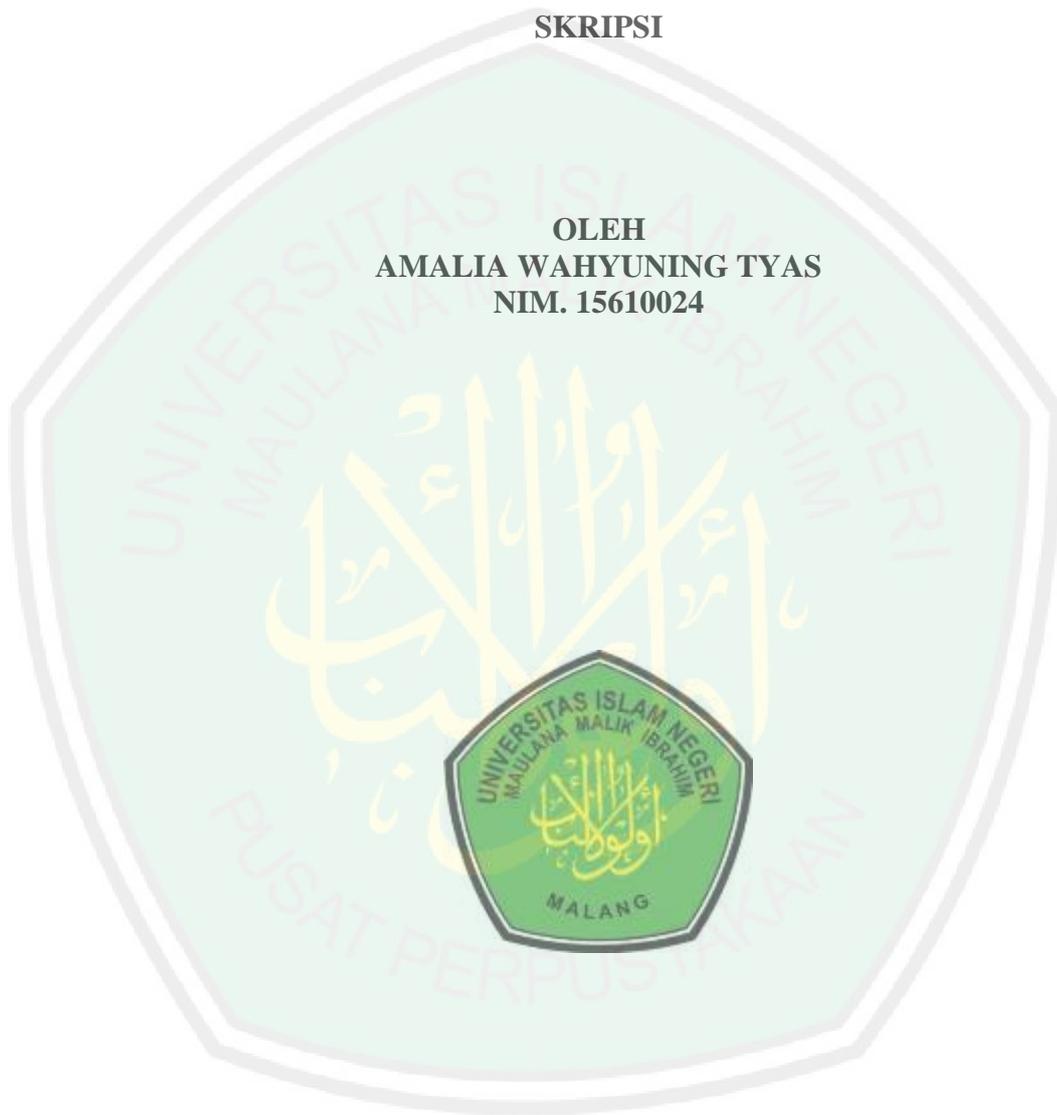


**ANALISIS KESTABILAN PADA MODEL PENULARAN PENYAKIT
DEMAM BERDARAH TANPA KEKEBALAN DENGAN WAKTU TUNDA**

SKRIPSI

**OLEH
AMALIA WAHYUNING TYAS
NIM. 15610024**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019**

**ANALISIS KESTABILAN PADA MODEL PENULARAN PENYAKIT
DEMAM BERDARAH TANPA KEKEALAN DENGAN WAKTU TUNDA**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Amalia Wahyuning Tyas
NIM. 15610024**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019**

**ANALISIS KESTABILAN PADA MODEL PENULARAN PENYAKIT
DEMAM BERDARAH TANPA KEKEBALAN DENGAN WAKTU TUNDA**

SKRIPSI

Oleh
Amalia Wahyuning Tyas
NIM. 15610024

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 28 November 2019

Pembimbing I,



Dr. Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 19650414 200312 1 001

Pembimbing II,



Juhari, M.Si
NIDT. 19840209 20160801 1 055

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 19650414 200312 1 001

**ANALISIS KESTABILAN PADA MODEL PENULARAN PENYAKIT
DEMAM BERDARAH TANPA KEKEBALAN DENGAN WAKTU TUNDA**

SKRIPSI

Oleh
Amalia Wahyuning Tyas
NIM. 15610024

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 19 Desember 2019

Penguji Utama : Mohammad Jamhuri, M.Si

Ketua Penguji : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

Sekretaris Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Anggota Penguji : Juhari, M.Si

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika


Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Amalia Wahyuning Tyas

NIM : 15610024

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Kestabilan pada Model Penularan Penyakit Demam Berdarah Tanpa Kekebalan dengan Waktu Tunda

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 November 2019
Yang membuat pernyataan



Amalia Wahyuning Tyas
NIM.15610024

MOTO

“Sebaik baiknya manusia adalah yang bermanfaat untuk orang lain”



PERSEMBAHAN

Penulis mempersembahkan karya tulis ini kepada:

Orang tua tercinta ibu Ining Usriatin, bapak Safari, dan kakak Muchammad

Zainur Arifin yang senantiasa ikhlas mendoakan, menasehati, memberikan semangat, dan kasih sayang yang tak terbatas.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Juhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Orang tua serta semua keluarga yang telah memberi dukungan selama ini.
7. Dosen Jurusan Matematika yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
8. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik materiil maupun moril.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Amiin.*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 28 November 2019



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGANTAR	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR SIMBOL	x
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
ملخص	xvii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Manfaat Penelitian.....	5
1.5 Batasan Masalah.....	6
1.6 Metode Penelitian.....	6
1.7 Sistematika Penulisan.....	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Differensial.....	9
2.1.1 Persamaan Differensial Biasa.....	9
2.1.2 Persamaan Differensial Biasa Linier dan Nonlinier.....	10
2.1.3 Persamaan Differensial Waktu Tunda.....	11
2.2 Analisis Kestabilan.....	12
2.2.1 Titik Tetap (Titik Kesetimbangan).....	12
2.2.2 Linierisasi.....	12

2.2.3	Persamaan Karakteristik	15
2.2.4	Jenis Kestabilan.....	17
2.2.5	Nilai Kritis Waktu Tunda.....	18
2.3	Pemodelan Matematika	21
2.3.1	Pengertian Penyakit Demam Berdarah	24
2.3.2	Proses Terjadinya Penyakit Demam Berdarah.....	24
2.3.3	Gejala Penyakit Demam Berdarah	26
2.4	Kestabilan dalam Perspektif Islam.....	27

BAB III PEMBAHASAN

3.1	Deskripsi Model Penularan Penyakit Demam Berdarah tanpa Kekebalan dengan Waktu Tunda	30
3.2	Analisis Kestabilan Model Penularan Penyakit Demam Berdarah tanpa Kekebalan	38
3.2.1	Titik Tetap Model Tanpa Waktu Tunda ($\tau = 0$).....	38
3.2.2	Linierisasi Model Tanpa Waktu Tunda ($\tau = 0$).....	40
3.2.3	Analisis Kestabilan Pada Titik Kesetimbangan Model tanpa Waktu Tunda	43
3.2.4	Linierisasi Model dengan waktu tunda ($\tau \neq 0$)	45
3.2.5	Titik Kritis pada Waktu Tunda	49
3.2.6	Simulasi Model Matematika	67
3.3	Kajian Nilai-nilai Keislaman pada Model Penularan Penyakit Demam Berdarah.....	69

BAB IV PENUTUP

4.1	Kesimpulan.....	71
4.2	Saran	71

DAFTAR RUJUKAN	72
-----------------------------	----

LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Arti
S_H	Manusia yang rentan
I_H	Manusia yang terinfeksi
R_H	Manusia yang sehat
S_V	Nyamuk yang rentan
I_V	Nyamuk yang terinfeksi
μ_H	Laju kelahiran dan kematian manusia
μ_V	Laju kelahiran dan kematian nyamuk
N_H	Populasi manusia
N_V	Populasi nyamuk
β_H	peluang penularan virus <i>dengue</i> oleh nyamuk ke manusia
b	jumlah gigitan nyamuk kepada manusia
γ_H	Laju manusia yang sembuh atau pulih
α	Laju interaksi antara tingkat gigitan nyamuk (vektor) dengan kemungkinan penularan dari nyamuk ke manusia
β	Laju kematian secara alami dari manusia
γ	Laju interaksi antara tingkat gigitan nyamuk (vektor) dengan kemungkinan penularan dari manusia ke nyamuk
δ	Laju kematian secara alami dari vektor yang terkena virus <i>dengue</i>

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Kestabilan Titik Ekuilibrium Sistem Dinamik.....	18
Tabel 3.1	Definisi Parameter.....	37



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram Kompartemen Model.....	23
Gambar 3.1	Diagram Kompartemen Model DBD	31
Gambar 3.2	Model Populasi Manusia dan Vektor dengan $\tau = 0$	67
Gambar 3.3	Model Populasi Manusia dan Vektor dengan $\tau = 5$	68
Gambar 3.4	Fase Potret	68



ABSTRAK

Wahyuning Tyas, Amalia. **Analisis Kestabilan pada Model Penularan Penyakit Demam Berdarah Tanpa Kekebalan dengan Waktu Tunda.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Juhari, M.Si.

Kata Kunci: Model matematika, waktu tunda, demam berdarah, analisis kestabilan.

Model penularan penyakit demam berdarah merupakan model yang menjelaskan proses penularan penyakit demam berdarah yang disebabkan oleh virus *dengue*. Virus *dengue* ini dibawa dan disebarkan melalui gigitan nyamuk yaitu *Aedes Sp* kepada manusia. Model ini berbentuk persamaan differensial non linier yang memuat waktu tunda. Dilakukan analisis kestabilan pada model untuk mengetahui keseimbangan antara nyamuk yang terinfeksi virus dengan populasi manusia yang tertular penyakit. Perilaku dari model diketahui setelah mencari titik kesetimbangan, melinierkan model, menghitung nilai eigen model, menentukan matriks Jacobian, dan mensimulasikan model ke dalam grafik.

Berdasarkan hasil analisis kestabilan dengan parameter yang sudah ditentukan diperoleh dua titik kesetimbangan. Setelah memperoleh dua titik kesetimbangan, perilaku model dapat dilihat melalui simulasi numeriknya. Simulasi model dengan $0 \leq \tau \leq 5$, maka dapat dilihat sistem awalnya berosilasi sampai pada waktu tertentu kemudian sistem akhirnya stabil menuju titik kesetimbangannya. Ketika $\tau > 5$ sistem akan terus berosilasi yang mengakibatkan sistem tidak stabil.

ABSTRACT

Wahyuning Tyas, Amalia. **Stability Analysis of Dengue Fever Disease Transmission Model without Immunity with Delay.** Thesis. Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Juhari, M.Si.

Keyword: Mathematical model, time delay, dengue fever, stability analysis.

The dengue fever model is a model that explains the process of *dengue* fever caused by dengue virus. Dengue virus is carried and spread by mosquito bites, namely *Aedes Sp*. This model consists of non-linear differential equations which contain delay. Stability analysis was carried out on the model to determine the balance between mosquitoes infected with viruses and human populations infected with the disease. The behavior of the model is known after finding equilibrium points, linearizing the model, calculating the eigenvalue of the model, determining the Jacobian matrix, and simulating the model into a graph.

Based on the results of the stability analysis with predetermined parameters obtained two equilibrium points. Delay time in the model is in the *host* or human variable, the virus incubation period in the human body. Simulation model with $0 \leq \tau \leq 5$ it can be seen that the system initially oscillates until a certain time then the system finally stabilizes to the point of equilibrium. When $\tau > 5$ the system will continue to oscillate resulting in an unstable system.

ملخص

وهيو نغ تياس، عمليا. ٢٠١٩. تحليل الثبات في نموذج انتقال حمى الضنك بدون مناعة مع تأخير الوقت. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا ملك إبراهيم مالانج. المشرف : (١) الدكتور عثمان باجالي (٢) جوهاري الماجستير

الكلمات الرئيسية: النماذج الرياضية ، وقت التأخير، حمى الضنك ،تحليل الثبات

نموذج انتقال حمى الضنك هو نموذج يشرح عملية انتقال حمى الضنك الناجمة عن فيروس حمى الضنك. ينقل فيروس حمى الضنك هذا وينتشر عن طريق لسعات البعوض ، أي *Aedes Sp* إلى البشر. هذا النموذج في شكل معادلة تفاضلية غير خطية تحتوي على وقت تأخير وتتكون من معادلتين تفاضليتين. تم إجراء تحليل الثبات على النموذج لتحديد التوازن بين البعوض المصاب بالفيروسات والسكان المصابين بعدوى المرض. يُعرف سلوك النموذج بعد المرور عبر المراحل بما في ذلك إيجاد نقاط التوازن ، وخط الطول النموذجي ، وحساب القيمة الذاتية للنموذج ، وتحديد مصفوفة جاكوبي ، ومحاكاة النموذج في رسم بياني.

استنادا إلى نتائج التحليل الاستقرار مع المعلمات المحددة سلفا حصلت على نقطتين التوازنتأخير. الوقت في النموذج هو في المضيف أو متغير الإنسان، فترة حضانة الفيروس في جسم الإنسان. نموذج المحاكاة مع $0 \leq \tau \leq 5$ يمكن ملاحظة أن النظام يتذبذب في البداية حتى وقت معين ثم يستقر النظامأخيراً إلى درجة التوازن. عندما $\tau > 5$ سيستمر النظام في التذبذب مما يؤدي إلى نظام غير مستقر.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Demam berdarah merupakan penyakit yang menyerang manusia disebabkan oleh infeksi virus yaitu virus *dengue* yang dibawa dan disebarkan melalui gigitan nyamuk. Nyamuk yang menjadi vektor adalah nyamuk *Aedes Sp.* Beberapa spesies *Aedes* yang berperan menjadi vektor di seluruh dunia diantaranya adalah *Ae. aegypti*, *Ae. albopictus*, *Ae. scutellaris*, *Ae. mediovittatus*, *Ae. Polynesiensis*. Akan tetapi nyamuk yang menjadi vektor di Indonesia adalah *Ae. aegypti*, *Ae. albopictus*, dan *Ae. Scutellaris*. Terdapat tiga faktor penularan infeksi virus *dengue* antara lain manusia, virus, dan vektor perantara. Proses penularan penyakit demam berdarah dimulai dari nyamuk yang terinfeksi virus *dengue* melalui pengisapan darah dari orang yang terkena penyakit demam berdarah. Kemudian nyamuk tersebut menularkan virus *dengue* kepada manusia dengan cara langsung yaitu setelah menggigit orang yang sedang dalam fase viremia atau masa dimana virus sudah berada dalam aliran darah dan secara tidak langsung yaitu setelah melewati masa inkubasi.

Virus yang sudah berada pada kelenjar liur nyamuk mengalami proses perkembangbiakan selama 8-10 hari sebelum akhirnya nyamuk dapat menularkan virus kepada manusia pada gigitan selanjutnya. Proses perkembangan penyakit demam berdarah dimulai saat virus sudah masuk ke dalam tubuh manusia. Virus mengalami masa inkubasi atau masa tunas virus selama 3-8 hari di sekitar gigitan. Kemudian virus berkembang biak dan setelah itu masuk kedalam peredaran

darah menyebabkan viremia. Masa viremia dimulai dari 6-18 jam sebelum terjadi sakit dan berlangsung sekitar 1-7 hari. Ketika virus mulai menghilang, tubuh akan mengalami tanda-tanda dan gejala demam berdarah. Penularan virus dari manusia kepada nyamuk terjadi ketika manusia mengalami masa viremia yaitu dua hari sebelum panas dan lima hari setelah demam. Apabila virus sudah masuk kedalam tubuh nyamuk dan berkembang biak, maka besar kemungkinan nyamuk tersebut dapat menularkan virus selama masa hidupnya. Proses penularan ini terus berlangsung setiap harinya sehingga menyebabkan banyak sekali masyarakat yang terkena penyakit demam berdarah tersebut.

Firman Allah SWT dalam alquran surah *as-Syu'araa'* 26:80 sebagai berikut:

وَإِذَا مَرِضْتُ فَهُوَ يَشْفِينِ ﴿٨٠﴾

“Dan apabila aku sakit, Dia-lah yang menyembuhkan aku” (QS. *al-Syu'araa'*/26:80)

Ayat di atas menyeru kepada manusia bahwa ketika manusia sakit, janganlah berhenti berusaha, berdoa, dan mencari kesembuhan. Setiap penyakit pasti mempunyai obat tersendiri tergantung bagaimana ikhtiar manusia tersebut dalam mencari kesembuhan untuk penyakitnya, seperti halnya pada kasus penyakit demam berdarah. Perlu diperhatikan bahwa kasus demam berdarah dapat dikurangi atau dikontrol dengan cara menstabilkan jumlah nyamuk dan jumlah penularan yang terjadi pada manusia. Upaya yang dilakukan untuk menangani kasus demam berdarah tersebut akan dibahas dan dikaji pada penelitian ini.

Model matematika yang digunakan untuk menjelaskan proses penularan penyakit demam berdarah dalam penelitian, berdasarkan penelitian Yusuf Yaakob 2007 yang berjudul “*Analysis of a Dengue Disease Transmission Model*

without Immunity". Model ini menjelaskan tentang model penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan dimana terdapat dua model yang telah direduksi yaitu $y(t)$ sebagai populasi manusia yang terkena gigitan nyamuk, dan $z(t)$ yaitu populasi nyamuk yang terkena virus *dengue*. Kedua model tersebut merupakan persamaan diferensial biasa non-linier dengan satu waktu tunda yaitu durasi masa inkubasi virus manusia (τ). Karena populasi nyamuk yang terinfeksi virus *dengue* dapat menyebarkan virus selama masa hidupnya, maka ketika nyamuk tersebut berkembang biak dengan bertelur menyebabkan semakin banyaknya peluang nyamuk-nyamuk yang dapat tertular virus *dengue*. Artinya tingkat penularan penyakit demam berdarah kepada manusia akan semakin tinggi.

Penelitian sebelumnya yang terkait dengan demam berdarah diantaranya yaitu penelitian yang dilakukan oleh (El-Moneam, et al., 2019) menjelaskan model matematika demam berdarah yang rentan, tidak efektif, dan pulih dari epidemiologi matematika untuk menggambarkan penyebaran demam berdarah berdasarkan kasus demam berdarah yang dirawat di rumah sakit di Jazanregion. Penelitian ini membahas kestabilan dari tiga sistem persamaan hasil reduksi dari model awal penularan penyakit demam berdarah. Penelitian selanjutnya dilakukan oleh (Pagalay U. , 2003) menjelaskan analisis dinamik pada model penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* dengan proses penularan vertikal berupa kestabilan titik kritis dan penentuan keadaan endemik yang berdasar pada parameter ambang. Kemudian penelitian lainnya dilakukan oleh (Soewono & Supriatna, 2001) menjelaskan tentang perilaku dinamik model matematika penularan penyakit demam berdarah yang direduksi menjadi persamaan planar

dua dimensi dengan hanya mempertimbangkan populasi manusia yang konstan dan populasi vektor nyamuk.

