ESTIMASI PARAMETER MODEL *COX INGERSOLL ROSS* MENGGUNAKAN METODE *GENERALIZED METHOD OF MOMENTS*

SKRIPSI

OLEH
GRENDA AYUNING NURANI
NIM. 15610040

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

ESTIMASI PARAMETER MODEL *COX INGERSOLL ROSS* MENGGUNAKAN METODE *GENERALIZED METHOD OF MOMENTS*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Grenda Ayuning Nurani
NIM. 15610040

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

ESTIMASI PARAMETER MODEL *COX INGERSOLL ROSS* MENGGUNAKAN METODE *GENERALIZED METHOD OF MOMENTS*

SKRIPSI

Oleh
Grenda Ayuning Nurani
NIM. 15610040

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 27 November 2019

Pembimbing I,

Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Pembimbing II,

Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19720604 199903 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER MODEL *COX INGERSOLL ROSS* MENGGUNAKAN METODE *GENERALIZED METHOD OF MOMENTS*

SKRIPSI

Oleh
Grenda Ayuning Nurani
15610040

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai salah satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 23 Desember 2019

Penguji Utama	: Dr. Sri Harini, M.Si	....
Ketua Penguji	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Abdul Aziz, M.Si	....
Anggota Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: Grenda Ayuning Nurani
NIM	: 15610040
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Estimasi Parameter model Cox Ingersoll Ross Menggunakan Metode Generalized Method of Moments

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencamtumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 03 Desember 2019

Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL

TGL. 20

044F4AEF406670006

6000

ENAM RIBU RUPIAH

Grenda Ayuning Nurani

NIM. 15610040

MOTO

*"***Saat menanam padi rumputpun ikut serta tumbuh,**

saat kita menanam rumput, mengharap padi tumbuhpun itu sia-sia*"*

PERSEMBAHAN

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Dengan mengucap syukur kepada Allah SWT skripsi ini dipersembahkan kepada:

Keluarga tercinta khususnya kepada ayahanda Abdul Mukti dan ibunda Endang Sulistyowati, keponakan tersayang Eleonora Venta Emery, kakak Lilin Ayu Kholifahana, adik Ayudya Permadani, serta seorang terkasih dengan initial "CH" yang selalu mendoakan, menyemangati, menasihati, dan yang selalu menguatkan penulis dengan ikhlas.

Kemudian kepada para pembimbing bapak Abdul Aziz, M.Si dan ibu Evawati Alisah, M.P.d yang senantiasa memberikan waktunya untuk memberikan arahan kepada penulis. Beserta teman-teman yang selalu mensupport penulis terutama Noffrida Rianis Sani yang selalu ada buat menampung ditempatnya, Nisa, Firda, Gimas, Tyas,dll.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis
5. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas sains dan teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak dan Ibu serta adik tercinta yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Sahabat-sahabat terbaik penulis, yang selalu menemani, membantu , dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Amiin.*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 03 Desember 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$\boldsymbol{Y_i}$	: Variabel terikat periode ke-i
$\boldsymbol{X_i}$	: Variabel bebas periode ke-i
$\boldsymbol{u_i}$	: Galat periode ke-i (error)
$\boldsymbol{\beta}$	: Parameter
$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$	: Estimasi Parameter
$\boldsymbol{x}$	: Matriks data
$\boldsymbol{x}'$	: Transpos matriks x
$\boldsymbol{y}$	: Vektor kolom dari variabel Y
$\boldsymbol{n}$	: sampel ukuran data
r	: Suku bunga
t	: Waktu
W(t)	: Proses Wiener
σ	: Simpangan baku
σ^2	: Variansi
ρ	: Koefisien korelasi
P	: Peluang atau *probabilitas* populasi
θ	: Level rata-rata *long run*
κ	: Kelajuan r menuju level θ
$w(t)$	: Proses wiener ukuran $(n+k)$
$\widehat{\boldsymbol{w}}$	: Matriks pembobot
$\bar{g}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$	: Momen kondisi sampel
$\boldsymbol{Q}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$	: Bentuk kuadrat dari kodisi momen sampel yang teboboti

ABSTRAK

Nurani, Grenda Ayuning, 2019. **Estimasi Parameter Model *Cox Ingersoll Ross* Menggunakan Metode *Generalized Method of Moments.*** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Abdul Aziz, M.Si, (2) Evawati Alisah, M.Pd.

Kata kunci: CIR, Estimasi Parameter, Generalized Method of Moments

Cox Ingrsoll Ross (CIR) merupakan salah satu model suku bunga yang bersifat positif. *Generalized Method of Moments* (GMM) merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mengestimasi parameter pada model CIR dengan meminimumkan jumlah kuadrat terboboti dari momen kondisi sampel. GMM dapat digunakan pada kondisi data yang mengalami pelanggaran asumsi, misal sampel ukuran *n* berdistribusi normal, model dalam bentuk heterokedastistas juga dapat diselesaikan. Model CIR yang digunakan dalam penelitian ini memiliki dua variabel. Tujuan dari penelitian ini untuk mengetahui bentuk estimasi parameter model CIR menggunakan metode GMM. Hasil estimasi tersebut diimplementasikan pada data tingkat suku bunga Bank Indonesia dari tahun 2013 sampai tahun 2018 yang menghasilkan nilai parameter sebesar $\kappa = 0.0163$, $\theta = 6.4204$, dan $\sigma = 0.2215$.

ABSTRACT

Nurani, Grenda Ayuning. 2019. **Parameter Estimation of *Cox Ingersoll Ross* Model using Generalized Method of Moments**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (1) Abdul Aziz, M.Si, (2) Evawati Alisah, M.Pd.

Keyword: CIR, Parameter Estimation, Generalized Method of Moments.

Cox Ingersoll Ross (CIR) is one of the positive interes rate models. Generalized Method of Moments (GMM) is one of the methods used to estimate parameters in CIR model by minimizing the number of squares weighted from the moment of sample condition. GMM can be used in data conditions that have experienced violations of assumptions, for example the size sample n is not normally distributed, and models in the form of heteroscedasticity can be solved. The CIR model used in this study has two variables. The purpose of this study is to determine the form of parameter estimation of he CIR model using GMM. The estimation result are implemented in the interes rate data Bank Indonesia from 2013 to 2018 which produces a parameter value of $\kappa = 0.0163$, $\theta = 6.4204$, dan $\sigma = 0.2215$.

ملخص

نوراني، غريندا ايونيغ ، 2019. **تقدير معلمة نموذج *Cox Ingersoll Ross* باستخدام طريقة *Generalized Method of Moments***. بحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا ، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشارون: (1) عبدالعزيز ، ماجستير ، (2) افاواتي اليساي، ماجستير

الكلمات المفتاحية: CIR، تقدير المعلمة، *Generalized Method of Moments*

(CIR) *Cox Ingersoll Ross* هي واحدة من نماذج أسعار الفائدة الإيجابية. طريقة اللحظات المعممة (GMM) هي إحدى الطرق المستخدمة لتقدير المعلمات في نموذج CIR من خلال تقليل عدد المربعات الموزونة منذ لحظة ظروف العينة. يمكن استخدام GMM في ظروف البيانات التي انتهكت الافتراضات ، على سبيل المثال يتم توزيع حجم العينة n بشكل طبيعي، كما يمكن إكمال النموذج في شكل heterokedasticity. يحتوي نموذج CIR المستخدم في هذه الدراسة على متغيرين. كان الغرض من هذه الدراسة هو تحديد شكل تقدير المعلمة لنموذج CIR باستخدام طريقة GMM. من نتائج التقدير يتم تنفيذ في بيانات أسعار الفائدة وبيانات التضخم بنك إندونيسيا من 2013 إلى 2018 والتي تنتج قيمة المعلمة من $\kappa = 0.0163$، $\theta = 6.4204$ و $\sigma = 0.2215$.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan konsep dasar dari segala bidang pembelajaran, misalnya dalam bidang kesehatan, teknik, sosial dan ekonomi. Contohnya ekonometrika merupakan salah satu ilmu yang memanfaatkan teori matematika untuk menganalisis teori ekonomi (Widarjono, 2013). Dimana teori ekonomi dinyatakan dalam bentuk matematika. Ekonometri digunakan untuk mengetahui hubungan antar variabel atau estimasi dari suatu parameter.

Penaksiran (estimasi) merupakan suatu pendugaan yang dilakukan berdasarkan sampel untuk mengetahui nilai suatu populasi. Dilakukan penarikan sampel karena jumlah populasi terlalu banyak, penggunaan cara ini mempunyai syarat-syarat yang harus dipenuhi (Subagyo, 2010). Sedangkan untuk penaksiran dibutuhkan suatu parameter dimana, parameter adalah suatu ukuran-ukuran yang berlaku pada suatu populasi.

Pada ilmu ekonomi sendiri terdapat istilah suku bunga, dimana suku bunga merupakan suatu harga yang diperoleh dari penggunaan dana investasi yang dilakukan dalam periode tertentu (Boediono, 2014). Tingkat suku bunga mempunyai pengaruh yang sangat penting untuk menentukan harga dari sebuah investasi. Tingkat suku bunga akan berubah- ubah sepanjang waktu itulah yang dikatakan proses stokastik. Fungsi dari tingkat suku bunga diantaranya yaitu sebagai daya tarik inventor agar menginvestasikan dananya dan dapat digunakan sebagai alat kontrol bagi pemerintah terhadap investasi dalam sektor-sektor ekonomi (Sunariyah, 2013). Dikarenakan tingkat suku bunga yang berubah-ubah maka diperlukaan model dari suku bunga agar dapat diketahui pergerakan tingkat suku bunga kontinu.

Model suku bunga *Cox Ingersoll Ross* (CIR) merupakan perbaikan dari model suku bunga yang pertama yairu model vasicek. CIR dikenalkan pada tahun 1985 oleh Cox, Ingersoll, dan Ross. Model ini mempunyai sifat *mean reversion* yaitu mengarahnya tingkat suku bunga kembali pada nilai rata-rata jangka panjang. Beberapa parameter dalam model CIR tidak diketahui nilainya dan harus diestimasi. Sehingga dapat diperoleh hasil estimasi yang mendekati data sebenarnya (Budimandkk, 2015).

Banyak metode yang dapat di gunakan untuk mengestimasi parameter pada model CIR ini diantaranya dengan metode *Generalized Method of Moments* (GMM). Metode GMM merupakan salah satu metode dalam estimasi parameter. Metode GMM diperkenalkan oleh Hansen pada tahun 1982. Metode ini dikenal sebagai cara untuk mengestimasi parameter dengan meminimalkan bentuk kuadrat dari momen sampel yang diboboti (Taurif, 2014).

Ayat Al-quran yang berkaitan dengan estimasi sebagai berikut:

وَلَوْ أَنَّ لِلَّذِينَ ظَلَمُوا۟ مَا فِى ٱلْأَرْضِ جَمِيعًا وَمِثْلَهُۥ مَعَهُۥ لَٱفْتَدَوْا۟ بِهِۦ مِن سُوٓءِ
ٱلْعَذَابِ يَوْمَ ٱلْقِيَٰمَةِ ۚ وَبَدَا لَهُم مِّنَ ٱللَّهِ مَا لَمْ يَكُونُوا۟ يَحْتَسِبُونَ ﴿٤٧﴾

Dan sekiranya orang-orang yang zalim mempunyai apa yang ada di bumi semuanya dan (ada pula) sebanyak itu besertanya, niscaya mereka akan menebus dirinya dengan itu dari siksa yang buruk pada hari kiamat. Dan jelaslah bagi mereka azab dari Allah yang belum pernah mereka perkirakan. (Az-Zumar 39:47)

Ayat ini menjelaskan tentang orang dzalim yang memiliki kekayaan di bumi ini maka kelak di akhirat mereka akan medapat balasan (siksaan) yang tidak akan mereka perkirakan atas kekayaan mereka. Pada ayat ini berkaitan dengan perkiraan (estimasi), dimana orang-orang yang dzalim tidak akan berpikir balasan yang akan mereka hadapi di akhirat. Merekapun tidak dapat meperkirakan bagaimana dahsyatnya siksaan yang akan mereka alami (Wahbah, 1991).

Penelitian terdahulu yang dilakukan oleh Mariana dkk (2015), menggunakan metode *Kalman Filter* dengan menggunakan model suku bunga CIR. Pada penelitian ini menggunakan metode *Kalman Filter*, namun setelah diestimasi tidak mendapat parameter yang cukup baik, kemudian dilakukan pengujian dengan metode *Extended Kalman Filter* namun tidak juga medapat parameter yang baik, kemudian dilalukan pengujian dengan *Ensanble Kalman Filter* tidak juga mendapat parameter yang baik, sehingga dilakukan pengujian dengan metode *Ordinary Least Square* menghasilkan nilai parameternya dan mngestimasi dengan metode *Kalman Filter* sehingga mendapatkan estimasi cukup baik serta mendapat nilai *error* yang kecil.

Peneliti lainnya, Budiman dkk (2015), menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimation* dengan model CIR. Pada penelitian ini dihasilkan dengan log-likelihood diturunkan satu kali untuk mendapatkan nilai parameternya dan digunakan pula metode *newton raphson*. Sehingga didapatkanlah nilai parameter pada model CIR.

Sedangkan penelitian Taurif dkk (2014) menggunakan metode GMM dengan model *logistic regression* yang mana hasil dari penelitian estimasi GMM regresi logistik biner ditentukan pada kriteria nilai *Odds ratio* (factor resiko) pada kasus penderita HIV.

Dari penelitian yang telah dipaparkan diatas maka penulis mengambil suatu penelitian dengan model suku bunga *Cox Ingersoll Ross* yang dicari nilai estimasi parameternya dengan metode *Generalized Method of Moments*.

