PENERAPAN METODE TRANSFORMASI DIFFERENSIAL PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN GELOMBANG VIBRASI 1D

SKRIPSI

OLEH
GIMAS NUR MUNAWARO
NIM. 15610026

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

PENERAPAN METODE TRANSFORMASI DIFFERENSIAL PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN GELOMBANG VIBRASI 1D

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Gimas Nur Munawaro
NIM. 15610026

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

PENERAPAN METODE TRANSFORMASI DIFFERENSIAL PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN GELOMBANG VIBRASI 1D

SKRIPSI

Oleh
Gimas Nur Munawaro
NIM. 15610026

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 02 Desember 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Mohammad Jamhuri, M.Si	Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004	NIDT. 19900511 20160801 1 057

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 19650414 200312 1 001

PENERAPAN METODE TRANSFORMASI DIFFERENSIAL PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN GELOMBANG VIBRASI 1D

SKRIPSI

Oleh
Gimas Nur Munawaro
NIM. 15610026

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 19 Desember 2019

Penguji Utama	:	Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd	....
Ketua Penguji	:	Dr. Hairur Rahman, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Mohammad Jamhuri, M.Si	....
Anggota Penguji	:	Muhammad Khudzaifah, M.Si	....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Gimas Nur Munawaro

NIM : 15610026

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penerapan Metode Transformasi Differensial Pada Penyelesaian Persamaan Gelombang Vibrasi 1D

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 02 Desember 2019
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
D5C44AEF977513600
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Gimas Nur Munawaro
NIM.15610026

MOTO

"Fokus pada tujuan yang ingin dicapai"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Ibunda Siti Amnah, ayahanda Dede' Ridwan, dan adik tercinta Ahmad Rado Dwi Appriliansyah yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat, dan kasih sayang yang tak ternilai.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayahNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu *ad-Din al-Islam*.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.
5. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku dosen pembimbing II dan dosen wali yang telah banyak memberikan arahan dan ilmunya kepada penulis.
6. Orang tua serta semua keluarga yang telah memberi dukungan selama ini.

7. Dosen Jurusan Matematika yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
8. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik materiil maupun moril.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karuniaNya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, Desember 2019

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV KESIMPULAN

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Munawaro, Gimas Nur, 2019. **Penerapan Metode Transformasi Diferensial Pada Penyelesaian Persamaan Gelombang Vibrasi 1D**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Mohammad Jamhuri, M.Si. (2) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Kata kunci: Metode Transformasi Diferensial, Persamaan Gelombang Vibrasi 1D

Penelitian ini membahas tentang penyelesaian persamaan gelombang vibrasi 1D yang merupakan persamaan differensial parsial linier menggunakan metode transformasi differensial. Dalam tulisan ini dibahas tentang prosedur penyelesaian persamaan tersebut dengan menggunakan beberapa kondisi awal dan juga diberikan simulasinya. Berdasarkan pembahasan, disimpulkan bahwa tidak semua kondisi awal yang diberikan pada persamaan tersebut menghasilkan solusi analitik yang berbentuk fungsi.

ABSTRACT

Munawaro, Gimas Nur. 2019. **The Application of Transformation Differential Method for Solving 1D Vibration Wave Equation**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (1) Mohammad Jamhuri, M.Si. (2) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Keyword: Differential Transformation Method, 1D Vibration Wave Equation

This study discusses the solution of the 1D vibrational wave equation which is a linear partial differential equation using the differential transformation method. This paper discusses the procedure for solving the equation using some initial conditions and also provides a simulation. Based on the discussion, it was concluded that not all initial conditions given to the equation produce analytic solutions in the form of functions.

ملخص

مُنوّرة، جيماس نور. ٢٠١٩. **تطبيق طريقة التحويل التفاضلي في حل معادلة موجة الاهتزاز D1**. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلومية والتكنولوجية، جامعة مولانا مالك إبراهيم الحكومية الإسلامية مالانج. المشرف: (١) محمد جمهوري، الماجستير (٢) محمد خذيفة، الماجستير.

الكلمات الرئيسية : طريقة التحويل التفاضلي، معادلة موجة الاهتزاز D1

تبحث هذه الدراسة عن حلول من معادلة الموجة الاهتزازية D1 والتي هي معادلة تفاضلية جزئية خطية باستخدام طريقة التحول التفاضلي. تناقش حذا البحث إجراء حل المعادلة باستخدام بعض الشروط الأولية وتوفر أيضًا محاكاة. استنادًا إلى المناقشة ، تم التوصل إلى أن الشروط الأولية التي أعطيت للمعادلة لا تنتج جميعها حلولًا تحليلية في شكل دالة.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Getaran atau vibrasi merupakan gerakan bolak-balik suatu partikel atau suatu benda dari posisi titik kesetimbangan. Gelombang berasal dari suatu getaran-getaran yang merupakan dapat merambat melalui medium. Gelombang dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial secara linier dan nonlinier. Sehingga terdapat persamaan gelombang linier dan persamaan gelombang nonlinier.

Berdasarkan dimensi, persamaan gelombang dibagi menjadi tiga dimensi yakni persamaan gelombang satu dimensi, persamaan gelombang dua dimensi, dan persamaan gelombang tiga dimensi. Contoh dari persamaan differensial linier satu dimensi adalah persamaan gelombang vibrasi 1D.

Persamaan gelombang vibrasi 1D memiliki beberapa jenis persamaan, salah satunya yakni jika terdapat resistensi udara yang disebut r dan memiliki kecepatan yang disebut u_t sehingga persamaan dapat dituliskan $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + r\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ (Straus, 2008).

Adapun untuk mendapatkan solusi atau penyelesaian dari persamaan gelombang vibrasi 1D dapat dilakukan dengan beberapa metode. Salah satu solusi penyelesaian persamaan gelombang vibrasi 1D yakni dengan menggunakan metode transformasi diferensial. Metode transformasi differensial merupakan salah satu metode semi-analitik. Metode transformasi diferensial adalah metode semi analitik yang membentuk deret Taylor dengan cara berbeda. Persamaan diferensial yang diberikan dan kondisi awal ditransformasikan dalam persamaan rekrusif yang kemudian menghasilkan koefisien-koefisien deret pangkat. Metode ini sangat berguna untuk mendapatkan solusi eksak dan solusi pendekatan dari persamaan diferensial linier dan nonlinier tanpa adanya linierisasi atau perturbasi (Al-Sawalha & Noorani, 2009).

Konsep dari transformasi diferensial pertama kali diusulkan oleh Zhou pada tahun 1986 yang diterapkan untuk penyelesaian persamaan linier dan tak linier dengan nilai awal dalam analisis rangkaian listrik. Metode ini membangun teknik semi analitik yang menggunakan deret Taylor untuk solusi persamaan diferensial dalam bentuk polinomial (Khan & dkk, 2012).

Kemudian dari munculnya metode transformasi diferensial tersebut banyak peneliti-peneliti yang menyelesaikan dengan pendekatan analitik mengunakan berbagai jenis persamaan diferensial. Seperti Borhanifar dan Reza (2011) menyelesaikan persamaan nonlinier Schrodinger, Khan dkk (2012) menyelesaikan persamaan Lane-Emden, Mahgoub dan Abdelbagy (2017) menyelesaikan persamaan-persamaan non-linier, Ahmad dkk (2017) menyelesaikan model SIS dan SI Epidemik, dan masih banyak peneliti yang menyelesaikan persamaan differensial menggunakan metode transformasi diferensial.

Konsep gelombang vibrasi dijelaskan dalam al-Qur’an, sebagaimana Allah SWT berfirman dalam surah al-Ankabut/29:37:

فَكَذَّبُوْهُ فَاَخَذَتْهُمُ الرَّجْفَةُ فَاَصْبَحُوْا فِيْ دَارِهِمْ جٰثِمِيْنَ

"*Mereka mendustakannya (Syu'aib), maka mereka ditimpa gempa yang dahsyat, lalu jadilah mereka mayat-mayat yang bergelimpangan ditempat-tempat tinggal mereka"* (Q.S al-Ankabut: 37).

Berdasarkan terjemahan dari ayat al-Ankabut: 37 terdapat kata gempa, yang berarti gempa adalah suatu kejadian alam yang disebabkan oleh kumpulan-kumpulan getaran atau vibrasi. Dari gerakan getaran tersebut dapat berpindah dari posisi seimbang terhadap posisi x dan kecepatan t yang dapat dinotasikan menjadi $u(x,t)$.

Sehingga berdasarkan dari pemaparan latar belakang diatas maka pada penelitian ini, penulis melakukan penelitian yang berjudul penerapan metode transformasi differensial pada penyelesaian persamaan gelombang vibrasi 1D.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian dari latar belakang tersebut, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana penyelesaian persamaan gelombang vibrasi 1D menggunakan metode transformasi diferensial?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang disebutkan maka didapatkan tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui penyelesaian persamaan gelombang vibrasi 1D menggunakan metode transformasi differensial.

1.4. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah dengan mengetahui penyelesaian persamaan gelombang vibrasi 1D, maka dapat dianalisis efektif atau tidaknya metode tersebut.

1.5. Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Persamaan gelombang vibrasi 1D

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

   dimana $r > 0$ dan r meupakan resistensi udara.

2. Kondisi awal umum pada persamaan gelombang vibrasi 1D

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$u_t(x, 0) = 0$$

3. Kondisi awal pertama pada persamaan gelombang vibrasi 1D

$$u(x, 0) = -x^2 + 1$$

$$u_t(x, 0) = 0$$

4. Kondisi awal kedua pada persamaan gelombang vibrasi 1D

$$u(x, 0) = \text{sech}^2(x)$$

$$u_t(x, 0) = 0$$

1.6. Metode Penelitian

Metode yang dilakukan untuk menyelesaikan persamaan gelombang vibrasi 1D adalah sebagai berikut:

1. Mentransformasi persamaan gelombang vibrasi 1D dengan menggunakan teorema-teorema metode transformasi differensial.
2. Mentransformasi kondisi awal dengan menggunakan teorema-teorema metode transformasi differensial. Untuk kondisi awal bentuk $u(x,0)$ ditransformasi ke dalam bentuk $U(k,0)$ dan kondisi awal bentuk $u_t(x,0)$ ditransformasi ke dalam bentuk $U(k,1)$.
3. Melakukan iterasi dan mensubstitusi nilai $U(k,0)$ dan nilai $U(k,1)$ yang diperoleh dari tahap kedua untuk memperoleh nilai $U(k,h)$ yang lain dimana $k = 0,1,2,3,\ldots$ dan $h = 0,1,2,3,\ldots$.
4. Mensubtitusi solusi dalam bentuk deret ke dalam persamaan:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)\, x^k t^h$$

   untuk memperoleh solusi analitik dari persamaan gelombang vibrasi 1D.
5. Menguji keanalitikan dari solusi persamaan gelombang vibrasi 1D.
6. Mensimulasikan solusi persamaan gelombang vibrasi 1D yang didapatkan dengan metode transformasi differensial.