Penelitian selanjutnya dilakukan oleh (Javeed, Shmed, Shaukat Khan, & Asif Javed, 2018) yang menjelaskan kestabilan model matematika penyakit demam berdarah dan penyelesaian solusi numerik model menggunakan *Homotopy Perturbation Method* (HPM) dan metode *Runge Kutta of Order 4* (RK4). Kekurangan dari penelitian ini adalah model yang dibahas tidak diberikan waktu tunda. Kemudian penelitian berikutnya dilakukan oleh (Metrikawati, 2014) yang membahas mengenai model matematika transmisi virus *dengue* didalam tubuh manusia dengan memperhatikan gambaran virus *dengue* yang menginfeksi sel rentan di peredaran darah manusia. Penelitian ini hanya membahas mengenai perilaku virus *dengue* yang sudah ada di dalam manusia dan tidak membahas bagaimana penularan penyakit demam berdarah yang terjadi pada manusia yang disebabkan oleh nyamuk dilihat dari jumlah manusia atau nyamuk yang tertular.

Berdasarkan penjelasan di atas, peneliti akan mengkaji proses penularan virus *dengue* kepada manusia yang juga akan dihitung waktu penularannya sebagai waktu tunda atau waktu perlambatan dan menganalisis stabilitas dari proses penularan virus *dengue* kepada manusia jika ditambah waktu tunda apakah mencapai kestabilan atau tidak. Sehingga nantinya dapat disimpulkan bagaimana kondisi dari manusia yang terinfeksi lebih rendah dan populasi vektor dapat berkurang.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana deskripsi model matematika pada proses penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan dengan waktu tunda?
2. Bagaimana menganalisis kestabilan pada model penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan dengan waktu tunda?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut maka didapatkan tujuan penelitian adalah:

1. Mendeskripsikan model matematika pada proses penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan dengan waktu tunda.
2. Menganalisis kestabilan pada model penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan dengan waktu tunda.

1.4 Manfaat Penelitian

Sesuai dengan tujuan penelitian, manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

1. Dapat mengetahui gambaran secara rinci mengenai model matematika pada proses penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan dengan waktu tunda.
2. Dapat memberikan kestabilan antara populasi nyamuk dengan dengan populasi manusia yang terkena penyakit demam berdarah.

1.5 Batasan Masalah

Untuk lebih jelas dan lebih terarah pada sasaran yang diharapkan dalam pembahasan, maka diperlukan adanya pembatasan masalah yang akan dibahas.

1. Waktu perlambatan yang digunakan dalam simulasi yaitu:

$$\tau = 0 \text{ hari}$$

$$\tau = 5 \text{ hari}$$

2. Analisis kestabilan yang akan dibahas adalah mengenai titik tetap, nilai eigen, dan jenis kestabilan pada setiap titik tetap beserta simulasi model.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

- a) Mempelajari, mengkaji, dan menelaah buku-buku, jurnal, artikel yang berhubungan dengan materi mengenai analisis kestabilan, persamaan diferensial non-linier serta bagaimana proses penularan penyakit demam berdarah pada manusia.

- b) Menganalisis

Adapun langkah-langkah penulis dalam menganalisis model matematika penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan dengan waktu tunda adalah:

- 1) Menjelaskan asal mula model matematika penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan dengan waktu tunda secara diferensial.
- 2) Melakukan analisis kestabilan dari model matematika penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan dengan waktu tunda. Tahapan yang dilakukan dalam menganalisis kestabilan adalah:
 - a. Menentukan titik tetap (*fixed point*).

- b. Melakukan linearisasi terhadap model menggunakan deret Taylor.
 - c. Menentukan nilai eigen.
 - d. Melakukan simulasi terhadap model matematika penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan dengan perlambatan atau waktu tunda.
 - e. Menginterpretasi hasil simulasi model matematika penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan dengan perlambatan atau waktu tunda.
- c) Membuat kesimpulan

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan digunakan untuk mempermudah dan menelaah serta memahami skripsi ini yang terdiri dari empat bab dan masing-masing bab mempunyai subbab dengan rumusannya sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penelitian.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka dalam bab ini menjelaskan mengenai teori-teori yang berhubungan dengan pembahasan antara lain persamaan differensial tundaan, titik kesetimbangan, linierisasi, nilai eigen, analisis kestabilan, demam berdarah.

Bab III Pembahasan

Pembahasan menjelaskan tentang deskripsi model matematika penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan dengan tundaan waktu. Analisis kestabilan model yang terdiri dari menentukan nilai titik tetap, linierisasi model, menentukan nilai eigen dan ditunjukkan dengan grafik perilaku model terhadap waktu.

Bab IV Penutup

Penutup berisi tentang kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian yang sudah dilakukan serta saran untuk penelitian selanjutnya.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Differensial

2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung turunan dari fungsi satu atau lebih variabel (Ibnas, 2017). Persamaan diferensial merupakan gabungan dari fungsi yang tidak diketahui dengan turunannya. Persamaan diferensial dibedakan menjadi beberapa kategori, kategori pertama adalah persamaan diferensial biasa. Persamaan diferensial biasa merupakan persamaan diferensial yang memiliki satu variabel bebas (Sihombing & Dahlia, 2018).

$$\frac{dy}{dx} = x + y \quad (2.1)$$

Berdasarkan persamaan (2.1), x merupakan variabel bebas dan y merupakan variabel terikat.

Suatu persamaan diferensial biasa orde n adalah persamaan berbentuk $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ yang menyatakan hubungan antara variabel bebas x , variabel terikat $y(x)$ dan turunannya yaitu $y', y'', \dots, y^{(n)}$. Jadi suatu persamaan diferensial disebut mempunyai orde n jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial tersebut adalah turunan ke n (Ibnas, 2017).

Kategori kedua adalah persamaan diferensial parsial, persamaan diferensial parsial merupakan persamaan diferensial yang mempunyai lebih dari satu peubah bebas dan memuat turunan-turunan parsial (Alfionita & Zulakmal,

2012). Persamaan $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ merupakan persamaan diferensial parsial karena variabel tak bebas u bergantung pada variabel bebas lebih dari satu yaitu x dan y . Secara umum persamaan diferensial parsial dinyatakan dalam bentuk $F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) = F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ (Strauss, 2007).

2.1.2 Persamaan Diferensial Biasa Linier dan Non-linier

Persamaan diferensial biasa yang berbentuk $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ dikatakan linier jika F adalah linier dalam variabel-variabel $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ (Waluyo, 2006). Secara umum persamaan diferensial biasa linier dapat diberikan sebagai berikut :

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x). \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) merupakan persamaan diferensial orde ke- n . Persamaan (2.2) menjadi persamaan linier jika memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

- a. Variabel terikat dan turunannya hanya berderajat satu
- b. Tidak ada perkalian antara variabel terikat dan turunannya.
- c. Variabel terikat bukan merupakan fungsi transeden.

Apabila suatu persamaan tidak memenuhi syarat dari ketiga syarat yang menyatakan suatu persamaan tersebut linier, maka boleh dikatakan bahwa persamaan tersebut adalah persamaan non-linier. Berikut adalah contoh persamaan diferensial biasa non-linier.

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 2y - 5xy. \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) merupakan persamaan diferensial biasa nonlinier karena terdapat perkalian variabel terikat $x(t)$ pada bentuk $-5xy$ dengan variabel terikat lain yaitu $y(t)$.

2.1.3 Persamaan Diferensial Waktu Tunda

Persamaan differensial tundaan merupakan persamaan diferensial yang digunakan untuk memodelkan suatu sistem dengan memperhatikan waktu di masa lalu. Sehingga dapat diartikan bahwa persamaan ini menyatakan beberapa turunan terhadap x pada waktu t dan pada beberapa waktu sebelumnya ($t - \tau$), dengan τ menyatakan tundaan waktu. Menurut (Kuang, 993), persamaan differensial tundaan waktu dinyatakan sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t - \tau), \dots, x(t - \tau_n)), \quad \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}. \quad (2.4)$$

Persamaan diferensial tundaan waktu digunakan dalam pemodelan matematika di dunia nyata karena sebuah keputusan biasanya tidak hanya memperhatikan waktu sekarang tapi juga memperhatikan waktu di masa lalu. Hal ini penting untuk dipertimbangkan dalam memodelkan pertumbuhan populasi karena laju pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada jumlah populasi pada waktu sekarang t tetapi juga bergantung pada jumlah populasi pada waktu sebelumnya τ (Arizona & Fuad, 2014).

Sistem persamaan diferensial dengan waktu tunda juga dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x(t), x(t - \tau))$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x(t), x(t - \tau))$$

⋮

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x(t), x(t - \tau))$$

2.2 Analisis Kestabilan

2.2.1 Titik Tetap (Titik Kesetimbangan)

Titik kesetimbangan atau titik tetap dari suatu sistem merupakan titik tetap yang membuat sistem tidak mengalami perubahan sepanjang waktu (Sulisti, Noviani, & Kusumastuti, 2014). Misal diberikan persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y), \end{aligned} \tag{2.5}$$

dengan f dan g adalah fungsi kontinu dari x dan y . Titik kritis dari sistem (2.5) adalah titik (x^*, y^*) dari (x, y) sedemikian sehingga $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$.

Titik tetap x^* dan y^* diperoleh jika $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Keadaan yang menyebabkan

$\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$ disebut keadaan seimbang, sehingga titik kritis tersebut disebut

titik tetap (Edwards & Penney, 2008).

2.2.2 Linierisasi

Menurut (Boyce & DiPrima, 2000) kestabilan titik tetap dari sistem persamaan diferensial biasa non-linier ditentukan dengan terlebih dahulu melakukan linierisasi disekitar titik tetapnya. Linierisasi merupakan proses

pendekatan persamaan diferensial non linier dengan persamaan linier. Salah satu metode yang bisa digunakan untuk melinierisasi adalah dengan deret Taylor. Suatu sistem $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ adalah sistem non-linier. Kemudian akan dicari pendekatan sistem linier disekitar titik tetap (x^*, y^*) dengan melakukan ekspansi deret Taylor disekitar (x^*, y^*) dan menghilangkan suku non-liniernya sebagai berikut (Primbs, 2014):

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(x^*, y^*) + f_x(x^*, y^*)(x - x^*) + f_y(x^*, y^*)(y - y^*) \\
 &\quad + \frac{1}{2}f_{xx}(x^*, y^*)(x - x^*)^2 + f_{xy}(x^*, y^*)(x - x_0)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}f_{yy}(x^*, y^*)(y - y^*)^2 + \dots \\
 g(x, y) &= g(x^*, y^*) + g_x(x^*, y^*)(x - x^*) + g_y(x^*, y^*)(y - y^*) \\
 &\quad + \frac{1}{2}g_{xx}(x^*, y^*)(x - x^*)^2 + g_{xy}(x^*, y^*)(x - x^*)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2}g_{yy}(x^*, y^*)(y - y^*)^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Kemudian subsitusikan $dx = x - x^*$, $dy = y - x^*$, $df = f(x, y) - f(x^*, y^*)$, dan $dg = g(x, y) - g(x^*, y^*)$, sehingga deret Taylor dari persamaan (2.6) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
 df &= f_x dx + f_y dy + \frac{1}{2}f_{xx} dx^2 + f_{xy} dx dy + \frac{1}{2}f_{yy} dy^2 + \dots \\
 dg &= g_x dx + g_y dy + \frac{1}{2}g_{xx} dx^2 + g_{xy} dx dy + \frac{1}{2}g_{yy} dy^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Sistem (2.7) bisa ditulis menggunakan matriks yaitu

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ dimana } A_0 = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix},$$

Maka matriks di atas dapat disebut sebagai matriks Jacobian. Matriks Jacobian merupakan matriks yang elemen-elemennya adalah turunan parsial pertama dari

berbagai fungsi. Misalkan terdapat sistem $x' = F(x, y), y' = G(x, y)$ maka matriks Jacobian dari sistem tersebut adalah: (Boyce & DiPrima, 2000)

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix},$$

Misalkan diberikan sistem persamaan differensial nonlinier tundaan

$$\dot{x} = h(x(t - \tau)), \quad (2.8)$$

maka linierisasi dari sistem (2.8) di atas adalah $\dot{x} = J(\dot{h}(x^*))x$.

Menurut (Ermentrout, 2017) bentuk umum persamaan differensial waktu tunda adalah:

$$\frac{dX}{dt} = f(X, U)$$

dimana $U(t) = X(t - \tau)$ dan $F: R^{2n} \rightarrow R^n$. Titik tetap yang memenuhi adalah:

$$0 = F(X^*, X^*).$$

Titik tetap tersebut akan stabil asimtotik jika sistemnya stabil linier. Dari dua bentuk matriks $n \times n$ sebagai berikut:

$$A = (a_{ij}) \equiv \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad B = (b_{ij}) \equiv \frac{\partial F_i}{\partial u_j}$$

dimana semua dievaluasi pada titik tetap. Kemudian diperoleh hasil linier:

$$\frac{dY}{dt} = AY(t) - BY(t - \tau)$$

Misalkan $Y(t) = Ve^{\lambda t}$ dimana V adalah konstanta vektor. Jika bagian riil λ bernilai negatif, maka ini disebut solusi menurun, dan jika bernilai positif maka disebut solusi menaik. Substitusikan Y ke dalam persamaan sebelumnya sehingga

$$(\lambda I - A - Be^{-\lambda\tau})V = 0,$$

merupakan sebuah persamaan linier dari V . Ini memiliki solusi jika dan hanya jika

$$H(\lambda) \equiv \det(\lambda I - \mathbf{A} - \mathbf{B}e^{-\lambda\tau}) = 0.$$

Oleh karena itu diharuskan menyelesaikan persamaan transendental ini. Jika terdapat satu variabel waktu tunda maka:

$$H(\lambda) = P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau},$$

yang merupakan bentuk eksak dari teorema Brauers di lain catatan. Perhatikan bahwa terdapat berbagai macam teorema yang menjamin terdapat akar polinomial mempunyai bagian riil negatif.

2.2.3 Persamaan Karakteristik

Misal A adalah suatu matriks berordo $n \times n$ di dalam R^n . Suatu vektor tak nol x disebut vektor Eigen (*Eigen vektor*) dari A jika Ax adalah suatu kelipatan skalar dari x yakni $Ax = \lambda x$ untuk sebarang skalar λ . Skalar λ disebut nilai Eigen (*Eigen value*) dari A , dan x disebut sebagai vektor Eigen dari A yang bersesuaian dengan λ . Karena λ adalah nilai Eigen dari A dan x adalah vektor Eigen dari A maka $Ax = \lambda x = \lambda xI$ dimana I adalah matriks identitas. Persamaan tersebut mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika $\det(A - \lambda I) = 0$.

Atau dengan kata lain

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

Persamaan $\det(A - \lambda I) = 0$ akan menghasilkan persamaan polinomial dalam variabel λ dan disebut persamaan karakteristik dari matriks A . Skalar-skalar λ yang memenuhi persamaan karakteristik ini tidak lain adalah nilai-nilai eigen

dari matriks \mathbf{A} (Anton & Rorres, 2004). Polinomial karakteristik $p(x)$ dari sebuah matriks $n \times n$ memiliki bentuk :

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n. \quad (2.10)$$

Berdasarkan teorema dasar aljabar persamaan karakteristik dapat didefinisikan sebagai

$$\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0, \quad (2.11)$$

yang mampu memiliki solusi sebanyak n yang berbeda, sehingga matriks $n \times n$ juga memiliki paling banyak n nilai Eigen yang berbeda. (Anton dan roses 2004)

Dari persamaan (2.8), untuk mencari persamaan karakteristik dari persamaan diferensial tundaan yaitu

$$\Delta(\lambda, \tau) = \det(J(\mathbf{h}(x^*)) - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan, maka perlu diperiksa apakah bagian riil dari semua nilai Eigen matriks Jacobiannya bernilai negatif. Salah satu cara yang dapat digunakan adalah kriteria Routh-Hurwitz. Kriteria Routh-Hurwitz merupakan suatu metode yang digunakan untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar secara langsung (Handayani, Syafwan, & Efendi, 2013).

Misalkan a_1, a_2, \dots, a_n adalah bilangan asli dan $a_j = 0$ jika $j > n$ maka semua akar polinomial:

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-2} \lambda^2 + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (2.12)$$

Nilai Eigen dari persamaan di atas akan mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika determinan matriks $\mathbf{M}_{i \times i}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dengan:

$$M_i = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & L & a_{2i-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & L & a_{2i-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & L & a_{2i-3} \\ 0 & 1 & a_2 & L & a_{2i-4} \\ M & M & M & O & M \\ 0 & 0 & 0 & L & a_i \end{bmatrix}$$

bernilai positif. Menurut kriteria *Routh-Hurwitz* pada teorema di atas untuk suatu nilai i (untuk $i = 2,3,4$), titik tetap x^* akan stabil jika dan hanya jika:

$$i = 2; a_1 > 0, a_2 > 0,$$

$$i = 3; a_1 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3,$$

$$i = 4; a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4.$$

Berdasarkan persamaan karakteristik, cara yang digunakan untuk mengetahui kemungkinan adanya akar real positif dari sebuah persamaan polinom berderajat n adalah dengan menggunakan aturan tanda Descartes yang dinyatakan sebagai berikut. Misalkan:

$$p(m) = a_0 m^{b_0} + a_1 m^{b_1} + a_2 m^{b_2} + \dots + a_n m^{b_n}, \quad (2.13)$$

merupakan polinomial derajat n dengan koefisien real a_i dan b_i adalah bilangan bulat yang memenuhi $0 \leq b_0 < b_1 < \dots < b_n$. Maka banyaknya akar real positif dari $p(m)$ sama dengan banyaknya variasi tanda koefisien polinomialnya a_0, a_1, \dots, a_n .

2.2.4 Jenis Kestabilan

Penentuan kestabilan titik kesetimbangan dapat diperoleh dengan memperhatikan nilai Eigen yaitu $\lambda_i, i = 1,2,3 \dots, n$ dimana nilai eigen tersebut diperoleh dari persamaan karakteristik dari A , yaitu $\det(A - \lambda I) = 0$. Menurut (Sulisti, Noviani, & Kusumastuti, 2014), secara umum kestabilan titik

kesetimbangan terbagi menjadi tiga, yaitu stabil, stabil asimtotik, dan tidak stabil.

Berikut ini diberikan definisi mengenai kestabilan titik kesetimbangan:

Definisi kestabilan sebuah titik kesetimbangan dapat diklasifikasikan sebagai berikut:

1. Suatu titik kesetimbangan x^* dari suatu sistem dinamik $\dot{x} = f(x)$ dikatakan stabil jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga bila $\|x_0 - x^*\| < \delta$ maka $\|x(t, x_0) - x^*\| < \varepsilon$ untuk semua $t > t_0$
2. Suatu titik kesetimbangan x^* dari sistem dinamik $\dot{x} = f(x)$ dikatakan stabil asimtotik jika x^* stabil dan terdapat bilangan $\delta_1 > 0$ sedemikian hingga $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - x^*\| = 0$ dengan syarat $\|x_0 - x^*\| < \delta_1$.
3. Suatu titik kesetimbangan dari sistem dinamik $\dot{x} = f(x)$ dikatakan tak stabil jika x^* tak stabil yaitu poin (1) tidak dipenuhi.

Tabel 2.1 Kestabilan Titik Ekuilibrium Sistem Dinamik (Boyce dan DiPrima, 2009, hal. 494)

No	Nilai Eigen	Kestabilan	Jenis
	$\lambda_i \lambda_j \in \mathbf{R}$		
1.	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	Node/Simpul
2.	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	Node/Simpul
3.	$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Tidak Stabil	Saddle/Pelana
4.	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	Node/Simpul
5.	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	Node/Simpul
	$\lambda_{12} = a + bi \in \mathbf{C}$		
6.	$a > 0$	Tidak Stabil	Spiral
7.	$a < 0$	Stabil Asimtotik	Spiral
8.	$a = 0$	Stabil	Terpusat

2.2.5 Nilai Kritis Waktu Tunda

Menurut (Forde & Nelson, 2004), ketika $\tau \neq 0$ akar karakteristik λ mengalami perubahan. Akan terdapat suatu nilai kritis τ dimana akar-akar karakteristik mengalami perubahan dari yang awalnya mempunyai nilai riil

negatif menjadi nilai riil positif atau sebaliknya. Misalkan diberikan sistem persamaan sebagai berikut (Kar, 2003):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x(t) - \beta y(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -\delta y(t) + \beta x(t) - \delta y(t - \tau),\end{aligned}\tag{2.14}$$

dengan $\tau \geq 0$.