1.2 Rumusan Masalah

Pada penelitian ini menganggkat beberapa rumusan masalah diantaranya yaitu:

1. Bagaimana bentuk estimasi parameter model suku bunga CIR dengan menggunakan metode *Generalized Method of Moments?*
2. Bagaimana hasil perhitungan estimasi parameter model suku bunga CIR dengan menggunakan metode *Generalized Method of Moments* pada data tingkat suku bunga Bank Indonesia?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut maka didapatkan rumusan masalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui bentuk estimasi parameter model suku bunga CIR dengan menggunakan metode *Generalized Method of Moments*.
2. Untuk mengetahui hasil perhitungan estimasi parameter model suku bunga CIR dengan menggunakan metode *Generalized Method of Moments* pada data tingkat suku bunga Bank Indonesia.

1.4 Batasan Masalah

Mencakup penelitian ini agar tepat sasaran, maka diperlukan adanya batasan masalah yaitu data yang digunakan adalah tingkat suku bunga Bank Indonesia tahun 2013 sampai 2018.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan penelitian ini adalah:

1. Sebagai tambahan informasi dan pengetahuan mengenai perhitungan suku bunga stokastik dengan model suku bunga CIR.
2. Memberikan kontribusi untuk bahan diskusi, dan penunjang bagi peneliti selanjutnya, serta sebagai perbandingan untuk metode yang berbeda.
3. Sebagai bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan silabus khususnya di jurusan matematika untuk bidang terapan matematika aktuaria.

1.6 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

BAB I : Pendahuluan

Meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II : Kajian pustaka.

Meliputi teori-teori yang berhubungan dengan pembahasan antara lain estimasi parameter, tingkat suku bunga, tingkat suku bunga stokastik, model *Cox Ingersoll Ross*, *Method of Moments, Generalized Method of Moments*.

BAB III : Metode Penelitian

Meliputi pendekatan penelitian, jenis dan sumber data, serta metode analisis.

BAB IV : Pembahasan

Meliputi analisis literatur (teoritis) yang terdiri dari pembahasan proses estimasi parameter model suku bunga *Cox Ingersoll Ross* dengan metode *Generalized Method of Moments* dan mengaplikasikannya pada perhitungan data tingkat suku bunga Bank Indonesia.

BAB V : Penutup.

Berisi kesimpulan dan saran.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Analisis *Time series*

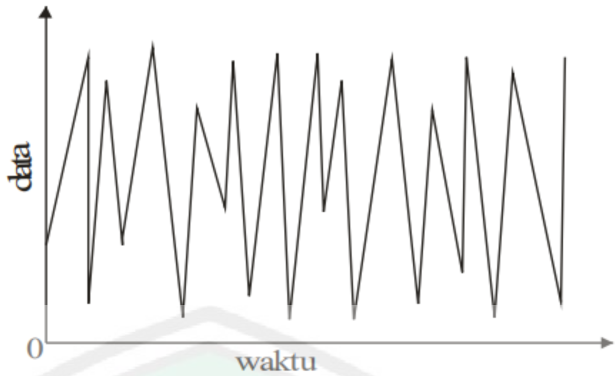
Analisis *time series* merupakan suatu metode yang di gunakan untuk menganalisa data dalam runtun waktu. Data *time series* yang digunakan pada dasarnya harus dalam keadaan stationer. Berikut merupakan beberapa analisis data *time series*:

2.1.1 Stasioneritas Data

Menurut (Makridakis, Wheelwright, & McGEE, 1999), data dikatakan stasioner jika data tidak terdapat perubahan yang drastis. Fluktuasi data berada pada sekitar nilai rata-rata dan variansi yang konstan dan tidak bergantung pada waktu. Plot data *time series* dapat digunakan untuk mengetahui apakah data stasioner ataupun tidak stasioner. Stasioneritas dibagi menjadi dua, yaitu (Wei, 2006):

a. Stasioneritas dalam Rata-Rata

Suatu data *time series* dikatakan stasioner dalam rata-rata jika fluktuasi data berada di sekitar suatu nilai rata-rata yang konstan. Jika data tidak stasioner dalam rata-rata maka dapat dilakukan proses pembedaan (*differencing*).

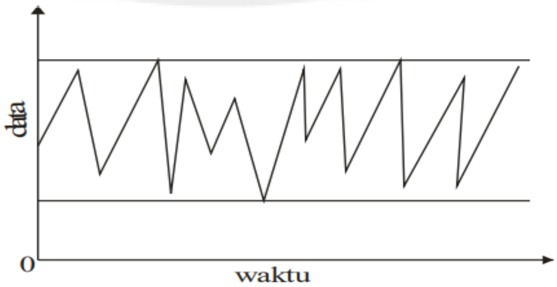


Gambar 2.1 Contoh Plot Data Stasioner dalam Rata-rata dan Variansi

Gambar 2.2 Contoh Plot Data Tidak Stasioner dalam Rata-rata

b. Stasioneritas dalam Variansi

Suatu data *time series* dikatakan stasioner dalam variansi jika fluktuasi datanya konstan atau horizontal terhadap sumbu waktu. Jika data tidak stasioner dalam variansi maka dapat dilakukan proses tranformasi melalui *Box-Cox Tranformation*. Apabila nilai *Rounded Value* mendekati atau sama dengan 1 maka data tersebut sudah stasionerter hadap variansi.



Gambar 2.3 Contoh Pola Data Stasioner dalam Variansi

Stasioneritas data dalam *Multivariate Time Series* dapat dilihat dari uji *Augmented Dickey-Fuller*, skema *Matrix Autocorrelation Function* (MACF), skema *Matrix Partial Autocorrelation Function* (MPACF), *Differencing*, dan plot *Box-Cox Transformation*.

2.1.2 Uji *Augmented Dickey-Fuller* (ADF)

Menurut (Wei, 2006), *Augmented Dickey-Fuller* merupakan salah satu pengujian stasioneritas data yang menentukan apakah data runtun waktu memiliki akar unit (*unit root*) di dalam model atau tidak. Pengujian dilakukan dengan menguji hipotesis $H_0 : \rho = 0$ dalam persamaan regresi sebagai berikut (Rosadi, 2010):

$$Y_t = a + \delta t + \rho Y_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} \phi_j Y_{t-j} + e_t \ ,$$

dimana

Y_t : Variabel pengamatan pada waktu ke-t

α : Nilai konstanta

δ : Nilai parameter regresi untuk *trend*

ρ : Nilai parameter regresi untuk *lag* ke-1

ϕ_j : Nilai parameter regresi untuk *lag* ke-j

e_t : Nilai kesalahan pada waktu ke-t

Uji *Augmented Dickey-Fuller* (ADF) dilakukan dengan tahap pengujian hipotesis yaitu (Wei, 2006):

$H_0 : \phi = 1$ (terdapat *unit root* atau data tidak stasioner dalam model)

$H_1 : \phi < 1$ (tidak terdapat *unit root* atau data stasioner dalam model) dengan statistik uji sebagai berikut:

$$t_{hitung} = \frac{\hat{\phi} - 1}{SE\left(\hat{\phi}\right)}$$

dengan $SE\left(\hat{\phi}\right) = \left[\hat{\sigma}_e^2 \left(\sum_{t=1}^{n} Y_{t-1}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ dan $\hat{\sigma}_e^2 = \sum_{t=1}^{n} \frac{\left(Y_t - \hat{\phi} Y_{t-1}\right)}{(n-1)}$. Kriteria keputusanya itu tolak H_0 jika $\left|t_{hitung}\right| > \left|t_{tabel}\right|$ dengan taraf signifikan $\alpha = 0{,}05$.

2.2 Turunan

Menurut Razali (2010) Turunan merupakan suatu limit unik yang bentuknya adalah sebagai berikut:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Digunakan notasi $f'(x)$ dibaca f aksen x untuk menyatakan turunan yang didefinisikan oleh limit tersebut. Proses penentuan turunan fungsi $f(x)$ disebut pendiferensialan.

2.2.1 Aturan dalam turunan

Adapun aturan-aturan dalam menentukan turunan yaitu diantara:

a. Aturan Fungsi Konstanta

Jika $f(x) = c$ dimana c adalah konstanta, maka untuk sebarang x berlaku $f'(x) = 0$

b. Aturan Pangkat

Jika $f(x) = x^n$ dimana n sebarang bilangan rasional, maka turunannya adalah:

$$f'(x) = n.x^{n-1} \tag{2.1}$$

c. Aturan Jumlah-Selisih

Jika diberikan fungsi $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$ dimana $g'(x)$ dan $h(x)$ terdiferensialkan, maka

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x) \tag{2.2}$$

turunan dari jumlah atau selisih dua fungsi adalah sama dengan jumlah atau selisih dari turunan keduanya. Aturan ini berfungsi pada tiga fungsi atau lebih.

d. Aturan Perkalian

Jika $f(x) = g'(x) \cdot h(x)$ dimana $g'(x)$ dan $h(x)$ dapat diturunkan, maka turunan dari $f(x)$ adalah:

$$f'(x) = g(x) \cdot h(x) + g'(x) \cdot h(x) \tag{2.3}$$

2.2.2 Turunan fungsi eksponensial dan fungsi logaritma

Fungsi eksponensial dan fungsi logaritma dengan basis e $(e \approx\sim 2,71828...$ adalah bilangan natural). Fungsi eksponensial natural e^x adalah yang terpenting begitupun dengan logaritma. Turunan fungsi eksponensial dan logaritma diantaranya:

a. Turunan fungsi eksponensial $y = e^x$

$$\text{jika } f(x) = e^x \text{ maka } f'(x) = e^x \qquad (2.4)$$

b. Turunan fungsi eksponensial $y = e^{g(x)}$

Untuk menentukan fungsi turunan eksponensial yang pangkatnya adalah fungsi *x*, seperti $y = e^{g(x)}$ dimana $g(x)$ adalah fungsi *x* gunakanlah aturan rantai:

$$\text{Jika } y = e^{g(x)} \text{ maka, } \frac{dy}{dx} = e^{g(x)}.g'(x) \qquad (2.5)$$

c. Turunan fungsi eksponensial $y = a^x$

Menentukan turunan fungsi eksponensial dengan basis α dimana $y = \alpha^x$. Disini α adalah sebarang bilangan real yang nilainya lebh besar dari nol dan $a \neq e$.

$$\text{Jika } y = a^x \text{ maka, } \frac{dy}{dx} = a^x.\ln a \qquad (2.6)$$

kemudian

$$\text{Jika } y = a^{g(x)} \text{ maka, } \frac{dy}{dx} = (a^{g(x)} \ln a).g'(x) \qquad (2.7)$$

d. Turunan Fungsi Logaritma $y = \ln x$

Fungsi logaritma $y = \ln x$ adalah loaritma dengan basis bilangan natural e

$$\text{Jika } y = \ln x \text{ maka, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \qquad (2.8)$$

e. Turunan Fungsi Logaritma $y = \ln[g(x)]$

Jika $y = \ln[g(x)]$ maka turunanya adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{g(x)} \cdot g^{'}(x) \tag{2.9}$$

2.3 Persamaan Differensial

Menurut Finizio (1982) persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan-turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Meskipun disebut sebagai "persamaan turunan", namun istilah "persamaan diferensial" (*aequatio differentialis*) telah dikemukakan oleh Leibniz pada tahun 1676. Seperti contoh berikut:

$$y' + xy = 3 \tag{2.10}$$

$$y" + 5y' + 6y \tag{2.11}$$

$$y" = (1 + y^2)(x^2 + y^2) \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{2.13}$$

Contoh (2.10) - (2.12) adalah persamaan-persamaan diferensial. Persamaan tersebut memuat suatu fungsi yang tidak diketahui y dan turunannya terhadap variabel bebas.

2.3.1 Persamaan Diferensial Biasa

Menurut kartono (2012) dengan memperhatikan banyaknya variabel bebas yang terlibat, Persamaan Diferensial Biasa (PDB) apabila ada satu variabel bebas yang terlibat. Bentuk umum PDB adalah

$$F\left(x, y, y', y^{"}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{2.14}$$

Persamaan (2.14) menunjukkan bahwa terdapat hubungan antara variabel bebas x dan variabel terikat y beserta turunan-turunannya dalam bentuk himpunan persamaan yang secara identik sama dengan nol yang menyatakan model matematika dari fenomena perubahan yang terjadi. Sebuah persamaan diferensial disebut mempunyai orde n jika orde turunan tertinggi yang terlibat adalah n, sedangkan jika turunan dengan orde tertinggi itu berderajat k maka persamaan itu dinamakan persamaan diferensial berderajat k.

Contoh persamaan (2.10) - (2.12) fungsi yang tidak diketahui adalah y dan fungsi satu peubah bebasnya adalah x, dengan $y = f(x)$. Argumen x dalam $f(x)$ beserta turunanya biasanya dihilangkan untuk menyederhanakan notasi. Simbol $y' = f'(x)$ menunjukkan turunan pertama dan $y'' = f''(x)$ adalah turunan kedua dan seterusnya. Dikarenakan contoh (2.10) - (2.12) hanya memiliki satu peubah bebas, maka dikatakan PDB (Finizio, 1982).

