lambda & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & 11-\lambda & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11-\lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 11-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 11-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 11-\lambda & -1 & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 11-\lambda & -1 & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11-\lambda & -1\\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11-\lambda
\end{bmatrix}\right)
$$

Hasil dari $\det(\boldsymbol{L}-\lambda I)$ dapat diperoleh menggunakan aplikasi Maple 18 yaitu

$p(\lambda)=-\lambda^2(\lambda-12)^{11}$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 12$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 2$ dan $m(\lambda_2) = 11$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{26})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{L(\overline{\Gamma(Z_{26})})} = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}(\overline{\Gamma(Z_{26})})$ adalah 0 dan 12. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 2 dan 11.

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{26})}$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^{+}(\overline{\Gamma(Z_{26})}) = \boldsymbol{D}(\overline{\Gamma(Z_{26})}) + \boldsymbol{A}(\overline{\Gamma(Z_{26})}) = \begin{bmatrix} 11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 11 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 11 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 11 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

$\det(\boldsymbol{L}^{+}(\overline{\Gamma(Z_{26})}) - \lambda I) =$

$$det\left(\begin{bmatrix} 11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 11 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 11 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 11 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix} 11-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 11-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 11-\lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 11-\lambda & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 11-\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11-\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 11-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 11-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 11-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 11-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Hasil dari $\det(\boldsymbol{L}^{+} - \lambda I)$ dapat diperoleh menggunakan aplikasi Maple 18 yaitu

$p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 10)^{11}(\lambda - 22)$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 10$ dan $\lambda_3 = 22$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 11$ dan $m(\lambda_3) = 1$.

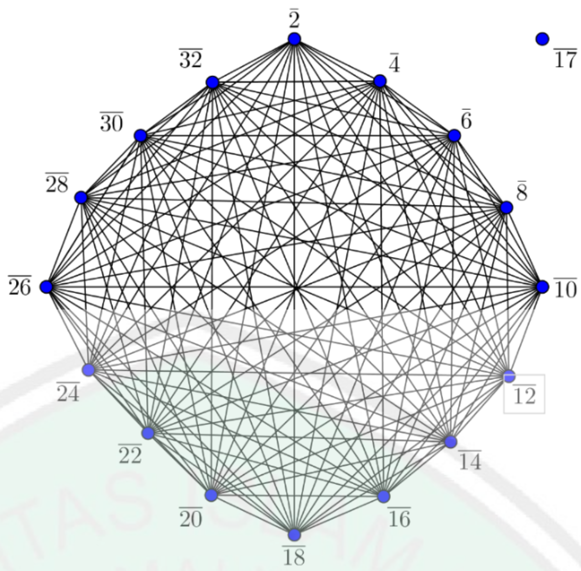
Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{26})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{L^{+}(\overline{\Gamma(Z_{26})})} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 22 \\ 1 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^{+}(\overline{\Gamma(Z_{26})})$ adalah 0, 10 dan 22. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 11 dan 1.

3.2.6 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{34}

Komplemen dari $\Gamma(Z_{34})$ disimbolkan dengan $\overline{\Gamma(Z_{34})}$ merupakan graf yang memuat himpunan titik $V(\Gamma(Z_{34}))$ dengan dua titik akan terhubung langsung di $\overline{\Gamma(Z_{34})}$ jika dan hanya jika kedua titik tersebut tidak terhubung langsung di $\Gamma(Z_{34})$. Sehingga $V(\overline{\Gamma(Z_{34})}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}, \overline{28}, \overline{30}, \overline{32}\}$ dan komplemen graf pembagi nol ring komutatif $\overline{\Gamma(Z_{34})}$ ditunjukkan pada gambar 3.12.



Gambar 3.12 Gambar Komplemen Graf Pembagi Nol $\overline{\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{Z_{34}})}$

Dari Gambar 3.12 dapat diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma(Z_{34})}$ sebagai berikut

$$A\left(\overline{\Gamma(Z_{34})}\right)=\begin{bmatrix}
0&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&0&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&0
\end{bmatrix}$$

$\det\left(A\left(\overline{\Gamma(Z_{34})}\right)-\lambda I\right)=$

$$det\left(\begin{bmatrix}
0&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&0&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&0&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&0&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&0&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&0
\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}
\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\lambda
\end{bmatrix}\right)=$$

$$det\left(\begin{bmatrix}
-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -\lambda
\end{bmatrix}\right)$$

Hasil dari $\det(\boldsymbol{A} - \lambda I)$ dapat diperoleh menggunakan aplikasi Maple 18 yaitu

$p(\lambda) = -\lambda(\lambda + 1)^{15}(\lambda - 15)$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ dan $\lambda_3 = 15$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 15$ dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma(Z_{34})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{A(\overline{\Gamma(Z_{34})})} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 15 \\ 1 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma(Z_{34})})$ adalah 0, -1 dan 15. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 15 dan 1.