1.7. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan tentang kajian-kajian kepustakaan yang menjadi landasan teori dalam pembahasan terkait persamaan gelombang vibrasi 1D yang diselesaikan menggunakan metode transformasi diferensial.

Bab III Pembahasan

Bab ini menjelaskan tentang hasil dari penelitian yaitu penyelesaian persamaan persamaan gelombang vibrasi 1D yang diselesaikan menggunakan metode transformasi diferensial.

Bab IV Penutup

Bab ini menjelaskan tentang poin-poin dari hasil dan pembahasan secara garis besar berupa kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Deret Taylor

Andaikan f adalah suatu fungsi yang mempunyai turunan dari semua tingkatan pada x_0, maka deret Taylor untuk f di sekitar $x = x_0$ didefinisikan sebagai:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\
&\quad \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \cdots
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Pada kasus tertentu, deret Taylor disebut deret Maclaurin pada saat $x_0 = 0$ yang mana dapat disajikan sebagai

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k \\
&= f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k + \cdots
\end{aligned}
$$

Berikut ini adalah tabel deret Maclaurin dari beberapa fungsi yang umum digunakan dalam proses mencari deret pangkat:

Tabel 2.1 Deret Mclaurin dari Beberapa Fungsi yang Umum Digunakan

Fungsi	Ekspansi Deret
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$
$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$
$\tan^{-1} x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$
$\sinh x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$
$\cosh x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$
$(1+x)^m$	$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} x^k$

(Davis, 2012).

2.1.1 Deret Taylor Dua Variabel

Ekspansi deret Taylor dari fungsi $f(x,t)$ disekitar titik (x_0, t_0) adalah

$$f(x,t) = f(x_0,t_0) + f_t(x_0,t_0)(t-t_0) + f_x(x_0,t_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f_{tt}(x_0,t_0)$$

$$(t-t_0)^2 + f_{xt}(x_0,t_0)(x-x_0)(t-t_0) + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0,t_0)(x-x_0)^2 + \cdots$$

Pada kasus tertentu, ketika $(x_0, t_0) = (0,0)$, deret Taylor dapat menjadi deret Maclaurin seperti berikut:

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}f(x,t)}{\partial x^k \partial t^h}\right]_{x=x_0,t=t_0}(x-x_0)^k(t-t_0)^h$$

$$= f(x,t) + \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}x + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}t + \frac{1}{2!}$$

$$\left[\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}x^2 + \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x \partial t}2xt + \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}t^2\right] + \frac{1}{3!}$$

$$\left[\frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x}x^3 + \frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x^2 \partial t}3x^2t + \frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial x \partial t}3xt^2 + \frac{\partial^3 f(x,t)}{\partial t^3}t^3\right] + \cdots$$

(Primbs, 2014).

2.2 Metode Transformasi Diferensial

Pada tahun 1986, Zhou memperkenalkan suatu metode yang dapat diterapkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial baik linear maupun tak linear, yaitu metode transformasi diferensial. Metode yang menghasilkan pendekatan untuk penyelesaian analitik ini awalnya digunakan untuk menyelesaikan permasalahan nilai awal yang linear dan tak linear pada analisis sirkuit listrik. Metode ini membangun sebuah teknik numerik semi-analitik dengan ide dasar deret Taylor untuk menghasilkan penyelesaian persamaan diferensial dalam bentuk polinom (Khaitzah & dkk, 2015).

Munculnya metode transformasi diferensial telah memotivasi banyak peneliti untuk memecahkan berbagai jenis persamaan diferensial. Chen dan Ho (1996) telah menggunakannya untuk membangun solusi persamaan diferensial parsial sementara sehingga Jang dan Chen (1997) telah menggunakan metode transformasi diferensial untuk memecahkan masalah nilai awal dan batas.

Kemudian, Chen dan Liu (1998) telah mempekerjakan metode ini untuk menemukan solusi dari dua titik nilai batas masalah (Ahmad & dkk, 2017).

2.2.1 Metode Transformasi Diferensial Satu-Dimensi

Definisi 2.1 Jika $u(t) \in \mathbb{R}$ dapat diekspresikan menjadi deret Taylor disekitar titik tetap t_0 maka $u(t)$ dapat ditunjukkan menjadi

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^k u(t_0)}{k!} (t - t_0)^k. \tag{2.3}$$

Jika $U(k)$ didefinisikan sebagai transformasi diferensial dari fungsi $u(t)$

$$U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0}, k = 0,1,2,3, \dots \tag{2.4}$$

Maka persamaan (2.1) menjadi

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)(t - t_0)^k \tag{2.5}$$

yang disebut sebagai invers transformasi diferensial (Borhanifar & Absari, 2011).

Terdapat beberapa teorema yang menunjukkan sifat operasi dasar metode transformasi diferensial. Adapun teorema-teorema tersebut adalah sebagai berikut:

Tabel 2.2 Sifat-sifat Transformasi Diferensial Satu-Dimensi

Sifat 1	Jika $y(x) = g(x) \pm h(x)$, maka $Y(k) = G(k) \pm H(k)$
Sifat 2	Jika $y(x) = \alpha g(x)$, maka $Y(k) = \alpha G(k)$
Sifat 3	Jika $y(x) = \frac{dg(x)}{dx}$, maka $Y(k) = (k+1)G(k+1)$
Sifat 4	Jika $y(x) = \frac{d^2 g(x)}{dx^2}$, maka $Y(k) = (k+1)(k+2)G(k+2)$
Sifat 5	Jika $y(x) = \frac{d^m g(x)}{dx^m}$, maka $Y(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+m)G(k+m)$
Sifat 6	Jika $y(x) = 1$, maka $Y(k) = \delta(k) = \begin{Bmatrix} 1, k=0 \\ 0, k=0 \end{Bmatrix}$
Sifat 7	Jika $y(x) = x$, maka $Y(k) = \delta(k-1) = \begin{Bmatrix} 1, k=0 \\ 0, k\neq 0 \end{Bmatrix}$
Sifat 8	Jika $y(x) = x^m$, maka $Y(k) = \delta(k-m) = \begin{Bmatrix} 1, k=m \\ 0, k\neq m \end{Bmatrix}$
Sifat 9	Jika $y(x) = g(x)h(x)$, maka $Y(k) = \sum_{m=0}^{k} G(m)H(k-m)$
Sifat 10	Jika $y(x) = e^{\lambda x}$, maka $Y(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$ dengan λ adalah konstanta

(Khaitzah & dkk, 2015).

2.2.2 Metode Transformasi Diferensial Dua-Dimensi

Misalnya suatu fungsi dua variabel $u(x,t): R \times R \to R$, dan dianggap bahwa fungsi tersebut dapat disajikan sebagai suatu hasil perkalian dari dua fungsi satu variabel, $u(x,t) = v(x)w(t)$. Berdasarkan sifat-sifat transformasi diferensial satu dimensi, fungsi $u(x,t)$ dapat dinyatakan sebagai

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k,h) x^k t^h, \tag{2.6}$$

di mana $U(k,h)$ merupakan spektrum dari $u(x,t)$ (Soltanahlizadeh, 2011).

Definisi 2.3 Jika $u(x,t)$ analitik dan dapat diturunkan secara kontinu terhadap x dan t di dalam domain yang bersangkutan, maka transformasi diferensial dua dimensi didefinisikan sebagai

$$U(k,h) = \frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h} u(x,t)}{\partial x^k \partial t^h}\right]_{x=x_0,t=t_0} \tag{2.7}$$

di mana $U(k,h)$ adalah fungsi transformasi dan $u(x,t)$ sebagai fungsi aslinya. Invers transformasi diferensial dari $U(k,h)$ didefinisikan sebagai

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)\,(x-x_0)^k (t-t_0)^h \tag{2.8}$$

Dari persamaan (2.7) dan (2.8), diperoleh

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h} u(x,t)}{\partial x^k \partial t^h}\right]_{x=x_0,t=t_0} x^k\, t^h \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h) x^k\, t^h, \end{aligned} \tag{2.9}$$

di mana $x_0 = 0$ dan $t_0 = 0$ (Soltanahlizadeh, 2011).

Persamaan (2.9) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u(x,t) = {} & U(0,0)x^0t^0 + U(1,0)xt^0 + U(0,1)x^0t + U(2,0)x^2t^0 + U(1,1)xt + \\ & U(0,2)x^0t^2 + U(3,0)x^3t^0 + U(2,1)x^2t + U(1,2)xt^2 + U(0,3)x^0t^3 + \\ & U(4,0)x^4t^0 + U(3,1)x^4t + U(2,2)x^2t^2 + U(1,3)xt^3 + U(0,4)x^0t^4 + \\ & U(5,0)x^5t^0 + U(4,1)x^4t^0 + U(3,2)x^3t^2 + U(2,3)x^2t^3 + U(1,4)xt^4 \\ & + U(0,5)x^0t^5 + \cdots \end{aligned}$$

sehingga dapat dikatakan bahwa $U(k,h)$ merupakan koefisien-koefisien dari setiap suku pada deret pangkat. Metode transformasi diferensial bertujuan untuk mencari koefisien-koefisien tersebut, sehingga akan mudah untuk mencari solusi eksak yang merupakan fungsi $u(x,t)$ yang terekspansi dalam bentuk deret pangkat tersebut.

Berikut ini merupakan sifat-sifat dari transformasi diferensial dua dimensi:

Tabel 2.3 *The Fundamental Operations of Two-Dimensional Diferential Transform Method*

Original function	*Transformed function*
$w(x,t) = u(x,t) \pm v(x,t)$	$W(k,h) = U(k,h) \pm V(k,h)$
$w(x,t) = cu(x,t)$	$W(k,h) = cU(k,h)$, c adalah konstan
$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)$	$W(k,h) = (k+1)U(k+1,h)$
$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)$	$W(k,h) = (h+1)U(k,h+1)$
$w(x,t) = \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial t^s} u(x,t)$	$W(k,h) = \frac{(k+r)!\,(h+s)!}{k!\,h!} U(k+r,h+s)$
$w(x,t) = u(x,t)v(x,t)$	$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k} \sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)V(k-r,s)$
$w(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) \frac{\partial}{\partial t} v(x,t)$	$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k} \sum_{s=0}^{h} (k-r+1)(h-s+1)$ $= U(k,h) \rtimes V(k,h) \rtimes Q(k,h)$

(Soltanahlizadeh, 2011).