Menurut Ayres (1992) Diberikan persamaan differensial linier derajat satu sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = P(x) \cdot y = Q(x) \tag{2.15}$$

untuk menyelesaikan PD ini maka dapat digunakan faktor integral. Misalkan faktor integral nya adalah $e^{\int p(x)dx}$ kalikan kedua ruas sehingga didapatkan:

$$\frac{dy}{dx} e^{\int p(x)dx} + P(x)\,y\,e^{\int p(x)dx} = Q(x)e^{\int p(x)dx} \tag{2.16}$$

Jika diambil $ye^{\int p(x)dx}$ kemudian diturunkan kedua ruas maka turunan pertamanya adalah:

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right)=\frac{dy}{dx}e^{\int p(x)dx}+P(x)ye^{\int p(x)dx}$$

Sehingga disubtitusikan kepersamaan (2.6)

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right)=Q(x)e^{\int p(x)dx}$$

Kemudian diintegralkan kedua ruas, sehingga diperoleh:

$$y=e^{-\int p(x)dx}\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+Ce^{\int p(x)dx} \tag{2.17}$$

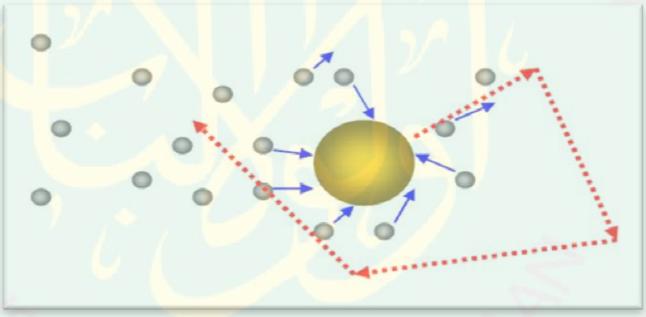
2.4 Stokastik

Pemanfaatan model yang menggunakan probabilitas lebih diminati dibanding model yang deterministik. Pengamatan dilakukan pada saat-saat yang berbeda, tidak dilakukan pada suatu periode waktu tertentu, sehingga menyangkut masalah probabilitas. Banyak fenomena fisika, sosial, teknik dan manajemen saat ini diselidiki merupakan fenomena yang random dengan suatu probabilitas. Proses Stokastik (*Stochastic Processes*) adalah himpunan variabel random yang merupakan fungsi dari "waktu" (*time*). Parameter "waktu" diartikan dalam arti luas. Proses stokastik sering juga disebut Proses Random (*Random Processes*) (Srinadi,2013).

2.4.1 Gerak Brown

Gerak *Brown* adalah gerak acak atau gerak terus-menerus dari partikel saat dimasukkan dalam suatu fluida (cair ataupun gas). Gerak ini dinamakan gerak *Brown* karena yang pertama kali mengamati adalah seorang botanis asal Skotlandia bernama Robert Brown pada tahun 1827. Menggunakan mikroskop, Brown menemukan gejala gerak acak saat mengamati partikel dari serbuk sari ketika dilarutkan dalam air dimana partikel menyebar ke segala arah dengan lintasan yang tidak teratur. Brown kemudian mengambil kesimpulan bahwa lintasan dari gerak partikel sangat tidak teratur dan gerakan akan semakin cepat bila temperatur dinaikkan (Taylor dan Karlin,1998).

Perhatikan gambar sekema dari gerak *Brown* berikut:



Gambar 2.4 Skema Gerak Brown (Ahamadi, 2002)

Gambar 2.4 merupakan skema dari Gerak *Brown*. Misalkan partikel a yang terlihat pada gambar tersebut, bergerak naik kekanan, turun ke kanan, turun ke kiri, dan naik ke kiri yang ditunjukkan dengan anak panah merah secara acak.Hal tersebut menunjukkan partikel-partikel zat cair ataupun gas bergerak terus menerus secara acak atau tidak beraturan.

Setelah Brown, Seorang peneliti bernama Gouy melakukan eksperimen untuk membuktikan keberadaan gerak *Brown* dan mendapatkan kesimpulan sebagai berikut:

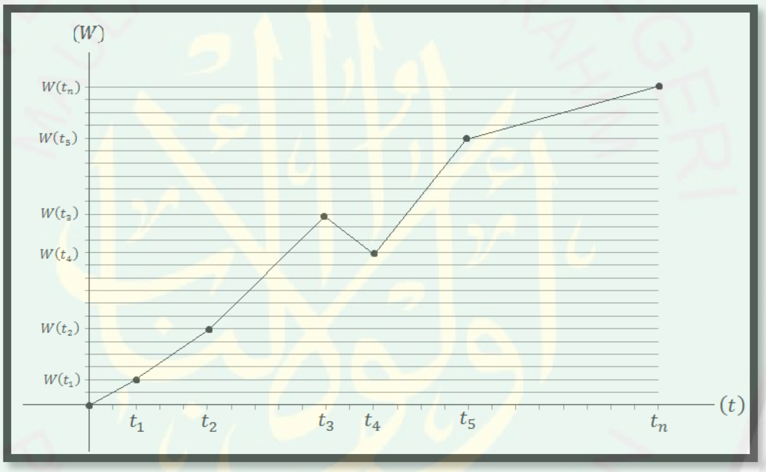
1. Gerakan ini sangat tidak teratur, gabungan dari translasi dan rotasi dan lintasannya nampak tidak mempunyai garis singgung.
2. Dua partikel nampak bergerak secara saling bebas, bahkan ketika mereka mendekati satu sama lain dalam jarak yang lebih dekat dibandingkan diameter mereka.
3. Gerakan ini semakin cepat untuk partikel yang semakin kecil.
4. Gerakan ini tidak dipengaruhi oleh komposisi dan rapatan partikel.
5. Gerakan ini semakin cepat dalam fluida yang viskositasnya semakin kecil.
6. Gerakan ini semakin cepat pada suhu yang semakin tinggi.
7. Gerakan ini tidak pernah berhenti.

Penelitian dari kedua ilmuwan tersebut tidak memberikan penjelasan mengenai penyebab gerak *Brown* namun hanya menyatakan sifat-sifat gerak Brown tersebut. Penjelasan mengenai asal usul gerak *Brown* pertama kali dilakukan oleh Einstein melalui disertasinya. Einstein mengasumsikan bahwa gerak acak dari partikel-partikel serbuk sari tersebut berasal dari tumbukan molekul-molekul penyusun fluida yang bergerak terus-menerus dalam fluida dan pergerakan dari partikel serbuk sari sangat tidak teratur sehingga hanya dapat dijelaskan menggunakan konsep probabilistik (Taylor dan Karlin,1998).

2.4.2 Proses Wiener

Menurut Wiersema (2008) proses *Wiener* adalah bentuk dari proses stokastik pada waktu kontinu, terdefinisi pada ruang keadaan, tidak ada pengaruh gaya luar serta berangkat dari waktu dan posisi 0. Sesuai definisi diatas, proses stokastik $W(t)$ disebut gerak Brown jika memenuhi:

1. $W(t) = 0$ untuk $t = 0$, maka $W(0) = 0$
2. $W(t)$ memiliki kenaikan yang independen, yakni untuk setiap $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n, W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ merupakan kumpulan peubah acak yang independen atau saling bebas.



Gambar 2.5 Grafik Kenaikan yang Independen

Gambar 2.5 terlihat kenaikan yang dimiliki tidak selalu naik, kenaikan yang dimiliki grafik tersebet bersifat independen atau kenaikannya bebas sehingga bisa turun bisa saja naik.

Untuk setiap pergerakan atau kenaikan yang terjadi pada interval waktu dengan panjang $\mathbf{0 \leq t < t + dt}$ hampir semua lintasan sampel dari $\boldsymbol{W(t + dt)} -$

$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{dW}(\boldsymbol{t})$ berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi sama dengan panjang interval waktu tersebut.

2.4.3 Proses Stokastik

Menurut Ross (2010) Sebuah proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ adalah kumpulan variabel acak. Yaitu, untuk setiap $t \in T, X(t)$ adalah variabel acak. t didefinisikan sebagai waktu. $X(t)$ didefinisikan sebagai proses pada waku t. Contoh untuk proses stokastik adalah $X(t)$ merupakan jumlah total pelanggan yang telah memasuki supermarket pada waktu t.

Himpunan T disebut himpunan indeks dari proses. Ketika T adalah himpunan yang dapat dihitung, maka proses stokastik dikatakan sebagai proses diskrit. Contoh, $\{X_n, n = 0,1, \dots\}$ adalah proses stokastik diskrit yang indeksnya oleh bilangan bulat non negatif. Ketika T adalah interval pada garisnya, maka proses stokastik dikatakan sebagai proses waktu kontinu. Contoh $\{X(t), t \geq 0\}$ adalah proses stokastik kontinu yang indeksnya oleh bilangan real non-negatif (Ross, 2010)

Menurut Wiersema (2008) sebuah proses stokastik $\{W(t)\}$ disebut sebagai proses *Wiener* jika memenuhi beberapa syarat, salah satunya yaitu fungsi kepadatan peluang dari variabel random yang berdistribusi normal, dengan rata-rata adalah μ dan variansi σ^2 adalah

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \tag{2.18}$$

Kumpulan dari sebuah proses *Wiener* pada interval $[t, t + dt]$ berdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan variansi sama dengan panjang interval. Fungsi distribusi dari kenaikan tersebut ditulis sebagai berikut:

$$P\left[W(t+dt)-W(t)\le a\right]=\int_{x=-\infty}^{a}\frac{1}{\sqrt{dt}\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{dt}}\right)^{2}\right]dx \qquad (2.19)$$

Kovarians dari proses *Wiener* pada waktu s dan t dimana $s < t$ merupakan nilai harapan dari variabel random tersebut, yaitu:

$$\operatorname{cov}\left[W(s),W(t)\right]=\mathrm{E}\left[\left\{W(s)-\mathrm{E}\left[W(s)\right]\right\}\left\{W(t)-\mathrm{E}\left[W(t)\right]\right\}\right] \qquad (2.20)$$

Jika mengikuti syarat dari proses *Wiener* nilai dari $\mathrm{E}\left[W(s)\right]$ dan $\mathrm{E}\left[W(t)\right]$ adalah 0, sehingga

$$\operatorname{cov}\left[W(s),W(t)\right]=\mathrm{E}\left[W(s)W(t)\right] \qquad (2.21)$$

Dengan sedikit modifikasi pada $W(t)$ maka dapat ditulis:

$$W(t)=W(s)+\left\{W(t)-W(s)\right\} \qquad (2.22)$$

maka

$$\begin{aligned}
E[W(s)W(t)] &= Cov(W(s)W(t)) \\
&= E[W(s)-E(W(s))W(t)-E(W(t))] \\
&= E[W(s)-E(W(s))W(s)+(W(t)-W(s)) \\
&\quad -E(W(s)+(W(t)-W(s))] \\
&= E[W(s)^2+(W(s)W(\mathrm{t})-W(s)^2) \\
&\quad -E(W(s)^2+(W(s)W(\mathrm{t})-W(s)^2) \\
&\quad -E(W(s)^2+E(W(s)W(t)-W(s)^2) \\
&\quad +(E(W(s))^2+E(W(s)W(t)-W(s)^2)] \\
&= E[W(s)^2+(W(s)W(t)-W(s)^2)-0] \\
&= E[W(s)^2+(W(s)W(\mathrm{t})-W(s)^2)]
\end{aligned} \qquad (2.23)$$

Apabila $t \leq s$ maka $E\left[W(s)W(t)\right] = t$ untuk sembarang waktu s dan t sehingga ditulis

$$E\left[W(s)W(t)\right] = \min(s,t) \tag{2.24}$$

2.4.4 Proses Ito

Jenis selanjutnya dari proses stokastik dikenal dengan proses ito. Proses ito adalah proses wiener umum dimana parameter a dan b adalah fungsi-fungsi dari nilai variabel yang bersangkutan *x* dan *t*, yaitu (Hull, 1946) :

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dW(t) \tag{2.25}$$

Baik laju drift maupun laju variansi dari proses ito dapat berubah dari waktu ke waktu. Dalam interval waktu yang kecil antara t dan $t + \Delta t$, variabelnya berubah dari x ke $x + \Delta x$, dimana

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{2.26}$$

Hubungan ini melibatkan perkiraan yang kecil. Diasumsikan bahwa laju drift dan laju variansi *x* tetap konstan, nilai-nilainya sama pada waktu *t*, selama interval waktu antara t dan $t + \Delta t$ (Hull, 1946).

Menurut Øksendal (2000) bentuk umum dari persamaan diferensial stokastik adalah sebagai berikut:

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dWt$$

atau dapat juga ditulis dalam bentuk integral stokastik

$$\int_0^t dX(t) = \int_0^t b(s, X(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))\,dWs$$

$$X(t) - X(0) = \int_0^t b(s, X(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))\,dWs$$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s, X(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))\,dWs$$

Terdapat istilah Ito Isometri dalam matematika, yaitu fakta penting tentang integral stokastik Ito. Salah satu aplikasi utamanya adalah untuk memungkinkan penghitungan varian untuk variabel acak yang diberikan sebagai Ito integral. Terdapat $W: [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ menunjukkan proses *Wiener* bernilai real kanonik yang ditentukan hingga waktu $T > 0$, dan terdapat $X: [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ menjadi proses stokastik yang disesuaikan dengan filtrasi alami dari Proses *Wiener*. Ito Isometri dirumuskan sebagai berikut :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T X(t)\,dW(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T X(t)^2\,dt\right]$$

dimana $\mathbb{E}$ menunjukkan ekspektasi sehubungan dengan ukuran *Wiener* klasik (Øksendal, 2003).

2.5 Analisis Regresi

Analisis regresi merupakan studi kasus yang berkaitan dengan variabel terikat dan satu atau lebih variabel bebas dengan tujuan untuk mengetahui pengaruhnya. Dengan cara memperkirakan atau memprediksi rata-rata suatu populasi dalam pengambilan sampel yang berulang (Gujarati, 2004). Adapun pembagian model regresi menjadi dua yaitu regresi linier dan regresi nonlinier.