Selanjutnya dari Gambar 3.12 dapat diperoleh matriks derajat dari $\overline{\Gamma(Z_{34})}$ sebagai berikut

$$D(\overline{\Gamma(Z_{34})}) = \begin{bmatrix}
15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15
\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{34})}$

$$L(\overline{\Gamma(Z_{34})}) = D(\overline{\Gamma(Z_{34})}) - A(\overline{\Gamma(Z_{34})}) = \begin{bmatrix}
15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15
\end{bmatrix}$$

$\det(L(\overline{\Gamma(Z_{34})}) - \lambda I) =$

$$
det\left(\begin{bmatrix}
15 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 15 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 15 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 15 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 15 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 15 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 15 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 15 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 15 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 15 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 15 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 15 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 15 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 15 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 15 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 15
\end{bmatrix}
- \begin{bmatrix}
\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{bmatrix}\right) =
$$

$$
det\left(\begin{bmatrix}
15-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & 15-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & 15-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & 15-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & 15-\lambda & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 15-\lambda & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 15-\lambda & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 15-\lambda & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 15-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 15-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 15-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 15-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 15-\lambda & -1 & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 15-\lambda & -1 & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 15-\lambda & -1 \\
-1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 15-\lambda
\end{bmatrix}\right)
$$

Hasil dari $\det(\boldsymbol{L} - \lambda I)$ dapat diperoleh menggunakan aplikasi Maple 18 yaitu

$p(\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 16)^{15}$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 16$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 2$ dan $m(\lambda_2) = 15$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{34})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{L}(\overline{\Gamma(Z_{34})})} = \begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 2 & 15 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}(\overline{\Gamma(Z_{34})})$ adalah 0 dan 16. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 2 dan 15.

Kemudian matriks *signless* Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{34})}$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^{+}(\overline{\Gamma(Z_{34})}) = \boldsymbol{D}(\overline{\Gamma(Z_{34})}) + \boldsymbol{A}(\overline{\Gamma(Z_{34})}) = \begin{bmatrix}
15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15
\end{bmatrix}$$

$$\det(\boldsymbol{L}^{+}(\overline{\Gamma(Z_{34})}) - \lambda I) =$$

$$det\left(\begin{bmatrix}
15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15
\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}
\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{bmatrix}\right) =$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}
15-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 15-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 15-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 15-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 15-\lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15-\lambda & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15-\lambda & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15-\lambda & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 15-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 15-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 15-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 15-\lambda & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15-\lambda & 1 & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15-\lambda & 1 & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15-\lambda & 1\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 15-\lambda
\end{bmatrix}\right)$$

Hasil dari $\det(\boldsymbol{L}^{+} - \lambda I)$ dapat diperoleh menggunakan aplikasi Maple 18 yaitu

$p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 14)^{15}(\lambda - 30)$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 14$ dan $\lambda_3 = 30$. Dengan cara yang sama pada ring komutatif Z_6 dapat ditentukan multiplisitas masing-masing nilai Eigen dari matriks tersebut, yaitu $m(\lambda_1) = 1$, $m(\lambda_2) = 15$ dan $m(\lambda_3) = 1$.

Dengan demikian terbentuklah spektrum Laplace dari $\overline{\Gamma(Z_{34})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{L}^{+}(\overline{\Gamma(Z_{34})})} = \begin{bmatrix} 0 & 14 & 30 \\ 1 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^{+}(\overline{\Gamma(Z_{34})})$ adalah 0, 14 dan 30. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, 15 dan 1.

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *adjacency* komplemen graf pembagi nol dari ring komutatif Z_{2p} diantaranya

Tabel 3.11 Polinomial Karakteristik Matriks *Adjacency* dari Beberapa Komplemen Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif $\boldsymbol{Z_{2p}}$

p	Ring Komutatif Z_{2p} , $p > 2$	Polinomial Karakteristik Matriks *Adjacency*
3	Z_6	$-\lambda(\lambda+1)(\lambda-1)$
5	Z_{10}	$-\lambda(\lambda+1)^3(\lambda-3)$
7	Z_{14}	$-\lambda(\lambda+1)^5(\lambda-5)$
11	Z_{22}	$-\lambda(\lambda+1)^9(\lambda-9)$
13	Z_{26}	$-\lambda(\lambda+1)^{11}(\lambda-11)$
17	Z_{34}	$-\lambda(\lambda+1)^{15}(\lambda-15)$
$\vdots$		
p	Z_{2p}	$p(\lambda) = -\lambda(\lambda+1)^{p-2}(\lambda-(p-2))$