2.3 Identifikasi Persamaan Gelombang Vibrasi 1D

Persamaan gelombang vibrasi 1D yang digunakan dalam penelitian ini mengutip dari buku yang berjudul "*Partial Differential Equations an Introduction*" edisi kedua yang ditulis oleh Walter A. Straus.

Jenis dari persamaan gelombang vibrasi 1D salah satunya yakni jika terdapat resistensi udara yang disebut r, maka u_t merupakan kecepatan, sehingga:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + r \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad \text{dimana } r > 0 \tag{2.10}$$

c adalah konstanta kecepatan (Strauss, 2008).

2.4 Kajian Islam tentang Gelombang

Firman Allah dalam Ql al-Hud:42 yakni:

وَهِيَ تَجْرِيْ بِهِمْ فِيْ مَوْجٍ كَا لْجِبَا لِ وَنَا دَى نُوْحُ اِبْنَهُ وَكَا نَ فِيْ مَعْزِلٍ يَبُنَيَ ا رْ كَبْ مَّعَنَا وَلاَ تَكُنْ مَعَ

الكَفِرِيْنَ

"Dan bahtera itu berlayar membawa mereka dalam gelombang laksana gunung. Dan Nuh memanggil anaknya, sedang anak itu berada di tempat yang jauh terpencil: "Hai anakku, naiklah (ke kapal) bersama kami dan janganlah kamu berada bersama orang-orang yang kafir".(QS. Al Hud/11:42)

Dalam tafsir Al-Maraghi dijelaskan bahwa bahtera itu berlayar membawa penumpangnya dalam gelombang yang menjulang tinggi, begitu panjang bagai gunung. Bagi orang yang telah berpengalaman dalam pelayaran bergelombang besar ketika digoncangkan oleh angin yang hebat, ia akan tahu bahwa Mubalaghah dalam perumpamaan ini tidaklah jauh berbeda. Karena, kapal dengan keadaan demikian benar-benar tampak seolah turun dalam jurang yang dalam bagai lembah yang sangat dalam yang ada di kanan kirinya tampak bagai gunung besar yang hampir menutupi kapal (Al-Maraghi, 1991).

Namun sebentar kemudian tiba-tiba kapal itu telah berangkat tinggi-tinggi di atas gelombang, seolah dia berada di atas puncak gunung yang sangat tinggi. Sehingga kapal itu hendak roboh karenanya, sedang para kelasi mengikatkan diri masing-masing dengan tambang di atas geladak kapal atau pada dindingnya supaya tidak terlempar oleh gelombang yang meliputi kapal itu (Al-Maraghi, 1991).

Kemudian, Allah menerangkan bahwa Nuh terdorong oleh belas kasih kepada anaknya itu, sebagaimana Allah mengisyaratkan hal itu dengan firman-Nya:

وَنَادَىٰ نُوحٌ ٱبْنَهُۥ وَكَانَ فِى مَعْزِلٍ يَٰبُنَىَّ ٱرْكَب مَّعَنَا وَلَا تَكُن مَّعَ ٱلْكَٰفِرِينَ

Nuh memanggil-manggil anaknya ketika ia telah naik di dalam kapal, sebelum ia berlayar membawa penumpangnya. Waktu itu, anaknya berada di tempat terpencil, jauh dari ayah dan saudara-saudaranya yang lain, satu orang-orang yang beriman kepada Nuh. Lalu berkatalah Nuh, "Wahai anakku, naiklah bersama kami ke dalam kapal, dan janganlah kamu bergabung dengan orang-orang kafir yang telah mendapatkan keputusan untuk dibinasakan" (Al Maraghi,1991).

Dalam tafsir (Ibnu Katsier, 1988) Allah SWT berfirman menceritakan tatkala Nuh berkata kepada mereka yang diikutsertakan dalam bahteranya, "Naiklah kamu sekalian ke dalamnya dengan menyebut nama Allah (Bismillahi) di waktu berlayar di atas permukaan air dan di waktu berlayar diatas permukaan air dan di waktu berlabuh pada akhir pelayarannya.

Allah berfirman menceritakan bagaimana Nuh telah memanggil putranya yang keempat, bernama Yaam, dan yang kafir, agar ia beriman dan turun naik ke dalam bahteranya, supaya selamat tidak tenggelam bersama orang kafir. Akan tetapi anaknya yang keras kepala itu enggan mengikuti ayahnya dan menjawab ayahnya dengan kata-kata, "Aku akan mencari perlindungan ke gunung yang dapat menyelamatkan aku dari air bah." Ia mengira bahwa air bah tidak akan mencapai puncak gunung yang tinggi, namun ayahnya menegaskan kepadanya bahwa tiada sesuatu yang akan dapat melindunginya pada hari itu dari bencana air bah yang telah ditimpahkan oleh Allah kepada orang-orang yang kafir selain rahmat Allah belakalah. Percakapan Nuh dengan anaknya segera terputus dengan datangnya gelombang yang menjadi penghalang dan tenggelamlah anak itu (Bahreisy, 1988).

Berdasarkan penjelasan dari beberapa tafsir, gelombang air laut yang dijelaskan merupakan gelombang air laut yang sangat tinggi. Nabi Nuh dan penumpangnya berlayar dengan gelombang air laut yang menjulang tinggi dan sangat panjang bagai gunung. Kapal Nabi Nuh diikatkan pada dinding batu agar tidak terlempar oleh gelombang air laut tersebut.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai langkah-langkah penyelesaian persamaan gelombang vibrasi 1D menggunakan metode transformasi diferensial. Pada subbab 3.1 menjelaskan penyelesaian persamaan gelombang vibrasi 1D dengan kondisi awal $u(x,0) = f(x)$. Kemudian pada subab 3.1.1 dan 3.1.2 diberikan beberapa contoh kondisi awal yang lain untuk diterapkan pada persamaan gelombang vibrasi 1D.

3.1. Penerapan Metode Transformasi Diferensial pada Penyelesaian Persamaan Gelombang Vibrasi 1D

Persamaan gelombang vibrasi 1D adalah:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + r\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 \tag{3.1}$$

dengan diberikan kondisi awal adalah

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u_t(x,0) = 0$$

Tahap pertama

Mentransformasi persamaan (3.1) menggunakan teorema-teorema transformasi diferensial. Berdasarkan definisi transformasi diferensial, apabila $u(x,t)$ adalah fungsi asli, $U(k,h)$ adalah fungsi transformasi dimana definisi transformasi diferensial dua dimensi terdapat pada persamaan (2.7).

Adapun akan dibuktikan bahwa fungsi transformasi dari fungsi asli $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ adalah $(h+1)U(k,h+1)$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}u(x,t)}{\partial x^k \partial t^h}\right]_{x=x_0,t=t_0}(x-x_0)^k(t-t_0)^h\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}u(x,t)}{\partial x^k \partial t^h}\right]_{x=x_0,t=t_0}(x-x_0)^k\frac{\partial}{\partial t}(t-t_0)^h$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}h\,\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}u(x,t)}{\partial x^k \partial t^h}\right]_{x=x_0,t=t_0}(x-x_0)^k(t-t_0)^{h-1}$$

$$= 0 + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty}h\,\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}u(x,t)}{\partial x^k \partial t^h}\right]_{x=x_0,t=t_0}(x-x_0)^k(t-t_0)^{h-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(h+1)\frac{1}{k!\,(h+1)!}\left[\frac{\partial^{k+(h+1)}u(x,t)}{\partial x^k \partial t^{h+1}}\right]_{x=x_0,t=t_0}(x-x_0)^k(t-t_0)^h$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(h+1)U(k,h+1)(x-x_0)^k(t-t_0)^h$$

Maka terbukti bahwa fungsi transformasi dari $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ adalah $(h+1)U(k,h+1)$.

Kemudian akan dibuktikan bahwa fungsi transformasi dari $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ adalah $(h+1)(h+2)U(k,h+2)$:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}u(x,t)}{\partial x^k \partial t^h}\right]_{x=x_0,t=t_0}(x-x_0)^k(t-t_0)^h\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}u(x,t)}{\partial x^k \partial t^h}\right]_{x=x_0,t=t_0}(x-x_0)^k\frac{\partial^2}{\partial t^2}(t-t_0)^h$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}h\,\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+(h+1)}u(x,t)}{\partial x^k \partial t^{h+1}}\right]_{x=x_0,t=t_0}(x-x_0)^k(t-t_0)^{h-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=2}^{\infty}(h-1)\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+(h+2)}u(x,t)}{\partial x^k \partial t^{h+2}}\right]_{x=x_0,t=t_0}(x-x_0)^k\,(t-t_0)^{h-2}$$

$$= 0 + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=2}^{\infty}(h-1)\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+(h+2)}u(x,t)}{\partial x^k \partial t^{h+2}}\right]_{x=x_0,t=t_0}(x-x_0)^k\,(t-t_0)^{h-2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(h+2)\,\frac{1}{k!\,(h+2)!}\left[\frac{\partial^{k+(h+2)}u(x,t)}{\partial x^k \partial t^{h+2}}\right]_{x=x_0,t=t_0}(x-x_0)^k(t-t_0)^h$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(h+1)(h+2)\,U(k,h+2)\,(x-x_0)^k(t-t_0)^h$$

Maka terbukti bahwa fungsi transformasi dari $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$ adalah $(h+1)(h+2)U(k,h+2)$.

Selanjutnya untuk fungsi transformasi dari $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ adalah $(k+1)(k+2)U(k+2,h)$:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}u(x,t)}{\partial x^k \partial t^h}\right]_{x=x_0,t=t_0}(x-x_0)^k(t-t_0)^h\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}u(x,t)}{\partial x^k \partial t^h}\right]_{x=x_0,t=t_0}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x-x_0)^k(t-t_0)^h$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}k\,\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{(k+1)+h}u(x,t)}{\partial x^{k+1} \partial t^h}\right]_{x=x_0,t=t_0}(x-x_0)^{k-1}(t-t_0)^h$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=2}^{\infty}(k-1)\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{(k+2)+h}u(x,t)}{\partial x^{k+2} \partial t^h}\right]_{x=x_0,t=t_0}(x-x_0)^{k-2}\,(t-t_0)^h$$

$$= 0 + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(k-1)\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{(k+2)+h}u(x,t)}{\partial x^{k+2} \partial t^h}\right]_{x=x_0,t=t_0}(x-x_0)^{k-2}\,(t-t_0)^h$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(k+2)\,\frac{1}{(k+2)!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+(h+2)}u(x,t)}{\partial x^k \partial t^{h+2}}\right]_{x=x_0,t=t_0}(x-x_0)^k(t-t_0)^h$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(k+1)(k+2)\,U(k+2,h)\,(x-x_0)^k(t-t_0)^h$$

Maka terbukti bahwa fungsi transformasi dari $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ adalah $(k+1)(k+2)U(k+2,h)$.