2.5.1 Regresi Linier

Bagian ini akan membahas tentang regresi linier dimana terdapat satu variabel terikat ($\boldsymbol{Y}$) dan satu atau lebih variabel bebas ($\boldsymbol{X}$). Dalam model ini digunakan untuk mengetahui pengaruh antara variabel terikat dan variabel bebasnya.Adapun pembagian regresi linier sebagai berikut (Gujarati, 2004):

a. Regresi Linier Sederhana

Regresi yang paling dasar adalah model regresi linier sederhana yang diberikan dalam bentuk sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i \qquad (2.27)$$

dimana:

$\boldsymbol{Y_i}$ = Nilai Variabel terikat priode ke - i

$\boldsymbol{\beta_1}$ = Intersep (titik potong kurva terhadap sumbu Y)

$\boldsymbol{\beta_2}$ = Koefisien kemiringan (*slope*)

$\boldsymbol{X_i}$ = Variabel bebas periode ke- i

$\boldsymbol{u_i}$ = Galat periode ke-i ($\boldsymbol{u_i} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\sigma^2})$)

$\boldsymbol{n}$ = Banyak data penelitian

Untuk $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3} \ldots \boldsymbol{n}$, sehingga diperoleh:

$$\begin{array}{cccc} Y_1 = & \beta_1 & +\beta_2 X_1 & +u_1 \\ Y_2 = & \beta_1 & +\beta_2 X_2 & u_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_n = & \beta_1 & +\beta_2 X_n & u_n \end{array} \qquad (2.28)$$

Kemudian dinotasikan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Dari bentuk matriks tersebut diperoleh bentuk sederhana:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x\beta} + \boldsymbol{u} \tag{2.30}$$

dimana:

$\boldsymbol{y}$ = Vector kolom dari variabel terikat $\boldsymbol{Y}$ $(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{1})$

$\boldsymbol{x}$ = Matriks data dari banyak pengamatan $\boldsymbol{n}$ $(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{2})$

$\boldsymbol{\beta}$ = Vektor kolom dari parameter yang belum diketahui $\boldsymbol{\beta_1}$ sampai $\boldsymbol{\beta_n}$ $(\boldsymbol{2} \times \boldsymbol{1})$

$\boldsymbol{u}$ = Vektor kolom dari *error* $(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{1})$

b. Regresi Linier Berganda

Regresi linier berganda merupakan bentuk persamaan yang digunakan untuk menunjukkan pengaruh antara satu variabel terikat (*Y*) dan satu atau lebihvariabel bebas (*X*). Dengan rumus sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + u_i \tag{2.31}$$

dimana:

$\boldsymbol{Y_i}$ = Variabel terikat peride ke-*i*

$\boldsymbol{\beta_1}$ = *Intersep*

$\boldsymbol{\beta_2}, \ldots . \boldsymbol{\beta_k}$ = Koefisien regresi

$\boldsymbol{X_2}, \ldots . \boldsymbol{X_k}$ = Variabel bebas periode ke-*i*

$\boldsymbol{u_i}$ = Galat periode ke-i ($\boldsymbol{u_i} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\sigma^2})$)

$\boldsymbol{n}$ = Banyak data penelitian

$\boldsymbol{k}$ = Indeks dari variabel bebas

Untuk $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3} \ldots \boldsymbol{n}$, diperoleh:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \ldots + \beta_k X_{k1} + u_1 \\ Y_2 &= \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \ldots + \beta_k X_{k2} + u_2 \\ &\vdots \\ Y_n &= \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \ldots + \beta_k X_{kn} + u_n \end{aligned} \tag{2.32}$$

kemudian dinotasikan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & \vdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

dari bentuk matriks tersebut diperoleh bentuk sederhana:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x\beta} + \boldsymbol{u} \tag{2.34}$$

dimana:

$\boldsymbol{y}$ = Vektor kolom dari variabel terikat Y $(n \times 1)$

$\boldsymbol{x}$ = Matriks data dari banyak pengamatan $\boldsymbol{n}$ pada index $\boldsymbol{k} - \boldsymbol{1}$ pada variabel $\boldsymbol{X_2}$ sampai $\boldsymbol{X_k}$ $(n \times k)$

$\boldsymbol{\beta}$ = Vektor kolom dari parameter yang belum diketahui $\boldsymbol{\beta_1}$ sampai $\boldsymbol{\beta_n}$ $(k \times 1)$

$\boldsymbol{u}$ = Vektor kolom dari *error* $(n \times 1)$

2.5.2 Regresi Non Linier

Pembahasan kali ini mengenai model regresi nonlinier. Terdapat beberapa model yang terlihat seperti nonlinier tetapi dengan cara transformasi model tersebut dapat menjadi bentuk linier. Namun terdapat pula model nonlinier yang tidak dapat dilinierkan model ini disebut model nonlinier intrinsik. Berikut merupakan model nonlinier intrinsik (Gujarati, 2004):

a. Fungsi distribusi logistik

Fungsi ini merupakan model nonlinier yang dapat di transfomasikan dalam bentuk linier dengan trik matematika sederhana. Berikut adalah bentuk persamaan:

$$\ln\left(\frac{1-Y_i}{Y_i}\right) = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

b. *Cobb-douglas* (C-D)

Bentuk dari model ini adalah sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_1 X_{2i}^{\beta 2} X_{3i}^{\beta 3} e^{u_i}$$

atau dapat ditulis dengan:

$$\ln Y_i = \alpha + \beta_2 \ln X_{2i} + \beta_3 \ln X_{3i} + u_i$$

dimana $\alpha = \ln \beta_1$. Dengan format C-D merupakan fungsi linier intrinsik.

Bentuk model C-D selanjutnya:

$$Y_i = \beta_1 X_{2i}^{\beta 2} X_{3i}^{\beta 3} u_i$$

atau dapat ditulis dengan:

$$\ln Y_i = \alpha + \beta_2 \ln X_{2i} + \beta_3 \ln X_{3i} + \ln u_i$$

dimana $\alpha = \ln \beta_1$ pada model ini juga linier parameternya

Dari bentuk model C-D merupakan model regresi linier intrinsik, namun model ini tidak dapat di transformasikan dalam bentuk linier pada parameternya. Sehingga model ini dikatakan bentuk regresi nonlinier intrinsik.

c. Bentuk Eksponensial

Bentuk dari eksponensial adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y_i = \beta_1 e^{\beta_2 X_i} + u_i}$$

Dapat juga ditulis dengan:

1. $\boldsymbol{\ln Y_i = \ln\left(\beta_1 e^{\beta_2 X_i} + u_i\right)}$
2. $\boldsymbol{\ln Y_i = \ln \beta_1 + \beta_2 X_i + \ln u_i}$

Bentuk eskponensial diatas dapat dikatakan linier jika $\boldsymbol{\ln Y_i = y^*}$, $\boldsymbol{\ln \beta_1 = \alpha}$ dan $\boldsymbol{\ln u_i = u^*}$. Sehingga menjadi bentuk:

$$\boldsymbol{y^* = \alpha + \beta_2 X_i + u^*}$$

2.6 Estimasi Parameter

Beberapa penjelasan estimasi akan dibahas pada tahap ini. Pertama akan di jelaskan melalui pengertian estimasi kemudian diikuti dengan penjelasan tentang sifat-sifat estimator. Berikut merupakan penjelasan yang berkaitan dengan estimasi.

2.6.1 Pengertian Estimasi

Penarikan sampel (*sampling*) adalah salah satu konsep paling dasar dalam statistik. Sampel diambil dari suatu kelompok yang lebih besar disebut dengan populasi. Populasi sering dikatakan sebagai himpunan keseluruhan objek. Sedangkan nilai-nilai sampelnya disebut dengan statistik sampel. Estimasi (estimation) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau memperkiraan hubungan parameter populasi yang tidak diketahui berdasarkan informasi dari sampel. Dalam hal ini, peubah acak akan diambil dari populasi yang bersangkutan, jadi dengan estimasi ini keadaan parameter populasi dapat dapat diketahui (Hasan, 2002).

Penduga (*estimator*) adalah suatu statistik (harga sampel) yang digunakan untuk menduga suatu parameter atau dapat juga di sebut dengan alata untuk menduga suatu parameter. Dengan pedugaan dapat diketahui seberapa jauh suatu parameter populasi yang tidak dietahui berada di sekitar sampel (statistik sampel). Secara umum, parameter diberi lambang θ (dibaca: *theta*) dan penduga diberi lambang $\hat{\theta}$ (dibaca: *theta* topi atau *theta* cap). Untuk lebih jelasnya perhatikan tabel berikut ini (Hasan, 2002):

Tabel 2.1 Parameter, Penduga, dan Statistik

Parameter ($\boldsymbol{\theta}$)	**Penduga ($\hat{\boldsymbol{\theta}}$)**	**Statistik**
μ(rata-rata populasi)	$\hat{\mu}$	$\bar{x}$
π (populasi/presentase)	$\hat{\pi}$	ρ
σ^2 (variansi)	$\hat{\sigma}^2$	S^2
σ (simpangan baku)	$\hat{\sigma}$	S
ρ (koefisien korelasi)	$\hat{\rho}$	r
β (koefisien regresi)	$\hat{\beta}$	b

2.6.2 Sifat-Sifat Estimator

Terdapat beberapa sifat untuk menentukan apakah sebuah penduga tergolong baik atau tidak. Suatu penduga dikatakan baik apabila memiliki sifat berikut (Sleeper, 2006):

a. Tak Bias

Estimator tidak bias jika, untuk setiap ukuran sampel n, nilai rata-rata estimator atas semua sampel yang mungkin adalah nilai parameter populasi. Semua estimator adalah jumlah acak. Untuk beberapa sampel, penaksir akan terlalu besar, dan untuk sampel lain, penaksir yang sama akan terlalu kecil. Rata-rata estimator yang tidak bias akan tepat.

Misalkan T adalah statistik sampel, digunakan sebagai penduga untuk parameter populasi θ, jadi $\hat{\theta} = T$. Bias dari estimator T adalah $E[T] - \theta$, yang merupakan nilai rata-rata yang diharapkan dari parameter populasi θ. Estimator T dikatakan tidak bias jika

$$E[T] = \theta.$$

b. Konsisten

Estimator konsisten jika seiring n bertambah besar, penaksir akan mendekati nilai parameter populasi sebenarnya. Jika sampel ukuran tak terbatas dapat dianalisis, penaksir yang konsisten akan memberikan nilai parameter populasi yang tepat, sedangkan penaksir yang tidak konsisten tidak akan memberikan nilai parameter populasi yang tepat.

Misalkan sampel ukuran n dipilih dari suatu populasi. θ menjadi parameter populasi, dan T_n menjadi penaksir θ berdasarkan sampel ukuran n. T_n membentuk urutan penaksir saat n bertambah besar. Urutan estimator T_n dikatakan konsisten jika untuk setiap nilai $a > 0$ (a adalah urutan estimator) untuk setiap kemungkinan θ. $P[|T_n - \theta| > a] \to 0$ dengan $n \to \infty$.

2.6.3 Metode Momen

Metode Momen berasal dari estimasi momen pertama distribusi dengan mengasumsikan distribusi suatu populasi memiliki nilai rata-rata dan variansi sama dengan 1. Metode Momen merupakan salah satu metode yang digunakan untuk memperoleh suatu estimator untuk parameter $\boldsymbol{\beta}$ dengan ide dasar berupa penyamakan antara momen-momen populasi dengan momen-momen sampel (Taurif, 2014).

Menurut Davidson dan Makinnon (1999) Momen pertama dari suatu populasi dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$E(X) = \Sigma x \, p(x) \tag{2.35}$$

Sedangkan momen keduanya dinyatakan dengan menguadratkan nilai X pada persamaan $E(X^2) = \Sigma x^2 \, p(x)$. Selanjutnya nilai variansi dari X dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \tag{2.36}$$

Metode estimasi tertua yang dikenalkan oleh Pearson (1895) adalah Metode Momen. Momen yang dimaksud adalah nilai ekspektasi suatu produk seperti mean, varians, atau median. Metode momen melibatkan penggantian kondisi momen populasi dengan kondisi momen sampel. Kondisi momen populasi didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1 Misalkan $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor parameter $K \times 1$, maka $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\beta_0})$ adalah vektor kondisi momen $R \times 1$ yang didefinisikan sebagai:

$$\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{\beta_0}\right) = E\left[f\left(\boldsymbol{w}_t, z_t, \boldsymbol{\beta_0}\right)\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} f\left(\boldsymbol{w}_t, \boldsymbol{z}_t, \boldsymbol{\beta_0}\right) = 0 \tag{2.37}$$

Dimana $\boldsymbol{w}_t$ merupakan vektor variabel yang terlihat pada model dan $\boldsymbol{z}_t$ adalah vektor instrumen. Dalam sebagian besar aplikasi perbedaan anatara model variabel **(** w_t **)** dan instrumen **(** $\boldsymbol{z}_t$ **)** terlihat jelas.Dapat juga didefinisikan $f\left(y_t, \boldsymbol{\beta_0}\right)$ dimana $\boldsymbol{y}_t$ mencakup semua data yang diamati.

Definisi 2.2 Kondisi momen sampel didefinisikan sebagai berikut:

Untuk memberikan himpunan pengamatan $\boldsymbol{w}_t$ dan $\boldsymbol{z}_t$ ($t = 1, 2, 3, \cdots T$), tidak dapat menghitung nilai ekspektasi .maka fungsi kondisi momen dianalogikan ke dalam fungsi momen sampel.

$$\boldsymbol{g}_T\left(\boldsymbol{\beta}\right) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{w}_t, z_t, \boldsymbol{\beta}\right) \tag{2.38}$$

dengan $\boldsymbol{g}_T\left(\boldsymbol{\beta}\right)$ disebut sebagai fungsi momen sampel. Kondisi momen sampel inilah yang akan digunakan untuk mengestimasi parameter $\boldsymbol{\beta}$.

Dari persamaan (2.38) maka metode momen didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}_T\left(\boldsymbol{\beta}\right) = E\left[z_t, \varepsilon_t\right] &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t, \varepsilon_t = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t\left(\boldsymbol{y}_t - \mathbf{x}_t\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = 0 \\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{z}_t \boldsymbol{y}_t - \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{z}_t \mathbf{x}_t \hat{\boldsymbol{\beta}} = 0\end{aligned}$$

akan diperoleh solusi yang tunggal yaitu:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{z}_t \boldsymbol{x}_t\right)^{-1} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{z}_t \boldsymbol{y}_t = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{MM} \tag{2.39}$$

dengan $\hat{\beta}_{MM}$ disebut *estimator* Metode Momen. Solusi ini identik dengan *estimator Least Square.*

2.6.4 *Generalized method of moments* (GMM)

Generalized Method of Moments (GMM) merupakan metode penaksiran parameter perluasan dari metode momen. Metode momen tidak dapat digunakan apabila banyaknya variable instrument lebih besar dibandingkan dengan jumlah parameter yang akan ditaksir. GMM menyamakan momen kondisi dari populasi dengan momen kondisi dari sampel. Metode GMM merupakan salah satu metode yang dapat mengatasi kondisi data dengan pelanggaran asumsi-asumsi pada analisis regresi. GMM didapat dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat terboboti dari momen kondisi sampel (Taurifdkk, 2014).