Persamaan (2.14) kemudian dilinerisasi disekitar titik tetap dan didapatkan persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\Delta(\lambda, \tau) = \lambda^2 + a\lambda + c + (b\lambda + f)e^{-\lambda\tau} = 0.\tag{2.15}$$

Jika $\lambda = i\omega$ adalah akar persamaan dari persamaan (2.15), maka didapatkan:

$$(i\omega)^2 + ai\omega + c + (bi\omega + f)e^{-i\omega\tau} = 0.\tag{2.16}$$

Karena $e^{-i\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)$ dan $i^2 = -1$, maka

$$-\omega^2 + ai\omega + c + (bi\omega + f)(\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)) = 0.\tag{2.17}$$

Kemudian dipisahkan bagian imajiner dan bagian real nya, sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned}c - \omega^2 + b\omega \sin(\omega\tau) + f \cos(\omega\tau) &= 0 \\ a\omega + b\omega \sin(\omega\tau) - f \cos(\omega\tau) &= 0.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Selanjutnya mengkuadratkan kedua ruas kemudian dijumlahkan, sehingga diperoleh:

$$\omega^4 + (a^2 - b^2 - 2c)\omega^2 + c^2 - f^2 = 0.\tag{2.19}$$

Kemudian substitusikan ω_{\pm}^2 kedalam persamaan (2.17) untuk mencari nilai tunda kritis τ_k^{\pm} . Digunakan beberapa teorema dalam menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan persamaan diferensial dengan waktu tunda sebagai berikut (Kar, 2003):

Teorema 1

Syarat dan kondisi perlu untuk titik kesetimbangan (x^*, y^*) menjadi stabil asimtotik untuk semua $\tau \geq 0$ adalah sebagai berikut:

1. Bagian real untuk setiap akar-akar dari $\Delta(\lambda, 0) = 0$ adalah negatif.
2. Untuk setiap real ω dan $\tau \geq 0$, $\Delta(i\omega, \tau) \neq 0$, dimana $i = \sqrt{-1}$.

Teorema 2

Jika nilai eigen dari sebuah persamaan karakteristik bernilai positif, teorema 1 terpenuhi, dan persamaan karakteristik dalam polinom berderajat n mempunyai akar real positif, maka titik kesetimbangan (x^*, y^*) adalah stabil asimtotik untuk $\tau \geq 0$.

Menurut (Adimy, Mostafa, Crauste, & Ruan, 2006), misalkan $\lambda = \eta \pm i\omega$ adalah persamaan karakteristik, titik kesetimbangan (x^*, y^*) akan stabil jika $\eta < 0$. Jika terdapat suatu nilai tunda kritis $\tau > 0$ yang dapat menyebabkan $\eta(\tau) = 0$ sehingga $\tau = \pm i\omega(\tau)$ merupakan imajiner murni persamaan tersebut, maka titik kesetimbangan (x^*, y^*) mengalami perubahan sifat kestabilan. Pada kasus ini, disubstitusikan $\lambda = i\omega, \omega > 0, \omega \in \mathbf{R}$ ke dalam persamaan karakteristik yang telah di dapatkan.

Setelah menemukan nilai waktu tunda kritis τ_k^\pm dan akar karakteristik yang terdapat pada garis imajiner $\lambda = i\omega$, kemudian akan diselidiki kondisi transversal. Menurut (Kar, 2003), kondisi transversal adalah kondisi yang dapat menyebabkan perubahan sifat kestabilan dari titik tetap ketika waktu tunda τ berubah. Maka dari itu perlu diketahui bahwa akar karakteristik akan bergerak menuju bidang imajiner yang positif atau imajiner murni ketika waktu tunda τ membesar melebihi waktu tunda kritis τ_k^\pm sehingga disebut dengan Bifurkasi Hopf. Menurut

(Erneux, 2009) Bifurkasi Hopf menunjukkan solusi periodik pada lingkungan stabil yang mengalami perubahan kestabilan dikarenakan berubahnya nilai eigen pada akar-akar karakteristik yang akan bernilai imajiner murni saat titik kritis tundaan τ_0 . Proses identifikasi melalui kondisi transversal dilakukan sebagai syarat terjadinya Bifurkasi Hopf.

Kondisi transversal menurut (Erneux, 2009) adalah sebagai berikut:

$$\frac{d(Re\lambda)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_k^+, \lambda=i\omega} > 0 \text{ dan } \frac{d(Re\lambda)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_k^-, \lambda=i\omega} < 0.$$

2.3 Pemodelan Matematika

Model adalah representasi suatu realitas dari seorang pemodel atau dengan kata lain model adalah jembatan antara dunia nyata (*real word*) dengan dunia berpikir (*thinking*) untuk memecahkan suatu masalah. Proses penjabaran atau mempresentasikan ini disebut *modelling* atau pemodelan yang tak lain merupakan proses berfikir melalui runtutan yang logis. Dalam membangun sebuah model diperlukan beberapa tahapan agar dihasilkan model yang dapat dipercaya dan konsisten. Secara umum tahapan-tahapan tersebut adalah mengidentifikasi masalah, membangun asumsi-asumsi, membuat kontruksi model, menganalisis, menginterpretasi model validasi model, dan mengimplementasi model (Pagalay U. , 2009).

Dalam skripsi ini, penulis akan membahas model penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan dengan waktu tunda. Model ini juga mengasumsikan bahwa populasi *host* konstan, model penularan demam berdarah dengan mengasumsikan bahwa sekali seseorang sembuh dari penyakit, ia tidak akan terinfeksi kembali oleh penyakit tersebut. Terdapat empat jenis virus yang

telah diidentifikasi. Sembuh dari salah satu dari empat jenis virus tidak akan menjamin bahwa seseorang akan kebal terhadap jenis lainnya. Oleh karena itu model di bawah ini mengasumsikan bahwa subpopulasi imun dapat diabaikan (Yaacob, 2007). Dengan asumsi bahwa subpopulasi kekebalan diabaikan :

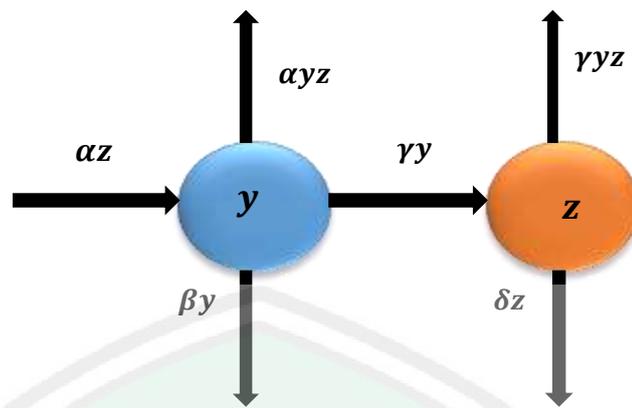
$$\begin{aligned}\frac{dS_H}{dt} &= \mu_H N_H - \frac{\beta_H b}{N_H} S_H I_V - \mu_H S_H, \\ \frac{dI_H}{dt} &= \frac{\beta_H b}{N_H} S_H I_V - (\mu_H + \gamma_H) I_H, \\ \frac{dS_V}{dt} &= A - \frac{\beta_V b}{N_H} S_V I_H - \mu_V S_V, \\ \frac{dI_V}{dt} &= \frac{\beta_V b}{N_H} S_V I_H - \mu_V I_V.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Kemudian dari sistem persamaan (2.20) direduksi menjadi dua sistem persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \alpha(1-y)z - \beta y \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma(1-z)y - \delta z,\end{aligned}\tag{2.21}$$

dimana $y = \frac{I_H}{N_H}$, $z = \frac{I_V}{A/\mu_V}$, $\beta = \gamma_H + \mu_H$, $\gamma = b\beta_V$, $\delta = \mu_V$ dan $\alpha = \frac{b\beta_H A}{\mu_V N_H}$.

Berikut adalah proses terbentuknya model penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan setelah mengalami periode inkubasi yang menyebabkan terjadinya tundaan waktu:



Gambar 2.1 Diagram Kompartemen Model

Misalkan $y(t)$ adalah populasi manusia yang terkenal penyakit demam berdarah, dan $z(t)$ merupakan populasi nyamuk yang terinfeksi virus *dengue*. Penyakit demam berdarah menyebar melalui gigitan nyamuk *Aedes Aegypti* yang telah terinfeksi oleh virus *dengue*. $\alpha z(t)$ merupakan laju pertumbuhan dari nyamuk yang terkena virus *dengue*. Sedangkan $\delta z(t)$ merupakan laju kematian yang dialami oleh nyamuk *Aedes Aegypti*. Perubahan populasi manusia akan berkurang ketika adanya interaksi antara manusia dengan gigitan nyamuk *Aedes Aegypti*, tetapi terdapat waktu yang sebelumnya yang diperhatikan sehingga menyebabkan terjadi tundaan waktu pada $y(t - \tau)$.

Berdasarkan definisi yang dipaparkan di atas, sistem yang menggambarkan proses penularan penyakit demam berdarah dengan waktu tunda yang dirumuskan oleh (Yaacob, 2007) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \alpha z(t) - \alpha z(t)y(t - \tau) - \beta y(t - \tau) \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma y(t - \tau) - \gamma z(t)y(t - \tau) - \delta z(t). \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.3.1 Pengertian Penyakit Demam Berdarah

Menurut (Metrikawati, 2014), penyakit demam berdarah *dengue* (DBD) merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh virus *dengue*. Penyakit DBD merupakan penyakit dengan manifestasi klinis pendarah yang mampu menyebabkan kematian. Salah satu dari empat serotype virus dari genus *Flavivirus* keluarga dari *Flaviviridae* adalah penyebab penyakit DBD. Setiap *serotype* mempunyai fungsi berbeda, sehingga tidak terdapat proteksi silang dan wabah yang disebabkan oleh setiap serotype dapat terjadi.

Virus *dengue* terdiri dari empat serotip dari genus *Flavivirus* keluarga *Flaviviridae* yaitu Den-1, Den-2, Den-3, dan Den-4 dimana *dengue* tipe tiga merupakan *serotype* virus yang sangat dominan menyebabkan kasus yang berat. Nyamuk yang menjadi vektor adalah *Aedes sp.* Spesies *Aedes* yang menjadi vektor di berbagai negara di dunia antara lain *Ae. aegypti*, *Ae. albopictus*, *Ae. scutellaris*, *Ae. mediovittatus*, *Ae. polynesiensis*. Di Indonesia, vektor yang penting adalah *Aedes. aegypti*, *Aedes. albopictus*, dan *Aedes. scutellaris*.

2.3.2 Proses Terjadinya Penyakit Demam Berdarah

Proses terjadinya penyakit DBD dimulai dari nyamuk *Aedes aegypti* yang terinfeksi melalui pengisapan darah dari orang yang sakit dan dapat menularkan virus *dengue* kepada manusia, baik secara langsung (setelah menggigit orang yang sedang dalam fase viremia) maupun secara tidak langsung, setelah melewati masa inkubasi dalam tubuhnya (masa inkubasi ekstrinsik/periode inkubasi ekstrinsik) (Metrikawati, 2014).

Terdapat tiga faktor yang berperan dalam penularan infeksi virus *dengue*, yaitu manusia, virus, dan vektor perantara. Setelah nyamuk yang mengandung virus *dengue* menggigit manusia yang telah mengalami viremia, virus yang berada pada kelenjar liur berkembang biak selama 8-10 hari sebelum dapat ditularkan kepada manusia pada gigitan nyamuk yang selanjutnya (A, 2014). Secara garis besar patogenesis DBD adalah setelah virus *dengue* masuk ke tubuh manusia, virus ini selama 3-8 hari berada dalam masa inkubasi di lokasi gigitan (sebagian turut peredaran darah). Setelah berkembang biak virus akan masuk ke dalam peredaran darah dan menyebabkan terjadinya viremia. Masa viremia dimulai dari 6-18 jam sebelum terjadi sakit dan berlangsung sekitar 1-7 hari atau masa penularan dari manusia kepada nyamuk dapat terjadi apabila nyamuk menggigit manusia yang sedang mengalami viremia. Fase viremia terjadi ketika pasien mulai demam dan terinfeksi (Metrikawati, 2014).

Akibat infeksi kedua oleh tipe virus *dengue* yang berlainan pada seorang penderita dengan kadar antibodi anti *dengue* yang rendah, respons antibodi anamnestic yang akan terjadi dalam beberapa hari mengakibatkan proliferasi dan transformasi limfosit imun dengan menghasilkan antibodi immunoglobulin G anti *dengue* titer tinggi. Replikasi virus *dengue* terjadi dengan akibat terdapatnya virus dalam jumlah yang banyak. Hal-hal ini semuanya akan mengakibatkan terbentuknya kompleks anti gen antibodi yang selanjutnya akan mengaktivasi sistem komplemen. Pelepasan C3a dan C5a akibat aktivasi C3 dan C5 menyebabkan meningginya pelolosan sebuah partikel pada dinding pembuluh darah dan merembesnya plasma melalui endotel dinding pembuluh darah. Pada penderita renjatan berat, volume plasma dapat berkurang sampai lebih dari pada

30% dan berlangsung selama 24-48 jam. Renjatan yang tidak ditanggulangi secara kuat akan menimbulkan anoksia jaringan atau tubuh yang kehabisan oksigen, asidosis metabolik atau gangguan ketika status asam basa bergeser ke asam sehingga menimbulkan hiangnya basa dalam tubuh dan kematian. Tetapi dalam penelitian kali ini, imunologi diabaikan atau penelitian ini membahas mengenai penularan penyakit DBD tanpa sel imun (A, 2014). Dari proses tersebut kemudian dimodelkan menjadi model matematika penyakit demam berdarah.

2.3.3 Gejala Penyakit Demam Berdarah

Gejala penyakit demam berdarah adalah munculnya demam secara tiba-tiba, disertai sakit kepala berat, sakit pada sendi dan otot (*myalgia* dan *arthralgia*) dan ruam, ruam demam berdarah mempunyai ciri-ciri merah terang, dan biasanya muncul dulu pada bagian bawah badan dan menyebar hingga menyelimuti hampir seluruh tubuh. Selain itu, radang perut bisa juga muncul dengan kombinasi sakit di perut, rasa mual, muntah-muntah atau diare. Penyebab demam berdarah menunjukkan demam yang lebih tinggi, pendarahan, trombositopenia dan hemokonsentrasi. Sejumlah kecil kasus bisa menyebabkan sindrom shock *dengue* yang mempunyai tingkat kematian tinggi (T & R, 2010).

Pencegahan yang mampu dilakukan untuk menghindari penularan penyakit dapat dilakukan dengan beberapa hal diantaranya adalah : (Yudhastuti & Vidiyani, 2005)

1. Masyarakat mampu menerapkan 3M yaitu menguras tempat penampungan air dengan menyikat dasar dan dindingnya secara teratur serta menaburkan bubuk

abate atau bahan kimia kedalam bak atau tempat penampungan air yang tidak dapat dikuras.

2. Melakukan pemeriksaan jentik-jentik secara teratur pada setiap daerah oleh pihak-pihak kesehatan masyarakat sehingga mampu mengurangi kepadatan jentik nyamuk *Aedes Aegypti*.
3. Memastikan keadaan lingkungan sekitar agar tetap bersih dengan cara pengolahan sampah kembali atau *Reduce*, tersedianya tempat penampungan sampah di setiap daerah agar tidak membuang sampah sembarangan.
4. Pemanfaatan musuh-musuh predator nyamuk yang ada di alam misalnya ikan untuk dimasukkan ke dalam bak mandi atau tempat penampungan air lainnya agar mampu memakan jentik-jentik didalam air tersebut.

2.4 Kestabilan dalam Perspektif Islam

Materi mengenai hewan, tumbuh-tumbuhan, manusia, amoeba, virus, dan lain sebagainya yang berhubungan dengan makhluk hidup banyak dibahas dalam ilmu biologi. Dimulai dari perkembang biakan, pertumbuhan, serta semua yang terkandung di dalam makhluk hidup, pasti bisa diketahui dengan belajar ilmu biologi. Semua makhluk hidup yang berada pada muka bumi ini diciptakan dengan kelebihan dan kekurangan masing-masing. Semuanya pasti memiliki manfaat untuk kehidupan disekelilingnya. Seperti halnya Allah menciptakan hewan dengan segala bentuk mulai dari yang besar seperti gajah, jerapah, dinosaurus dan lain-lain hingga yang bentuknya kecil seperti nyamuk, lalat, kutu semuanya hidup di muka bumi ini dengan berbagai kelebihan yang mampu menciptakan manfaat

dan juga dengan berbagai kekurangan yang bisa menciptakan bahaya untuk lingkungan disekitarnya.

Nyamuk misalnya ada yang berbahaya dan ada yang tidak berbahaya. Nyamuk merupakan hewan sejenis serangga yang berkembangbiak dengan cara bertelur dan tinggal di tempat yang lembab. Nyamuk yang berbahaya mampu menyebarkan penyakit ke tubuh manusia, seperti nyamuk *Aedes Sp.* Nyamuk ini mampu menyebarkan virus *dengue* ke dalam tubuh manusia melalui gigitan. Virus *dengue* inilah yang nantinya penyebab terjadinya penyakit demam berdarah. Ketika mengamati proses kehidupan nyamuk mulai dari lahir hingga mati sangatlah rumit dan kompleks.

Berdasarkan Firman Allah dalam al-Qur'an Surat al-Baqarah ayat 26:

إِنَّ اللَّهَ لَا يَسْتَحْيِي أَنْ يَضْرِبَ مَثَلًا مَّا بَعُوضَةً فَمَا فَوْقَهَا فَأَمَّا الَّذِينَ آمَنُوا فَيَعْلَمُونَ أَنَّهُ
الْحَقُّ مِنْ رَبِّهِمْ وَأَمَّا الَّذِينَ كَفَرُوا فَيَقُولُونَ مَاذَا أَرَادَ اللَّهُ بِهَذَا مَثَلًا يُضِلُّ بِهِ كَثِيرًا وَيَهْدِي بِهِ
كَثِيرًا وَمَا يُضِلُّ بِهِ إِلَّا الْفَاسِقِينَ (٢٦)

Artinya: “*Sesungguhnya Allah tidak segan membuat perumpamaan seekor nyamuk atau yang lebih kecil dari itu. Adapun orang-orang yang beriman, mereka tahu bahwa itu kebenaran dari Tuhan. Tetapi mereka yang kafir berkata, “Apa maksud Allah dengan perumpamaan ini?” Dengan (perumpamaan) itu banyak orang yang dibiarkan-Nya sesat, dan dengan itu banyak (pula) orang yang diberi-Nya petunjuk. Tetapi tidak ada yang Dia sesatkan dengan (perumpamaan) itu selain orang-orang fasik,*”

Tafsir Ibnu Katsir menjelaskan bahwa “*sesungguhnya Allah tiada segan membuat perumpamaan berupa nyamuk atau yang lebih rendah dari itu*”. Abu Ja'far Ar-Razi meriwayatkan dari Ar-Rabi' ibnu Anas sehubungan dengan ayat ini, bahwa hal ini merupakan perumpamaan yang dibuat oleh Allah untuk menggambarkan dunia, yaitu nyamuk tetap hidup selagi dalam keadaan lapar, tetapi bila telah gemuk (kekenyangan), maka ia mati.

Nyamuk yang bentuk tubuhnya kecil ini dipilih Allah untuk dijadikan perumpamaan dalam Al-Quran serta dijadikan contoh untuk memperlihatkan betapa besar kuasa Allah. Meskipun tubuh nyamuk kecil, tetapi di dalam tubuhnya mempunyai organ-organ yang sangat berperan dalam kehidupan. Apabila salah satu saja organ tidak bekerja baik, maka nyamuk akan memperoleh kesulitan dalam memperoleh pakannya serta meneruskan dan mempertahankan jenisnya. Dengan rancangan tubuh yang demikian, walaupun hanya pada nyamuk yang kecil, ini merupakan bukti akan penciptaan Allah yang luar biasa.