Tabel 3.12 Spektrum *Adjacency* dari Beberapa Komplemen Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif $\boldsymbol{Z_{2p}}$

p	Ring Komutatif Z_{2p} , $p > 2$	Spektrum Laplace
3	Z_6	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
5	Z_{10}	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
7	Z_{14}	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$
11	Z_{22}	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$
13	Z_{26}	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 11 \\ 1 & 11 & 1 \end{bmatrix}$
17	Z_{34}	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 15 \\ 1 & 15 & 1 \end{bmatrix}$
$\vdots$		
p	Z_{2p}	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & p-2 \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$

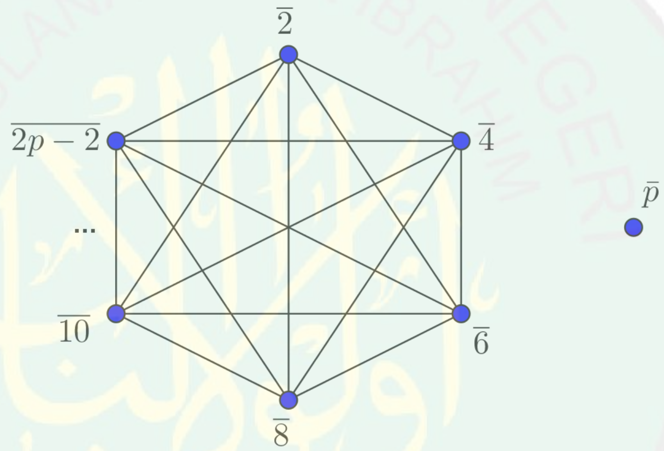
Teorema 5

Misalkan Z_{2p} merupakan ring bilangan bulat modulo $2p$, dengan p prima dan $p \geq 3$. Polinomial karakteristik matriks *adjacency* $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$ adalah

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda+1)^{p-2}(\lambda-(p-2))$$

Bukti

Misalkan $(Z_{2p}, +, \cdot)$ untuk $p \geq 3$ dengan p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan yaitu $\bar{1}$ terhadap operasi kedua $(\cdot)$. Unsur pada himpunan bilangan bulat modulo $2p$ adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \cdots, \overline{2p-1}$. Maka diperoleh himpunan pembagi nol pada bilangan bulat modulo $2p$ yaitu $Z(Z_{2p}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \cdots, \overline{2p-2}, \bar{p}\}$. Kemudian unsur-unsur dari $Z(Z_{2p})$ akan membentuk titik pada graf sederhana dengan order p. Sesuai definisi komplemen graf pembagi nol, maka diperoleh graf $\overline{\Gamma(Z_{2p})}$ sebagai berikut.



Sehingga akan diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma(Z_{2p})}$ sebagai berikut

$$A\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right) = \begin{array}{c} \\ \bar{2} \\ \vdots \\ \overline{p-1} \\ \bar{p} \\ \overline{p+1} \\ \vdots \\ \overline{2p-2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \bar{2} & \cdots & \overline{p-1} & \bar{p} & \overline{p+1} & \cdots & \overline{2p-2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$ diperoleh dari $\det\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi Gauss pada $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)-\lambda\boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \bar{2} & \bar{p} & \overline{2p-2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \bar{2} \\ \bar{p} \\ \overline{2p-2} \end{array} & \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\lambda^2-b\lambda-c}{\lambda-d} \end{bmatrix} \end{array}$$

dengan $b=0,\dots,(p-3)$; $c=1,\dots,(p-2)$; $d=0,\dots,(p-3)$

Maka $\det\left(\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian matriks segitiga atas. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$ adalah

$$p(\lambda)=-\lambda(\lambda+1)^{p-2}\big(\lambda-(p-2)\big).\ \blacksquare$$

Teorema 6

Misalkan Z_{2p} merupakan ring bilangan bulat modulo $2p$, dengan p prima dan $p\geq 3$. Spektrum *adjacency* titik $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$ adalah

$$\boldsymbol{Spec}_{A\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & p-2 \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan teorema 5, polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$, p prima dan $p\geq 3$ adalah

$$p(\lambda)=-\lambda(\lambda+1)^{p-2}\big(\lambda-(p-2)\big)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, dan $\lambda_3=p-2$ dan diperoleh multiplisitasnya $m(\lambda_1)=1$, $m(\lambda_2)=p-2$, dan

$m(\lambda_3) = 1$. Spektrum *adjacency* titik komplemen graf pembagi nol dari ring komutatif Z_{2p} untuk p prima dan $p \geq 3$ adalah

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & p-2 \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$ adalah 0, 1 dan $p-2$. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, $p-2$ dan 1.■

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum Laplace komplemen graf pembagi nol dari ring komutatif Z_{2p} diantaranya