Tabel 3.1 Transformasi Persamaan Gelombang Vibrasi 1D

Fungsi Asli	**Fungsi Transformasi**
$u(x,t)$	$U(k,h)$
$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$	$(h+1)U(k,h+1)$
$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$	$(h+1)(h+2)U(k,h+2)$
$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$	$(k+1)(k+2)U(k+2,h)$

Kemudian fungsi-fungsi transformasi disubtitusi ke persamaan (3.1) maka diperoleh:

$$(h+1)(h+2)U(k,h+2) - c^2(k+1)(k+2)U(k+2,h) + r(h+1)U(k,h+1) = 0$$

Sehingga dapat dinyatakan:

$$U(k,h+2) = \frac{c^2(k+1)(k+2)U(k+2,h) - r(h+1)U(k,h+1)}{(h+1)(h+2)} \quad (3.2)$$

Persamaan (3.2) digunakan untuk mengiterasi pada tahap ketiga.

Tahap kedua

Mentransformasi kondisi awal $u(x,0) = f(x)$ ke dalam bentuk $U(k,0)$ dan kondisi awal $u_t(x,0) = 0$ ke dalam bentuk $U(k,1)$ menggunakan definisi metode transformasi diferensial pada persamaan (2.5).

Kondisi awal $u(x,0) = f(x)$ ditransformasi ke dalam bentuk $U(k,0)$:

$$U(k,0) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}(f(x))\right]_{x=0}, k = 0,1,2,3,\ldots$$

Selanjutnya untuk kondisi awal $u_t(x,0) = 0$ ditransformasi ke dalam bentuk $U(k,1)$ dengan menggunakan hasil fungsi transformasi $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ pada tabel (3.1), diperoleh:

$$u_t(x,0) = 0$$

$$(h+1)U(k,h+1) = 0$$

$$(0+1)U(k,0+1) = 0$$

$$U(k,1) = 0$$

Sehingga nilai $U(k,1) = 0$ dimana untuk $k = 0,1,2,3,\ldots$

Tahap Ketiga

Melakukan iterasi dengan menggunakan persamaan (3.2) dan mensubstitusi nilai $U(k,0)$ dan nilai $U(k,1)$ yang diperoleh dari tahap kedua untuk memperoleh nilai $U(k,h)$ yang lain dimana $k = 0,1,2,3,\ldots$ dan $h = 0,1,2,3,\ldots$.

Untuk $h = 0$ dan $k = 0,1,2,3,\ldots$ diperoleh:

$$U(0,2) = \frac{c^2(1)(2)U(2,0) - r(1)U(0,1)}{(1)(2)}$$

dimana untuk nilai $U(2,0)$ didapatkan melalui hasil transformasi $U(k,0)$ yakni

$$U(2,0) = \left[\frac{f''(x)}{2}\right]_{x=0}$$

dan untuk nilai $U(0,1)$ didapatkan melalui hasil transformasi $U(k,1)$ yang mana $k = 1$ maka diperoleh $U(0,1) = 0$. Sehingga nilai dari $U(0,2)$ diperoleh:

$$U(0,2) = \frac{c^2(1)(2)\left(\left[\frac{f''(x)}{2!}\right]_{x=0}\right) - r(1)(0)}{(1)(2)} = \left[\frac{1}{2}c^2 f''(x)\right]_{x=0}$$

Selanjutnya nilai $U(1,2)$ diperoleh

$$U(1,2) = \frac{c^2(2)(3)U(3,0) - r(1)U(1,1)}{(1)(2)}$$

dimana untuk nilai $U(3,0)$ didapatkan melalui hasil transformasi $U(k,0)$ yang mana untuk nilai $k = 3$ maka diperoleh

$$U(3,0) = \left[\frac{f^{(3)}(x)}{3!}\right]_{x=0}$$

Dan untuk nilai $U(0,1)$ didapatkan melalui hasil transformasi $U(k,1)$ maka nilai $U(1,1) = 0$. Sehingga nilai dari $U(1,2)$ diperoleh:

$$U(1,2) = \frac{c^2(2)(3)\left(\left[\frac{f^{(3)}(x)}{3!}\right]_{x=0}\right) - r(1)(0)}{(1)(2)} = \left[\frac{1}{2}c^2 f^{(3)}(x)\right]_{x=0}$$

Perhitungan diatas juga berlaku untuk mendapatkan nilai $U(k,h)$ yang lain.

$$U(2,2) = \frac{c^2(3)(4)U(4,0) - r(1)U(2,1)}{(1)(2)} = \left[\frac{1}{4}c^2 f^{(4)}(x)\right]_{x=0}$$

$$U(3,2) = \frac{c^2(4)(5)U(5,0) - r(1)U(3,1)}{(1)(2)} = \left[\frac{1}{12}c^2 f^{(5)}(x)\right]_{x=0}$$

$$U(4,2) = \frac{c^2(5)(6)U(6,0) - r(1)U(4,1)}{(1)(2)} = \left[\frac{1}{48}c^2 f^{(6)}(x)\right]_{x=0}$$

$\vdots$

Untuk $h = 1$ dan $k = 0,1,2,3,\ldots$

$$U(0,3) = \frac{c^2(1)(2)U(2,1) - r(2)U(0,2)}{(2)(3)} = \left[-\frac{1}{6}c^2 r f''(x)\right]_{x=0}$$

$$U(1,3) = \frac{c^2(2)(3)U(3,1) - r(2)U(1,2)}{(2)(3)} = \left[-\frac{1}{6}c^2 r f^{(3)}(x)\right]_{x=0}$$

$$U(2,3) = \frac{c^2(3)(4)U(4,1) - r(2)U(2,2)}{(2)(3)} = \left[-\frac{1}{12}c^2 r f^{4}(x)\right]_{x=0}$$

$\vdots$

Tabel 3.2 Tabel Hasil Iterasi Metode Transformasi Differensial dengan Kondisi Awal $u(x,0) = f(x)$ dan $u_t(x,0) = 0$

$\boldsymbol{U(k,h)}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	…
0	$f(x)$	0	$\frac{1}{2}c^2f''(x)$	$-\frac{1}{6}c^2rf''(x)$	$\frac{1}{24}c^4f^{(4)}(x)$ $+\frac{1}{24}c^2r^2f''(x)$	$-\frac{1}{60}c^4rf^{(4)}(x)$ $-\frac{1}{120}c^2r^3f''(x)$	
1	$f'(x)$	0	$\frac{1}{2}c^2f^{(3)}(x)$	$-\frac{1}{6}c^2rf^{(3)}(x)$	$\frac{1}{24}c^4f^{(5)}(x)$ $+\frac{1}{24}c^2r^2f^{(3)}(x)$	$-\frac{1}{60}c^4rf^{(5)}(x)$ $-\frac{1}{120}c^2r^3f^{(3)}(x)$	
2	$\frac{f''(x)}{2!}$	0	$\frac{1}{4}c^2f^{(4)}(x)$	$-\frac{1}{12}c^2rf^{(4)}(x)$	$\frac{1}{48}c^4f^{(6)}(x)$ $+\frac{1}{48}c^2r^2f^{(4)}(x)$	$-\frac{1}{120}c^4rf^{(6)}(x)$ $-\frac{1}{240}c^2r^3f^{(4)}(x)$	
3	$\frac{f^{(3)}(x)}{3!}$	0	$\frac{1}{12}c^2f^{(5)}(x)$	$-\frac{1}{36}c^2rf^{(5)}(x)$	$\frac{1}{144}c^4f^{(7)}(x)$ $+\frac{1}{144}c^2r^2f^{(5)}(x)$	$-\frac{1}{360}c^4rf^{(7)}(x)$ $-\frac{1}{720}c^2r^3f^{(5)}(x)$	
4	$\frac{f^{(4)}(x)}{4!}$	0	$\frac{1}{48}c^2f^{(6)}(x)$	$-\frac{1}{144}c^2rf^{(6)}(x)$	$\frac{1}{576}c^4f^{(8)}(x)$ $+\frac{1}{576}c^2r^2f^{(6)}(x)$	$-\frac{1}{1440}c^4rf^{(8)}(x)$ $-\frac{1}{2880}c^2r^3f^{(6)}(x)$	
5	$\frac{f^{(5)}(x)}{5!}$	0	$\frac{1}{240}c^2f^{(7)}(x)$	$-\frac{1}{720}c^2rf^{(7)}(x)$	$\frac{1}{2880}c^4f^{(9)}(x)$ $+\frac{1}{2880}c^2r^2f^{(7)}(x)$	$-\frac{1}{7200}c^4rf^{(9)}(x)$ $-\frac{1}{14400}c^2r^3f^{(7)}(x)$	
⋮							

Tahap keempat

Mensubtitusi nilai $U(k,h)$ kedalam persamaan:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)\, x^k t^h$$

untuk mendapatkan solusi penyelesaian dari persamaan gelombang vibrasi 1D diperoleh:

$$u(x,t) = U(0,0)x^0t^0 + U(1,0)xt^0 + U(0,1)x^0t + U(2,0)x^2t^0 + U(1,1)xt + U(0,2)x^0t^2 + U(3,0)x^3t^0 + U(2,1)x^2t + U(1,2)xt^2 + U(0,3)x^0t^3 + \cdots$$

$$u(x,t) = f(x) + \frac{1}{2}c^2f''(x)t^2 - \frac{1}{6}c^2rf''(x)t^3 + \tag{3.3}$$

$$\left(\frac{1}{24}c^4f^{(4)}(x)+\frac{1}{24}c^2r^2f''(x)\right)t^4+$$

$$\left(-\frac{1}{60}c^4rf^{(4)}(x)-\frac{1}{120}c^2r^3f''(x)\right)t^5+$$

$$f'(x)+\frac{1}{2}c^2f^{(3)}(x)t^2-\frac{1}{6}c^2rf^{(3)}(x)t^3+\cdots$$

Persamaan (3.3) dapat dituliskan menjadi

$$\begin{aligned}
u(x,t) = t^0 & \left[f(x)+f'(x)x+\frac{f''(x)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(x)}{6}x^3+\cdots\right]+ \\
& t^2\left[\frac{1}{2}c^2f''(x)+\frac{1}{2}c^2f^{(3)}(x)x+\frac{1}{4}c^2f^{(4)}(x)x^2+\frac{1}{12}c^2f^5(x)x^3 \right. \\
& \qquad \left. +\cdots\right]+ \\
& t^3\left[-\frac{1}{6}c^2rf^2(x)-\frac{1}{6}c^2rf^3(x)x-\frac{1}{12}c^2rf^4(x)x^2-\frac{1}{36}c^2rf^5(x)x^3 \right. \\
& \qquad \left. +\cdots\right]+ \\
& t^4\left[\left(\frac{1}{24}c^4f^4(x)+\frac{1}{24}c^2r^2f^2(x)\right)+\left(\frac{1}{24}c^4f^5(x)+\frac{1}{24}c^2r^2f^3(x)\right)x \right. \\
& \qquad +\left(\frac{1}{48}c^4f^6(x)+\frac{1}{48}c^2r^2f^4(x)\right)x^2 \\
& \qquad \left. +\left(\frac{1}{144}c^4f^7(x)+\frac{1}{144}c^2r^2f^5(x)\right)x^3+\cdots\right]+ \\
& t^5\left[\left(-\frac{1}{60}c^4rf^4(x)-\frac{1}{120}c^2r^3f^2(x)\right) \right. \\
& \qquad +\left(-\frac{1}{60}c^4rf^5(x)-\frac{1}{120}c^2r^3f^3(x)\right)x \\
& \qquad +\left(-\frac{1}{120}c^4rf^6(x)-\frac{1}{240}c^2r^3f^4(x)\right)x^2 \\
& \qquad \left. +\left(-\frac{1}{360}c^4rf^7(x)-\frac{1}{720}c^2r^3f^5(x)\right)x^3+\cdots\right]+\cdots
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Misalkan persamaan (3.4) adalah a, maka

$$u(x,t)=a \tag{3.5}$$

Sehingga persamaan (3.5) merupakan solusi pendekatan analitik dari persamaan gelombang vibrasi 1D yang berbentuk deret polinomial dengan menggunakan metode transformasi differensial.