BAB III

PEMBAHASAN

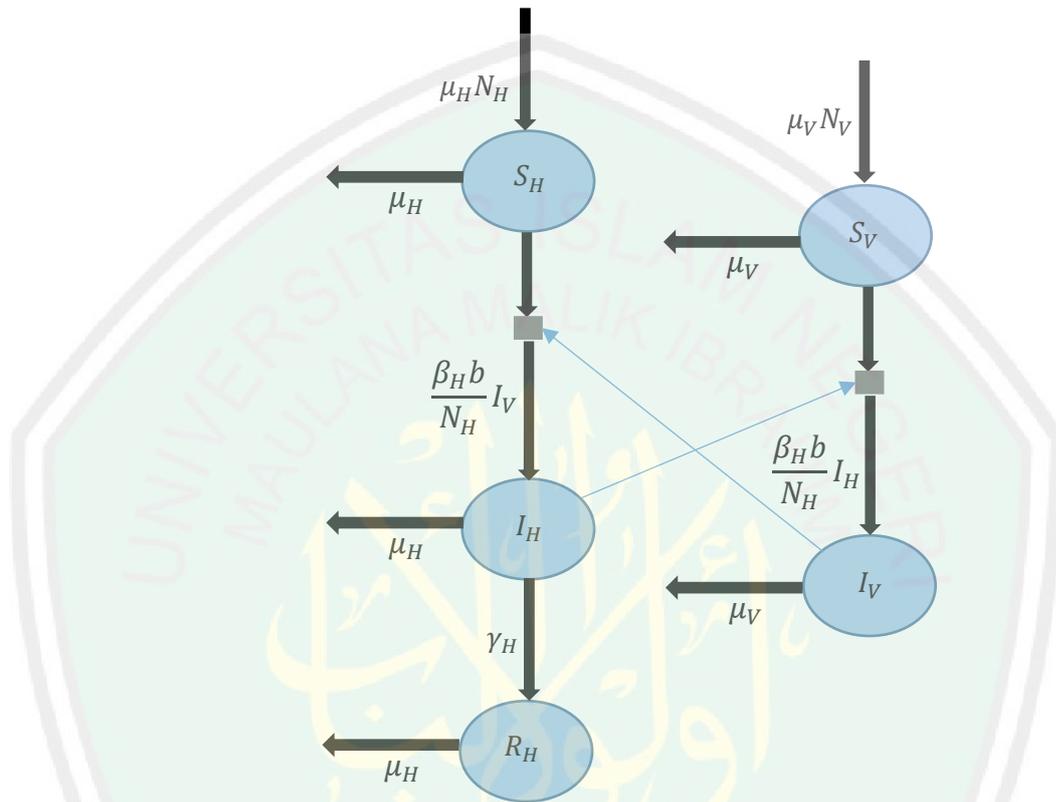
3.1 Deskripsi Model Penularan Penyakit Demam Berdarah tanpa Kekebalan dengan Waktu Tunda

Model matematika yang digunakan pada penelitian ini merupakan model epidemi SIR *host-vektor* atau manusia-nyamuk dari penularan penyakit demam berdarah. Populasi *host* terbagi menjadi tiga sub populasi yaitu sub populasi manusia yang rentan S_H (*susceptible*), sub populasi manusia yang terinfeksi virus *degue* I_H (*infected*), dan sub populasi manusia yang sembuh atau pulih R_H (*recovered*). Populasi vektor terbagi menjadi dua yaitu sub populasi nyamuk yang rentan S_V (*susceptible*) dan sub populasi nyamuk yang terinfeksi I_V (*infected*). Asumsi-asumsi yang digunakan sebelum pembentukan model adalah sebagai berikut (Yaacob, 2007):

- 1) Nyamuk menggigit selama beberapa waktu (ada kecenderungan untuk gigitan berlipat ganda),
- 2) Masa hidup nyamuk selama 10 hari,
- 3) Jarak terbang dari nyamuk adalah 100 meter,
- 4) Nyamuk bertelur pada lingkungan air yang bersih (tempat bersarangnya berada didalam rumah),
- 5) Telur nyamuk menetas 6-8 hari, tetapi mampu bertahan hidup lebih lama dan setelah menetas kontak pertamanya dengan air,
- 6) Tingkat kelangsungan hidup telur sampai dewasa sangat rendah,
- 7) Periode inkubasi selama 14 hari,
- 8) Virus tinggal pada tubuh manusia selama 7 hari akan mati secara alami, dan

9) Penularan vertikal pada nyamuk tidak signifikan.

Secara sistematis model penularan penyakit demam berdarah dapat digambarkan dalam diagram kompartemen sebagai berikut:



Gambar 3.1 Diagram kompartemen model DBD

Berdasarkan diagram di atas diasumsikan laju pertumbuhan dan laju kematian manusia sama yaitu sebesar μ_H . Perubahan populasi manusia yang rentan secara alami akan bertambah dikarenakan oleh kelahiran sebesar μ_H , kemudian akan berkurang karena adanya penginfeksi manusia yang rentan S_H oleh nyamuk yang terinfeksi I_V dengan memperhatikan perbandingan antara peluang penularan virus *dengue* oleh nyamuk ke manusia sebesar β_H dengan populasi manusia N_H dikalikan rata-rata jumlah gigitan nyamuk kepada manusia

b , setelah itu populasi manusia rentan juga akan berkurang sebab adanya kematian secara alami.

Manusia yang rentan kemudian berubah menjadi manusia yang terinfeksi I_H . Perubahan populasi manusia yang terinfeksi bertambah dikarenakan semakin banyaknya manusia yang rentan S_H oleh nyamuk yang terinfeksi I_V dengan memperhatikan perbandingan antara peluang penularan virus *dengue* oleh nyamuk ke manusia sebesar β_H dengan populasi manusia N_H dikalikan rata-rata jumlah gigitan nyamuk kepada manusia b , setelah manusia terinfeksi virus *dengue* lama kelamaan akan mengalami kematian secara alami sebesar μ_H , selain berkurang karena kematian secara alami, manusia yang terinfeksi juga berkurang sebab adanya pengaruh kekebalan sebesar γ_H dalam tubuhnya yang menyebabkan manusia terinfeksi menjadi semakin pulih. Kemudian manusia yang terinfeksi akan berpindah menjadi manusia yang sembuh atau pulih dengan laju sebesar γ_H , dan bisa berkurang dikarenakan kematian secara alami sebesar μ_H .

Laju kelahiran dan kematian nyamuk juga diasumsikan sama yaitu μ_V . Kelahiran nyamuk yang rentan secara alami akan bertambah dikarenakan kelahiran, kemudian berkurang karena adanya penginfeksi nyamuk yang rentan μ_V oleh manusia yang terinfeksi virus *dengue* dan pada masa *viremia* I_H dengan memperhatikan perbandingan antara peluang penularan virus *dengue* oleh nyamuk ke manusia sebesar β_H dengan populasi manusia N_H dikalikan rata-rata jumlah gigitan nyamuk kepada manusia b , nyamuk juga dapat berkurang karena nyamuk akan mati secara alami.

Nyamuk yang rentan akan berubah menjadi nyamuk yang terinfeksi I_V . Jumlah nyamuk yang terinfeksi akan bertambah dikarenakan adanya penularan

atau penginfeksi nyamuk yang rentan μ_V oleh manusia yang terinfeksi virus *dengue* dan pada masa *viremia* I_H dengan memperhatikan perbandingan antara peluang penularan virus *dengue* oleh nyamuk ke manusia sebesar β_H dengan populasi manusia N_H dikalikan rata-rata jumlah gigitan nyamuk kepada manusia b , kemudian nyamuk juga dapat berkurang karena nyamuk akan mati secara alami.

Berdasarkan diagram kompartmen di atas, dihasilkan model penularan penyakit demam berdarah dimodelkan dalam bentuk persamaan differensial sebagai berikut:

$$\frac{dS_H(t)}{dt} = \mu_H N_H(t) - \frac{\beta_H b}{N_H(t)} S_H(t) I_V(t) - \mu_H S_H(t)$$

$$\frac{dI_H(t)}{dt} = \frac{\beta_H b}{N_H(t)} S_H(t) I_V(t) - (\mu_H + \gamma_H) I_H(t)$$

$$\frac{dR_H(t)}{dt} = \gamma_H I_H(t) - \mu_H R_H(t)$$

$$\frac{dS_V(t)}{dt} = \mu_V N_V(t) - \frac{\beta_V b}{N_H(t)} S_V(t) I_H(t) - \mu_V S_V(t)$$

$$\frac{dI_V(t)}{dt} = \frac{\beta_V b}{N_H(t)} S_V(t) I_H(t) - \mu_V I_V(t)$$

dimana:

$$S_H(t) + I_H(t) = N_H(t), S_V(t) + I_V(t) = \frac{A}{\mu_V}, x(t) = \frac{S_H(t)}{N_H(t)}, y(t) = \frac{I_H(t)}{N_H(t)}, z(t) = \frac{I_V(t)}{A/\mu_V}, \alpha = \frac{\beta_H b A}{N_H(t) \mu_V}, \beta = \gamma_H + \mu_H, \gamma = b \beta_V, \text{ dan } \delta = \mu_V.$$

Dari model di atas kemudian direduksi menjadi tiga sistem persamaan $\frac{dx}{dt}$,

$\frac{dy}{dt}$ dan $\frac{dz}{dt}$ sebagai berikut:

Substitusikan $S_H(t) = x(t)N_H(t)$, $I_H(t) = yN_H(t)$, $I_V(t) = \frac{zA}{\mu_V}$ kedalam $\frac{dS_H(t)}{dt}$

$$N_H(t) \frac{dx(t)}{dt} = \mu_H N_H(t) - \frac{\beta_H b}{N_H(t)} \cdot x N_H(t) \cdot \frac{zA}{\mu_V} - \mu_H x(t) N_H(t)$$

$$N_H(t) \frac{dx(t)}{dt} = \mu_H N_H(t) - \left(\frac{\beta_H b A}{\mu_V} \right) x(t) z(t) - \mu_H x(t) N_H(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mu_H - \left(\frac{\beta_H b A}{\mu_V N_H(t)} \right) x(t) z(t) - \mu_H x(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mu_H (1 - x(t)) - \alpha x(t) z(t)$$

Kemudian substitusikan $S_H(t) = x(t)N_H(t)$, $I_H(t) = y(t)N_H(t)$, $I_V(t) = \frac{zA}{\mu_V}$

kedalam $\frac{dI_H(t)}{dt}$

$$N_H(t) \frac{dy(t)}{dt} = \frac{\beta_H b}{N_H(t)} x(t) N_H(t) \frac{zA}{\mu_V(t)} - (\mu_H + \gamma_H) y N_H(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \left(\frac{\beta_H b A}{N_H(t) \mu_V} \right) x(t) z(t) - (\mu_H + \gamma_H) y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \alpha x(t) z(t) - \beta y(t)$$

Selanjutnya jika diketahui $S_V(t) + I_V(t) = \frac{A}{\mu_V}$ dan $I_V(t) = \frac{z(t)A}{\mu_V}$ maka $S_V(t) =$

$$\frac{A}{\mu_V} - I_V(t) = \frac{A}{\mu_V} - \frac{z(t)A}{\mu_V} \text{ sehingga}$$

$$\frac{dS_V(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{A}{\mu_V} - \frac{z(t)A}{\mu_V} \right)$$

$$\frac{dS_V(t)}{dt} = \frac{A}{\mu_V} \left(\frac{d}{dt} (1 - z(t)) \right)$$

$$\frac{dS_V(t)}{dt} = - \frac{A}{\mu_V} \frac{dz(t)}{dt}$$

$$A - \frac{\beta_V b}{N_H(t)} S_V(t) I_H(t) - \mu_V S_V(t) = - \frac{A}{\mu_V} \frac{dz(t)}{dt}$$

substitusikan $I_H(t) = y(t)N_H(t)$ ke persamaan diatas

$$A - \frac{\beta_V b}{N_H(t)} \left(\frac{A}{\mu_V} - \frac{z(t)A}{\mu_V} \right) y(t) N_H(t) - \mu_V \left(\frac{A}{\mu_V} - \frac{z(t)A}{\mu_V} \right) = - \frac{A}{\mu_V} \frac{dz(t)}{dt}$$

$$A - \beta_V b \frac{A}{\mu_V} (1 - z(t)) y(t) - A(1 - z(t)) = - \frac{A}{\mu_V} \frac{dz(t)}{dt}$$

$$- \frac{dz(t)}{dt} = \mu_V - \beta_V b (1 - z(t)) y(t) - \mu_V (1 - z(t))$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\mu_V + \beta_V b (1 - z(t)) y(t) + \mu_V (1 - z(t))$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \beta_V b (1 - z(t)) y(t) - \mu_V z(t)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \gamma (1 - z(t)) y(t) - \delta z(t)$$

Setelah melewati proses pereduksian di atas, model penularan penyakit demam berdarah menjadi:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mu_H (1 - x(t)) - \alpha x(t) z(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \alpha x(t) z(t) - \beta y(t)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \gamma (1 - z(t)) y(t) - \delta z(t).$$

Pemulihan satu dari empat tipe virus tidak membuktikan bahwa seseorang dapat kebal terhadap virus lainnya. Sehingga dapat diasumsikan bahwa subpopulasi kekebalan diabaikan. Asumsi sub populasi kekebalan diabaikan sehingga model penularan penyakit demam berdarah menjadi:

$$\frac{dS_H(t)}{dt} = \mu_H N_H(t) - \frac{\beta_H b}{N_H(t)} S_H(t) I_V(t) - \mu_H S_H(t)$$

$$\frac{dI_H(t)}{dt} = \frac{\beta_H b}{N_H(t)} S_H(t) I_V(t) - (\mu_H + \gamma_H) I_H(t)$$

$$\frac{dS_V(t)}{dt} = \mu_V N_V(t) - \frac{\beta_V b}{N_H(t)} S_V(t) I_H(t) - \mu_V S_V(t)$$

$$\frac{dI_V(t)}{dt} = \frac{\beta_V b}{N_H(t)} S_V(t) I_H(t) - \mu_V I_V(t)$$

dimana $S_H(t) + I_H(t) = N_H(t)$ dan $S_V(t) + I_V(t) = \frac{A}{\mu_V}$.

Kemudian sistem di atas direduksi menjadi dua sistem persamaan seperti langkah mereduksi sebelumnya sehingga menjadi:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \alpha x(t) z(t) - \beta y(t)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \gamma(1 - z(t))y(t) - \delta z(t)$$

Karena $x(t) = \frac{S_H(t)}{N_H(t)}$, $y(t) = \frac{I_H(t)}{N_H(t)}$ maka

$$x(t) + y(t) = \frac{S_H(t) + I_H(t)}{N_H(t)}$$

$$= \frac{N_H(t)}{N_H(t)}$$

$$= 1$$

$$\Leftrightarrow x(t) = 1 - y(t)$$

Substitusikan $x(t) = 1 - y(t)$ kedalam $\frac{dy(t)}{dt} = \alpha x(t) z(t) - \beta y(t)$ sehingga menjadi

$$\frac{dy(t)}{dt} = \alpha(1 - y(t))z(t) - \beta y(t)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \gamma(1 - z(t))y(t) - \delta z(t).$$

Kemudian karena laju penularan penyakit demam berdarah mengalami masa inkubasi dalam tubuh manusia, sehingga menyebabkan terjadinya waktu tunda. Oleh karena itu (Yaacob, 2007) memodifikasi model menjadi model penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan dengan waktu tunda. Adapun model tersebut adalah sebagai berikut :

$$\frac{dy(t)}{dt} = \alpha z(t)(1 - y(t - \tau)) - \beta y(t - \tau) \quad (3.1)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = \gamma y(t - \tau)(1 - z(t)) - \delta z(t). \quad (3.2)$$

Variabel-variabel yang digunakan dalam model adalah:

$y(t)$ = Populasi *host* atau manusia yang terinfeksi virus *dengue*

$z(t)$ = Populasi vektor atau nyamuk yang terinfeksi virus *dengue*

τ = Waktu yang dibutuhkan virus selama periode inkubasi dalam tubuh manusia (per hari)

Berikut ini merupakan parameter-parameter yang digunakan pada model matematika penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan:

Tabel 3.1 Definisi Parameter

No	Parameter	Nilai
1.	α	0.26
2.	β	0.1
3.	γ	1
4.	δ	0.24

dengan $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

Adapun interpretasi dari model penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan terdiri dari populasi manusia yang terinfeksi virus *dengue* $y(t)$ dan populasi vektor atau nyamuk yang terinfeksi virus *dengue* $z(t)$ adalah sebagai berikut:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \alpha z(t)(1 - y(t - \tau)) - \beta y(t - \tau).$$

Perubahan populasi manusia yang terinfeksi virus *dengue* terhadap waktu bertambah dengan pertambahan logistik yang berbanding lurus atau dipengaruhi oleh populasi nyamuk. Pertambahan populasi manusia yang terinfeksi mengalami perlambatan dengan laju sebesar α , apabila jumlah manusia telah mencapai

kapasitas batas yaitu $y = 1$. Sehingga mengakibatkan tidak ada manusia pada periode inkubasi τ yang berinteraksi dengan nyamuk. Kemudian populasi manusia berkurang dikarenakan oleh kematian secara alami dari manusia yang terinfeksi pada periode inkubasi dengan laju mortalitas sebesar β .

$$\frac{dz(t)}{dt} = \gamma y(t - \tau)(1 - z(t)) - \delta z(t).$$

Perubahan populasi nyamuk yang terinfeksi virus *dengue* terhadap waktu bertambah dengan pertambahan logistik yang berbanding lurus atau dipengaruhi dengan populasi manusia pada periode inkubasi. Pertambahan populasi nyamuk yang terinfeksi mengalami perlambatan dengan laju sebesar γ apabila populasi nyamuk melebihi kapasitas batas yaitu $z = 1$. Sehingga mengakibatkan tidak ada nyamuk yang berinteraksi dengan manusia pada periode inkubasi τ . Kemudian populasi nyamuk berkurang dikarenakan oleh kematian secara alami dari nyamuk yang terinfeksi dengan laju mortalitas sebesar δ .

3.2 Analisis Kestabilan Model Penularan Penyakit Demam Berdarah tanpa Kekebalan

3.2.1 Titik Tetap Model Tanpa Waktu Tunda ($\tau = 0$)

Menurut definisi 2.2, titik kesetimbangan (3.1) dan (3.2) didapatkan dengan mendefinisikan $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ dan $\frac{dz(t)}{dt} = 0$, dan dengan mengasumsikan persamaan (3.1) dan (3.2) berbentuk persamaan tanpa waktu tunda artinya $\tau = 0$, maka kedua persamaan tersebut menjadi :

$$az(t) - az(t)y(t) - \beta y(t) = 0 \quad (3.3)$$

$$\gamma y(t) - \gamma z(t)y(t) - \delta z(t) = 0. \quad (3.4)$$

Kemudian dari persamaan (3.3) diperoleh $y(t)$ sebagai berikut:

$$y(t) = \frac{\alpha z(t)}{(\alpha z(t) + \beta)} \quad (3.5)$$

Substitusikan persamaan (3.5) kedalam persamaan (3.4) sehingga didapatkan:

$$\gamma \left(\frac{\alpha z}{(\alpha z + \beta)} \right) - \gamma z \left(\frac{\alpha z}{(\alpha z + \beta)} \right) - \delta z = 0,$$

$$\frac{\alpha \gamma z(t) - \alpha \gamma z(t)^2 - \alpha \delta z(t)^2 - \beta \delta z(t)}{\alpha z(t) + \beta} = 0,$$

$$z(t)(-z(t)(\alpha \gamma + \alpha \delta) + (\alpha \gamma - \beta \delta)) = 0 \quad (3.6)$$

dari persamaan (3.6) diperoleh :

$$z(t) = 0 \text{ atau } z(t) = \frac{\alpha \gamma - \beta \delta}{\alpha(\gamma + \delta)}.$$

Substitusikan $z(t) = 0$ ke dalam persamaan (3.4) menjadi:

$$\alpha z(t) - \alpha y(t)z(t) - \beta y(t) = 0$$

$$\alpha \cdot 0 - \alpha y(t) \cdot 0 - \beta y(t) = 0$$

$$-\beta y(t) = 0$$

$$y(t) = 0$$

selanjutnya substitusikan $z(t) = \frac{\alpha \gamma - \beta \delta}{\alpha(\gamma + \delta)}$ ke dalam persamaan (3.5) :

$$y(t) = \frac{\alpha \left(\frac{\alpha \gamma - \beta \delta}{\alpha(\gamma + \delta)} \right)}{\left(\alpha \left(\frac{\alpha \gamma - \beta \delta}{\alpha(\gamma + \delta)} \right) + \beta \right)}$$

$$y(t) = \frac{\alpha \gamma - \beta \delta}{\gamma(\alpha + \beta)}$$

Maka didapatkan dua hasil titik tetap, titik tetap yang pertama yaitu

$$(y_0^*, z_0^*) = (0,0) \text{ dan titik tetap yang kedua yaitu } (y_1^*, z_1^*) = \left(\frac{\alpha \gamma - \beta \delta}{\gamma(\alpha + \beta)}, \frac{\alpha \gamma - \beta \delta}{\alpha(\gamma + \delta)} \right).$$

3.2.2 Linierisasi Model Tanpa Waktu Tunda ($\tau = 0$)

Pada pembahasan sebelumnya telah diperoleh titik kesetimbangan pada populasi manusia yang terkena gigitan nyamuk dan populasi vektor yang terinfeksi virus *dengue* yaitu $(y_0^*, z_0^*) = (0,0)$. Untuk memperoleh kestabilan pada titik-titik kesetimbangan tersebut, maka harus dilakukan analisis kestabilan dengan melinierkan sistem persamaan (3.3) dan (3.4).