Kelebihan menggunakan *Generalized Method of Moments* (GMM) diantaranya :

1. GMM memerlukan syarat suatu distribusi seperti asumsi normalitas.
2. Bentuk heteroskedastisitas apapun yang terjadi pada model masih bisa diaplikasikan.
3. GMM dapat mengestimasi parameter bahkan jika model tidak bisa diselesaikan secara analitis pada turunan pertama dan set variabel instrumen (z_t) dapat disesuaikan.

Asumsi mendasar dari GMM yaitu menformulasikan himpunan dari momen kondisi. Anggap bahwa vektor parameter $\boldsymbol{\beta}$ memuat *p* parameter yang tidak diketahui dan *Data Generating Precess* (DGP) dengan parameter $\boldsymbol{\beta_0}$. Anggap bahwa setiap observasi $(t = 1, \ldots, T)$ DGP memenuhi m momen kondisi yang berbeda, yaitu:

$$E\left[\boldsymbol{g}_t\left(\boldsymbol{\beta_0}\right)\right] = 0.t = 1\ldots..\ T \tag{2.40}$$

Dengan $\boldsymbol{g}_t$ adalah fungsi yang diketahui $\boldsymbol{g}_t\ : R^{-} \rightarrow R^{m}$yang tergantung pada data yang telah diobservasi. Asumsi krusial yakni bahwa DGP memenuhi perbedaan pada (2.37) untuk setiap observasi $t = 1.\ldots.T$. Jika jumlah momen kondisi m sama dengan jumlah parameter yang tidak diketahui *(p)* pada $\boldsymbol{\beta}$, maka persamaan (2.38) disebut *exactly identified*, dan jika $m > p$ maka persamaan (2.38) disebut *over-identified. Estimator* GMM $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ didefinisikan sebagai solusi dari m persamaan yang diperoleh dengan mengganti populasi rata-rata pada (2.29) dengan sampel rata-rata yaitu:

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{g}_T\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = 0 \tag{2.41}$$

Untuk memperoleh solusi dari $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, secara umum perlu diketahui setidaknya ada banyak momen kondisi karena ada parameter yang tidak diketahui $m \geq p$. Pada kasus *exactly identified* (tepat teridentifikasi) yaitu $m = p$, sistem persamaan m ini pada p (parameter yang tidak diketahui) memiliki solusi tunggal (dibawah kondisi yang cocok). Pada kasus *over-identified* $(m > p)$, ada banyak persamaan dari pada parameter yang tidak diketahui dan akan tidak ada atau lebih sulit untuk menemukan solusi eksak untuk sistem persamaan ini (Heij dalam Wahyuni, 2017).

Pada kasus *over-identified* ini, didefinisikan suatu pembobot $\hat{\boldsymbol{w}}$, yaitu suatu matriks simetri berukuran $L \times L$ yang bukan fungsi dari $\boldsymbol{\beta}$ dengan notasi sebagai berikut (Taurif dkk, 2014):

$$\boldsymbol{Q}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \bar{\boldsymbol{g}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)' \hat{\boldsymbol{w}}\bar{\boldsymbol{g}}\hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{2.42}$$

dengan mengacu pada model regresi

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.43}$$

dan diasumsikan model regresi tersebut mengandung variabel instrumen $\boldsymbol{z}$, maka momen kondisi dari sampelnya yaitu:

$$\bar{\boldsymbol{g}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = T^{-1}\left(\boldsymbol{z'y} - \boldsymbol{z'x}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) \tag{2.44}$$

dengan T = jumlah observasi, $\boldsymbol{z}$ = vektor instrumen dan $\boldsymbol{z'}$ Transpos $\boldsymbol{z}$.

Estimasi GMM untuk $\boldsymbol{\beta}$ merupakan suatu estimasi $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ yang meminimumkan fungsi jumlah kuadrat *error* dari data regresi yang berbobot, disimbolkan dengan $\boldsymbol{Q}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) &= \bar{\boldsymbol{g}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)' \hat{\boldsymbol{w}}\bar{\boldsymbol{g}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) \\
&= \left(T^{-1}\left(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)\right)' \hat{\boldsymbol{w}}\left(T^{-1}\left(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)\right) \\
&= \left(T^{-1}\left(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{z} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\right)\right)\left(T^{-1}\left(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)\right)\hat{\boldsymbol{w}} \\
&= \left(T^{-1}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - T^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - T^{-1}\boldsymbol{z}\boldsymbol{y}'\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}} + T^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)
\end{aligned}$$

Karena $T^{-1}\boldsymbol{z}\boldsymbol{y}'\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ berukuran 1×1 atau skalar, dan transposnya

$$\left(T^{-1}\boldsymbol{z}\boldsymbol{y}'\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)' = T^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{y}\boldsymbol{z}'$$

Maka:

$$\boldsymbol{Q}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = T^{-1}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - 2T^{-2}\hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{2.45}$$

Karena yang dicari adalah parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ maka persamaan (2.45) diatas diturunkan terhadap $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{Q}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} &= 0 - 2T^{-2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} + T^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \left(T^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\right)' \\ &= -2T^{-2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} + T^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}} + T^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ &= -2T^{-2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} + 2T^{-2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}\end{aligned}$$

Dengan menyamakan dengan nol diperoleh:

$$\begin{aligned} 0 &= -T^{-2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\mathbf{y} + T^{-2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ 2T^{-2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\mathbf{y} &= 2T^{-2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\mathbf{y} &= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}\end{aligned} \qquad (2.46)$$

inilah yang dinamakan sebagai persamaan normal, dan persamaan (2.46) tersebut dikalikan dengan $\left(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\right)^{-1}$ pada masing-masing ruas sehingga diperoleh:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GMM}} = \left(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\right)^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\mathbf{y} \qquad (2.47)$$

yang disebut sebagai *Generalized Method of Moments Estimator* (Nielsen, 2005).

2.6.5 Two Step GMM

Dalam memperoleh matriks pembobot, dilakukan dengan dua langkah yaitu (chausse, 2010):

1. Persamaan (2.47) dioperasikan dengan $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{I}$ (matriks identitas berukuran $(T \times T)$ untuk mendapat estimator $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ awal

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GMM}} = \left(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\right)^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\mathbf{y} \qquad (2.48)$$

2. Hasil estimasi $\hat{\beta}_0$ pada persamaan (2.48) digunakan kembali untuk menghitung J_0 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} J_0 &= E\left[\bar{g}(\hat{\beta}_0)'\bar{g}(\hat{\beta}_0)\right] \\ &= E\left[T^{-1}(\mathbf{z'y} - \mathbf{z'x}\hat{\boldsymbol{\beta}}_0)'T^{-1}(\mathbf{z'y} - \mathbf{z'x}\hat{\boldsymbol{\beta}}_0)\right] \\ &= T^{-1}E\left[(z'y - z'x\hat{\boldsymbol{\beta}}_0)'(z'y - z'x\hat{\boldsymbol{\beta}}_0)\right] \\ &= T^{-1}E\left[\left(z'(y - x\hat{\boldsymbol{\beta}}_0)\right)'\left(z'(y - x\hat{\boldsymbol{\beta}}_0)\right)\right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

Dengan menggunakan $J_0^{-1} = \hat{w}_1$, diperoleh nilai estimator $\hat{\beta}_1$.

2.7 Tingkat Suku Bunga

Pengertian tingkat suku bunga *(interest rate)* menurut Samuel dan Nordhaus (1995:482) adalah sebagai berikut:

> *"The interest rate is the amount of interest paid per unit of time. In other words, people must pay for the opportunity to borrow money. The cost of borrowing money, measured in dollar per year per dollar borrowed, is the interest rate".*

Menurut Keynes dalam Kuncoro (2001), menyatakan bahwatingkat bunga terjadi karena adanya permintaan dan penawaran akan uang dari masyarakat, sedangkan perubahan naik-turunnya tingkat suku bunga mempengaruhi keinginan untuk mengadakan investasi, misalnya pada surat berharga, dimana harga dapat naik atau turun tergantung pada tingkat bunga (bila tingkat bunga naik maka surat berharga turun dan sebaliknya), sehingga ada kemungkinan pemegang surat berharga akan menderita *capital loss* atau *gain.*

2.7.1 Suku Bunga Stokastik

Sehubungan dengan tingkat suku bunga, selama ini perhitungan premi dilakukan dengan menggunakan suku bunga tetap, sedangkan berdasarkan kenyataan yang ada suku bunga selalu berubah-ubah secara tidak menentu dalam periode tertentu karena berbagai faktor yang memengaruhinya yang disebut sebagai suku bunga stokastik (Zeytun dan Gupta, 2007).

Menurut Hull (1946), terdapat beberapa model suku bunga stokastik, diantaranya yaitu model keseimbangan. Model keseimbangan pada umumnya dimulai dengan asumsi tentang variabel ekonomi dan proses penurunan bunga jangka pendek, r. Model keseimbangan tersebut kemudian dikembangkandan diimplikasikan untuk menentukan harga *bond* dan harga opsi. Pada umumnya proses-proses dengan resiko netral dijelaskan sebagai proses Ito dalam bentuk :

$$dr = m(r)dt + s(r)dW$$

Secara singkat, *drift* m, dan standar deviasi s, diasumsikan menjadi fungsi terhadap r. Persamaan umum tersebut terus dikembangkan, sehingga didapatkan beberapa model suku bunga yaitu :

$m(r) = \kappa(\theta - r); s(r) = \sigma$ (Model Vasicek)

$m(r) = \kappa(\theta - r); s(r) = \sigma\sqrt{r}$ (Model Cox Ingersoll Ross)

2.7.2 Model Cox Ingersoll Ross

Menurut Zeytun dan Gupta (2007), model CIR mengikuti persamaan diferensial stokastik sebagai berikut:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), r(0) = r_0 \quad (2.50)$$

dimana:

r : suku bunga

κ : kelajuan r menuju level θ

θ : level rata-rata (*reversion level*)

σ : suku difusi (simpangan baku sesaat dari r)

$W(t)$: gerak *Brown*

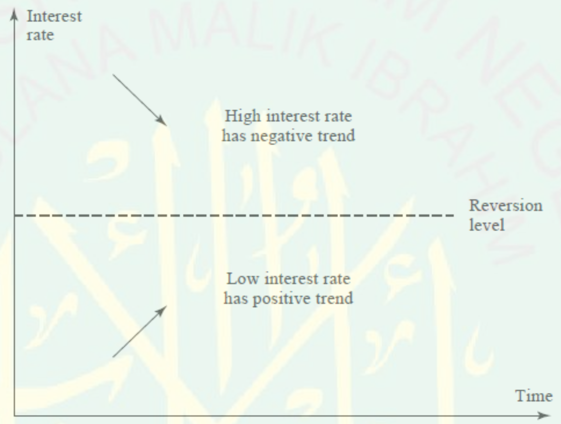
dengan r_0, κ, θ dan σ merupakan konstanta positif.

ketika dalam kondisi $2\kappa\theta > \sigma^2$maka suku bunga selalu positif, sebaliknya hanya bisa menjamin bahwa itu non negatif (dengan probabilitas positif untuk mengakhiri pada nol).

Hal terpenting dari model ini adalah *mean reversion*, yaitu suatu kecenderungan nilai $r(t)$ berada di sekitar level rata-rata. Faktor *drift* model CIR adalah $\kappa\ (\theta\ -\ r\ (t))$. Oleh karena itu, suku bunga jangka pendek adalah *mean reversion* dengan mean jangka panjang θ dan kecepatan *mean reversion* sama dengan κ. Istilah volatilitas σ dikalikan dengan $(r\ (t))$ dan ini dapat menghilangkan kelemahan utama dari model Vasicek yaitu probabilitas positif yang memperoleh suku bunga negatif. Saat suku bunga mendekati nol maka volatilitas $\sigma\sqrt{r\ (t)}$ mendekati nol yang dapat membatalkan pengaruh secara acak, sehingga suku bunga tetap selalu positif. Ketika tingkat bunga tinggi maka volatilitasnya tinggi dan ini adalah sifat yang diinginkan Zeytun dan Gupta (2007).

Sebuah argumentasi ekonomi yang mendukung mengenai *mean reversion* menyatakan bahwa ketika suku bunga tinggi, ekonomi cenderung melambat dan mengakibatkan rendahnya permintaan dana dari peminjam. Oleh karena itu, suku bunga akan ditarik kembali ke nilai keseimbangannya. Sebaliknya, ketika suku bunga rendah, akan terjadi kecenderungan naiknya permintaan dana dari peminjam. Teori *mean reversion* sangat tepat untuk menggambarkan tingkat suku bunga, karena jika tanpa teori tersebut, pergerakan suku bunga dapat meningkat secara permanen seperti halnya harga saham, yang di dalam kehidupan nyata seharusnya tingkat suku bunga bergerak secara tidak permanen (dapat naik ataupun turun dalam periode tertentu) (Zeytun dan Gupta, 2007).

Teori *mean reversion* ditunjukkan pada Gambar 2.6 (Hull, 1946).



Gambar 2.6 *Mean Reversion*

Gambar 2.6 menunjukkan tentang *Mean Reversion*. Apabila suku bunga tinggi, ekonomi cenderung akan melambat. Oleh karena itu suku bunga akan kembali menuju nilai keseimbangannya. Sebaliknya, ketika suku bunga rendah, akan terjadi kecenderungan meningkatnya permintaan dana dari peminjam. Oleh karena itu suku bunga juga akan kembali menuju nilai keseimbangannya.

2.8 Kajian Al-Quran tentang Estimasi

Al-Quran adalah sumber dari segala ilmu, banyak ilmu yang dijelaskan didalamnya. Berikut adalah penjelasan estimasi dari salah satu ayat dalam al-Quran yaitu surat *Az-zumar* ayat 47 yang termasuk jenis surat Makiyah yang diturunkan di Makkah.