3.1.1 Penerapan Metode Transformasi Differensial pada Penyelesaian Persamaan Gelombang Vibrasi 1D dengan Kondisi Awal Pertama

Persamaan gelombang vibrasi 1D adalah:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + r \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 \tag{3.6}$$

dengan diberikan kondisi awal pertama adalah

$$u(x,0) = -x^2 + 1$$

$$u_t(x,0) = 0$$

Tahap pertama

Mentransformasi persamaan (3.6) menggunakan teorema-teorema transformasi differensial. Berdasarkan definisi transformasi diferensial, apabila $u(x,t)$ adalah fungsi asli, $U(k,h)$ adalah fungsi transformasi dimana definisi transformasi diferensial dua dimensi terdapat pada persamaan (2.7).

Tabel 3.3 Transformasi Persamaan Gelombang Vibrasi 1D

Fungsi Asli	Fungsi Transformasi
$u(x,t)$	$U(k,h)$
$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$	$(h+1)U(k,h+1)$
$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$	$(h+1)(h+2)U(k,h+2)$
$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$	$(k+1)(k+2)U(k+2,h)$

Kemudian fungsi-fungsi transformasi disubtitusi ke persamaan (3.6) maka diperoleh:

$$(h+1)(h+2)U(k,h+2) - c^2(k+1)(k+2)U(k+2,h) + r(h+1)U(k,h+1) = 0$$

Sehingga dapat dinyatakan:

$$U(k,h+2) = \frac{c^2(k+1)(k+2)U(k+2,h) - r(h+1)U(k,h+1)}{(h+1)(h+2)} \tag{3.7}$$

Persamaan (3.7) digunakan untuk mengiterasi pada tahap ketiga.

Tahap kedua

Mentransformasi kondisi awal $u(x,0) = -x^2 + 1$ kedalam bentuk $U(k,0)$ dan kondisi awal $u_t(x,0) = 0$ ke dalam bentuk $U(k,1)$ menggunakan definisi metode transformasi diferensial pada persamaan (2.5).

Kondisi awal $u(x,0) = -x^2 + 1$ ditransformasi kedalam bentuk $U(k,0)$:

$$U(k,0) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}(-x^2+1)\right]_{x=0}, k = 0,1,2,3,\ldots$$

Sehingga didapatkan nilai

$$U(0,0) = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{dx^0}(-x^2+1)\right]_{x=0} = 1$$

$$U(1,0) = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{dx}(-x^2+1)\right]_{x=0} = 0$$

$$U(2,0) = \frac{1}{2!}\left[\frac{d}{dx}(-x^2+1)\right]_{x=0} = -1$$

$\vdots$

Selanjutnya untuk kondisi awal $u_t(x,0) = 0$ ditransformasi kedalam bentuk $U(k,1)$ dengan menggunakan hasil fungsi transformasi $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ pada tabel (3.1), diperoleh:

$$u_t(x,0) = 0$$

$$(h+1)U(k,h+1) = 0$$

$$(0+1)U(k,0+1) = 0$$

$$U(k,1) = 0$$

Sehingga nilai $U(k,1) = 0$ untuk $= 0,1,2,3,\ldots$.

Tahap ketiga

Melakukan iterasi dengan menggunakan persamaan (3.7) dan mensubstitusi nilai $U(k,0)$ dan nilai $U(k,1)$ yang diperoleh dari tahap kedua untuk memperoleh nilai $U(k,h)$ yang lain dimana $k = 0,1,2,3,\dots$ dan $h = 0,1,2,3,\dots$.

Untuk $h = 0$ dan $k = 0,1,2,3,\dots$ diperoleh:

$$U(0,2) = \frac{c^2(1)(2)U(2,0) - r(1)U(0,1)}{(1)(2)}$$

dimana untuk nilai $U(2,0)$ didapatkan melalui hasil transformasi $U(k,0)$ yakni $U(2,0) = -1$ dan untuk nilai $U(0,1)$ didapatkan melalui hasil transformasi $U(k,1)$ maka nilai $U(0,1) = 0$. Maka nilai dari $U(0,2)$ diperoleh

$$U(0,2) = \frac{c^2(1)(2)(-1) - r(1)(0)}{(1)(2)} = -c^2$$

Selanjutnya nilai $U(1,2)$ adalah

$$U(1,2) = \frac{c^2(2)(3)U(3,0) - r(1)U(1,1)}{(1)(2)}$$

dimana untuk nilai $U(3,0)$ didapatkan melalui hasil transformasi $U(k,0)$ yang mana untuk nilai $k = 3$ maka hasil $U(3,0) = 0$. Dan untuk nilai $U(0,1)$ didapatkan melalui hasil transformasi $U(k,1)$ maka nilai $U(1,1) = 0$. Sehingga nilai dari $U(1,2)$ diperoleh

$$U(1,2) = \frac{c^2(1)(2)(0) - r(1)(0)}{(1)(2)} = 0$$

Perhitungan diatas juga berlaku untuk mendapatkan nilai $U(k,h)$ yang lain.

$$U(2,2) = \frac{c^2(3)(4)U(4,0) - r(1)U(2,1)}{(1)(2)} = 0$$

$\vdots$

Untuk $h = 1$ dan $k = 0,1,2,3,\dots,N$:

$$U(0,3) = \frac{c^2(1)(2)U(2,1) - r(2)U(0,2)}{(2)(3)} = \frac{1}{3}c^2r$$

$$U(1,3)=\frac{c^2(2)(3)U(3,1)-r(2)U(1,2)}{(2)(3)}=0$$

$$U(2,3)=\frac{c^2(3)(4)U(4,1)-r(2)U(2,2)}{(2)(3)}=0$$

$$U(3,3)=\frac{c^2(4)(5)U(5,1)-r(2)U(3,2)}{(2)(3)}=0$$

$$U(4,3)=\frac{c^2(5)(6)U(6,1)-r(2)U(4,2)}{(2)(3)}=0$$

$$U(5,3)=\frac{c^2(6)(7)U(7,1)-r(2)U(5,2)}{(2)(3)}=0$$

$\vdots$

Hasil nilai $U(k,h)$ dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 3.4 Hasil Iterasi Metode Transformasi Differensial dengan Kondisi Awal $u(x,0)=-x^2+1$ dan $u_t(x,0)=0$

$U(k,h)$	0	1	2	3	4	5	...
0	1	0	$-c^2$	$\frac{1}{3}c^2r$	$-\frac{1}{12}c^2r^2$	$\frac{1}{60}c^2r^3$	
1	0	0	0	0	0	0	
2	-1	0	0	0	0	0	
3	0	0	0	0	0	0	
4	0	0	0	0	0	0	
5	0	0	0	0	0	0	
$\vdots$							

Tahap keempat

Mensubtitusi nilai $U(k,h)$ kedalam persamaan:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)\,x^k t^h$$

untuk memperoleh solusi dari persamaan gelombang vibrasi 1D yang terdapat resistensi udara:

$$u(x,t) = U(0,0)x^0t^0 + U(1,0)xt^0 + U(0,1)x^0t + U(2,0)x^2t^0 + U(1,1)xt + U(0,2)x^0t^2 + U(3,0)x^3t^0 + U(2,1)x^2t + U(1,2)xt^2 + U(0,3)x^0t^3 + U(4,0)x^4t^0 + U(3,1)x^4t + U(2,2)x^2t^2 + U(1,3)xt^3 + U(0,4)x^0t^4 + U(5,0)x^5t^0 + U(4,1)x^4t^0 + U(3,2)x^3t^2 + U(2,3)x^2t^3 + U(1,4)xt^4 + U(0,5)x^0t^5 + \cdots$$

$$u(x,t) = 1 - x^2 - c^2t^2 + \frac{1}{3}c^2rt^3 - \frac{1}{12}c^2r^2t^4 + \frac{1}{60}c^2r^3t^5 + \cdots \quad (3.8)$$

Persamaan (3.8) dapat dituliskan menjadi

$$u(x,t) = 1 - x^2 + 2c^2\left[-\frac{t^2}{2!} + r\frac{t^3}{3!} - r^2\frac{t^4}{4!} + r^3\frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}r^{n-2}\frac{t^n}{n!} + \cdots\right] \quad (3.9)$$

Misalkan

$$f(t) = -\frac{t^2}{2!} + r\frac{t^3}{3!} - r^2\frac{t^4}{4!} + r^3\frac{t^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1}r^{n-2}\frac{t^n}{n!} + \cdots$$

atau

$$f(t) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}r^{n-2}\frac{t^n}{n!} \quad (3.10)$$

Jika kedua ruas dari persamaan (3.10) dikalikan dengan (-1) diperoleh

$$-f(t) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}r^{n-2}\frac{t^n}{n!} \quad (3.11)$$

Kemudian persamaan (3.11) dikalikan dengan r^2 diperoleh

$$-r^2f(t) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}r^{n}\frac{t^n}{n!}$$

atau

$$-r^2f(t) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-rt)^n}{n!} \quad (3.12)$$

Mengingat deret Taylor dari

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

maka ruas kanan dari persamaan (3.12) akan dibawa kedalam bentuk deret Taylor diatas. Pada kedua ruas dari persamaan (3.12) ditambahkan dengan $(1 - rt)$ sehingga diperoleh

$$1 - rt - r^2 f(t) = 1 - rt + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-rt)^n}{n!}$$

atau

$$1 - rt - r^2 f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-rt)^n}{n!} \tag{3.13}$$

Sederhanakan persamaan (3.13) menjadi

$$1 - rt - r^2 f(t) = e^{-rt}$$

dan berikutnya

$$-r^2 f(t) = e^{-rt} + rt - 1$$

$$f(t) = \frac{e^{-rt} + rt - 1}{-r^2}$$

atau

$$f(t) = \frac{1 - rt - e^{-rt}}{r^2}$$

Selanjutnya mensubstitusikan $f(t)$ pada persamaan (3.9) diperoleh

$$u(x,t) = 1 - x^2 + 2c^2 \left(\frac{1 - rt - e^{-rt}}{r^2} \right) \tag{3.14}$$

Sehingga persamaan (3.14) merupakan solusi analitik dari persamaan (3.6).