Tabel 3.13 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace dari Beberapa Komplemen Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif $\boldsymbol{Z_{2p}}$

p	Ring Komutatif Z_{2p} , $p > 2$	Polinomial Karakteristik Matriks Laplace
3	Z_6	$-\lambda^2(\lambda-2)$
5	Z_{10}	$-\lambda^2(\lambda-4)^3$
7	Z_{14}	$-\lambda^2(\lambda-6)^5$
11	Z_{22}	$-\lambda^2(\lambda-10)^9$
13	Z_{26}	$-\lambda^2(\lambda-12)^{11}$
17	Z_{34}	$-\lambda^2(\lambda-16)^{15}$
⋮		
p	Z_{2p}	$p(\lambda) = -\lambda^2\left(\lambda-(p-1)\right)^{p-2}$

Tabel 3.14 Spektrum Laplace dari Beberapa Komplemen Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif $\boldsymbol{Z_{2p}}$

p	Ring Komutatif Z_{2p} , $p > 2$	Spektrum Laplace
3	Z_6	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
5	Z_{10}	$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
7	Z_{14}	$\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$
11	Z_{22}	$\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$

13	Z_{26}	$\begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$
17	Z_{34}	$\begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 2 & 15 \end{bmatrix}$
$\vdots$		
p	Z_{2p}	$\begin{bmatrix} 0 & p-1 \\ 2 & p-2 \end{bmatrix}$

Teorema 7

Misalkan Z_{2p} merupakan ring bilangan bulat modulo $2p$, dengan p prima dan $p \geq 3$. Polinomial karakteristik matriks Laplace $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$ adalah

$$p(\lambda) = -\lambda^2\big(\lambda - (p-1)\big)^{p-2}$$

Bukti

Misalkan $(Z_{2p}, +, \cdot)$ untuk $p \geq 3$ dengan p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan yaitu $\bar{1}$ terhadap operasi kedua $(\cdot)$. Unsur pada himpunan bilangan bulat modulo $2p$ adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \cdots, \overline{2p-1}$. Maka diperoleh himpunan pembagi nol pada bilangan bulat modulo $2p$ yaitu $Z(Z_{2p}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \cdots, \overline{2p-2}, \bar{p}\}$. Kemudian unsur-unsur dari $Z(Z_{2p})$ akan membentuk titik pada graf sederhana dengan order p.Sesuai definisi komplemen graf pembagi nol, maka diperoleh graf $\overline{\Gamma(Z_{2p})}$ seperti pada teorema 5. Sehingga akan diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma(Z_{2p})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} \bar{2} & \cdots & \overline{p-1} & \bar{p} & \overline{p+1} & \cdots & \overline{2p-2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \bar{2} \\ \vdots \\ \overline{p-1} \\ \bar{p} \\ \overline{p+1} \\ \vdots \\ \overline{2p-2} \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan matriks derajat dari $\overline{\Gamma(Z_{2p})}$ adalah

$$\boldsymbol{D}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right) = \begin{array}{c} \\ \bar{2} \\ \vdots \\ \overline{p-1} \\ \bar{p} \\ \overline{p+1} \\ \vdots \\ \overline{2p-2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \bar{2} & \cdots & \overline{p-1} & \bar{p} & \overline{p+1} & \cdots & \overline{2p-2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} p-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & p-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & p-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & p-2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks Laplace komplemen graf pembagi nol dari ring komutatif Z_{2p} adalah sebagai berikut

$$\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right) = \begin{array}{c} \\ \bar{2} \\ \vdots \\ \overline{p-1} \\ \bar{p} \\ \overline{p+1} \\ \vdots \\ \overline{2p-2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \bar{2} & \cdots & \overline{p-1} & \bar{p} & \overline{p+1} & \cdots & \overline{2p-2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} p-2 & \cdots & -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & p-2 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & p-2 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & -1 & \cdots & p-2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$ diperoleh dari $\det\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$.

Dengan eliminasi Gauss pada $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right) - \lambda \boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$\begin{array}{c} \\ \bar{2} \\ \vdots \\ \bar{p} \\ \overline{p+1} \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \bar{2} & \cdots & \bar{p} & \overline{p+1} & \cdots \end{array} \\ \begin{bmatrix} (p-2)-\lambda & \cdots \; -\dfrac{\lambda^2 - b\lambda + c}{\lambda - d} & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & -\lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\dfrac{\lambda^2 - b\lambda + c}{\lambda - d} & \cdots \; -\dfrac{\lambda - (p-1)}{\lambda - d} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \end{array}$$

dengan $b = 2p-4, \dots, p$; $c = k(p-1), k = p-3, \dots, 1$; $d = p-2, \dots, 1$