Ayat Al-quran yang berkaitan dengan estimasi sebagai berikut:

وَلَوْ أَنَّ لِلَّذِينَ ظَلَمُوا۟ مَا فِى ٱلْأَرْضِ جَمِيعًا وَمِثْلَهُۥ مَعَهُۥ

Dan sekiranya orang-orang yang zalim mempunyai apa yang ada di bumi semuanya dan (ada pula) *sebanyak itu besertanya.*

Yang dimaksud dengan orang yang zalim ialah orang musyrik, yakni seandainya mereka mempunyai semua isi bumi dan kelipatannya.

لَٱفْتَدَوْا۟ بِهِۦ مِن سُوٓءِ ٱلْعَذَابِ يَوْمَ ٱلْقِيَـٰمَةِ

niscaya mereka akan menebus dirinya dengan itu dari siksa yang buruk pada hari kiamat. (Az-Zumar: 47)

yang telah dipastikan oleh Allah buat mereka. Maka tebusan mereka itu sama sekali tidak dapat diterima, meskipun banyaknya adalah emas sepenuh bumi.

وَبَدَا لَهُم مِّنَ ٱللَّهِ مَا لَمْ يَكُونُوا۟ يَحْتَسِبُونَ ٤٧

Dan jelaslah bagi mereka azab dari Allah yang belum pernah mereka perkirakan (*Az-Zumar*: 47).

Yakni tampak jelaslah bagi mereka balasan dan azab dari Allah yang akan ditimpakan kepada mereka, yang selama itu belum pernah terdetik dalam hati mereka dan tidak pula termasuk kedalam perhitungan mereka.

Pada bagian terakhir dari ayat ini berkaitan dengan pedugaan atau estimasi yaitu pada lafazd yang mempunyai arti belum pernah terdetik dalam hati. Maksut dari ayat tersebut adalah tidak pernah terlintas atau mereka perkirakan dalam pikiran maupun hati azab yang akan mereka terima pada hari kiamat esok. Tetapi mereka akan medapat siksa dihari esok dihari kiamat (Bahreisy, 1992).

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Pendekatan Penelitian

Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan literatur dan kuantitatif. Pendekatan literatur digunakan untuk menentukan estimasi parameter dari model CIR menggunakan metode *Generalized Method of Moments* (GMM). Studi kasus digunakan untuk mengimplementasikan model tingkat suku bunga.

3.2 Jenis dan sumber data

Sumber data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder. Data tersebut diambil darihttps://www.bi.go.id/ yang merupakan data tingkat suku bunga Bank Indonesia dari tahun 2013 sampai tahun 2018.

3.3 Metode Analisis

Langkah–langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengestimasi parameter model CIR dengan metode GMM:
    a. Menenentukan solusi rekursif model CIR,
    b. Mengubah persamaan model CIR ke dalam bentuk regresi,
    c. Melakukan pendugaan parameter $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ pada model CIR dengan metode GMM.

2. Melakukan implementasi suku bunga CIR sebagai berikut:
   a. Mengumpulkan data tingkat suku bunga Bank Indonesia tahun 2013 sampai tahun 2018,
   b. Melakukan uji asumsi data yang meliputi deskriptif data, uji normalitas, dan uji stasioneritas,
   c. Melakukan pendugaan parameter model CIR.

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Estimasi Parameter model CIR dengan Metode GMM

4.1.1 Menentukan Solusi Rekursif model CIR

Model CIR pada persamaan (2.50) merupakan persamaan differensial stokastik, sehingga untuk mendapatkan solusi dari persamaan model CIR dituliskan dalam bentuk:

$$dr(t)+\kappa r(t)dt=\kappa\theta dt+\sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \tag{4.1}$$

Langkah pertama untuk menentukan solusi rekursif dilakukan perkalian kedua ruas pada persamaan (4.1) dengan e^{kt} berdasarkan turunan fungsi eksponensial pada persamaan (2.5), sehingga diperoleh:

$$dr(t)e^{kt}+e^{kt}\kappa r(t)dt=e^{kt}\kappa\theta dt+e^{kt}\sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \tag{4.2}$$

Kemudian bedasarkan aturan perkalian turunan pada persamaan (2.3), maka dimisalkan

$$
\begin{aligned}
u &= e^{kt}\\
v &= r(t)\\
du &= k\cdot e^{kt}\\
du &= dr(t)\\
uv &= e^{kt}r(t)
\end{aligned}
$$

Maka diperoleh bentuk turunan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
d(u.v) &= du(v)+u(dv)\\
d\left(e^{kt}r(t)\right) &= ke^{kt}r(t)dt+e^{kt}dr(t)\\
&= dr(t)e^{kt}+e^{kt}kr(t)dt
\end{aligned}
$$

Sehingga pesamaan (4.2) dapat ditulis sebgai berikut

$$d\left(e^{kt}r(t)\right)=e^{kt}\kappa\theta dt+e^{kt}\sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \tag{4.3}$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas dari persamaan (4.3) dengan interval $\left[0,t\right]$ maka didapatkan solusi rekursifnya:

$$\int_0^t d\left(r(t)e^{kt}\right)=\int_0^t e^{kt}\kappa\theta dt+\int_0^t e^{ks}\sigma\sqrt{r(s)}dW(s)$$

$$e^{kt}r(t)-e^{k0}r(0)=\int_0^t e^{kt}\kappa\theta dt+\int_0^t e^{kt}\sigma\sqrt{r(s)}dW(s)$$

$$e^{kt}r(t)=r(0)+\kappa\theta\int_0^t e^{kt}dt+\int_0^t e^{kt}\sigma\sqrt{r(s)}dW(s)$$

$$r(t)=e^{-kt}r(0)+e^{-kt}\kappa\theta\int_0^t e^{kt}dt+\sigma e^{-kt}\int_0^t e^{ks}\sqrt{r(s)}dW(s)$$

$$=e^{-kt}r(0)+\theta\left(1-e^{-kt}\right)+\sigma e^{-k(t-s)}\int_s^t\sqrt{r(s)}dW(s) \tag{4.4}$$

untuk $s\le t$.

4.1.2 Model CIR kedalam Model Regresi

Salah satu cara untuk mengestimasi parameter κ,θ dan σ pada model suku bunga CIR dengan metode GMM. Dengan mediskritisasi model (4.1) dengan metode Euler seperti berikut:

$$y_{i+1}=y_i+y_i^{'\Delta x}$$
$$y_i^{'}=\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}$$

Sehingga diperoleh :

$$dr(t)=\kappa(\theta-r(t))dt+\sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

$$\frac{r(t_{i+1})-r(t_i)}{\Delta t}=\kappa\left(\theta-r\left(t\right)\right)dt+\sigma\sqrt{r\left(t\right)}dW\left(t\right)$$

$$r\left(t_{i+1}\right)-r\left(t_i\right)=\kappa\left(\theta-r\left(t_i\right)\right)\Delta t+\sigma\sqrt{r\left(t_i\right)}\sqrt{\Delta t}Z_i$$

$$r\left(t_{i+1}\right)-r\left(t_i\right)=\kappa\left(\theta-r\left(t_i\right)\right)\Delta t+\sigma\sqrt{r\left(t_i\right)}\Delta W_i \tag{4.5}$$

dimana $i=0,\cdots,n-1$ dan $\Delta W_i=W\left(t_{i+1}\right)-W\left(t_i\right)$, dengan $Z_i\sim N\left(0,1\right)$ persamaan (4.5) dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\frac{r\left(t_{i+1}\right)-r\left(t_i\right)}{\sqrt{r\left(t_i\right)}}=\frac{\kappa}{\sqrt{r\left(t_i\right)}}\left(\theta-r\left(t_i\right)\right)\Delta t+\sigma\Delta W_i$$

$$=\kappa\theta\frac{\Delta t}{\sqrt{r\left(t_i\right)}}-\kappa\sqrt{r\left(t_i\right)}\Delta t+\sigma\Delta W_i$$

$$\frac{r\left(t_{i+1}\right)-r\left(t_i\right)-\kappa\theta\Delta t}{\sqrt{r\left(t_i\right)}}=-\kappa\sqrt{r\left(t_i\right)}\Delta t+\sigma\Delta W_i$$

$$r\left(t_{i+1}\right)-r\left(t_i\right)-\kappa\theta\Delta t=-\kappa r\left(t_i\right)\Delta t+\sigma\Delta W_i$$

$$\kappa r\left(t_i\right)=\frac{-r\left(t_{i+1}\right)+r\left(t_i\right)+\kappa\theta\Delta t}{\Delta t}+\sigma\Delta W_i$$

$$\kappa r\left(t_i\right)=\frac{-r\left(t_{i+1}\right)+r\left(t_i\right)}{\Delta t}+\kappa\theta+\sigma\Delta W_i$$

$$\frac{r\left(t_{i+1}\right)-r\left(t_i\right)}{\Delta t}=-\kappa r\left(t_i\right)+\kappa\theta+\sigma\Delta W_i$$

memisalkan:

$$Y_i=cX_i+d+U_i \tag{4.6}$$

dengan

$$Y_i=\frac{r\left(t_{i+1}\right)-r\left(t_i\right)}{\Delta t}$$

$$X_i=r(t_i)$$

$$c=-\kappa$$

$$d=\kappa\theta$$

$$U_i=\sigma\Delta W_i$$

4.1.3 Model Regresi menjadi Bentuk Matriks

Diasumsikan persamaan (4.6) d bernilai nol dan mengandung variabel Z_i dimana Z_i merupakan sebagian atau keseluruhan variabel independen X_i dan tidak berkorelasi dengan U_i dinyatakan sebagai berikut:

$$Z_i Y_i = Z_i X_i \beta + Z_i U_i, i = 1, 2, 3, \ldots n \tag{4.7}$$

Karena X_i merupakan vektor regresi yang berukuran $k \times 1$ dan diasumsikan bahwa $E(Y_i \mid X_i) = X_i \beta$ dan Z_i tidak berkorelasi dengan U_i maka dapat ditulis $\mathrm{E}\left[Z_i, U_i\right] = 0$, sehingga didapatkan:

$$g(\beta) = E(X_i U_i) = E(Y_i - X_i \hat{\beta}) = 0$$

Dengan kondisi tersebut, didapatkan rata-rata *error* sampel:

$$\begin{aligned}
\bar{g}\left(\hat{\beta}\right) &= n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(Z_i Y_i - Z_i X_i \hat{\beta}\right) \\
&= n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\left(Z_1 Y_1 - Z_1 X_1 \hat{\beta}\right) + \left(Z_2 Y_2 - Z_2 X_2 \hat{\beta}\right) + \cdots + \left(Z_n Y_n - Z_n X_n \hat{\beta}\right)\right) \\
&= n^{-1} \left(\left(Z_1 Y + Z_2 Y_2 + \cdots + Z_n Y_n\right) - \left(Z_1 X_1 + Z_2 X_2 + \cdots + Z_n X_n\right) \hat{\beta}\right)
\end{aligned}$$

Kemudian diubah menjadi bentuk matriks sebagai berikut:

$$\bar{\boldsymbol{g}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = n^{-1}\left(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) \tag{4.8}$$

dengan:

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r_1}} & 1 \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r_2}} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r_{n-1}}} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

Estimasi GMM untuk $\boldsymbol{\beta}$ merupakan suatu estimasi $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ yang meminimumkan fungsi jumlah kuadrat error dari data regresi yang berbobot, disimbolkan dengan $\boldsymbol{Q}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) &= \overline{\boldsymbol{g}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)' \hat{\boldsymbol{w}} \overline{\boldsymbol{g}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) \\ &= \left(n^{-1}\left(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)\right)' \hat{\boldsymbol{w}} \left(n^{-1}\left(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)\right) - \left(n^{-1}\left(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{z} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\right)\right) \hat{\boldsymbol{w}} \left(n^{-1}\left(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)\right) \\ &= \left(n^{-1}\left(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{z} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\right)\right)\left(n^{-1}\left(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)\right) \hat{\boldsymbol{w}} \\ &= \left(n^{-1}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - n^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - n^{-1}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}} + n^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) \end{aligned}$$

Karena $n^{-1}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ berukuran 1 $\times$ 1 atau skalar, dan transposnya

$$\left(n^{-1}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)' = n^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y}$$

Sehingga:

$$\boldsymbol{Q}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)=n^{-1}\boldsymbol{y}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y}-n^{-2}\hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y}+\hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{4.9}$$

Karena yang dicari adalah parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ maka persamaan (4.9) diturunkan terhadap $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{Q}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}} &= 0-n^{-2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y}+n^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}+\left(n^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\right)' \\ &= n^{-2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y}+n^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}+n^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}\end{aligned} \tag{4.10}$$

Menyamakan persamaan (4.10) dengan nol diperoleh:

$$\begin{aligned} 0 &= n^{-2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y}+n^{-2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ n^{-2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} &= n^{-2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GMM}} &= \left(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\right)^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y}\end{aligned} \tag{4.11}$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ pada persamaan (4.11) merupakan hasil estimasi dari metode GMM. Untuk memperoleh parameter κ,θ dan σ digunakan estimasi parameter *c* dan *d* dengan mensubtitusikan kedalam parameter model CIR, maka didapatkan :

$$\kappa=-c \tag{4.12}$$

$$\theta=\frac{d}{\kappa} \tag{4.13}$$

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{\Delta tn}}\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{\sqrt{\Delta tn}}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{4.14}$$

4.2 Implementasi Data pada Model Suku Bunga CIR

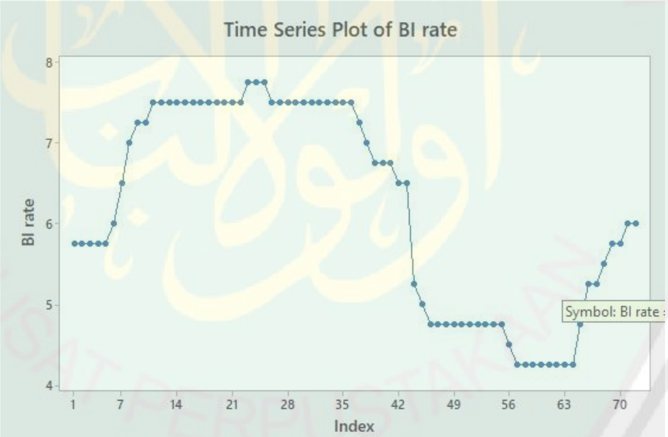
4.2.1 Analisis deskriptif data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data tingkat suku Bank Indonesia mulai dari tahun 2013 sampai tahun 2018 berupa rata-rata dalam tiap bulannya. Banyak data yang diambil sebesar 72 data (Lampiran 1).