Tahap Kelima

Membuktikan persamaan (3.14) yang mana merupakan solusi analitik dari persamaan (3.6) diperoleh. Pembuktian dilakukan dengan mensubsitusi persamaan (3.14) ke dalam persamaan (3.6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(1 - x^2 + 2c^2\left(\frac{1 - rt - e^{-rt}}{r^2}\right)\right) -$$

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(1 - x^2 + 2c^2\left(\frac{1 - rt - e^{-rt}}{r^2}\right)\right) +$$

$$r\frac{\partial u}{\partial t}\left(1 - x^2 + 2c^2\left(\frac{1 - rt - e^{-rt}}{r^2}\right)\right)$$

$$= -2c^2e^{-rt} - c^2(-2) + r\left(2c^2\left(\frac{-r + re^{rt}}{r^2}\right)\right)$$

$$= 0$$

Terbukti bahwa persamaan (3.14) merupakan solusi dari persamaan (3.6). Selanjutnya akan dibuktikan bahwa (3.14) memenuhi kondisi awal pertama dan untuk $t = 0$, diperoleh

$$u(x,t) = 1 - x^2 + 2c^2\left(\frac{1 - rt - e^{-rt}}{r^2}\right)$$

$$u(x,0) = 1 - x^2 + 2c^2\left(\frac{1 - r(0) - e^{-r(0)}}{r^2}\right)$$

$$= -x^2 + 1$$

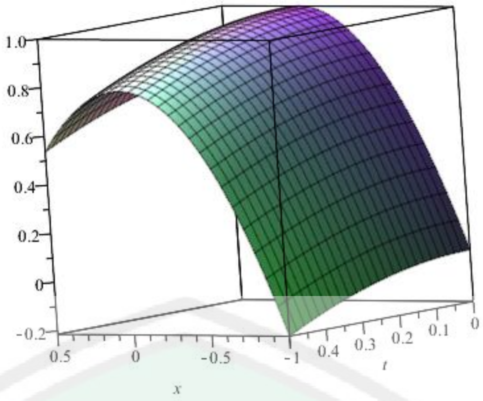
$$u_t(x,0) = 2c^2\left(\frac{-r + re^{r(0)}}{r^2}\right)$$

$$= 0$$

Terbukti bahwa persamaan (3.14) memenuhi kondisi awal pertama pada persamaan (3.6).

Tahap Keenam

Mensimulasikan solusi persamaan gelombang vibrasi 1D menggunakan metode transformasi differensial. Plot dari persamaan (3.14) dengan $c = 1$ dan $r = 1$ sebagai berikut:



Gambar 3.1 Simulasi persamaan (3.14) dengan $-1 < x < 5$ dan $0 < t < 5$

Dari hasil simulasi diatas ketika kondisi awal $u(x,0) = -x^2 + 1$ dan $u_t(x,0) = 0$ puncak tinggi gelombang tertinggi yakni didapatkan 1.0.

3.1.2 Penerapan Metode Transformasi Diferensial pada Penyelesaian Persamaan Gelombang Vibrasi 1D dengan Kondisi Awal Kedua

Persamaan gelombang vibrasi 1D adalah:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + r \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 \tag{3.15}$$

dan diberikan kondisi awal pertama yakni

$$u(x,0) = \operatorname{sech}^2(x)$$

$$u_t(x,0) = 0$$

Tahap pertama

Mentransformasi persamaan (3.15) menggunakan teorema-teorema transformasi diferensial. Berdasarkan definisi transformasi diferensial, apabila $u(x,t)$ adalah fungsi asli, maka $U(k,h)$ adalah fungsi transformasi yang mana definisi transformasi diferensial dua dimensi terdapat pada persamaan (2.7).

Tabel 3.5 Transformasi Persamaan Gelombang Vibrasi 1D

Fungsi Asli	Fungsi Transformasi
$u(x,t)$	$U(k,h)$
$\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$	$(h+1)U(k,h+1)$
$\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$	$(h+1)(h+2)U(k,h+2)$
$\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$	$(k+1)(k+2)U(k+2,h)$

Kemudian fungsi-fungsi transformasi disubtitusi ke persamaan (3.15) maka diperoleh:

$$(h+1)(h+2)U(k,h+2) - c^2(k+1)(k+2)U(k+2,h) + r(h+1)U(k,h+1) = 0$$

Sehingga dapat dinyatakan:

$$U(k,h+2) = \frac{c^2(k+1)(k+2)U(k+2,h) - r(h+1)U(k,h+1)}{(h+1)(h+2)} \qquad (3.16)$$

Persamaan (3.16) digunakan untuk mengiterasi pada tahap ketiga.

Tahap kedua

Mentransformasi kondisi awal $u(x,0) = \text{sech}^2(x)$ kedalam bentuk $U(k,0)$ dan kondisi awal $u_t(x,0) = 0$ ke dalam bentuk $U(k,1)$ menggunakan teorema-teorema metode transformasi differensial pada persamaan (2.5).

Kondisi awal $u(x,0) = \text{sech}^2(x)$ ditransformasi kedalam bentuk $U(k,0)$:

$$U(k,0) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\text{sech}^2(x)\right]_{x=0}, k = 0,1,2,3, \dots$$

untuk menentukan nilai dari $\left[\frac{d^k}{dx^k}\text{sech}^2(x)\right]_{x=0}$ dapat menggunakan deret Taylor, diperoleh:

$$\text{sech}^2(x) = \text{sech}^2(x) + \frac{x}{1!}\left[\frac{d}{dx}\text{sech}^2(x)\right]_{x=0} + \frac{x^2}{2!}\left[\frac{d^2}{dx^2}\text{sech}^2(x)\right]_{x=0} +$$

$$\frac{x^3}{3!}\left[\frac{d^3}{dx^3}\operatorname{sech}^2(x)\right]_{x=0} + \frac{x^4}{4!}\left[\frac{d^4}{dx^4}\operatorname{sech}^2(x)\right]_{x=0} +$$

$$\frac{x^5}{5!}\left[\frac{d^5}{dx^5}\operatorname{sech}^2(x)\right]_{x=0} + \frac{x^6}{6!}\left[\frac{d^6}{dx^6}\operatorname{sech}^2(x)\right]_{x=0} +$$

$$\frac{x^7}{7!}\left[\frac{d^7}{dx^7}\operatorname{sech}^2(x)\right]_{x=0} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} - \frac{272x^6}{6!} + \cdots \quad (3.17)$$

Persamaan (3.17) dapat ditulis menggunakan deret Maclaurin diperoleh

$$\operatorname{sech}^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)(2n-1)B_{2n}x^{2n-2}}{(2n)!}$$

Maka diperoleh hasil transformasi diferensial berikut:

$$U(k,0) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\operatorname{sech}^2(x)\right]_{x=0}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2^{2+k}(2^{2+k}-1)B_{2+k}}{(2+k)k!} & ; k = 0,2,4,6,\ldots \\ 0 & ; k = 1,3,5,7,\ldots \end{cases}$$

Untuk B_{2+k} merupakan *Bernoulli Number*.

Angka B_n, mewakili koefisien dari $\frac{t^n}{n!}$ Dalam suatu fungsi ekspansi

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \quad [0 < |t| < 2\pi]$$

disebut *Bernoulli Number*. Dengan demikian, fungsi $\frac{t}{e^t-1}$ merupakan angka Bernoulli (Arakawa & dkk, 2014).

Berikut merupakan tabel bilangan Bernoulli:

Tabel 3.6 *Bernoulli Numbers*

n	0	1	2	4	6	...
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	
$\frac{B_n}{n}$			$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{120}$	$\frac{1}{252}$	

Selanjutnya untuk kondisi awal $u_t(x,0) = 0$ ditransformasi kedalam bentuk $U(k,1)$ dengan menggunakan hasil fungsi transformasi $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ yang terdapat pada tabel (3.3), diperoleh:

$$u_t(x,0) = 0$$

$$(h+1)U(k,h+1) = 0$$

$$(0+1)U(k,0+1) = 0$$

$$U(k,1) = 0$$

Sehingga nilai $U(k,1) = 0$ untuk $= 0,1,2,3,\dots$.

Tahap ketiga

Melakukan iterasi dengan menggunakan persamaan (3.16) dan mensubstitusi nilai $U(k,0)$ dan nilai $U(k,1)$ yang diperoleh dari tahap kedua untuk memperoleh nilai $U(k,h)$ yang lain dimana $k = 0,1,2,3,\dots$ dan $h = 0,1,2,3,\dots$.