Maka $\det\left(\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian matriks segitiga atas. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$ adalah

$$p(\lambda) = -\lambda^2\left(\lambda - (p-1)\right)^{p-2}. \blacksquare$$

Teorema 8

Misalkan Z_{2p} merupakan ring bilangan bulat modulo $2p$, dengan p prima dan $p \geq 3$. Spektrum Laplace $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$ adalah

$$\boldsymbol{Spec}_{L\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)} = \begin{bmatrix} 0 & p-1 \\ 2 & p-2 \end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan teorema 7, polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$, p prima dan $p \geq 3$ adalah

$$p(\lambda) = -\lambda^2\left(\lambda - (p-1)\right)^{p-2}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = p-1$ dan diperoleh multiplisitasnya $m(\lambda_1) = 2$ dan $m(\lambda_2) = p-2$. Spektrum Laplace komplemen graf pembagi nol dari ring komutatif Z_{2p} untuk p prima dan $p \geq 3$ adalah

$$\boldsymbol{Spec}_{L\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)} = \begin{bmatrix} 0 & p-1 \\ 2 & p-2 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$ adalah 0 dan $p-1$. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 2 dan $p-2$. $\blacksquare$

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *signless* Laplace komplemen graf pembagi nol dari ring komutatif Z_{2p} diantaranya.

Tabel 3.15 Polinomial Karakteristik Matriks *signless* Laplace dari Beberapa Komplemen Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif $\boldsymbol{Z_{2p}}$

p	Ring Komutatif Z_{2p} , $p > 2$	Polinomial Karakteristik Matriks *signless* Laplace
3	Z_6	$-\lambda^2(\lambda - 2)$
5	Z_{10}	$-\lambda(\lambda - 2)^3(\lambda - 6)$
7	Z_{14}	$-\lambda(\lambda - 4)^5(\lambda - 10)$
11	Z_{22}	$-\lambda(\lambda - 8)^9(\lambda - 18)$
13	Z_{26}	$-\lambda(\lambda - 10)^{11}(\lambda - 22)$
17	Z_{34}	$-\lambda(\lambda - 14)^{15}(\lambda - 30)$
$\vdots$		
p	Z_{2p}	$p(\lambda) = -\lambda\big(\lambda - (p-3)\big)^{p-2}\big(\lambda - (2p-4)\big)$

Tabel 3.16 Spektrum *signless* Laplace dari Beberapa Komplemen Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif $\boldsymbol{Z_{2p}}$

p	Ring Komutatif Z_{2p} , $p > 2$	Spektrum Laplace
3	Z_6	$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
5	Z_{10}	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
7	Z_{14}	$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$
11	Z_{22}	$\begin{bmatrix} 0 & 8 & 18 \\ 1 & 9 & 1 \end{bmatrix}$
13	Z_{26}	$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 22 \\ 1 & 11 & 1 \end{bmatrix}$
17	Z_{34}	$\begin{bmatrix} 0 & 14 & 30 \\ 1 & 15 & 1 \end{bmatrix}$
$\vdots$		
p	Z_{2p}	$\begin{bmatrix} 0 & p-3 & 2p-4 \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$

Teorema 9

Misalkan Z_{2p} merupakan ring bilangan bulat modulo $2p$, dengan p prima dan $p \geq 5$. Polinomial karakteristik matriks *signless* Laplace $\boldsymbol{L^+}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$ adalah

$$p(\lambda) = -\lambda\big(\lambda - (p-3)\big)^{p-2}\big(\lambda - (2p-4)\big)$$

Bukti

Misalkan $(Z_{2p}, +, \cdot)$ untuk $p \geq 3$ dengan p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan yaitu $\bar{1}$ terhadap operasi kedua $(\cdot)$. Unsur pada himpunan bilangan bulat modulo $2p$ adalah $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \cdots, \overline{2p-1}$. Maka diperoleh himpunan pembagi nol pada bilangan bulat modulo $2p$ yaitu $Z(Z_{2p}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \cdots, \overline{2p-2}, \bar{p}\}$. Kemudian unsur-unsur dari $Z(Z_{2p})$ akan membentuk titik pada graf sederhana dengan order p. Sesuai definisi komplemen graf pembagi nol, maka diperoleh graf $\overline{\Gamma(Z_{2p})}$ seperti pada teorema 5. Sehingga akan diperoleh matriks *adjacency* titik dari $\overline{\Gamma(Z_{2p})}$ sebagai berikut

$$A\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right) = \begin{array}{c} \\ \bar{2} \\ \vdots \\ \overline{p-1} \\ \bar{p} \\ \overline{p+1} \\ \vdots \\ \overline{2p-2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \bar{2} & \cdots & \overline{p-1} & \bar{p} & \overline{p+1} & \cdots & \overline{2p-2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