Tabel 4.1Statistik Deskriptif data BI rate

Variable	N	Mean	Std.Deviasi	Maximum	Minimum	Variansi
BI rate(X)	72	6,201389	1,269661	7,75	4,25	1,61204

Tabel 4.1 disimpulkan bahwa 72 data BI rate diperoleh rata-rata sebesar 6,201389 Standar deviasi sebesar 1,269661 Standar maximum sebesar 7,75 standar minimum sebesar 4,25 dan variansinya sebesar 1,61204.



Gambar 4.1 *Time series* plot data BI rate

Gambar 4.1 time series plot data BI rate menunjukkan data tidak stasioner pada rata-rata dan variansi. Hal ini terjadi karena terdapat pola trend yang tidak berjalan disekitar rata-rata. Sehingga diperlukan *differencing* untuk menstasionerkan data.

4.2.2 Uji stasioneritas

Identifikasi pertama yang dilakukan adalah untuk melihat stasioneritas dari data dengan memeriksa pola data *time series* dari data pada Gambar 4.1. karena data tidak stasioner maka dilakukan *differencing*. Untuk melihat stasioneritas data dapat dilihat dari nilai ADF sebagi berikut:

Tabel 4.2 Uji ADF data BI rate tahun 2013-2018

Variabel	T-Statistik	T-tabel (α=0,05)	Probabilitas	Keterangan
BI rate	-2,3	-3,5	0,4	Tidak stasioner

Tabel 4.2 pada data BI rate memiliki nilai mutlak dari t-statistik lebih kecil dari nilai t-tabel dimana |2,3|<|3,5| dan niai probabilitas lebih besar dari nilai α=0,05 yaitu 0,4 > 0,05, sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa data BI rate menunjukkan bahwa data tidak stasioner.Karena pada salah satu data tidak stasioner maka dilakukan *differencing* untuk menstasionerkan data. Berikut ini merupakan uji ADF untuk differencing pertama:

Tabel 4.3 Uji ADF data BI rate untuk *differencing* pertama tahun 2013-2018

Variabel	T-Statistik	T-tabel (α=0,05)	Probabilitas	Keterangan
BI rate	-5,5	-3,5	0,0001	Stasioner

Tabel 4.3 menunjukkan data BI rate memiliki nilai mutlak dari *t*-statistik lebih besar dari nilai mutlak t-tabel dimana untuk data BI rate |5,5|>|3,5| dan memiliki nilai probabillitas lebih kecil dari α=0,05. Sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwa BI rate menandakan data yang stasioner.

4.2.3 Uji Normalitas

Uji normalitas dilakukan untuk mengetahui kondisi data statistik dengan teknik statistika non-parametrik. Uji normalitas bertujuan untuk mengetahui data berdistribusi normal atau tidak. Berikut merupakan uji normalitas pada data:

Tabel 4.4 Uji kolmogorov-sminov data BI rate

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Unstandardized Residual
N		72
Normal Parameters[a,b]	Mean	0E-7
	Std. Deviation	1,33927393
Most Extreme Differences	Absolute	,095
	Positive	,079
	Negative	-,095
Kolmogorov-Smirnov Z		,807
Asymp. Sig. (2-tailed)		,533

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Tabel 4.4 terlihat bawa nilai kolmogorov-smirnov pada data BI rate sebesar 0,807 dengan nilai P-value sebesar 0,533 yang lebih besar dari nilai α=0,05, sehingga dapat disimpulkan bahwa data BI rate merupakan data yang berdistribusi normal.

4.2.4 Estimasi Parameter Model CIR dengan Metode GMM

Estimasi parameter model CIR menggunakan metode GMM dapat dilakukan dengan bantuan komputasi. Berikut proses perolehan estimasi parameter:

Diketahui (selengkapnya Lampiran 6):

$$x = \begin{bmatrix} 5,75 \\ 5,75 \\ 5,75 \\ \vdots \\ 6 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,5 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} 5,75 \\ 5,75 \\ 5,75 \\ \vdots \\ 6 \end{bmatrix}$$

dengan $\hat{w}_0 = I$ maka,

$$\hat{\beta} = \left(x' z \hat{w}_0 z' x\right)^{-1} x' z \hat{w}_0 z' y$$
$$= \begin{matrix} -0.0163 \\ 0.1046 \end{matrix}$$

kemudian menghitung pembobot sebagai berikut:

$$J_0 = T^{-1} E\left[\left(z'(y - x\hat{\beta}_0)\right)' \left(z'(y - x\hat{\beta}_0)\right)\right]$$
$$= 2.3971 \times 10^{-28}$$

dimana $\hat{w}_1 = J_0^{-1} = 4.1718 \times 10^{27}$, sehingga

$$\hat{\beta}_1 = \left(x' z \hat{w}_1 z' x\right)^{-1} x' z \hat{w}_1 z' y$$
$$= \begin{matrix} -0.0163 \\ 0.1046 \end{matrix}$$

Dengan demikian diperoleh nilai $c = -0.0163$ dan $d = 0.1046$. Kemudian disubtitusikan pada parameter model CIR pada persamaan (4.12) - (4.14) sehingga diperoleh:

$$\kappa = -c$$
$$= 0.0163$$

$$\theta = \frac{d}{\kappa}$$
$$= 6.4204$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\Delta tn}} \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\Delta tn}} y - x\hat{\beta}$$
$$= 0.2215$$

Sehingga didapatkan model CIR setelah dilakukan estimasi parameter dengan metode GMM pada data BI rate sebagai berikut:

$$dr(t) = 0,0163(6,4204 - r(t))dt + 0,2215\sqrt{r(t)}dW(t)$$

4.2.5 *Forecasting*

Setelah memperoleh hasil estimasi parameter kemudian dilakukan peramalan *(forecasting)* untuk periode selanjutnya. Dalam penelitian ini akan dilakukan peramalan tingkat suku bunga Bank Indonesia untuk tahun 2019-2020.

Tabel 4.5 Data asli BI rate tahun 2018

Tahun	**Bulan**	**BI rate**
2018	Januari	4,25
	Februari	4,25
	Maret	4,25
	April	4,25
	Mei	4,75
	Juni	5,25
	Juli	5,25
	Agustus	5,50
	September	5,75
	Oktober	5,75
	November	6,00
	Desember	6,00

Tabel 4.5 merupakan tabel data asli dari tingkat suku bunga Bank Indonesia dari bulan Januari 2018 sampai bulan Desember 2018. Kemudian dari data asli tingkat suku bunga akan di bandingkan dengan hasil *forecasting* pada tahun 2019 – 2020. Berikut merupakan hasil *forecasting* tingkat suku bunga Bank Indonesia tahu 2019-2020.

Tabel 4. 6 Hasil *Forecasting* data BI rate tahun 2019-2020

Tahun	Bulan	BI rate
2019	Januari	5,85
	Februari	5,7
	Maret	5,57
	April	5,44
	Mei	5,32
	Juni	5,21
	Juli	5,01
	Agustus	4,99
	September	4,89
	Oktober	4,78
	November	4,71
	Desember	4,62
2020	Januari	4,54
	Februari	4,46
	Maret	4,38
	April	4,31
	Mei	4,24
	Juni	4,17
	Juli	4,09
	Agustus	4,03
	September	3,97
	Oktober	3,91
	November	3,85
	Desember	3,79

Tabel 4.6 merupakan hasil forecasting untuk data tingkat suku bunga Bank Indonesia bulan januari 2019 sampai Desember 2020 yang mengalami deflasi. Deflasi terjadi karena kinerja neraca perdagangan Indonesia yang positif dalam beberapa bulan terakhir, laju nilai tukar rupiah cenderung stabil, dan suku bunga turun agar mendorong pertumbuhan ekonomi dalam negeri yang melambat. Pada *forecasting* data tingkat suku bunga Bank Indonesia 2019-2020 tidak jauh berbeda dengan data asli periode sebelumnya.

4.3 Konsep Estimasi dalam Agama

Pendugaan (estimasi) merupakan suatu keterampilan untuk menentukan sesuatu hal tanpa pehitungan secara eksak. Pada BAB II telah disebutkan ayat dalam al-qur'an yang berkaitan tentang estimasi. Surat *Az-zumar* ayat 47 merupakan salah satu ayat dalam al-qur'an yang berkaitan dengan estimasi. Dimana para orang-orang yang *dzalim* tidak dapat meperkirakan hukuman atau balasan setelah hari kiamat.

Disebutkan pula dalam hadist yang diriwayatkan oleh Bukhori tentang masalah estimasi yaitu:

"sesungguhnya Rasulullah SAW memberi keringanan kepada mereka yang mempunyai ariyah untuk menjualnya dengan kira-kira".

Maksud dari hadist tersebut untuk menjual buah berdasarkan takarannya, kaitannya dengan estimasi adalah bahwa buah yang di jual dengan suatu perkiraan yang sudah ditakar atau diukur. Dalam artian penjualan buah dapat diukur dengan harga atau sejumlah buah lainnya dengan perkiraan yang sama atau sesuai.

Salah satu contoh implementasi dari estimasi adalah bidang ekonomi khususnya pada dara tingkat suku bunga Bank Indonesia. Menentukan hasil dari suatu pendugaan juga tidak dapat dipastikan dengan secara tepat akan hasil perhitungan yang telah dilakukan, hanya saja dapat digunakan taksiran atau perkiraan untuk menentukannya. Sama halnya dengan menduga nilai suku bunga pada periode selanjutnya. Untuk mengetahui pendugaan suatu hasil dari suku bunga tersebut digunakanlah proses pendugaan dengan menggunakan data sampel.

Berdasarkan surat *Az-zumar* ayat 47 dapat disimpulkan bahwa kisah dari orang-orang yang *dzalim* yang menjelaskan tentang pendugaan (estimasi) balasan pada hari akhir berhubungan dengan penelitian ini. Diperkuat oleh hadist diatas mengenai penjualan barang dengan perkiraan takaran yang pas atau mendekati nilai yang sama. Hal ini sesuai dengan penelitian ini dimana dalam hasil pendugaan (estimasi) parameter (β) dari data tingkat suku bunga Bank Indonesia pada periode selanjutnya. Pada penelitian ini mengestimasi model CIR menggunakan metode GMM mendapatkan nilai estimasi yang mendekati nilai sebenernya.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada penelitian dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Estimasi parameter model CIR dengan menggunaka metode GMM didaptkan hasil:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{GMM}} = \left(\boldsymbol{x}^{'}\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}^{'}\boldsymbol{x}\right)^{-1}\boldsymbol{x}^{'}\boldsymbol{z}\hat{\boldsymbol{w}}\boldsymbol{z}^{'}\boldsymbol{y}$$

2. Implemetasi model CIR dengan metode GMM pada data BI rate Bank Indonesia dari tahun 2013 sampai tahun 2018 didapatkan model persamaan sebagai berikut:

$$dr(t) = 0,0163(6,4204 - r(t))dt + 0,2215\sqrt{r(t)}dW(t)$$

5.2 Saran

Pada penelitian model CIR digunakan metode GMM sehingga disarankan untuk peneliti selanjutnya menggunakan metode lain untuk mengestimasi parameter model CIR, ataupun dapat menggunakan metode GMM untuk mengestimasi persmaan maupun model lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

Syakir, Abdus. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*.Malang: UIN Press.

Astutik, D. 2013. Estimasi Parameter Model Data panel dinamis dengan Metode Momen Ahn dan Schmidt. *Skripsi tidak dipublikasikan.* Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Ayres, Frank. 1992. Seri Buku Schaum Teori Dan Soal-Soal: Persamaan Diferensial. Jakarta: Erlangga

Bahreisy, Salim. Bahreisy, Said. 1992. *Terjemah Singkat Tafsir Ibnu Katsier Jilid 7*. Surabaya: PT Bina Ilmu.

Boediono. 2014. *Pengantar Ilmu Ekonomi Makro*. Yogyakarta: BPFE.

Brigo D. 2006. Interest Rate Models Theory and Practice, Second Edition. Germany: Springer-Verlag Berlin Heiderbrg.

Budiman, dkk. 2015. *EstimasiParametr Model Cox Ingersoll Ross Pada Tingkat Bunga Bank Indonesia MenggunakanMetode Maximum Likelihood Estimation. Buletin Ilmiah Matmatika Stastika dan Terapannya*.

Chaussé, P. 2010. Computing generalized method of moments and generalized empirical likelihood with R. *Journal of Statistical Software*.

Cox J.C., Ingersoll J.E., and Ross S.A. 1985. *"A Theory of The Term Structure of Interest Rates"*. U.S: Econometrica.

Davidson, R., & MacKinnon, J. G. 1999. *Econometric theory and methods*. New York: Oxford University Press.

Finizio, N dan G. Ladas.1982.*Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.

Gujarati, Damodar N. 2004. *Basic Econometrics*. Fourth edition. Singapore: McGraw-Hill Inc.

Hasan, Iqbal. 2002. *Pokok-pokok Mater Statistik 1 (Statistik Deskripstif).* Jakarta: PT. Bumi Aksara.

Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta: GrahaIlmu.

Kuncoro, Mudrajad. 2001. *Manajemen Keuangan Internasonal*. Yogya: BPFE

Makridakis, S., Wheelwright, S. C., & McGEE, V. E. (1999). *Metode dan Aplikasi Peramalan Jilid 1 Edisi Kedua.* Jakarta: Erlangga.

Mariana, E.Erna, A.&Sentot, D, S. 2015. Estimasi Parameter pada Model Suku Bunga Cox Ingersoll Ross (CIR) Menggunakan Kalman Filter untuk Menentukan Harga Zero Coupon Bond. Surabaya: *Jurnal Sains dan Seni ITS*.