Untuk $h = 0$ dan $k = 0,1,2,3,\dots$ diperoleh:

$$U(0,2) = \frac{c^2(1)(2)U(2,0) - r(1)U(0,1)}{(1)(2)}$$

dimana untuk nilai $U(2,0)$ didapatkan melalui hasil transformasi $U(k,0)$ yakni

$$U(2,0) = \frac{2^{2+2}(2^{2+2}-1)B_{2+2}}{(2+2)2!}$$

$$= \frac{2^4(2^4-1)}{(4)2!}B_4$$

$$= -1$$

dan untuk nilai $U(0,1)$ didapatkan melalui hasil transformasi $U(k,1)$ yang mana $k = 1$ maka diperoleh $U(0,1) = 0$. Sehingga nilai dari $U(0,2)$ diperoleh:

$$U(0,2) = \frac{c^2(1)(2)(-1) - r(1)(0)}{(1)(2)} = -c^2$$

Selanjutnya nilai $U(1,2)$ diperoleh

$$U(1,2) = \frac{c^2(2)(3)U(3,0) - r(1)U(1,1)}{(1)(2)}$$

dimana untuk nilai $U(3,0)$ didapatkan melalui hasil transformasi $U(k,0)$ yang mana untuk nilai $k = 3$ maka hasil $U(3,0) = 0$. Dan untuk nilai $U(0,1)$ didapatkan melalui hasil transformasi $U(k,1)$ maka nilai $U(1,1) = 0$. Sehingga nilai dari $U(1,2)$ diperoleh:

$$U(1,2) = \frac{c^2(2)(3)(0) - r(1)(0)}{(1)(2)} = 0$$

Perhitungan diatas juga berlaku untuk mendapatkan nilai $U(k,h)$ yang lain.

$$U(2,2) = \frac{c^2(3)(4)U(4,0) - r(1)U(2,1)}{(1)(2)} = 4c^2$$

$$U(3,2) = \frac{c^2(4)(5)U(5,0) - r(1)U(3,1)}{(1)(2)} = 0$$

$\vdots$

Untuk $h = 1$ dan $k = 0,1,2,3,\dots,N$:

$$U(0,3) = \frac{c^2(1)(2)U(2,1) - r(2)U(0,2)}{(2)(3)} = \frac{1}{3}c^2r$$

$$U(1,3) = \frac{c^2(2)(3)U(3,1) - r(2)U(1,2)}{(2)(3)} = 0$$

$$U(2,3) = \frac{c^2(3)(4)U(4,1) - r(2)U(2,2)}{(2)(3)} = \frac{-4}{3}c^2 r$$

$\vdots$

Untuk $h = 2$ dan $k = 0,1,2,3, \dots, N$:

$$U(0,4) = \frac{c^2(1)(2)U(2,2) - r(3)U(0,3)}{(3)(4)} = \frac{2}{3}c^4 - \frac{1}{12}c^2 r^2$$

$$U(1,4) = \frac{c^2(2)(3)U(3,2) - r(3)U(1,3)}{(3)(4)} = 0$$

$$U(2,4) = \frac{c^2(3)(4)U(4,2) - r(3)U(2,3)}{(3)(4)} = -\frac{17}{3}c^4 + \frac{1}{3}c^2 r^2$$

$\vdots$

Untuk $h = 3$ dan $k = 0,1,2,3, \dots, N$:

$$U(0,5) = \frac{c^2(1)(2)U(2,3) - r(4)U(0,4)}{(4)(5)} = -\frac{4}{15}c^4 r + \frac{1}{60}c^2 r^3$$

$$U(1,5) = \frac{c^2(2)(3)U(3,3) - r(4)U(1,4)}{(4)5} = 0$$

$$U(2,5) = \frac{c^2(3)(4)U(4,3) - r(4)U(2,4)}{(4)(5)} = \frac{34}{15}c^4 r - \frac{1}{15}c^2 r^3$$

$\vdots$

Hasil nilai $U(k,h)$ dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 3.7 Hasil Iterasi Metode Transformasi Differensial dengan Kondisi Awal $u(x,0) = sech^2(x)$ dan $u_t(x,0) = 0$

$\boldsymbol{U(k,h)}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	...
0	1	0	$-c^2$	$\frac{1}{3}c^2r$	$\frac{2}{3}c^4 - \frac{1}{12}c^2r^2$	$-\frac{4}{15}c^4r + \frac{1}{60}c^2r^3$	
1	0	0	0	0	0	0	
2	-1	0	$4c^2$	$-\frac{4}{3}c^2r$	$-\frac{17}{3}c^4 + \frac{1}{3}c^2r^2$	$\frac{34}{15}c^4r - \frac{1}{15}c^2r^3$	
3	0	0	0	0	0	0	
4	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{17}{3}c^2$	$\frac{17}{9}c^2r$	$\frac{124}{9}c^4 - \frac{17}{36}c^2r^2$	$-\frac{248}{45}c^4r + \frac{17}{180}c^2r^3$	
5	0	0	0	0	0	0	
6	$-\frac{17}{45}$	0	$\frac{248}{45}c^2$	$-\frac{248}{135}c^2r$	$-\frac{2764}{135}c^4 + \frac{62}{135}c^2r^2$	$\frac{5528}{675}c^4r - \frac{62}{675}c^2r^3$	
7	0	0	0	0	0	0	
8	$\frac{62}{315}$	0	$-\frac{1382}{315}c^2$	$\frac{1382}{945}c^2r$	$\frac{21844}{945}c^4 - \frac{691}{1890}c^2r^2$	$-\frac{43688}{4725}c^4 + \frac{691}{9450}c^2r^3$	
⋮							

Tahap keempat

Mensubtitusi nilai $U(k,h)$ kedalam persamaan:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)\, x^k t^h$$

untuk mendapatkan solusi analitik dari persamaan gelombang vibrasi 1D,

diperoleh:

$u(x,t) = U(0,0)x^0t^0 + U(1,0)xt^0 + U(0,1)x^0t + U(2,0)x^2t^0 + U(1,1)xt +$

$$U(0,2)x^0t^2 + U(3,0)x^3t^0 + U(2,1)x^2t + U(1,2)xt^2 + U(0,3)x^0t^3$$

$$U(4,0)x^4t^0 + U(3,1)x^4t + U(2,2)x^2t^2 + U(1,3)xt^3U(0,4)x^0t^4$$

$$+\cdots$$

$$u(x,t) = 1 - x^2 - c^2t^2 + \frac{1}{3}c^2rt^3 + \frac{2}{3}x^4 + 4c^2x^2t^2 +$$

$$\left(\frac{2}{3}c^4 - \frac{1}{12}c^2r^2\right)t^4 - \frac{4}{3}c^2rx^2t^3 - \left(\frac{4}{15}c^4r + \frac{1}{60}c^2r^3\right)t^5$$

$$+\cdots \tag{3.18}$$

Persamaan (3.18) dapat dituliskan menjadi

$$u(x,t) = t^0\left[1 - x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{17}{45}x^6 + \frac{62}{315}x^8 + \cdots\right] +$$

$$t^2\left[-1c^2 + 4c^2x^2 - \frac{17}{3}c^2x^4 + \frac{248}{45}c^2x^6 - \frac{1382}{315}c^2x^8 + \cdots\right] +$$

$$t^3\left[\frac{1}{3}c^2r - \frac{4}{3}c^2rx^2 + \frac{17}{9}c^2rx^4 - \frac{248}{135}c^2rx^6 + \frac{1382}{945}c^2rx^8 \ldots\right] +$$

$$t^4\left[\left(\frac{8}{12}c^4 - \frac{1}{12}c^2r^2\right) - \left(\frac{17}{3}c^4 - \frac{1}{3}c^2r^2\right)x^2 + \left(\frac{124}{9}c^4 - \frac{17}{36}c^2r^2\right)x^4\right.$$

$$- \left(\frac{2764}{135}c^4 - \frac{62}{135}c^2r^2\right)x^6 + \left(\frac{21844}{945}c^4 - \frac{691}{1890}c^2r^2\right)$$

$$\left. + \cdots\right]$$

$$t^5\left[\left(-\frac{4}{15}c^4r + \frac{1}{60}c^2r^3\right) + \left(\frac{34}{15}c^4r - \frac{1}{15}c^2r^3\right)x^2\right.$$

$$- \left(\frac{248}{45}c^4r - \frac{17}{180}c^2r^3\right)x^4$$

$$+ \left(\frac{5528}{675}c^4r - \frac{62}{675}c^2r^3\right)x^6$$

$$\left. + \left(-\frac{43688}{4725}c^4 + \frac{691}{9450}c^2r^3\right)x^8 + \cdots\right] + \cdots \tag{3.19}$$

Misalkan:

$$F(t) = t^0\left[1 - x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{17}{45}x^6 + \frac{62}{315}x^8 + \cdots\right]$$

Deret $F(t)$ dapat dituliskan menjadi

$$F(t) = \operatorname{sech}^2(x) \tag{3.20}$$

$$G(t) = t^2\left[-c^2 + 4c^2x^2 - \frac{17}{3}c^2x^4 + \frac{248}{45}c^2x^6 - \frac{1382}{315}c^2x^8 + \cdots\right]$$

Deret $G(t)$ dapat dituliskan menjadi

$$G(t) = t^2\left[\frac{c^2}{2!}\left(4\operatorname{sech}^2(x)\tanh^2(x) - 2\operatorname{sech}^2(x)\left(1 - \tanh^2(x)\right)\right)\right]$$

atau

$$G(t) = t^2\left[\frac{c^2\left(2\cosh^2(x) - 3\right)}{\cosh^4(x)}\right] \tag{3.21}$$

$$H(t) = t^3\left[\frac{1}{3}c^2r - \frac{4}{3}c^2rx^2 + \frac{17}{9}c^2rx^4 - \frac{248}{135}c^2rx^6 + \frac{1382}{945}c^2rx^8 + \cdots\right]$$

Deret $H(t)$ dapat dituliskan menjadi

$$H(t) = t^3\left[-\frac{c^2r}{3!}\left(4\operatorname{sech}^2(x)\tanh^2(x) - 2\operatorname{sech}^2(x)\left(1 - \tanh^2(x)\right)\right)\right]$$

atau

$$H(t) = t^3\left[-\frac{1}{3!}\frac{c^2r\left(2\cosh^2(x) - 3\right)}{\cosh^4(x)}\right] \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} I(t) = t^4 \Bigg[&\left(\frac{2}{3}c^4 - \frac{1}{12}c^2r^2\right) + \left(-\frac{17}{3}c^4 + \frac{1}{3}c^2r^2\right)x^2 + \left(\frac{124}{9}c^4 - \frac{17}{36}c^2r^2\right)x^4 \\ &+ \left(-\frac{2764}{135}c^4 + \frac{62}{135}c^2r^2\right)x^6 + \left(\frac{21844}{945}c^4 - \frac{691}{1890}c^2r^2\right)x^8 \\ &+ \cdots\Bigg] \end{aligned}$$

Deret $I(t)$ dapat dituliskan menjadi

$$I(t) = t^4 \left[\frac{c^4}{4!}(16\,\mathrm{sech}^2(x)\tanh^4(x)\right.$$

$$- 88\,\mathrm{sech}^2(x)\tanh^2(x)(1$$

$$- \tanh^2(x)) + 16\mathrm{sech}\,\hat{}2\,(x)(1 - \tanh^2(x))\hat{}2\,)$$

$$\left. + \frac{c^2r^2}{4!}(4\,\mathrm{sech}^2(x)\tanh^2(x) - 2\,\mathrm{sech}^2(x)\,(1 - \tanh^2(x))\right]$$

atau

$I(t)$

$$= t^4 \left[\frac{1}{12}\frac{(8c^2\cosh^4(x) + 2r^2\cosh^4(x) - 60\cosh^2(x)c^2 - 3r^2\cosh^2(x) + 60\,c^2)c^2}{\cosh^6(x)}\right] \qquad (3.23)$$

$$J(t) = t^5 \left[\left(-\frac{4}{15}c^4r + \frac{1}{60}c^2r^3\right) + \left(\frac{34}{15}c^4r - \frac{1}{15}c^2r^3\right)x^2\right.$$

$$+ \left(-\frac{248}{45}c^4r + \frac{17}{180}c^2r^3\right)x^4 + \left(\frac{5528}{675}c^4r - \frac{62}{675}c^2r^3\right)x^6$$

$$\left. + \left(-\frac{43688}{4725}c^4 + \frac{691}{9450}c^2r^3\right)x^8 + \cdots\right]$$