dan matriks derajat dari $\overline{\Gamma(Z_{2p})}$ adalah

$$D\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right) = \begin{array}{c} \\ \bar{2} \\ \vdots \\ \overline{p-1} \\ \bar{p} \\ \overline{p+1} \\ \vdots \\ \overline{2p-2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \bar{2} & \cdots & \overline{p-1} & \bar{p} & \overline{p+1} & \cdots & \overline{2p-2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} p-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & p-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & p-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & p-2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks *signless* Laplace komplemen graf pembagi nol dari ring komutatif Z_{2p} adalah sebagai berikut

$$L^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)=\begin{array}{c|ccccccc} & \bar{2} & \cdots & \overline{p-1} & \bar{p} & \overline{p+1} & \cdots & \overline{2p-2} \\ \hline \bar{2} & p-2 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{p-1} & 1 & \cdots & p-2 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \bar{p} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \overline{p+1} & 1 & \cdots & 1 & 0 & p-2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{2p-2} & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & p-2 \end{array}$$

Polinomial karakteristik $L^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$ diperoleh dari $\det\left(L^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)-\lambda I\right)$. Dengan eliminasi Gauss pada $L^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)-\lambda I$ diperoleh matriks segitiga atas. Maka $\det\left(L^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)-\lambda I\right)$ tidak lain adalah perkalian matriks segitiga atas. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $L^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$ adalah

$$p(\lambda)=-\lambda\big(\lambda-(p-3)\big)^{p-2}\big(\lambda-(2p-4)\big). \blacksquare$$

Teorema 10

Misalkan Z_{2p} merupakan ring bilangan bulat modulo $2p$, dengan p prima dan $p \geq 5$. Spektrum *signless* Laplace $L^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$ adalah

$$\boldsymbol{Spec}_{L^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)}=\begin{bmatrix} 0 & p-3 & 2p-4 \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan teorema 9, polinomial karakteristik dari $L^{+}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$, p prima dan $p \geq 3$ adalah

$$p(\lambda)=-\lambda\big(\lambda-(p-3)\big)^{p-2}\big(\lambda-(2p-4)\big)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=0$, $\lambda_2=p-3$, dan $\lambda_3=2p-4$ dan diperoleh multiplisitasnya $m(\lambda_1)=1$, $m(\lambda_2)=p-2$

dan $m(\lambda_3) = 1$. Spektrum *signless* Laplace komplemen graf pembagi nol dari ring komutatif Z_{2p} untuk p prima dan $p \geq 3$ adalah

$$\boldsymbol{Spec}_{L^+\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)} = \begin{bmatrix} 0 & p-3 & 2p-4 \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi, nilai Eigen dari matriks $\boldsymbol{L}^+\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$ adalah 0, $p-3$ dan $2p-4$. Sedangkan baris yang tereduksi masing-masing sebanyak 1, $p-2$ dan 1.■

3.3 Teori Graf dalam Pandangan Islam

Kajian teori graf dalam al-Quran telah dijelaskan dalam Bab II, terdapat beberapa cara atau bentuk yang bisa dilakukan untuk mewujudkan silaturrahim. Salah satunya yakni dengan memberi bantuan kepada kerabat seperti yang dituliskan dalam al-Quran surat an-Nahl/16:90, yang berbunyi

إِنَّ اللَّهَ يَأْمُرُ بِالْعَدْلِ وَالْإِحْسَانِ وَإِيتَاءِ ذِي الْقُرْبَىٰ وَيَنْهَىٰ عَنِ الْفَحْشَاءِ وَالْمُنكَرِ وَالْبَغْيِ ۚ

يَعِظُكُمْ لَعَلَّكُمْ تَذَكَّرُونَ (٩٠)

Artinya: "*Sesungguhnya Allah menyuruh (kamu) berlaku adil dan berbuat kebajikan, memberi kepada kaum kerabat, dan Allah melarang dari perbuatan keji, kemungkaran, dan permusuhan. Dia memberi pengajaran kepada kalian agar kalian dapat mengambil pelajaran.*"

Allah Swt. menyebutkan bahwa Dia memerintahkan kepada hamba-hambaNya untuk berlaku adil, yakni pertengahan dan seimbang. Allah Swt. memerintahkan untuk berbuat kebajikan. Yang dimaksud dengan firman-Nya

وَإِيتَاءِ ذِي الْقُرْبَىٰ

Artinya: "*dan memberi kepada kaum kerabat*". (an-Nahl:90) yaitu hendaknya Dia menganjurkan untuk bersilaturrahim (Katsir, 2003:97).

Selain itu, dalam surat ar-Rum/30:38 juga tertulis ayat tentang memberi bantuan kepada kerabat, orang miskin, dan orang yang sedang dalam perjalanan.