Linierisasi merupakan suatu metode yang digunakan untuk mengubah persamaan differensial non linier menjadi persamaan differensial linier dengan menggunakan ekspansi deret Taylor dan menghilangkan suku nonlinier di sekitar titik kesetimbangan. Dari persamaan (3.1) dimisalkan sebagai berikut:

$$f(y, z) = \alpha z(t) - \alpha z(t)y(t) - \beta y(t)$$

$$g(y, z) = \gamma y(t) - \gamma z(t)y(t) - \delta z(t).$$

Maka akan dilakukan linierisasi menggunakan ekspansi deret Taylor orde satu berdasarkan (Primbs, 2014) sebagai berikut:

1. Proses linierisasi disekitar titik tetap yang pertama yaitu $(y_0^*, z_0^*) = (0,0)$ sebagai berikut:

$$f(y, z) = f(y^*, z^*) + f_y(y^*, z^*)(y - y^*) + f_z(y^*, z^*)(z - z^*)$$

$$g(y, z) = g(y^*, z^*) + g_y(y^*, z^*)(y - y^*) + g_z(y^*, z^*)(z - z^*) \quad (3.7)$$

dimana

$$f(y^*, z^*) = \alpha z^* - \alpha z^* y^* - \beta y^*, \quad g(y^*, z^*) = \gamma y^* - \gamma z^* y^* - \delta z^*,$$

$$f_y(y^*, z^*) = -\alpha z^* - \beta, \quad g_y(y^*, z^*) = \gamma - \gamma z^*, \text{ dan}$$

$$f_z(y^*, z^*) = \alpha - \alpha y^*, \quad g_z(y^*, z^*) = -\gamma y^* - \delta.$$

Kemudian subsitusikan titik tetap kedalam persamaan (3.7) sehingga menjadi:

$$f(y, z) = (\alpha z^* - \alpha z^* y^* - \beta y^*) + (-\alpha z^* - \beta)(y - y^*) + (\alpha - \alpha y^*)(z - z^*)$$

$$\begin{aligned} f(y, z) &= (0) + (-\beta)(y - y^*) + \alpha(z - z^*) \\ &= -\beta(y - y^*) + \alpha(z - z^*) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$g(y, z) = (\gamma y^* - \gamma z^* y^* - \delta z^*) + (\gamma - \gamma z^*)(y - y^*) + (-\gamma y^* - \delta)(z - z^*)$$

$$\begin{aligned} g(y, z) &= (0) + \gamma(y - y^*) + (-\delta)(z - z^*) \\ &= \gamma(y - y^*) - \delta(z - z^*) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Berdasarkan (Primbs, 2014) substitusikan $Y(t) = y - y^*$ dan $Z(t) = z - z^*$ kedalam persamaan (3.8) dan (3.9) sehingga didapatkan sistem linier dari persamaan (3.3) dan (3.4) dengan titik tetap pertama $(y_0^*, z_0^*) = (0, 0)$ adalah

$$\begin{aligned} \frac{dY(t)}{dt} &= -\beta Y(t) + \alpha Z(t) \\ \frac{dZ(t)}{dt} &= \gamma Y(t) - \delta Z(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

2. Proses linierisasi disekitar titik tetap yang kedua yaitu $(y_1^*, z_1^*) = \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\gamma(\alpha + \beta)}, \frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\alpha(\gamma + \delta)} \right)$

Dengan menggunakan cara yang sama, maka digunakan persamaan (3.7) untuk melakukan linierisasi, dimana

$$f(y^*, z^*) = \alpha z^* - \alpha z^* y^* - \beta y^* \quad g(y^*, z^*) = \gamma y^* - \gamma z^* y^* - \delta z^*$$

$$f_y(y^*, z^*) = -\alpha z^* - \beta \quad g_y(y^*, z^*) = \gamma - \gamma z^*$$

$$f_z(y^*, z^*) = \alpha - \alpha y^* \quad g_z(y^*, z^*) = -\gamma y^* - \delta$$

Kemudian substitusikan titik tetap kedalam persamaan (3.7) sehingga menjadi:

$$f(y, z) = (\alpha z^* - \alpha z^* y^* - \beta y^*) + (-\alpha z^* - \beta)(y - y^*) + (\alpha - \alpha y^*)(z - z^*)$$

$$\begin{aligned}
f(y, z) &= \alpha \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\alpha(\gamma + \delta)} \right) - \alpha \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\gamma(\alpha + \beta)} \right) \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\alpha(\gamma + \delta)} \right) - \beta \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\gamma(\alpha + \beta)} \right) \\
&\quad + \left((-\alpha) \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\alpha(\gamma + \delta)} \right) - \beta \right) (y - y^*) \\
&\quad + \left(\alpha - \alpha \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\gamma(\alpha + \beta)} \right) \right) (z - z^*) \\
&= -\frac{\gamma(\alpha + \beta)}{(\gamma + \delta)} (y - y^*) + \frac{\alpha\beta(\gamma + \delta)}{\gamma(\alpha + \beta)} (z - z^*) \tag{3.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(y, z) &= (\gamma y^* - \gamma z^* y^* - \delta z^*) + (\gamma - \gamma z^*)(y - y^*) + (-\gamma y^* - \delta)(z - z^*) \\
g(y, z) &= \gamma \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\gamma(\alpha + \beta)} \right) - \gamma \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\alpha(\gamma + \delta)} \right) \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\gamma(\alpha + \beta)} \right) - \delta \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\alpha(\gamma + \delta)} \right) \\
&\quad + \left(\gamma - \gamma \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\alpha(\gamma + \delta)} \right) \right) (y - y^*) \\
&\quad + \left(-\gamma \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\gamma(\alpha + \beta)} \right) - \delta \right) (z - z^*) \\
&= \frac{\gamma\delta(\alpha + \beta)}{\alpha(\gamma + \delta)} (y - y^*) - \frac{\alpha(\gamma + \delta)}{(\alpha + \beta)} (z - z^*) \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Substitusikan $Y(t) = y - y^*$ dan $Z(t) = z - z^*$ kedalam persamaan (3.11) dan (3.12) sehingga didapatkan sistem linier dari persamaan (3.3) dan (3.4) dengan titik tetap pertama $(y_1^*, z_1^*) = \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\gamma(\alpha + \beta)}, \frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\alpha(\gamma + \delta)} \right)$ adalah

$$\begin{aligned}
\frac{dY(t)}{dt} &= -\frac{\gamma(\alpha + \beta)}{(\gamma + \delta)} Y(t) + \frac{\alpha\beta(\gamma + \delta)}{\gamma(\alpha + \beta)} Z(t) \\
\frac{dZ(t)}{dt} &= \frac{\gamma\delta(\alpha + \beta)}{\alpha(\gamma + \delta)} Y(t) - \frac{\alpha(\gamma + \delta)}{(\alpha + \beta)} Z(t). \tag{3.13}
\end{aligned}$$

3.2.3 Analisis Kestabilan Pada Titik Kesetimbangan Model tanpa Waktu Tunda

Untuk menentukan kestabilan pada titik kesetimbangan, maka akan dihitung nilai eigen dari titik kesetimbangan melalui matriks Jacobian. Matriks Jacobian dari persamaan bentuk linier yang didapatkan yaitu:

$$\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha z^* - \beta & \alpha - \alpha y^* \\ \gamma - \gamma z^* & -\gamma y^* - \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Dari matriks Jacobian yang didapatkan maka dapat dianalisis kestabilan berdasarkan titik tetap yang pertama $(y_0^*, z_0^*) = (0,0)$ yaitu:

Pada titik tetap yang pertama disubstitusikan kedalam persamaan (3.14) sehingga didapatkan:

$$J = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix}.$$

Dari matriks Jacobian diatas untuk mencari nilai eigennya sebagai berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left[\begin{bmatrix} -\beta & \alpha \\ \gamma & -\delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -\beta - \lambda & \alpha \\ \gamma & -\delta - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-\beta - \lambda)(-\delta - \lambda) - \alpha\gamma = 0$$

$$\lambda^2 + (\beta + \delta)\lambda + (\beta\delta - \alpha\gamma) = 0$$

Maka didapatkan nilai Eigen sebagai berikut:

$$\lambda_{12} = \frac{-\beta - \delta \pm \sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2 - 2\beta\delta + \delta^2}}{2}.$$

Berdasarkan dari hasil nilai Eigen tersebut jika $(\beta\delta - \alpha\gamma) > 0$ maka (y_0^*, z_0^*) stabil, sedangkan ketika $(\beta\delta - \alpha\gamma) < 0$ atau $(R > 1)$ maka (y_0^*, z_0^*) tidak stabil.

Kemudian dari matriks Jacobian yang didapatkan maka dapat dianalisis kestabilannya berdasarkan titik tetap yang kedua $(y_1^*, z_1^*) = \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\gamma(\alpha + \beta)}, \frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\alpha(\gamma + \delta)}\right)$

yaitu:

Pada titik tetap yang kedua disubstitusikan kedalam persamaan (3.14) sehingga didapatkan:

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\gamma + \delta} & \frac{\alpha\beta(\gamma + \delta)}{\gamma(\alpha + \beta)} \\ \frac{\gamma\delta(\alpha + \beta)}{\alpha(\gamma + \delta)} & -\frac{\alpha(\gamma + \delta)}{\alpha + \beta} \end{pmatrix},$$

dari matriks Jacobian diatas untuk mencari nilai eigennya sebagai berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left[\begin{array}{cc} -\frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\gamma + \delta} - \lambda & \frac{\alpha\beta(\gamma + \delta)}{\gamma(\alpha + \beta)} \\ \frac{\gamma\delta(\alpha + \beta)}{\alpha(\gamma + \delta)} & -\frac{\alpha(\gamma + \delta)}{\alpha + \beta} - \lambda \end{array} \right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\gamma + \delta} - \lambda & \frac{\alpha\beta(\gamma + \delta)}{\gamma(\alpha + \beta)} \\ \frac{\gamma\delta(\alpha + \beta)}{\alpha(\gamma + \delta)} & -\frac{\alpha(\gamma + \delta)}{\alpha + \beta} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{\gamma(\alpha + \beta)^2 + \alpha(\delta + \gamma)^2}{(\alpha + \beta)(\gamma + \delta)} \lambda + (\alpha\gamma - \beta\delta) = 0$$

berdasarkan dari hasil nilai Eigen tersebut mempunyai bagian real negatif sehingga menyebabkan (y_1^*, z_1^*) bersifat stabil asimtotik.

3.2.4 Linierisasi Model dengan waktu tunda ($\tau \neq 0$)

Untuk menganalisis kesetimbangan disekitar titik kesetimbangan, maka dilakukan proses linierisasi terlebih dahulu. Proses linierisasinya menggunakan ekspansi deret Taylor orde satu berdasarkan (Primbs, 2014). Misalkan persamaan (3.1) dan (3.2) sebagai berikut:

$$f(y, z, y(t - \tau)) = \alpha z(t) - \alpha z(t)y(t - \tau) - \beta y(t - \tau)$$

$$g(y, z, y(t - \tau)) = \gamma y(t - \tau) - \gamma z(t)y(t - \tau) - \delta z(t)$$

Sehingga:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y, z, y(t - \tau)) \quad (3.15)$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = g(y, z, y(t - \tau)). \quad (3.16)$$

Akan dicari pendekatan sistem linier disekitar titik kesetimbangan $(0,0)$ dengan menggunakan deret Taylor orde satu sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$f(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) \approx f(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) + \frac{\partial}{\partial y} f(y^*, z^*, y^*(t - \tau))(y(t) - y^*)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} f(y^*, z^*, y^*(t - \tau))(z(t) - z^*) + \frac{\partial}{\partial y(t - \tau)}$$

$$f(y^*, z^*, y^*(t - \tau))(y(t - \tau) - y^*)$$

$$f(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) = 0 + 0 + (\alpha - \alpha y^*(t - \tau))(z(t) - z^*)$$

$$+ (-\alpha z^* - \beta)(y(t - \tau) - y^*)$$

$$f(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) = (\alpha - \alpha \cdot 0)(z(t) - 0) + (-\alpha \cdot 0 - \beta)(y(t - \tau) - 0)$$

$$f(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) = \alpha z(t) - \beta y(t - \tau)$$

$$g(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) \approx g(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) + \frac{\partial}{\partial y} g(y^*, z^*, y^*(t - \tau))(y(t) - y^*)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} g(y^*, z^*, y^*(t - \tau))(z(t) - z^*)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y(t-\tau)} g(y^*, z^*, y^*(t-\tau))(y(t-\tau) - y^*)$$

$$g(y^*, z^*, y^*(t-\tau)) = 0 + 0 + (-\gamma y^*(t-\tau) - \delta)(z - z^*)$$

$$+ (\gamma - \gamma z^*)(y(t-\tau) - y^*)$$

$$g(y^*, z^*, y^*(t-\tau)) = (-\gamma \cdot 0 - \delta)(z(t) - 0) + (\gamma - \gamma \cdot 0)(y(t-\tau) - 0)$$

$$g(y^*, z^*, y^*(t-\tau)) = -\delta z(t) + \gamma y(t-\tau)$$

maka didapatkan persamaan linier:

$$f(y^*, z^*, y^*(t-\tau)) = \alpha z(t) - \beta y(t-\tau)$$

(3.17)

$$g(y^*, z^*, y^*(t-\tau)) = -\delta z(t) + \gamma y(t-\tau)$$

dengan mengikuti bentuk $\frac{dy}{dt} = \mathbf{A}y(t) + \mathbf{B}y(t-\tau)$, lalu substitusikan persamaan

(3.17) ke dalam matriks Jacobian diperoleh:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t-\tau) \end{bmatrix}$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\delta \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\beta & 0 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian untuk persamaan karakteristik dari fungsi $f(\lambda)$ dapat ditentukan melalui $f(\lambda) \equiv \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}e^{-\lambda\tau}) = 0$, sehingga diperoleh bentuk:

$$\det \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & -\delta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} e^{-\lambda\tau} \right) = 0$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\beta e^{-\lambda\tau} & \alpha \\ \gamma e^{-\lambda\tau} & -\delta \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + \beta e^{-\lambda\tau} & -\alpha \\ -\gamma e^{-\lambda\tau} & \lambda + \delta \end{pmatrix} = 0$$

$$(\lambda + \beta e^{-\lambda\tau})(\lambda + \delta) - \alpha \gamma e^{-\lambda\tau} = 0$$

$$\lambda^2 + \delta\lambda + \lambda\beta e^{-\lambda\tau} + (\beta\delta - \alpha\gamma)e^{-\lambda\tau} = 0$$

Selanjutnya dicari pendekatan sistem linier disekitar titik kesetimbangan (y^*, z^*) dengan menggunakan deret Taylor orde satu sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) &\approx f(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) + \frac{\partial}{\partial y} f(y^*, z^*, y^*(t - \tau))(y(t) - y^*) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z} f(y^*, z^*, y^*(t - \tau))(z(t) - z^*) + \frac{\partial}{\partial y(t - \tau)} \\
&\quad f(y^*, z^*, y^*(t - \tau))(y(t - \tau) - y^*) \\
f(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) &= 0 + 0 + (\alpha - \alpha y^*(t - \tau))(z(t) - z^*) \\
&\quad + (-\alpha z^* - \beta)(y(t - \tau) - y^*) \\
f(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) &= \left(\alpha - \alpha \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\gamma(\alpha + \beta)} \right) \right) (z(t) - z^*) + \left(-\alpha \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\alpha(\gamma + \delta)} \right) - \beta \right) \\
&\quad (y(t - \tau) - y^*) \\
f(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) &= \left(\frac{\alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma - \alpha^2\gamma + \alpha\beta\delta}{\gamma(\alpha + \beta)} \right) z(t) \\
&\quad - \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta - \beta\gamma + \beta\delta}{\gamma + \delta} \right) y(t - \tau) \\
f(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) &= \frac{\alpha\beta(\gamma + \delta)}{\gamma(\alpha + \beta)} z(t) - \frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\gamma + \delta} y(t - \tau) \tag{3.18} \\
g(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) &\approx g(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) + \frac{\partial}{\partial y} g(y^*, z^*, y^*(t - \tau))(y(t) - y^*) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z} g(y^*, z^*, y^*(t - \tau))(z(t) - z^*) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y(t - \tau)} g(y^*, z^*, y^*(t - \tau))(y(t - \tau) - y^*) \\
g(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) &= 0 + 0 + (-\gamma y^*(t - \tau) - \delta)(z(t) - z^*) \\
&\quad + (\gamma - \gamma z^*)(y(t - \tau) - y^*) \\
g(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) &= \left(-\gamma \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\gamma(\alpha + \beta)} \right) - \delta \right) (z(t) - z^*) \\
&\quad + \left(\gamma - \gamma \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\alpha(\gamma + \delta)} \right) \right) (y(t - \tau) - y^*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) &= -\frac{\alpha\gamma + \beta\delta - \delta\alpha - \delta\beta}{\alpha + \beta} z(t) \\
&\quad + \frac{\gamma^2\alpha + \gamma\alpha\delta - \gamma^2\alpha + \gamma\beta\delta}{\alpha(\gamma + \delta)} y(t - \tau) \\
g(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) &= -\frac{\alpha(\gamma + \delta)}{\alpha + \beta} z(t) + \frac{\gamma\delta(\alpha + \beta)}{\alpha(\gamma + \delta)} y(t - \tau)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

maka didapatkan persamaan linier:

$$\begin{aligned}
f(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) &= \frac{\alpha\beta(\gamma + \delta)}{\gamma(\alpha + \beta)} z(t) - \frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\gamma + \delta} y(t - \tau) \\
g(y^*, z^*, y^*(t - \tau)) &= -\frac{\alpha(\gamma + \delta)}{\alpha + \beta} z(t) + \frac{\gamma\delta(\alpha + \beta)}{\alpha(\gamma + \delta)} y(t - \tau).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

dengan mengikuti bentuk $\frac{dY}{dt} = \mathbf{A}Y(t) + \mathbf{B}Y(t - \tau)$, lalu substitusikan persamaan