Deret $J(t)$ dapat dituliskan menjadi

$$J(t) = t^5 \left[-\frac{2c^4r}{5!}(16\,\mathrm{sech}^2(x)\tanh^4(x)\right.$$

$$- 88\,\mathrm{sech}^2(x)\tanh^2(x)(1$$

$$- \tanh^2(x)) + 16\mathrm{sech}\,\hat{}2\,(x)(1 - \tanh^2(x))\hat{}2\,)$$

$$\left. - \frac{c^2r^3}{5!}(4\,\mathrm{sech}^2(x)\tanh^2(x) - 2\,\mathrm{sech}^2(x)\,(1 - \tanh^2(x))\right]$$

atau

$J(t)$

$$= t^5 \left[-\frac{1}{60}\frac{(16c^2\cosh^4(x) + 2r^2\cosh^4(x) - 120\cosh^2(x)c^2 - 3r^2\cosh^2(x) + 120c^2)c^2r}{\cosh^8(x)}\right] \qquad (3.24)$$

Dari persamaan (3.20), (3.21), (3.22), (3.23) dan (3.24) dapat ditulis menjadi:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(-\frac{4}{15}\frac{c^4 r}{\cosh^2(x)} - \frac{1}{30}\frac{c^2 r^3}{\cosh^2(x)} + \frac{2}{3}\frac{c^4}{\cosh^2(x)} \right.$$

$$+ \frac{1}{6}\frac{c^2 r^2}{\cosh^2(x)} - \frac{2}{3}\frac{c^2 r}{\cosh^2(x)} + \frac{2c^4 r}{\cosh^4(x)} + \frac{1}{20}\frac{c^2 r^3}{\cosh^4(x)}$$

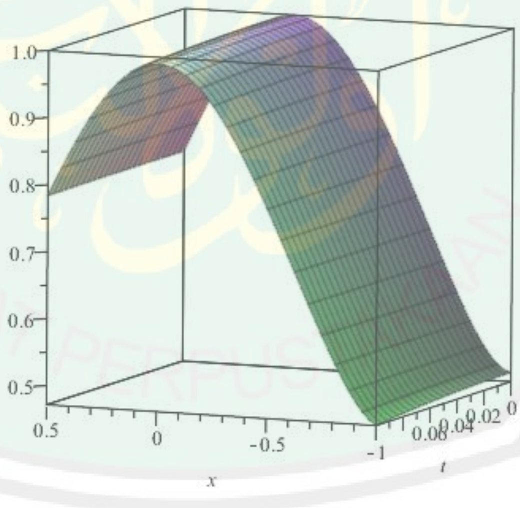
$$+ \frac{2c^2}{\cosh^4(x)} - \frac{5c^4}{\cosh^4(x)} - \frac{1}{4}\frac{c^2 r^2}{\cosh^4(x)} + \frac{c^2 r}{\cosh^4(x)}$$

$$\left. - \frac{2c^4 r}{\cosh^6(x)} + \frac{1}{\cosh^2(x)} - \frac{3c^2}{\cosh^4(x)} + \frac{5c^4}{\cosh^6(x)} + \cdots \right) \tag{3.25}$$

Sehingga persamaan (3.15) merupakan solusi pendekatan analitik dari persamaan (3.25) yang berbentuk deret pollinom.

Tahap Kelima

Mensimulasikan solusi persamaan gelombang vibrasi 1D menggunakan metode transformasi differensial. Simulasi dari persamaan (3.25) dengan $c = 1$ dan $r = 1$ sebagai berikut:



Gambar 3.2 Simulasi persamaan (3.25) dengan $-1 < x < 50$ dan $0 < t < 100$

Dari hasil simulasi diatas ketika kondisi awal $u(x,0) = \text{sech}^2(x)$ dan $u_t(x,0) = 0$ dengan $-1 < x < 50$ dan $0 < t < 100$ puncak tertinggi gelombang yakni didapatkan 1.0.

BAB IV

KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Solusi dari persamaan gelombang vibrasi 1D menggunakan metode transformasi differensial dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Solusi persamaan gelombang vibrasi 1D pada kondisi awal $u(x,0) = f(x)$ dan $u_t(x,0) = 0$ merupakan solusi pendekatan anlitik yang berbentuk deret polinomial, diperoleh

$$u(x,t) = a$$

2. Solusi persamaan gelombang vibrasi 1D pada kondisi awal $u(x,0) = -x^2 + 1$ dan $u_t(x,0) = 0$ merupakan solusi analitik, diperoleh

$$u(x,t) = 1 - x^2 + 2c^2\left(\frac{1 - rt - e^{-rt}}{r^2}\right)$$

   Simulasi solusi persamaan gelombang vibrasi 1D pada kondisi awal pertama berada pada $-1 < x < 5$ dan $0 < t < 5$.

3. Solusi persamaan gelombang vibrasi 1D pada kondisi awal kedua merupakan solusi pendekatan analitik yang berbentuk deret polynomial, diperoleh

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(-\frac{4}{15}\frac{c^4 r}{\cosh^2(x)} - \frac{1}{30}\frac{c^2 r^3}{\cosh^2(x)} + \frac{2}{3}\frac{c^4}{\cosh^2(x)} \right.$$
$$+ \frac{1}{6}\frac{c^2 r^2}{\cosh^2(x)} - \frac{2}{3}\frac{c^2 r}{\cosh^2(x)} + \frac{2c^4 r}{\cosh^4(x)} + \frac{1}{20}\frac{c^2 r^3}{\cosh^4(x)}$$
$$+ \frac{2c^2}{\cosh^4(x)} - \frac{5c^4}{\cosh^4(x)} - \frac{1}{4}\frac{c^2 r^2}{\cosh^4(x)} + \frac{c^2 r}{\cosh^4(x)}$$
$$\left. - \frac{2c^4 r}{\cosh^6(x)} + \frac{1}{\cosh^2(x)} - \frac{3c^2}{\cosh^4(x)} + \frac{5c^4}{\cosh^6(x)} + \cdots \right)$$

a. Simulasi persamaan gelombang vibrasi 1D pada kondisi awal kedua berada pada $-1 < x < 50$ dan $0 < t < 100$.

Sehingga dari hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa tidak semua kondisi awal yang diberikan dapat menghasilkan solusi anlaitik yang berbentuk fungsi.

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat menemukan solusi dari persamaan diferensial dan kondisi awal yang lain dengan menggunakan metode transformasi diferensial.

DAFTAR PUSTAKA

Ahmad, M. Z., & dkk. 2017. Differential Transformation Method (DTM) for Solving SIS and SI Epidemic Models. *Sains Malaysiana*, 2007-2017.

Al-Maraghi, A. M. 1991. *Terjemah Tafsir Al-Maraghi.* Semarang: CV Toha Putra.

Al-Sawalha, M., & Noorani, M. 2009. Application of the differential transformation method for the solution of the hyperchaotic Ro¨ ssler system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 1509-1514.

Arakawa, T., & dkk. 2014. *Bernoulli Numbers and Zeta Functions.* Japan: Springer Tokyo Heidelberg New York Dordrecht London.

Borhanifar, A., & Absari, R. 2011. Exact solutions for non-linear Schrödinger equations by differential transformation method. *J Appl Math Comput*, 37-51.

Davis, A. B. 2012. *Calculus Early Transcendental 10th Edition.* USA: Laurie Rosatone.

Gradshteyn, I., & Ryzhik, I. 2007. *Table of Integrals, Series, and Products Seventh Edition.* US, America: Elsevier Academic Press.

Khaitzah, E., & dkk. 2015. Aplikasi Metode Transformasi Diferensial pada Persamaan Diferensial Biasa. *JMA, Vol.14 No.2*, 1-8.

Khan, Y., & dkk. 2012. Solving certain classes of Lane-Emden type equations using the differential transformation method. *Advances in Difference Equation*, 1-11.

Masridha, M. 2008. *Tafsir Al Qurthubi.* Jakarta Selatan: Pustaka Azzam.

Primbs, J. A. 2014. *A Factor Model Approach To Derivative Pricing.* Fullerton, USA: CRC Press.

Soltanahlizadeh, B. 2011. Differential transformation method for solving one-space-dimensional telegraph equation. *Comp. Appl. Math*, 639-653.

Straus, W. A. 2008. *Partial Differential Equation An Introduction* . New Jersey: John Willey & Sons, Inc.

RIWAYAT HIDUP

Gimas Nur Munawaro, lahir di Mojokerto pada tanggal 23 Mei 1997, biasa dipanggil Gimas atau Imas. Kakak dari Ahmad Rado Dwi Appriliansyah yang merupakan anak pertama dari 2 bersaudara pasangan bapak Dede' Ridwan dan ibu Siti Amnah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MIN Seduri Mojosari, Mojokerto dan lulus pada tahun 2009. Setelah itu, dia melanjutkan sekolah di MTsN Mojosari, Mojokerto dan lulus tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di MAN Mojosari, Mojokerto dan lulus tahun 2015. Selanjutnya pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang Jurusan Matematika Murni dan tinggal di Jl. Sunan Kalijaga Dalam No.9A Kos Potre Koneng sejak semester 3.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	:	Gimas Nur Munawaro
NIM	:	15610026
Fakultas/Jurusan	:	Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi	:	Penerapan Metode Transformasi Differensial pada Penyelesaian Persamaan Gelombang Vibrasi 1D
Pembimbing I	:	Mohammad Jamhuri, M.Si
Pembimbing II	:	Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	29 Juni 2019	Konsultasi Bab I , Bab II & Bab III	1.	
2	30 Juni 2019	Konsultasi Agama Bab I & Bab II		2.
3	03 Juli 2019	Revisi Bab I, Bab II, & Bab III	3.	
4	04 Juli 2019	Revisi Agama Bab I & Bab II		4.
5	22 Juli 2019	ACC Bab I, Bab II, & Bab III	5.	
6	30 Juli 2019	ACC Agama Bab I & Bab II		6.
7	30 Oktober 2019	Konsultasi Bab III & Bab IV	7.	
8	31 Oktober 2019	Konsultasi Agama Bab I & Bab II		8.
9	13 November 2019	Revisi Bab III & Bab IV	9.	
10	14 November 2019	Revisi Agama Bab I & Bab II		10.
11	02 Desember 2019	ACC Keseluruhan	11.	
12	02 Desember 2019	ACC Agama Keseluruhan		12.

Malang, 02 Desember 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001