فَآتِ ذَا الْقُرْبَىٰ حَقَّهُ وَالْمِسْكِينَ وَابْنَ السَّبِيلِ ۚ ذَٰلِكَ خَيْرٌ لِّلَّذِينَ يُرِيدُونَ وَجْهَ اللَّهِ ۖ وَأُولَٰئِكَ هُمُ الْمُفْلِحُونَ

(٣٨)

Artinya: "*Maka berikanlah kepada kerabat yang terdekat akan haknya, demikian (pula) kepada fakir miskin dan orang-orang yang dalam perjalanan. Itulah yang lebih baik bagi orang-orang yang mencari keridhaan Allah; dan mereka itulah orang-orang yang beruntung.*"

Allah swt. berfirman, memerintahkan (kepada kaum muslim) agar memberikan kepada kerabat terdekat mereka akan haknya, yakni berbuat dan menghubungkan silaturrahim, juga orang miskin. Yang dimaksud orang miskin ialah orang yang tidak mempunyai sesuatu pun untuk ia belanjakan buat dirinya atau memiliki sesuatu tetapi masih belum mencukupinya. Juga kepada *ibnu sabil*, yaitu seorang musafir yang memerlukan biaya dan keperluan hidupnya dalam perjalanan, karena biayanya kehabisan ditengah jalan (Katsir, 2004:377)

Dengan demikian, berdasarkan surat an-Nahl/16:90 dan surat ar-Rum/30:38 Allah telah menyuruh kita untuk saling memberi bantuan kepada kerabat dan saling berbuat kebajikan. Sebagai umat muslim, maka selayaknya anjuran tersebut ditaati dan diamalkan, termasuk oleh ilmuwan matematika dalam menghasilkan rumus baru untuk dapat menyelesaikan suatu permasalahan matematika. Hal ini dimaksudkan untuk meringankan atau mempermudah pembaca dalam melakukan perhitungan berdasarkan teorema-teorema baru yang telah terbentuk.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan maka dapat disimpulkan beberapa pola umum spektrum *adjacency* titik, Laplace, dan *signless* Laplace graf pembagi nol dan komplemennya dari ring komutatif dengan satuan Z_{2p} untuk p bilangan prima sebagai berikut:

1. Pada graf pembagi nol hanya didapatkan spektrum Laplace dan *signless* Laplace. Spektrum *adjacency* tidak diteliti karena nilai eigen yang diperoleh berbentuk desimal.

   a. Spektrum Laplace $\boldsymbol{L}\left(\Gamma(Z_{2p})\right)$ untuk p prima dan $p \geq 3$ adalah

   $$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{L}(\Gamma(Z_{2p}))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$$

   b. Spektrum *signless* Laplace $\boldsymbol{L}^+\left(\Gamma(Z_{2p})\right)$ untuk p prima dan $p \geq 3$ adalah

   $$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{L}^+(\Gamma(Z_{2p}))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & p \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Pada komplemen graf pembagi nol didapatkan spektrum *adjacency* titik, Laplace dan *signless* Laplace.

   a. Spektrum *adjacency* titik $\boldsymbol{A}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$ untuk p prima dan $p \geq 3$ adalah

   $$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{A}(\overline{\Gamma(Z_{2p})})} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & p-2 \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$$

   b. Spektrum Laplace $\boldsymbol{L}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$ untuk p prima dan $p \geq 3$ adalah

   $$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{L}(\overline{\Gamma(Z_{2p})})} = \begin{bmatrix} 0 & p-1 \\ 2 & p-2 \end{bmatrix}$$

c. Spektrum *signless* Laplace $\boldsymbol{L^+}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)$ untuk p prima dan $p \geq 5$ adalah

$$\boldsymbol{Spec}_{\boldsymbol{L^+}\left(\overline{\Gamma(Z_{2p})}\right)} = \begin{bmatrix} 0 & p-3 & 2p-4 \\ 1 & p-2 & 1 \end{bmatrix}$$

4.2 Saran

Berdasarkan kesimpulan, pada penelitian ini spektrum diperoleh dari graf pembagi nol dan komplemen graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan. Penelitian selanjutnya diharapkan dapat:

1. Menemukan teorema terkait spektrum yang diperoleh dari graf yang lainnya atau pada graf pembagi nol dari ring lainnya.
2. Menemukan teorema terkait spektrum yang diperoleh dari komplemen graf yang lainnya atau pada graf pembagi nol dari ring lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir, Azizah N.N., Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press.

Anderson, D.F. & Livingston, P.S. 1999. The Zero-Divisor Graph of A Commutative Ring. *Journal of Algebra*, 217 (2): 434-447.

Anton, H. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear, Jilid 1*. Terjemahan Hari Suminto. Batam: Interaksara.