(3.20) ke dalam matriks Jacobian diperoleh:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha\beta(\gamma + \delta)}{\gamma(\alpha + \beta)} \\ 0 & -\frac{\alpha(\gamma + \delta)}{\alpha + \beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\gamma + \delta} & 0 \\ \frac{\gamma\delta(\alpha + \beta)}{\alpha(\gamma + \delta)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t - \tau) \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha\beta(\gamma + \delta)}{\gamma(\alpha + \beta)} \\ 0 & -\frac{\alpha(\gamma + \delta)}{\alpha + \beta} \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\gamma + \delta} & 0 \\ \frac{\gamma\delta(\alpha + \beta)}{\alpha(\gamma + \delta)} & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian untuk persamaan karakteristik dari fungsi $f(\lambda)$ dapat ditentukan melalui $f(\lambda) \equiv \det(\lambda I - \mathbf{A} - \mathbf{B}e^{-\lambda\tau}) = 0$, sehingga diperoleh bentuk:

$$\det \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha\beta(\gamma + \delta)}{\gamma(\alpha + \beta)} \\ 0 & -\frac{\alpha(\gamma + \delta)}{\alpha + \beta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\gamma + \delta} & 0 \\ \frac{\gamma\delta(\alpha + \beta)}{\alpha(\gamma + \delta)} & 0 \end{pmatrix} e^{-\lambda\tau} \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{array} \right) - \begin{pmatrix} -\frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\gamma + \delta} e^{-\lambda\tau} & \frac{\alpha\beta(\gamma + \delta)}{\gamma(\alpha + \beta)} \\ \frac{\gamma\delta(\alpha + \beta)}{\alpha(\gamma + \delta)} e^{-\lambda\tau} & -\frac{\alpha(\gamma + \delta)}{\alpha + \beta} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + \frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\gamma + \delta} e^{-\lambda\tau} & -\frac{\alpha\beta(\gamma + \delta)}{\gamma(\alpha + \beta)} \\ -\frac{\gamma\delta(\alpha + \beta)}{\alpha(\gamma + \delta)} e^{-\lambda\tau} & \lambda + \frac{\alpha(\gamma + \delta)}{\alpha + \beta} \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\lambda + \frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\gamma + \delta} e^{-\lambda\tau} \right) \left(\lambda + \frac{\alpha(\gamma + \delta)}{\alpha + \beta} \right) - \left(\frac{\alpha\beta(\gamma + \delta)}{\gamma(\alpha + \beta)} \right) \left(\frac{\gamma\delta(\alpha + \beta)}{\alpha(\gamma + \delta)} e^{-\lambda\tau} \right) = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{\alpha(\gamma + \delta)}{\alpha + \beta} \lambda + \frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\gamma + \delta} e^{-\lambda\tau} \lambda + \gamma\alpha e^{-\lambda\tau} - \beta\delta e^{-\lambda\tau} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{\alpha(\gamma + \delta)}{\alpha + \beta} \lambda + \frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\gamma + \delta} e^{-\lambda\tau} \lambda + (\beta\delta - \gamma\alpha) e^{-\lambda\tau} = 0$$

Maka diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^2 + n_1 \lambda + n_2 e^{-\lambda\tau} \lambda + n_3 e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (3.20)$$

dengan,

$$n_1 = \frac{\alpha(\gamma + \delta)}{\alpha + \beta}$$

$$n_2 = \frac{\gamma(\alpha + \beta)}{\gamma + \delta}$$

$$n_3 = (\gamma\alpha - \beta\delta)$$

3.2.5 Titik Kritis pada Waktu Tunda

Berdasarkan persamaan karakteristik (3.20), titik kesetimbangan (y_1^*, z_1^*) akan bersifat stabil jika akar persamaan dari persamaan karakteristik (3.20) bernilai negatif. Kemudian asumsikan persamaan karakteristik (3.20) mempunyai solusi imajiner murni. Misalkan akar persamaan karakteristik $\lambda = i\omega$,

$\omega > 0$ dan $\omega < 0$ dimana $i = \sqrt{-1}$ adalah akar dari persamaan (3.20). Pandang persamaan sebagai berikut:

$$(i\omega)^2 + n_1 i\omega + n_2 i\omega e^{-(i\omega)\tau} + n_3 e^{-(i\omega)\tau} = 0. \quad (3.21)$$

Dengan mengganti suku eksponensial menjadi trigonometri $e^{-(i\omega)\tau} = \cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)$ maka persamaannya menjadi:

$$\begin{aligned} -\omega^2 + n_1 i\omega + n_2 i\omega(\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)) \\ + n_3(\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)) = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Kemudian dipisahkan bagian riil dan bagian imajiner dari persamaan di atas.

Untuk bagian riil

$$-\omega^2 = -n_2\omega \sin(\omega\tau) - n_3 \cos(\omega\tau). \quad (3.23a)$$

Untuk bagian imajiner

$$n_1\omega = -n_2\omega \cos(\omega\tau) + n_3 \sin(\omega\tau). \quad (3.23b)$$

Eliminasi persamaan (3.23a) dan (3.23b) terhadap τ dengan mengkuadratkan masing-masing ruas persamaan sehingga menjadi:

$$\begin{aligned} (-\omega^2)^2 &= (-n_2\omega \sin(\omega\tau) - n_3 \cos(\omega\tau))^2 \\ (n_1\omega)^2 &= (-n_2\omega \cos(\omega\tau) + n_3 \sin(\omega\tau))^2. \end{aligned}$$

Hasil pengkuadratan masing-masing ruas persamaan diperoleh:

$$\begin{aligned} \omega^4 &= n_2^2\omega^2 \sin^2(\omega\tau) + n_3^2 \cos^2(\omega\tau) + 2n_2\omega \sin(\omega\tau) n_3 \cos(\omega\tau) \\ n_1^2\omega^2 &= n_2^2\omega^2 \cos^2(\omega\tau) + n_3^2 \sin^2(\omega\tau) - 2n_2\omega \sin(\omega\tau) n_3 \cos(\omega\tau). \end{aligned}$$

Kemudian jumlahkan kedua ruas dan mengelompokkan sesuai pangkat ω ,

$$\begin{aligned} \omega^4 + n_1^2\omega^2 &= n_2^2\omega^2 \sin^2(\omega\tau) + n_3^2 \cos^2(\omega\tau) + n_2^2\omega^2 \cos^2(\omega\tau) + n_3^2 \sin^2(\omega\tau) \\ \omega^4 + n_1^2\omega^2 &= n_2^2\omega^2(\sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau)) + n_3^2(\sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau)). \end{aligned}$$

Dengan menggunakan identitas trigonometri $\sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau) = 1$ maka diperoleh:

$$\omega^4 + n_1^2 \omega^2 = n_2^2 \omega^2 + n_3^2.$$

Maka diperoleh polinomial derajat empat

$$\omega^4 - (n_2^2 - n_1^2) \omega^2 - n_3^2 = 0. \quad (3.24)$$

Sehingga akar persamaan ω_{\pm} dari (3.24) diperoleh:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} ((n_2^2 - n_1^2) \pm \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 - 4(-n_3)}). \quad (3.25)$$

Berdasarkan aturan tanda Descartes, persamaan (3.25) akan memiliki paling tidak satu akar real positif jika variasi perubahan tanda koefisien polinomnya lebih dari satu atau sama dengan satu. Sehingga dari persamaan (3.25) dapat dilihat bahwa:

$$(n_2^2 - n_1^2)^2 - 4(-n_3) \geq 0, \quad (3.26)$$

menyebabkan persamaan polynomial (3.24) tidak mempunyai variasi perubahan tanda koefisien sehingga persamaan (3.25) tidak mempunyai akar real positif.

Maka dalam hal ini akan ditinjau jika:

$$n_3 > 0, n_1^2 - n_2^2 < 0, \text{ dan } (n_2^2 - n_1^2)^2 > 4(-n_3), \quad (3.27)$$

maka akan ada dua solusi positif dari persamaan (3.27). Sehingga persamaan (3.26) akan memiliki akar imajiner murni $i\omega$. Kemudian persamaan (3.23a) dan (3.23b) digunakan untuk mencari nilai waktu tunda.

Misalkan

$$e = ax + by$$

$$f = cx + dx$$

dimana

$$a = -n_2 \omega,$$

$$e = -\omega^2,$$

$$b = -n_3,$$

$$f = n_1 \omega,$$

$$c = -n_2 \omega,$$

$$x = \sin(\omega \tau), \text{ dan}$$

$$d = n_3,$$

$$y = \cos(\omega\tau).$$

Dengan menggunakan kaidah sistem persamaan linier untuk mencari nilai x dan y adalah dengan cara sebagai berikut:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

$$\sin(\omega\tau) = \frac{\begin{vmatrix} -\omega^2 & -n_3 \\ n_1\omega & n_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -n_2\omega & -n_3 \\ -n_2\omega & n_3 \end{vmatrix}} = \frac{-n_3\omega^2 + n_1n_3\omega}{-n_2n_3\omega - n_2n_3\omega}.$$

Serta

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

$$\cos(\omega\tau) = \frac{\begin{vmatrix} -n_2\omega & -\omega^2 \\ -n_2\omega & n_1\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -n_2\omega & -n_3 \\ -n_2\omega & n_3 \end{vmatrix}} = \frac{-n_1n_2\omega - n_3\omega^3}{-n_2n_3\omega - n_2n_3\omega}.$$

Untuk mendapatkan nilai τ maka dilakukan cara sebagai berikut:

$$\frac{\sin(\omega\tau)}{\cos(\omega\tau)} = \frac{-n_3\omega^2 + n_1n_3\omega}{-n_1n_2\omega^2 - n_3\omega^3}$$

$$\tan(\omega\tau) = \frac{-n_3\omega^2 + n_1n_3\omega}{-n_1n_2\omega^2 - n_3\omega^3}$$

$$\tan(\omega\tau) = \frac{n_1n_3\omega - n_3\omega^2}{-n_1n_2\omega^2 - n_3\omega^3}$$

$$(\omega\tau) = \arctan\left(\frac{n_1n_3\omega - n_3\omega^2}{-n_1n_2\omega^2 - n_3\omega^3}\right)$$

$$(\omega\tau) = \arctan\left(\frac{\omega(n_1n_3 - n_3\omega)}{-n_1n_2\omega^2 - n_3\omega^3}\right)$$

$$\tau_k = \frac{1}{\omega} \arctan\left(\frac{\omega(n_1n_3 - n_3\omega)}{-n_1n_2\omega^2 - n_3\omega^3}\right), k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.28)$$

Setelah menemukan titik kritis tundaan τ_k yang memuat akar karakteristik yang terdapat pada garis imajiner, maka dimungkinkan terjadi bifurkasi pada titik tersebut, kemudian akan dipilih τ_k^* yang merupakan nilai dari tak terhingga τ_k^j sebagai nilai kritis tundaan yang dinyatakan dalam bentuk:

$$\tau_k^* = \tau_{k_0}^{j_0} = \min_{k=1,2;j=1,2,\dots} (\tau_k^j), \omega_{k_0} = \omega_k. \quad (3.29)$$

Nilai kritis tundaan yang diperoleh dari persamaan (3.29) akan mengakibatkan nilai eigen dari persamaan (3.20) mengalami perubahan sehingga dapat mempengaruhi kestabilan. Jika perubahan ini terjadi maka akar-akar karakteristik akan bernilai murni saat titik kritis tundaan τ_k^* . Kasus ini mengindikasikan terjadinya bifurkasi Hopf. Syarat terjadinya bifurkasi yaitu akar-akar persamaan (3.20) memenuhi kondisi transversabilitas sebagai berikut:

$$\text{sign} \frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega} > 0 \text{ dan } \text{sign} \frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega} < 0. \quad (3.30)$$

Jika λ merupakan fungsi dalam τ , maka $\lambda = \lambda(\tau)$, $\frac{d\lambda}{d\tau}$ dapat dicari dengan menggunakan turunan dari persamaan karakteristik (3.20).

$$\lambda^2(\tau) + n_1\lambda(\tau) + n_2e^{-\lambda(\tau)\tau}\lambda(\tau) + n_3e^{-\lambda(\tau)\tau} = 0. \quad (3.31)$$

Kemudian diturunkan terhadap τ menjadi:

$$2\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} + n_1 \frac{d\lambda}{d\tau} + n_2 e^{-\lambda\tau} \frac{d\lambda}{d\tau} + n_2 \lambda(-\lambda) e^{-\lambda\tau} + n_2 \lambda(-\tau) e^{-\lambda\tau} \frac{d\lambda}{d\tau} + n_3(-\lambda) e^{-\lambda\tau} + n_3(-\tau) e^{-\lambda\tau} \frac{d\lambda}{d\tau} = 0$$

$$(2\lambda + n_1 + n_2 e^{-\lambda\tau} - \tau(n_2\lambda + n_3) e^{-\lambda\tau}) \frac{d\lambda}{d\tau} - \lambda(n_2\lambda + n_3) e^{-\lambda\tau} = 0$$

$$(2\lambda + n_1 + n_2 e^{-\lambda\tau} - \tau(n_2\lambda + n_3) e^{-\lambda\tau}) \frac{d\lambda}{d\tau} = \lambda(n_2\lambda + n_3) e^{-\lambda\tau}$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{\lambda(n_2\lambda + n_3)e^{-\lambda\tau}}{2\lambda + n_1 + n_2e^{-\lambda\tau} - \tau(n_2\lambda + n_3)e^{-\lambda\tau}}$$

Lalu menggunakan turunan fungsi invers menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)} &= \frac{2\lambda + n_1 + n_2e^{-\lambda\tau} - \tau(n_2\lambda + n_3)e^{-\lambda\tau}}{\lambda(n_2\lambda + n_3)e^{-\lambda\tau}} \\ \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{2\lambda + n_1}{\lambda(n_2\lambda + n_3)e^{-\lambda\tau}} + \frac{n_2e^{-\lambda\tau}}{\lambda(n_2\lambda + n_3)e^{-\lambda\tau}} - \frac{\tau(n_2\lambda + n_3)e^{-\lambda\tau}}{\lambda(n_2\lambda + n_3)e^{-\lambda\tau}} \\ \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{2\lambda(\tau) + n_1}{\lambda(\tau)(n_2\lambda + n_3)e^{-\lambda\tau}} + \frac{n_2}{\lambda(\tau)(n_2\lambda + n_3)} - \frac{\tau}{\lambda(\tau)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Kemudian dari persamaan (3.31) dapat diperoleh $e^{-\lambda\tau}$:

$$\begin{aligned} \lambda^2(\tau) + n_1\lambda(\tau) + n_2e^{-\lambda(\tau)\tau}\lambda(\tau) + n_3e^{-\lambda(\tau)\tau} &= 0 \\ (n_2\lambda(\tau) + n_3)e^{-\lambda(\tau)\tau} &= -\lambda^2(\tau) - n_1\lambda(\tau) \end{aligned}$$

Lau diperoleh $e^{-\lambda\tau}$ sebagai berikut:

$$e^{-\lambda(\tau)\tau} = \frac{-\lambda^2(\tau) - n_1\lambda(\tau)}{n_2\lambda(\tau) + n_3} \quad (3.33)$$

Selanjutnya yaitu substitusikan persamaan (3.33) kedalam persamaan (3.32):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{2\lambda(\tau) + n_1}{\lambda(\tau)(n_2\lambda + n_3) \left(\frac{-\lambda^2(\tau) - n_1\lambda(\tau)}{n_2\lambda(\tau) + n_3}\right)} + \frac{n_2}{\lambda(\tau)(n_2\lambda + n_3)} - \frac{\tau}{\lambda(\tau)} \\ \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{2\lambda(\tau) + n_1}{\lambda(\tau)(-\lambda^2 - n_1\lambda)} + \frac{n_2}{\lambda(\tau)(n_2\lambda + n_3)} - \frac{\tau}{\lambda(\tau)} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Dengan demikian untuk penjabaran fungsi sign pada persamaan (3.30)

$$\text{sign} \frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega} = \text{sign} \left\{ \text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right\} \Big|_{\lambda=i\omega}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{sign} \left\{ \text{Re} \left(\frac{2\lambda(\tau) + n_1}{\lambda(\tau)(-\lambda^2 - n_1\lambda)} \right)_{\lambda=i\omega} \right. \\
&\quad \left. + \text{Re} \left(\frac{n_2}{\lambda(\tau)(n_2\lambda + n_3)} \right)_{\lambda=i\omega} + \text{Re} \left(\frac{-\tau}{\lambda} \right)_{\lambda=i\omega} \right\} \\
&= \text{sign} \left\{ \text{Re} \left(\frac{2i\omega + n_1}{i\omega(\omega^2 - n_1i\omega)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \text{Re} \left(\frac{n_2}{i\omega(n_2i\omega + n_3)} \right) + \text{Re} \left(\frac{-\tau}{i\omega} \right) \right\} \tag{3.35}
\end{aligned}$$

kemudian pada masing-masing suku akan digunakan cara memanipulasi aljabar agar hanya mendapatkan bagian real saja untuk digunakan pada fungsi sign.

Perhatikan bagian $\text{Re} \left(\frac{2i\omega + n_1}{i\omega(\omega^2 - n_1i\omega)} \right)$

$$\begin{aligned}
&\frac{2i\omega + n_1}{i\omega(\omega^2 - n_1i\omega)} \times \frac{-i}{-i} \\
&= \frac{2\omega - n_1i}{\omega(\omega^2 - n_1i\omega)} \\
&= \frac{2\omega - n_1i}{\omega^3 - n_1i\omega^2} \times \frac{\omega^3 + n_1i\omega^2}{\omega^3 + n_1i\omega^2} \\
&= \frac{(2\omega - n_1i)(\omega^3 + n_1i\omega^2)}{(\omega^3)^2 - (n_1i\omega^2)^2} \\
&= \frac{2\omega^4 + 2n_1i\omega^3 - n_1i\omega^3 + n_1^2\omega^2}{\omega^6 + n_1^2\omega^4} \\
&= \frac{2\omega^4 + n_1^2\omega^2 + (2n_1\omega^3 - n_1\omega^3)i}{\omega^2(\omega^4 + n_1^2\omega^2)} \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Pada persamaan (3.36) yang dibutuhkan hanya bagian realnya saja maka ambil bagian realnya:

$$\frac{2\omega^4 + n_1^2\omega^2}{\omega^2(\omega^4 + n_1^2\omega^2)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega^2(2\omega^2 + n_1^2)}{\omega^2(\omega^4 + n_1^2\omega^2)} \\
&= \frac{2\omega^2 + n_1^2}{\omega^4 + n_1^2\omega^2} \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Perhatikan bagian $Re \left(\frac{n_2}{i\omega(n_2i\omega + n_3)} \right)$

$$\begin{aligned}
&\frac{n_2}{i\omega(n_2i\omega + n_3)} \times \frac{i}{i} \\
&= \frac{n_2i}{-\omega(n_2i\omega + n_3)} \\
&= \frac{n_2i}{-n_3\omega - n_2i\omega^2} \times \frac{-n_3\omega + n_2i\omega^2}{-n_3\omega + n_2i\omega^2} \\
&= \frac{-n_2n_3\omega i - n_2^2\omega^2}{n_3^2\omega^2 - n_2n_3\omega^3i + n_2n_3\omega^3i + n_2^2\omega^4} \\
&= \frac{-n_2n_3\omega i - n_2^2\omega^2}{n_3^2\omega^2 + n_2^2\omega^4} \\
&= \frac{-n_2^2\omega^2 - n_2n_3\omega i}{\omega^2(n_3^2 + n_2^2\omega^2)} \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Pada persamaan (3.38) yang dibutuhkan hanya bagian realnya saja maka ambil bagian realnya:

$$\begin{aligned}
&= \frac{-n_2^2\omega^2}{\omega^2(n_3^2 + n_2^2\omega^2)} \\
&= \frac{-n_2^2}{n_3^2 + n_2^2\omega^2} \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Setelah dihitung untuk mencari bagian real dari persamaan (3.35), maka dihasilkan bagian realnya pada persamaan (3.37) dan (3.39) sebagai berikut:

$$\text{sign} \frac{d(Re\lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega} = \text{sign} \left\{ \frac{2\omega^2 + n_1^2}{\omega^4 + n_1^2\omega^2} - \frac{n_2^2}{n_3^2 + n_2^2\omega^2} \right\} \tag{3.40}$$

Dari persamaan (3.24), telah diketahui bahwa:

$$\begin{aligned}
\omega^4 - (n_2^2 - n_1^2)\omega^2 - n_3^2 &= 0 \\
\omega^4 - n_2^2\omega^2 + n_1^2\omega^2 - n_3^2 &= 0 \\
\omega^4 + n_1^2\omega^2 &= n_2^2 + n_3^2\omega^2
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Substitusikan persamaan (3.41) ke dalam persamaan (3.42) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned}
\text{sign} \frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega} &= \text{sign} \left\{ \frac{2\omega^2 + n_1^2}{\omega^4 + n_1^2\omega^2} - \frac{n_2^2}{\omega^4 + n_1^2\omega^2} \right\} \\
\text{sign} \frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega} &= \text{sign} \left\{ \frac{2\omega^2 + n_1^2 - n_2^2}{\omega^4 + n_1^2\omega^2} \right\}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Selanjutnya pada persamaan (3.42) akan dibahas pembilangnya saja dikarenakan penyebutnya dalam bentuk kuadratik berderajat genap yang akan selalu bernilai positif

$$\begin{aligned}
&\text{sign}\{2\omega^2 + n_1^2 - n_2^2\} \\
&= \text{sign}\{2\omega^2 - (n_2^2 - n_1^2)\}
\end{aligned}$$

Kondisi transversalitas positif pada persamaan (3.42) adalah

$$\text{sign} \frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega_+} = \text{sign}\{2\omega_+^2 - (n_2^2 - n_1^2)\} \tag{3.43}$$

Kondisi ini terletak pada persamaan (3.25) dan (3.43), cara menghitungnya dengan mensubstitusikan persamaan (3.25) ke dalam persamaan (3.43)

$$\begin{aligned}
&= \text{sign} \left\{ 2 \left(\frac{1}{2} \left((n_2^2 - n_1^2) + \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 - 4(-n_3)} \right) \right) - (n_2^2 - n_1^2) \right\} \\
&= \text{sign} \left\{ \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 - 4(-n_3)} \right\}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Akibatnya persamaan (3.44) disimpulkan menjadi:

$$\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_k^+, \lambda=i\omega} > 0$$

Kondisi transversalitas negatif pada persamaan (3.42) adalah

$$\text{sign} \frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega_-} = \text{sign}\{2\omega_-^2 - (n_2^2 - n_1^2)\} \quad (3.45)$$

Kondisi ini terletak pada persamaan (3.25) dan (3.45), cara menghitungnya dengan mensubsitusikan persamaan (3.25) ke dalam persamaan (3.45)

$$\begin{aligned} &= \text{sign} \left\{ 2 \left(\frac{1}{2} \left((n_2^2 - n_1^2) - \sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 - 4(-n_3)} \right) \right) - (n_2^2 - n_1^2) \right\} \\ &= \text{sign} \left\{ -\sqrt{(n_2^2 - n_1^2)^2 - 4(-n_3)} \right\} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Akibatnya persamaan (3.46) disimpulkan menjadi:

$$\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_k^-, \lambda=i\omega} < 0.$$

Maka dari persamaan (3.45) dan (3.47) kondisi transversalitas terpenuhi, terjadi perubahan nilai real akar persamaan karakteristik dari negatif ke positif yang menyebabkan perubahan kestabilan sistem.