Nielsen, H. B. 2005. *Generalized method of moments estimation*. *Econometrics*: Matej Bel University.

Øksendal B. 2000. *Stochastics Differensial Equation (An Introductions withAppli cations)*. Ed.Ke-5. Germany: Springer Verlag.

Razali, M., Siregar, M.N., Marpaung, F. 2010.*Kalkulus Diferensial*. Bogor: Ghalia Indonesia.

Rosadi, D. (2010). *Analisa Ekonometrika dan Runtun Waktu Terapan dengan R.* Yogyakarta: ANDI.

Ross, Sheldon M. 2010. *Introduction to Probability Models Tenth Edition*. Los Angeles:Academic Press.

Samuel, Paul A., Nordhaus, William D. 1995. *Economics*. 15st edition. McGraw-Hill.

Sleeper, Andrew. 2006. *Design for Six Sigma Statistics*. United States: The McGraw-Hill Compnies, Inc.

Srinadi, I.Gusti, A.2013.*Pengantar Proses Stokastik*. Denpasar: Universias Udayana.

Subagyo, Pangestu. 2010. *Statistika Terapan*. Yogyakarta: BPFE

Sunariyah.2013. *Penghantar Pengetahuan Pasar Modal*. Yogyakarta: UPP-STIM YKPN.

Tandelilin, Eduardus. 2010. P*ortofolio dan Investasi Teori dan Aplikasi*. Edisi pertama. Yogyakarta : Kanisius

Taurif, M. Otok, B. W.& Latra, I. N. 2014. *Estimation of Generalized Method of Moment in Logistic Regression Model*. In Prosiding Seminar Nasional Matematika Unej.

Taylor, H.M., dan S. Karlin. 1998. *An Introduction to Stochastic Modeling*.California:Academic Press.

Teschl, Gerald. 2009.*Ordinary Differential Equations And Dynamical Systems*. Austria: Universitas Wien.

Wahbah, az-Zuhaili.1991. Tafsir al-Munir fi al-`aqidah wa asy-Syar`iah wa al-Manhaj, Suriah Damaskus : Darul Fikri.

Wahyuni, Diah M. 2017. Estimasi Parameter pada *Capital Assets Pricing Model* Menggunakan Metode *Generalized Method of Moments* dalam perhitungan *Value At Risk. Skripsi*. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Wei, W. W. (2006). *Time Series Univariate and Multivariate Methods.* Canada: Addision Wesley Publishing Company, Inc.

Widarjono, Agus. 2013. Ekonometrika: Pengantar dan aplikasinya. Jakarta: Ekonosia.

Wiersema, Ubbo F. 2008. *Brownian Motion Calclus*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Zeytun S., dan Gupta, A. 2007. *A Comparative Study of the Vasicek and the CIR Model of the Short Rate*. Germany: Fraunhofer Institut Techno-und Wirtschaftsmathematik.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Data tingkat suku bunga Bank Indonesia dari tahun 2013 sampai tahun 2018.

Tahun	Bulan	BI Rate
2013	Januari	5,75
	Februari	5,75
	Maret	5,75
	April	5,75
	Mei	5,75
	Juni	6
	Juli	6,5
	Agustus	7
	September	7,25
	Oktober	7,25
	November	7,5
	Desember	7,5
2014	Januari	7,5
	Februari	7,5
	Maret	7,5
	April	7,5
	Mei	7,5
	Juni	7,5
	Juli	7,5
	Agustus	7,5
	September	7,5
	Oktober	7,5
	November	7,75
	Desember	7,75
2015	Januari	7,75
	Februari	7,5
	Maret	7,5
	April	7,5
	Mei	7,5
	Juni	7,5
	Juli	7,5
	Agustus	7,5
	September	7,5

	Oktober	7,5
	November	7,5
	Desember	7,5
2016	Januari	7,25
	Februari	7
	Maret	6,75
	April	6,75
	Mei	6,75
	Juni	6,5
	Juli	6,5
	Agustus	5,25
	September	5
	Oktober	4,75
	November	4,75
	Desember	4,75
2017	Januari	4,75
	Februari	4,75
	Maret	4,75
	April	4,75
	Mei	4,75
	Juni	4,75
	Juli	4,75
	Agustus	4,5
	September	4,25
	Oktober	4,25
	November	4,25
	Desember	4,25
2018	Januari	4,25
	Februari	4,25
	Maret	4,25
	April	4,25
	Mei	4,75
	Juni	5,25
	Juli	5,25
	Agustus	5,5
	September	5,75
	Oktober	5,75
	November	6
	Desember	6

Lampiran 2. Hasil uji normalitas data tingkat suku bunga Bank Indonesia dari tahun 2013 sampai tahun 2018.

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Unstandardized Residual
N		72
Normal Parameters[a,b]	Mean	0E-7
	Std. Deviation	1,33927393
Most Extreme Differences	Absolute	,095
	Positive	,079
	Negative	-,095
Kolmogorov-Smirnov Z		,807
Asymp. Sig. (2-tailed)		,533

a. Test distribution is Normal.

b. Calculated from data.

Lampiran 3. Hasil uji ADF data tingkat suku bunga Bank Indonesia dari tahun 2013 sampai tahun 2018.

Uji ADF sebelum *differencing*

Null Hypothesis: BI_RATE has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=11)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-2.317403	0.4190
Test critical values:	1% level	-4.096614	
	5% level	-3.476275	
	10% level	-3.165610	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Uji ADF setelah *differencing*

Null Hypothesis: D(BI_RATE) has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=11)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-5.471220	0.0001
Test critical values:	1% level	-4.094550	
	5% level	-3.475305	
	10% level	-3.165046	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Lampiran 4. Hasil *Standard Error* data tingkat suku bunga Bank Indonesia dari tahun 2013 sampai tahun 2018 menggunakan SPSS

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,701[a]	,491	,484	1,34881

a. Predictors: (Constant), rate

Lampiran 5. Program GMM dengan MATLAB

```
clc, clear
n=72;
r=xlsread('E:\grendaMATLAB\birate.xls');
display(r)

%Estimasi GMM:
deltat=1;
for t=1:length(r)-1;
    Y(t,1)=((r(t+1)-r(t))/deltat);
end
display(Y)
for t=1: length(r)-1;
    X(t,1)=(r(t));
    X(t,2)=1;
end;
display(X)
Z=X;
display(Z);

%untuk W=I (identitas)
I= ones(1);
BetaGMM=(inv(X'*Z*I*Z'*X))*X'*Z*I*Z'*Y;
B=BetaGMM;
display(B)
Error=Y-X*BetaGMM;
display (Error);

%pembobot W=invj0
j=(1/n^2)*(Z'*Error)'*(Z'*Error);
display(j)
j0=inv(j);
display(j0)
W1=j0;

BetaGMM1=inv(X'*Z*W1*Z'*X)*X'*Z*W1*Z'*Y;
B1=BetaGMM1;
c=BetaGMM1(1,1);
d=BetaGMM1(2,1);
display(B1);
Error=Y-X*BetaGMM;
display (Error);


kappa=-(c);
display(kappa)
Theta=d/kappa;
display(Theta)
sigma=(1/sqrt(deltat*length(r))*norm(Error));
display(sigma)
```

Lampiran 6. Hasil output Estimasi dengan *software* MATLAB

r	Y	X	Z	*error*	j_0^{-1}	β
5.7500	0	5.7500 1.0000	5.7500 1.0000	-0.0109	4.1718×10^{27}	-0.0163
5.7500	0	5.7500 1.0000	5.7500 1.0000	-0.0109		0.1046
5.7500	0	5.7500 1.0000	5.7500 1.0000	-0.0109		
5.7500	0	5.7500 1.0000	5.7500 1.0000	-0.0109		
5.7500	0.2500	5.7500 1.0000	5.7500 1.0000	0.2391		
6.0000	0.5000	6.0000 1.0000	6.0000 1.0000	0.4932		
6.5000	0.5000	6.5000 1.0000	6.5000 1.0000	0.5013		
7.0000	0.2500	7.0000 1.0000	7.0000 1.0000	0.2594		
7.2500	0	7.2500 1.0000	7.2500 1.0000	0.0135		
7.2500	0.2500	7.2500 1.0000	7.2500 1.0000	0.2635		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0.2500	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.2676		
7.7500	0	7.7500 1.0000	7.7500 1.0000	0.0217		
7.7500	0	7.7500 1.0000	7.7500 1.0000	0.0217		
7.7500	-0.2500	7.7500 1.0000	7.7500 1.0000	-0.2283		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	0	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	0.0176		
7.5000	-0.2500	7.5000 1.0000	7.5000 1.0000	-0.2324		
7.2500	-0.2500	7.2500 1.0000	7.2500 1.0000	-0.2365		
7.0000	-0.2500	7.0000 1.0000	7.0000 1.0000	-0.2406		
6.7500	0	6.7500 1.0000	6.7500 1.0000	0.0054		
6.7500	0	6.7500 1.0000	6.7500 1.0000	0.0054		
6.7500	-0.2500	6.7500 1.0000	6.7500 1.0000	-0.2446		
6.5000	0	6.5000 1.0000	6.5000 1.0000	0.0013		
6.5000	-1.2500	6.5000 1.0000	6.5000 1.0000	-1.2487		
5.2500	-0.2500	5.2500 1.0000	5.2500 1.0000	-0.2691		
5.0000	-0.2500	5.0000 1.0000	5.0000 1.0000	-0.2731		
4.7500	0	4.7500 1.0000	4.7500 1.0000	-0.0272		
4.7500	0	4.7500 1.0000	4.7500 1.0000	-0.0272		
4.7500	0	4.7500 1.0000	4.7500 1.0000	-0.0272		
4.7500	0	4.7500 1.0000	4.7500 1.0000	-0.0272		
4.7500	0	4.7500 1.0000	4.7500 1.0000	-0.0272		
4.7500	0	4.7500 1.0000	4.7500 1.0000	-0.0272		
4.7500	0	4.7500 1.0000	4.7500 1.0000	-0.0272		
4.7500	0	4.7500 1.0000	4.7500 1.0000	-0.0272		
4.7500	0	4.7500 1.0000	4.7500 1.0000	-0.0272		
4.7500	-0.2500	4.7500 1.0000	4.7500 1.0000	-0.2772		
4.5000	-0.2500	4.5000 1.0000	4.5000 1.0000	-0.2813		

4.2500	0	4.2500	1.0000	4.2500	1.0000	-0.0354
4.2500	0	4.2500	1.0000	4.2500	1.0000	-0.0354
4.2500	0	4.2500	1.0000	4.2500	1.0000	-0.0354
4.2500	0	4.2500	1.0000	4.2500	1.0000	-0.0354
4.2500	0	4.2500	1.0000	4.2500	1.0000	-0.0354
4.2500	0	4.2500	1.0000	4.2500	1.0000	-0.0354
4.2500	0	4.2500	1.0000	4.2500	1.0000	-0.0354
4.2500	0.5000	4.2500	1.0000	4.2500	1.0000	0.4646
4.7500	0.5000	4.7500	1.0000	4.7500	1.0000	0.4728
5.2500	0	5.2500	1.0000	5.2500	1.0000	-0.0191
5.2500	0.2500	5.2500	1.0000	5.2500	1.0000	0.2309
5.5000	0.2500	5.5000	1.0000	5.5000	1.0000	0.2350
5.7500	0	5.7500	1.0000	5.7500	1.0000	-0.0109
5.7500	0.2500	5.7500	1.0000	5.7500	1.0000	0.2391
6.0000	0	6.0000	1.0000	6.0000	1.0000	-0.0068

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Grenda Ayuning Nurani
NIM : 15610040
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
JudulSkripsi : Estimasi Paremeter Model *Cox Ingersoll Ross* menggunakan Metode *Generalized Method of Moments*

Pembimbing I : Abdul Aziz, M.Si
Pembimbing II : Evawati Alisah, M.Pd

No	Tanggal	Hal	TandaTangan
1.	25 Maret 2019	Konsultasi Bab I & II	1.
2.	01 April 2019	Konsultasi Bab I & II	2.
3.	02 April 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	3.
4.	08 April 2019	Konsultasi Bab I & II	4.
5.	15 April 2019	Konsultasi Bab I & II	5.
6.	29 April 2019	Konsultasi Bab I & II	6.
7.	06 Mei 2019	Konsultasi Bab I & II	7.
8.	09 Mei 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	8.
9.	20 Mei 2019	ACC Bab I & II	9.
10.	18 Juni 2019	Konsultasi Bab III	10.
11.	25 Juni 2019	ACC Kajian Keagamaan	11.
12.	03 Juli 2019	Konsultasi Bab IV	12.
13.	09 Juli 2019	Konsultasi Bab IV	13.
14.	16 Juli 2019	Konsultasi Bab IV	14.
15.	22 Juli 2019	Konsultasi Bab IV	15.
16.	24 Juli 2019	Konsultasi Bab IV	16.
17.	06 Agustus 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	17.
18.	27 November 2019	ACC keseluruhan	18.

Malang, 27 November 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

RIWAYAT HIDUP

Grenda Ayuning Nurani, lahir di Malang pada tanggal 08 Januari 1997, Biasa dipanggil Grenda. Adik dari Lilin Ayu Kholifahana, kakak dari Ayudya Permadani yang merupakan anak kedua dari 3 bersaudara pasangan Bapak Abdul Mukti dan Ibu Endang Sulistyowati.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Raudlatul Ulum Ganjaran, Gondanglegi, Malang dan lulus pada tahun 2009. Setelah itu, dia melanjutkan sekolah di MTs Ulum Ganjaran, Gondanglegi, Malang dan lulus tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di MAN Gondanglegi, Malang dan lulus tahun 2015. Selanjutnya pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang Jurusan Matematika Murni.

Disela-sela kesibukannya menjadi mahasiswa, dia juga mengikuti organisasi intra yakni asisten laboratorium, mengikuti komunitas yang ada di jurusan yakni MEC (Mathematic English Club). Dalam organisasi luar bergabung dengan komunitas BERNAS (Berbagi Nasi Malang).