Anton, H. dan Rorres, Ch. 2004. *Elementary Linier Algebra, 8th Edition*. New York: John Willey & Sons, Inc.

Anton, H. dan Rorres, C. 2014. *Elementary Linier Algebra, 11th Edition*. New York: Anton Textbooks, Inc.

Ayyaswamy, S.K. & Balachandran, S. 2010. On Detour Spectra of Some Graph. *International Journal of Computation and Mathematical Sciences*. 4(7): 1038-1040.

Biggs, N. 1993. *Algebraic Graph Theory*. New York: Cambridge University Press.

Biyikoglu, Turker, Leydold, Josef, Stadler, dan Peter F. 2007. *Laplacian Eigenvectors of Graphs*. New York: Springer.

Bondy, J. A. & Murty, U.S.R. 2008. *Graph Theory*. New York: Springer.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. 2016. *Graph and Digraph 6th Edition*. New York: CRC Press.

Gallian, J.A. copyright 2012. *Contemporary Abstract Algebra, eight edition*. University of Minnesota Duluth.

Gilbert, L dan Gilbert, J. 2015. *Elements of Modern Algebra Eighth Edition*. Stamford: Nelson Education, Ltd.

Katsir, I. 2001. *Tafsir Ibnu Katsir, Jilid 2*. Terjemahan M. Ghoffar. Bogor: Pustaka Imam asy-Syafi'i.

Katsir, I. 2003. *Tafsir Ibnu Katsir, Jilid 5*. Terjemahan M. Ghoffar. Bogor: Pustaka Imam asy-Syafi'i.

Katsir, I. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir, Jilid 6*. Terjemahan M. Ghoffar. Bogor: Pustaka Imam asy-Syafi'i.

Raisinghania, M.D dan Anggarwal, R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Company Ltd.

Soleha, Dian W.S. & Satrio A. W. 2013. Kajian Sifat-Sifat Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Elemen Satuan. Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya. 25 April 2013.

Yin, Sh. 2006. Investigation on Spectrum of the Adjacency Matrix and Laplacian Matrix of Graph G_1. *WSEAS Transaction on Systems.* Vol 7, No 4, Hal: 362-372.

RIWAYAT HIDUP

Nadia Walindra, lahir di Kabupaten Malang pada tanggal 2 Mei 1997 dan biasa dipanggil Nadia. Tinggal di Mangunrejo RT/RW 008/004 Desa Sidomulyo Kecamatan Jabung Malang. Anak tunggal dari pasangan bapak Edi Supriono dan ibu Sriwijiati.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Sidomulyo 01 dan lulus pada tahun 2009. Setelah itu melanjutkan sekolah di SMPN 1 Tumpang dan lulus pada tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMAN 1 Tumpang dan lulus pada tahun 2015. Selanjutnya pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Jurusan Matematika.

Selama menempuh pendidikan menengah pertama sampai menengah atas, dia berperan aktif pada organisasi Palang Merah Remaja (PMR) SMPN 1 Tumpang dan organisasi Karate SMAN 1 Tumpang. Beberapa perlombaan PMR dan Karate pernah diikutinya seperti BARA PAMERA XI Tingkat Wira dan Madya Se-Jawa Timur 2011 KSR-PMI Unit UIN Maliki Malang, ALTARA 2010 KSR-PMI Unit Universitas Kanjuruhan Malang, Piala Walikota Malang tahun 2012 FORKI Kota Malang, O2SN SMA Tingkat Kabupaten Malang Tahun 2013 oleh Dinas Pendidikan Kabupaten Malang dan mendapat juara 3 Karate KATA Tunggal Pi. Dia pernah menjadi ketua pengembangan diri Karate SMAN 1 Tumpang masa bhakti 2013-2014.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nadia Walindra
NIM : 15610055
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Spektrum *Adjacency, Laplace, dan Signless-Laplace* pada Graf Pembagi Nol dan Komplemennya dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan
Pembimbing I : Dr. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
Pembimbing II : Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	22 Februari 2019	Konsultasi BAB I dan II	1.
2.	29 Februari 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan BAB I dan II	2.
3.	2 Maret 2019	Konsultasi BAB I, II, dan III	3.
4.	4 Maret 2019	ACC untuk Seminar Proposal	4.
5.	15 April 2019	ACC untuk Seminar Proposal	5.
6.	25 April 2019	Konsultasi BAB III	6.
7.	1 Juli 2019	Revisi BAB III dan Konsultasi BAB IV	7.
8.	7 Juli 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan BAB III	8.
9.	27 Oktober 2019	ACC Keseluruhan	9.
10.	28 Oktober 2019	ACC Kajian Keagamaan Keseluruhan	10.

Malang, 30 Oktober 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001