Selanjutnya adalah mencari titik kritis pada waktu tunda dengan memasukkan parameter yang ada pada tabel (3.1). Jika parameter dimasukkan pada persamaan karakteristik maka menjadi:

$$\lambda^2 + 0.8956\lambda + 0.2903e^{-\lambda\tau}\lambda + 0.236e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (3.47)$$

Misalkan akar persamaan karakteristik $\lambda = i\omega$, $\omega > 0$ dan $\omega < 0$ dimana $i = \sqrt{-1}$ adalah akar dari persamaan (3.20) maka pandang persamaan sebagai berikut:

$$(i\omega)^2 + 0.8956 i\omega + 0.2903 i\omega e^{-(i\omega)\tau} + 0.236 e^{-(i\omega)\tau} = 0. \quad (3.48)$$

Dengan mengganti suku eksponensial menjadi trigonometri $e^{-(i\omega)\tau} = \cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)$ maka persamaannya menjadi:

$$\begin{aligned}
 & -\omega^2 + 0.89556 i\omega + 0.2903 i\omega(\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)) + \\
 & 0.236 (\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Persamaan di atas akan bernilai nol jika bagian imajiner dan bagian realnya sama dengan nol, sehingga:

$$\begin{aligned}
 & (-\omega^2 + 0.2903 \omega \sin(\omega\tau) + 0.236 \cos(\omega\tau)) \\
 & + (0.89556\omega + 0.2903 \omega \cos(\omega\tau) - 0.236 \sin(\omega\tau))i = 0.
 \end{aligned}$$

Kemudian persamaan di atas dipisahkan bagian riil dan imajiner.

Untuk bagian riil

$$-\omega^2 = -0.2903 \omega \sin(\omega\tau) - 0.236 \cos(\omega\tau). \tag{3.50a}$$

Untuk bagian imajiner

$$0.89556 \omega = -0.2903 \omega \cos(\omega\tau) + 0.236 \sin(\omega\tau). \tag{3.50b}$$

Eliminasi persamaan (3.50a) dan (3.50b) terhadap τ dengan mengkuadratkan masing-masing ruas persamaan sehingga menjadi:

$$\begin{aligned}
 & (-\omega^2)^2 = (-0.2903 \omega \sin(\omega\tau) - 0.236 \cos(\omega\tau))^2 \\
 & (0.89556 \omega)^2 = (-0.2903 \omega \cos(\omega\tau) + 0.236 \sin(\omega\tau))^2.
 \end{aligned}$$

Hasil pengkuadratan masing-masing ruas persamaan diperoleh:

$$\begin{aligned}
 & \omega^4 = 0.0843 \omega^2 \sin^2(\omega\tau) + 0.0557 \cos^2(\omega\tau) + 0.1371 \omega \sin(\omega\tau) \cos(\omega\tau) \\
 & 0.8020 \omega^2 = 0.0843 \omega^2 \cos^2(\omega\tau) + 0.0557 \sin^2(\omega\tau) \\
 & - 0.1371 \omega \sin(\omega\tau) \cos(\omega\tau).
 \end{aligned}$$

Kemudian jumlahkan kedua ruas dan mengelompokkan sesuai pangkat ω ,

$$\begin{aligned}
 & \omega^4 + 0.8020 \omega^2 = 0.0843 \omega^2 \sin^2(\omega\tau) + 0.0557 \cos^2(\omega\tau) + 0.0843 \omega^2 \\
 & \cos^2(\omega\tau) + 0.0557 \sin^2(\omega\tau) \\
 & \omega^4 + 0.8020 \omega^2 = 0.0843 \omega^2 (\sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau)) + 0.0557 (\sin^2(\omega\tau) \\
 & + \cos^2(\omega\tau)).
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan identitas trigonometri $\sin^2(\omega\tau) + \cos^2(\omega\tau) = 1$ maka diperoleh:

$$\omega^4 + 0.8020 \omega^2 = 0.0843\omega^2 + 0.0557.$$

Maka diperoleh polinomial derajat empat

$$\begin{aligned} \omega^4 - (0.0843 - 0.8020)\omega^2 - 0.0557 &= 0 \\ \omega^4 + 0.7177\omega^2 - 0.0557 &= 0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Sehingga persamaan akar persamaan ω_{\pm} dari (3.51) diperoleh:

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{-0.7177 \pm \sqrt{0.5151 - 0.2228}}{2}. \quad (3.52)$$

Kemudian persamaan (3.50a) dan (3.50b) digunakan untuk mencari nilai waktu tunda.

Misalkan:

$$e = ax + by$$

$$f = cx + dx$$

dimana

$$a = -0.2903 \omega,$$

$$e = -\omega^2,$$

$$b = -0.236,$$

$$f = 0.8956 \omega,$$

$$c = -0.2903 \omega,$$

$$x = \sin(\omega\tau), \text{ dan}$$

$$d = 0.236,$$

$$y = \cos(\omega\tau).$$

Dengan menggunakan kaidah sistem persamaan linier untuk mencari nilai x dan y adalah dengan cara sebagai berikut:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$\sin(\omega\tau) = \frac{\begin{vmatrix} -\omega^2 & -0.236 \\ 0.8956\omega & 0.236 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0.2903\omega & -0.236 \\ -0.2903\omega & 0.236 \end{vmatrix}} = \frac{-0.236\omega^2 + 0.2114\omega}{-0.0685\omega - 0.0685\omega}$$

Serta

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$\cos(\omega\tau) = \frac{\begin{vmatrix} -0.2903\omega & -\omega^2 \\ -0.2903\omega & 0.8956\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0.2903\omega & -0.236 \\ -0.2903\omega & 0.236 \end{vmatrix}} = \frac{-0.25999\omega^2 - 0.2903\omega^3}{-0.0685\omega - 0.0685\omega}$$

Untuk mendapatkan nilai τ maka dilakukan cara sebagai berikut:

$$\frac{\sin(\omega\tau)}{\cos(\omega\tau)} = \frac{-0.236\omega^2 + 0.2114\omega}{-0.25999\omega^2 - 0.2903\omega^3}$$

$$\tan(\omega\tau) = \frac{-0.236\omega^2 + 0.2114\omega}{-0.25999\omega^2 - 0.2903\omega^3}$$

$$\tan(\omega\tau) = \frac{0.2114\omega - 0.236\omega^2}{-0.25999\omega^2 - 0.2903\omega^3}$$

$$(\omega\tau) = \arctan\left(\frac{0.2114\omega - 0.236\omega^2}{-0.25999\omega^2 - 0.2903\omega^3}\right)$$

$$(\omega\tau) = \arctan\left(\frac{\omega(0.2114 - 0.236\omega)}{-0.25999\omega^2 - 0.2903\omega^3}\right)$$

$$\tau = \frac{1}{\omega} \arctan\left(\frac{\omega(0.2114 - 0.236\omega)}{-0.25999\omega^2 - 0.2903\omega^3}\right) \quad (3.53)$$

Setelah menemukan titik kritis tundaan τ_k yang memuat akar karakteristik yang terdapat pada garis imajiner maka dimungkinkan terjadi bifurkasi pada titik tersebut, kemudian akan dipilih τ_k^* yang merupakan nilai dari tak terhingga τ_k^j sebagai nilai kritis tundaan yang dinyatakan dalam bentuk:

$$\tau_k^* = \tau_{k_0}^{j_0} = \min_{k=1,2;j=1,2,\dots} (\tau_k^j), \omega_{k_0} = \omega_k \quad (3.54)$$

Nilai kritis tundaan yang diperoleh dari persamaan (3.54) akan mengakibatkan nilai Eigen dari persamaan (3.47) mengalami perubahan sehingga dapat mempengaruhi kestabilan. Jika perubahan ini terjadi maka akar-akar karakteristik akan bernilai murni saat titik kritis tundaan τ_k^* . Kasus ini mengindikasikan terjadinya bifurkasi Hopf. Syarat terjadinya bifurkasi yaitu akar-akar persamaan (3.47) memenuhi kondisi transversabilitas sebagai berikut:

$$\text{sign} \frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega} > 0 \text{ dan } \text{sign} \frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega} < 0 \quad (3.55)$$

Jika λ merupakan fungsi dalam τ , maka $\lambda = \lambda(\tau)$, $\frac{d\lambda}{d\tau}$ dapat dicari dengan menggunakan turunan dari persamaan karakteristik (3.47).

$$\lambda^2(\tau) + 0.8956\lambda(\tau) + 0.2903e^{-\lambda(\tau)\tau}\lambda(\tau) + 0.236e^{-\lambda(\tau)\tau} = 0 \quad (3.56)$$

Kemudian diturunkan terhadap τ menjadi:

$$2\lambda \frac{d\lambda}{d\tau} + 0.8956 \frac{d\lambda}{d\tau} + 0.2903e^{-\lambda\tau} \frac{d\lambda}{d\tau} + 0.2903 \lambda(-\lambda)e^{-\lambda\tau} + 0.2903 \lambda(-\tau)$$

$$e^{-\lambda\tau} \frac{d\lambda}{d\tau} + 0.236(-\lambda)e^{-\lambda\tau} + 0.236(-\tau)e^{-\lambda\tau} \frac{d\lambda}{d\tau} = 0$$

$$(2\lambda + 0.8956 + 0.2903e^{-\lambda\tau} - \tau(0.2903\lambda + 0.236)e^{-\lambda\tau}) \frac{d\lambda}{d\tau} - \lambda(0.2903\lambda$$

$$+ 0.236)e^{-\lambda\tau} = 0$$

$$(2\lambda + 0.8956 + 0.2903e^{-\lambda\tau} - \tau(0.2903\lambda + 0.236)e^{-\lambda\tau}) \frac{d\lambda}{d\tau} = \lambda(0.2903\lambda$$

$$+ 0.236)e^{-\lambda\tau}$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{\lambda(0.2903\lambda + 0.236)e^{-\lambda\tau}}{2\lambda + 0.8956 + 0.2903e^{-\lambda\tau} - \tau(0.2903\lambda + 0.236)e^{-\lambda\tau}}$$

Lalu menggunakan turunan fungsi invers menjadi:

$$\frac{1}{\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{\lambda(0.2903\lambda + 0.236)e^{-\lambda\tau}}{2\lambda + 0.8956 + 0.2903e^{-\lambda\tau} - \tau(0.2903\lambda + 0.236)e^{-\lambda\tau}}\right)}$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{2\lambda + 0.8956 + 0.2903e^{-\lambda\tau} - \tau(0.2903\lambda + 0.236)e^{-\lambda\tau}}{\lambda(0.2903\lambda + 0.236)e^{-\lambda\tau}}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{2\lambda + 0.8956}{\lambda(0.2903\lambda + 0.236)e^{-\lambda\tau}} + \frac{0.2903e^{-\lambda\tau}}{\lambda(0.2903\lambda + 0.236)e^{-\lambda\tau}} \\ &\quad - \frac{\tau(0.2903\lambda + 0.236)e^{-\lambda\tau}}{\lambda(0.2903\lambda + 0.236)e^{-\lambda\tau}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{2\lambda(\tau) + 0.8956}{\lambda(\tau)(0.2903\lambda + 0.236)e^{-\lambda\tau}} + \frac{0.2903}{\lambda(\tau)(0.2903\lambda + 0.236)} \\ &\quad - \frac{\tau}{\lambda(\tau)} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Kemudian dari persamaan (3.56) dapat diperoleh $e^{-\lambda\tau}$:

$$\lambda^2(\tau) + 0.8956\lambda(\tau) + 0.2903e^{-\lambda(\tau)\tau}\lambda(\tau) + 0.236e^{-\lambda(\tau)\tau} = 0$$

$$(0.2903\lambda(\tau) + 0.236)e^{-\lambda(\tau)\tau} = -\lambda^2(\tau) - 0.8956\lambda(\tau)$$

Lau diperoleh $e^{-\lambda\tau}$ sebagai berikut:

$$e^{-\lambda(\tau)\tau} = \frac{-\lambda^2(\tau) - 0.8956\lambda(\tau)}{0.2903\lambda(\tau) + 0.236} \quad (3.58)$$

Selanjutnya yaitu subsitusikan persamaan (3.58) kedalam persamaan (3.57):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{2\lambda(\tau) + 0.8956}{\lambda(\tau)(0.2903\lambda + 0.236) \left(\frac{-\lambda^2(\tau) - 0.8956\lambda(\tau)}{0.2903\lambda(\tau) + 0.236}\right)} \\ &\quad + \frac{0.2903}{\lambda(\tau)(0.2903\lambda + 0.236)} - \frac{\tau}{\lambda(\tau)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{2\lambda(\tau) + 0.8956}{\lambda(\tau)(-\lambda^2(\tau) - 0.8956\lambda(\tau))} + \frac{0.2903}{\lambda(\tau)(0.2903\lambda + 0.236)} \\ &\quad - \frac{\tau}{\lambda(\tau)} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Dengan demikian untuk penjabaran fungsi sign pada persamaan (3.55)

$$\begin{aligned}
\text{sign} \frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega} &= \text{sign} \left\{ \text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right\} \Big|_{\lambda=i\omega} \\
&= \text{sign} \left\{ \text{Re} \left(\frac{2\lambda(\tau) + 0.8956}{\lambda(\tau)(-\lambda^2(\tau) - 0.8956\lambda(\tau))} \right) \right. \\
&\quad \left. + \text{Re} \left(\frac{0.2903}{\lambda(\tau)(0.2903\lambda + 0.236)} \right) \Big|_{\lambda=i\omega} + \text{Re} \left(\frac{-\tau}{\lambda} \right) \Big|_{\lambda=i\omega} \right\} \\
&= \text{sign} \left\{ \text{Re} \left(\frac{2i\omega + 0.8956}{i\omega(\omega^2 - 0.8956i\omega)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \text{Re} \left(\frac{0.2903}{i\omega(0.2903i\omega + 0.236)} \right) + \text{Re} \left(\frac{-\tau}{i\omega} \right) \right\} \\
\text{sign} \frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega} &= \text{sign} \left\{ \text{Re} \left(\frac{2i\omega + 0.8956}{i\omega(\omega^2 - 0.8956i\omega)} \right) \right. \\
&\quad \left. + \text{Re} \left(\frac{0.2903}{i\omega(0.2903i\omega + 0.236)} \right) + \text{Re} \left(\frac{-\tau}{i\omega} \right) \right\} \tag{3.60}
\end{aligned}$$

kemudian pada masing-masing suku akan digunakan cara memanipulasi aljabar agar hanya mendapatkan bagian real saja untuk digunakan pada fungsi sign.

Perhatikan bagian $\text{Re} \left(\frac{2i\omega + 0.8956}{i\omega(\omega^2 - 0.8956i\omega)} \right)$

$$\begin{aligned}
\frac{2i\omega + 0.8956}{i\omega(\omega^2 - 0.8956i\omega)} \cdot \frac{-i}{-i} &= \frac{2\omega - 0.8956i}{\omega(\omega^2 - 0.8956i\omega)} \\
&= \frac{2\omega - 0.8956i}{\omega^3 - 0.8956i\omega^2} \cdot \frac{\omega^3 + 0.8956i\omega^2}{\omega^3 + 0.8956i\omega^2} \\
&= \frac{(2\omega - 0.8956i)(\omega^3 + 0.8956i\omega^2)}{(\omega^3)^2 - (0.8956i\omega^2)^2} \\
&= \frac{2\omega^4 + 1.7912i\omega^3 - 0.8956i\omega^3 + 0.8020\omega^2}{\omega^6 + 0.8020\omega^4} \\
&= \frac{2\omega^4 + 0.8020\omega^2(0.1791\omega^3 - 0.8956i\omega^3)i}{\omega^2(\omega^4 + 0.8020\omega^2)} \tag{3.61}
\end{aligned}$$

Pada persamaan (3.61) yang dibutuhkan hanya bagian realnya saja maka ambil bagian realnya:

$$\begin{aligned} & \frac{2\omega^4 + 0.8020\omega^2}{\omega^2(\omega^4 + 0.8020\omega^2)} \\ &= \frac{\omega^2(2\omega^2 + 0.8020)}{\omega^2(\omega^4 + 0.8020\omega^2)} \\ &= \frac{2\omega^2 + 0.8021}{\omega^4 + 0.8020\omega^2} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Perhatikan bagian $Re \frac{0.2903}{i\omega(0.2903i\omega + 0.236)}$

$$\begin{aligned} & \frac{0.2903}{i\omega(0.2903i\omega + 0.236)} \cdot \frac{i}{i} = \frac{0.2903i}{-\omega(0.2903i\omega + 0.236)} \\ &= \frac{0.2903i}{-0.236\omega - 0.2903i\omega^2} \times \frac{-0.236\omega + 0.2903i\omega^2}{-0.236\omega + 0.2903i\omega^2} \\ &= \frac{-0.0685\omega i - 0.0843\omega^2}{0.0557\omega^2 - 0.0685\omega^3 i + 0.0685\omega^3 i + 0.0843\omega^4} \\ &= \frac{-0.0685\omega i - 0.0843\omega^2}{0.0557\omega^2 + 0.0843\omega^4} \\ &= \frac{-0.0843\omega^2 - 0.0685\omega i}{\omega^2(0.0557 + 0.0843\omega^2)} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Pada persamaan (3.63) yang dibutuhkan hanya bagian realnya saja maka ambil bagian realnya:

$$\begin{aligned} &= \frac{-0.0843\omega^2}{\omega^2(0.0557 + 0.0843\omega^2)} \\ &= \frac{-0.0843}{0.0557 + 0.0843\omega^2} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Setelah dihitung untuk mencari bagian real dari persamaan (3.64), maka dihasilkan bagian realnya pada persamaan (3.62) dan (3.64) sebagai berikut:

$$\text{sign} \frac{d(Re\lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega} = \text{sign} \left\{ \frac{2\omega^2 + 0.8020}{\omega^4 + 0.8020\omega^2} - \frac{0.0843}{0.0557 + 0.0843\omega^2} \right\} \quad (3.65)$$

Dari persamaan (3.51), telah diketahui bahwa:

$$\begin{aligned}\omega^4 - (0.0843 - 0.8020)\omega^2 - 0.0557 &= 0 \\ \omega^4 - 0.0843\omega^2 + 0.8020\omega^2 - 0.0557 &= 0 \\ \omega^4 + 0.8020\omega^2 &= 0.0557 + 0.0843\omega^2\end{aligned}\quad (3.66)$$

Substitusikan persamaan (3.66) ke dalam persamaan (3.65) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned}\text{sign} \frac{d(Re\lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega} &= \text{sign} \left\{ \frac{2\omega^2 + 0.8020}{\omega^4 + 0.8020\omega^2} - \frac{0.0843}{\omega^4 + 0.8020\omega^2} \right\} \\ \text{sign} \frac{d(Re\lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega} &= \text{sign} \left\{ \frac{2\omega^2 + 0.7177}{\omega^4 + 0.8020\omega^2} \right\}\end{aligned}\quad (3.67)$$

Selanjutnya pada persamaan (3.67) akan dibahas pembilangnya saja dikarenakan penyebutnya dalam bentuk kuadratik berderajat genap yang akan selalu berniali positif

$$\text{sign}\{2\omega^2 + 0.7177\}$$

Kondisi transversalitas positif pada persamaan (3.67) adalah

$$\text{sign} \frac{d(Re\lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega_+} = \text{sign}\{2\omega_+^2 + 0.7177\} \quad (3.68)$$

Kondisi ini terletak pada persamaan (3.25) dan (3.68), cara menghitungnya dengan mensubstitusikan persamaan (3.25) ke dalam persamaan (3.68)

$$\begin{aligned}&= \text{sign} \left\{ 2 \left(\frac{1}{2} \left((0.7177) + \sqrt{0.5151 - 0.2228} \right) \right) - (0.7177) \right\} \\ &= \text{sign}\{\sqrt{0.2923}\} \\ &= \text{sign}\{0.5406\}\end{aligned}\quad (3.69)$$

Akibatnya persamaan (3.69) disimpulkan menjadi:

$$\frac{d(Re\lambda)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_k^+, \lambda=i\omega} > 0$$

Kondisi transversalitas negative pada persamaan (3.67) adalah

$$\operatorname{sign} \frac{d(\operatorname{Re} \lambda)}{d\tau} \Big|_{\lambda=i\omega_-} = \operatorname{sign}\{2\omega_-^2 + 0.7177\} \quad (3.70)$$

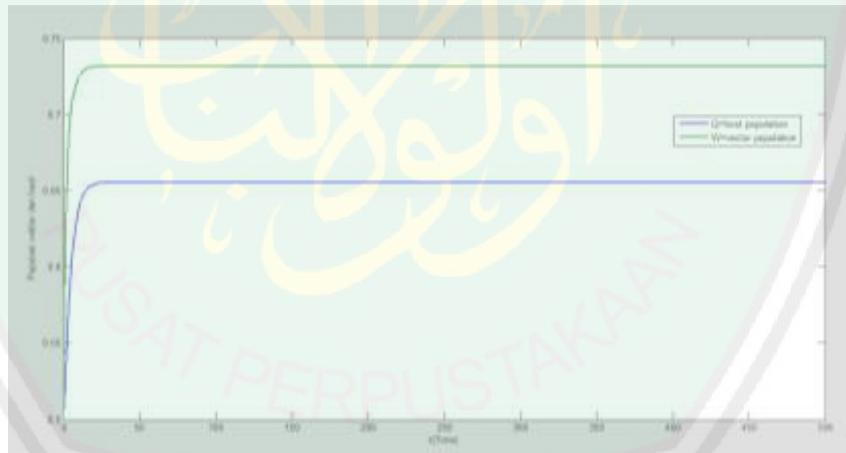
Kondisi ini terletak pada persamaan (3.52) dan (3.70), cara menghitungnya dengan mensubsitusikan persamaan (3.52) ke dalam persamaan (3.70)

$$\begin{aligned} &= \operatorname{sign} \left\{ 2 \left(\frac{1}{2} \left((0.7177) - \sqrt{0.5151 - 0.2228} \right) \right) - (0.7177) \right\} \\ &= \operatorname{sign}\{-\sqrt{0.2923}\} \\ &= \operatorname{sign}\{-0.5406\} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Akibatnya persamaan (3.70) disimpulkan menjadi:

$$\frac{d(\operatorname{Re} \lambda)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_k^+, \lambda=i\omega} < 0$$

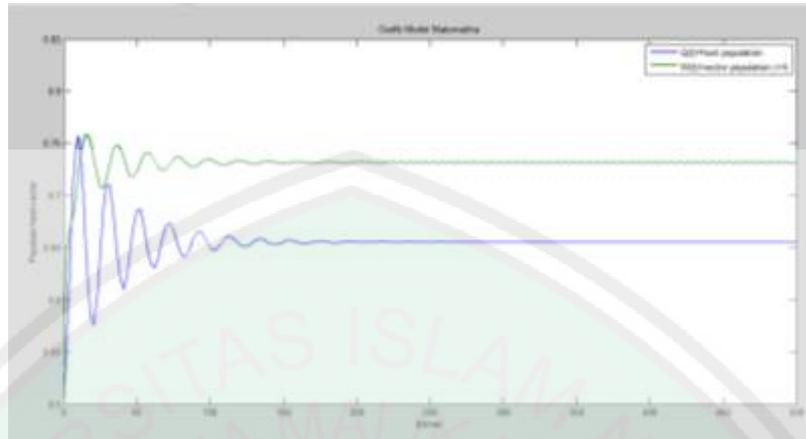
3.2.6 Simulasi Model Matematika



Gambar 3.2 Model Populasi Manusia dan Vektor dengan $\tau = 0$

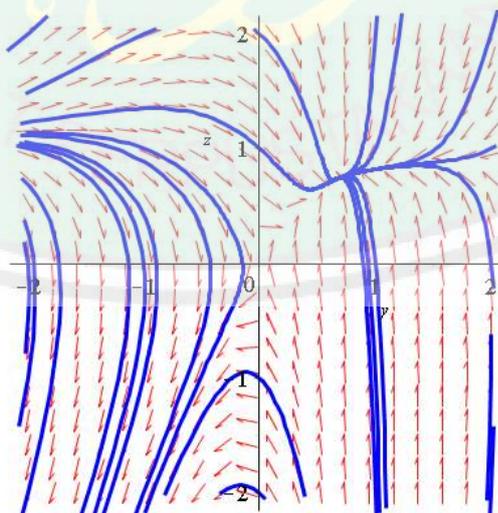
Berdasarkan grafik tersebut dengan $\tau = 0$ yang merupakan tidak adanya masa inkubasi dalam tubuh manusia menyebabkan perubahan populasi manusia dan populasi vektor mengalami kenaikan, dimana populasi manusia mengalami

kenaikan secara perlahan sedangkan populasi vektor mengalami kenaikan secara drastis yang kemudian konstan menuju 0.6555 dan 0.7320.



Gambar 3.3 Model Populasi Manusia dan Vektor dengan $\tau = 5$

Berdasarkan grafik diatas dengan waktu tunda $\tau = 5$ atau pada masa inkubasi dalam tubuh manusia selama 5 hari perubahan populasi manusia yang terinfeksi dan nyamuk mengalami osilasi. Namun semakin lama simpangannya semakin kecil, sehingga menyebabkan perubahan populasi manusia dan nyamuk semakin lama semakin stabil.



Gambar 3.4 Fase Potret

Gambar (3.4) merupakan hasil dari fase potret model penularan demam berdarah tanpa waktu tunda. Berdasarkan parameter pada tabel (3.1) di hasilkan nilai eigen untuk titik tetap kedua 0.6555 dan 0.7320 sebesar $\lambda_1 = -0.252973, \lambda_2 = -0.932904$, fase potret diatas bersifat stabil nodal sink karena mempunyai kedua nilai eigen negatif.

3.3 Kajian Nilai-nilai Keislaman pada Model Penularan Penyakit Demam Berdarah

Model matematika penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan dengan waktu tunda yang terdapat pada persamaan (3.1) dan (3.2) setelah dianalisis kestabilannya, perilaku *host* dan vektor dapat dilihat melalu grafik (3.3). Berdasarkan grafik tersebut populasi *host* (manusia) dan vektor (nyamuk) mengalami kestabilan pada saat titik ketimbangan yang didapatkan. Kestabilan ini menunjukkan bahwa jumlah nyamuk yang terinfeksi virus mempengaruhi jumlah penularan penyakit pada manusia. Dalam hal ini perlu diperhatikan bahwa sangat penting untuk menjaga lingkungan sekitar agar mengurangi penularan penyakit.

Berdasarkan Firman Allah dalam surah al-Anfal ayat (53) yang artinya: *“(Siksaan) yang demikian itu adalah karena sesungguhnya Allah sekali-kali tidak akan mengubah sesuatu nikmat yang telah dianugerahkan-Nya kepada suatu kaum, hingga kaum itu mengubah apa-apa yang ada pada diri mereka sendiri, dan sesungguhnya Allah Maha Mendengar lagi Maha Mengetahui”* menjelaskan bahwa nikmat Allah Swt ada begitu banyaknya yang tidak dapat dihitung, diantaranya yaitu nikmat sehat. Kesehatan seseorang rata-rata dipengaruhi oleh lingkungan sekitar tempat tinggalnya. Apabila lingkungan sekitar kotor, maka

akan timbul beberapa penyakit yang bisa menimpa diri sendiri, salah satunya yaitu penyakit demam berdarah. Penyakit demam berdarah disebarkan dan ditularkan melalui gigitan nyamuk.

Adapun Firman Allah dalam surah al-Baqarah ayat (26) yang artinya “Sesungguhnya Allah tidak segan membuat perumpamaan seekor nyamuk atau yang lebih kecil dari itu. Adapun orang-orang yang beriman, mereka tahu bahwa itu kebenaran dari Tuhan. Tetapi mereka yang kafir berkata, “Apa maksud Allah dengan perumpamaan ini?” menjelaskan mengenai perumpamaan seekor nyamuk untuk menggambarkan dunia disekitar kita. Ketika Allah menciptakan makhluk di muka bumi ini maka terdapat kelebihan dan kekurangan dari masing-masing makhluk tersebut. Begitupun ketika Allah menciptakan nyamuk. Beberapa jenis nyamuk mampu menimbulkan bahaya untuk kehidupan manusia, misalnya nyamuk jenis *Aedes Sp.* Nyamuk ini menyebabkan penyakit demam berdarah.

Nyamuk-nyamuk tersebut suka dan bertahan dengan bertempat tinggal pada lingkungan yang kotor serta kumuh. Semakin kotor tempat tersebut maka semakin mudah penyakit menular pada diri kita. Oleh karena itu sudah sepatutnya menjaga lingkungan agar selalu bersih dan meminimalisir pertumbuhan penyakit disekitar kita.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan model penularan penyakit demam berdarah tanpa kekebalan dengan waktu tunda, maka diperoleh kesimpulan bahwa:

1. Model yang dibahas yaitu berasal dari model epidemi SIR *host-vektor* yang berjumlah lima persamaan, kemudian direduksi menjadi dua persamaan. Kedua persamaan ini menjelaskan model penularan penyakit demam berdarah dengan waktu tunda yaitu masa inkubasi virus dalam diri manusia yang menyebabkan perubahan kestabilan banyaknya populasi manusia atau nyamuk yang tertular penyakit demam berdarah.
2. Berdasarkan penelitian yang dilakukan diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu $(y_0^*, z_0^*) = (0,0)$ dan $(y_1^*, z_1^*) = \left(\frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\gamma(\alpha + \beta)}, \frac{\alpha\gamma - \beta\delta}{\alpha(\gamma + \delta)}\right)$. Perubahan populasi *host* dan vektor yang tertular penyakit demam berdarah dipengaruhi oleh adanya waktu tunda. Penundaan waktu inkubasi virus menyebabkan perubahan kestabilan. Sistem pada model dengan kasus $\tau > 0$ menunjukkan local stabil pada saat waktu tunda tertentu. Pada saat $\tau = 5$ grafik penularan penyakit mengalami osilasi yang kemudian stabil menuju titik kesetimbangannya.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya disarankan kepada pembaca agar menganalisis pada model penularan penyakit demam berdarah dengan memperhatikan sistem imun atau kekebalan dengan menggunakan waktu tunda dan meneliti adanya bifurkasinya.

DAFTAR RUJUKAN

- A, S. (2014). Demam Berdarah *Dengue* (DBD). *Medula*, 2(2), 1-15.
- Adimy, Mostafa, Crauste , F., & Ruan , S. (2006). Periodic Oscillations in Leukopoiesis Models with Two Delays. *Journal of Theoretical Biology* , 288-299.
- Alfionita, F., & Zulakmal. . (2012). Penyelesaian Persamaan Diferensial Tunda Linier Orde 1 Dengan Metode Karakteristik. *Jurnal Matematika Unand*, 45-49.
- Anton, H., & Rorres, C. (2004). *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.
- Anwar, C., Lavita, R., & Handayani, D. (2014). Identifikasi dan Distribusi Nyamuk Aedes Sp. Sebagai Vektor Penyakit Demam Berdarah *Dengue* di Beberapa Daerah di Sumatera Selatan. *MKS*, 46(02), 1-7.
- Arizona, P., & Fuad, Y. (2014). Analisis Stabilitas Model Sel Imun-Tumor Dengan Tundaan Waktu. *MATHunesa*, 31-38.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. (2000). *ODE Architect Companion*. New York: Ney York: John Willey and Sons Inc.
- Edwards, C., & Penney, D. (2008). *Differential Equation and Linear Algebra*. New Jersey: Prentice hall Inc.
- El-Moneam, M., Aly, E., Meetei, M., Alesem, M., Msmali, A., & Rao, S. (2019). On Dynamical Behavior Analysis of Mathematical Model for *Dengue* Fever. *Wulfenia Journal Klagenfurt*, 49-66.
- Erneux, T. (2009). *Applied Delay Differential Equations*. New York: Springer Science+Business Media.
- Fidayanto, R., Susanto, H., Yohanani, A., & Yudhastuti, R. (2013). Model Pengendalian Demam Berdarah *Dengue*. *Jurnal Kesehatan Masyarakat Nasiona*, 522-528.
- Forde, J., & Nelson, P. (2004). Applications of Sturm sequences to bifurcation analysis of delay differential equation models. *J. Math. Anal. Appl*, 273-284.
- Handayani, P., Syafwan, A., & Efendi. (2013). Pemodelan Dan Analisis Kestabilan Sistemmemristor Kubik Orde Empat. *Jurnal Matematika Unand*, 1-6.
- Ibnas, R. (2017). Persamaan Diferensial Eksak Dengan Faktor Integrasi. *Jurnal Msa*, 91-99.

- Imrona, Mahmud. (2013). *Aljabar Linier Dasar*. Jakarta: Erlangga.
- Javeed, S., Shmed, A., Shaukat Khan, M., & Asif Javed, M. (2018). Stability Analysis and Solutions of Dynamical Models for *Dengue*. *Journal of Mathematics*, 45-67.
- Kar, T. (2003). Selective Harvesting in a Prey-Predator Fishery with Time Delay. *449-458(3-4)*.
- Kuang, Y. (1993). *Delay Differential Equations with Application in Population Dynamics*. London: Academic Press.
- Metrikawati, S. (2014). Model Dan Simulasi Transmisi Virus *Dengue* Di Dalam Tubuh Manusia. *Jurnal Konvergensi*, 115-127.
- Pagalay, U. (2003). Model Penyebaran Penyakit Demam Berdarah *Dengue* dengan Proses Transmisi Vertikal.
- Pagalay, U. (2009). *Mathematical Modelling Aplikasi pada kedokteran, Imunologi, Biologi, Ekonomi, dan Perikanan*. Malang: UIN-Maliki Press.
- Pratamawati, D. (2012). Peran Juru Pantau Jentik dalam Sistem kewaspadaan Dini Demam Berdarah *Dengue* di Indonesia. *Jurnal Kesehatan Masyarakat Nasional*, 243-248.
- Primbs, J. (2014). *A Factor Model Approach to Derivative Pricing*. London New York: CRC Press.
- Sihombing, S., & Dahlia, A. (2018). Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Orde Satu dan Dua disertai Nilai Awal dengan menggunakan Metode Runge Kutta Orde Lima Butcher dan Felhberg (RKF45). *Jurnal Matematika Integratif*, 51-60.
- Soewono, E., & Supriatna, A. K. (2001). A Two-dimensional Model for the Transmission of *Dengue* Fever Disease. *Bulletin Of The Malaysian Mathematical Sciences Society*, 49-57.
- Strauss, W. (2007). *Partial Differential Equation an Introduction*. Providence: Brown University.
- Sulisti, H., Noviani, E., & Kusumastuti, N. (2014). Analisis Kestabilan Model Dinamika Penyebaran Penyakit Flu Burung. *Buletin Ilmiah Math. Stat. Dan Terapannya (Bimaster)*, 235-144.
- T, A., & R, F. (2010). Analisis Faktor Risiko Kejadian Demam Berdarah *Dengue* Di Desa Mojosongo Kabupaten Boyolali . *Eksplanasi*, 1-9.
- Waluyo. (2006). *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Yaacob, Y. (2007). Analysis of a *Dengue* Disease Transmission Model without Immunity. *Department of Mathematics, UTM*, 75-81.

Yudhastuti, R., & Vidiyani, A. (2005). Hubungan Kondisi Lingkungan, Kontainer, Dan Perilaku Masyarakat Dengan Keberadaan Jentik Nyamuk *Aedes Aegypti* Di Daerah Endemis Demam Berdarah *Dengue* Surabaya. *Jurnal Kesehatan Lingkungan*, 170-182.



LAMPIRAN

Lampiran 1

Titik kestimbangan tanpa parameter

- > *restart* : *with(linalg)* : *with(LinearAlgebra)* : *with(plots)* :
- > $dY := \alpha \cdot Z - \alpha \cdot Z \cdot Y - \beta \cdot Y$; $dZ := y_1 \cdot Y - y_1 \cdot Z \cdot Y - \delta \cdot Z$;

$$dY := -YZ\alpha - Y\beta + Z\alpha$$

$$dZ := -YZy_1 + Yy_1 - Z\delta$$

- > *titik* := *solve*($\{dY, dZ\}$, $\{Y, Z\}$);

$$titik := \{Y=0, Z=0\}, \left\{ Y = \frac{\alpha y_1 - \beta \delta}{y_1 (\alpha + \beta)}, Z = \frac{\alpha y_1 - \beta \delta}{(\delta + y_1) \alpha} \right\}$$

Lampiran 2

Fase portrait tanpa waktu tunda

- > *restart*; *with(DEtools)* : *with(plots)* :

>

iniset := {*seq(seq*($[0, i, j]$, $i=-2..2$), $j=-2..2$)};

sys2 := *diff*($y(t), t) = 0.26 \cdot z(t) \cdot (1 - y(t)) - 0.1 \cdot y(t)$, *diff*($z(t), t) = 1 \cdot y(t) \cdot (1 - z(t)) - 0.24 \cdot z(t)$);

DEplot($[sys2]$, $[y(t), z(t)]$, $t=-50..50$, *iniset*, *linecolor* = *blue*, *stepsize* = 0.1, $y=-2..2$, $z=-2..2$, *font* = [*TIMES, ROMAN, 15*]);

iniset := {[0, -2, -2], [0, -2, -1], [0, -2, 0], [0, -2, 1], [0, -2, 2], [0, -1, -2], [0, -1, -1], [0, -1, 0], [0, -1, 1], [0, -1, 2], [0, 0, -2], [0, 0, -1], [0, 0, 0], [0, 0, 1], [0, 0, 2], [0, 1, -2], [0, 1, -1], [0, 1, 0], [0, 1, 1], [0, 1, 2], [0, 2, -2], [0, 2, -1], [0, 2, 0], [0, 2, 1], [0, 2, 2]}

$$sys2 := \frac{d}{dt} y(t) = 0.26 z(t) (1 - y(t)) - 0.1 y(t), \frac{d}{dt} z(t) = y(t) (1 - z(t)) - 0.24 z(t)$$

Lampiran 3

Program simulasi numerik model tanpa waktu tunda

```
function d=nodelay(~,Y)

d=zeros(2,1);
alpha=0.26;
beta=0.1;
gamma=1;
delta=0.24;

d(1)=alpha*Y(2)-alpha*Y(1)*Y(2)-beta*Y(1);
d(2)=gamma*Y(1)-gamma*Y(1)*Y(2)-delta*Y(2);

end

options=odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-5]);
[T,Y]=ode45(@nodelay,[0 500],[0.5 0.5],options);
U=gradient(Y(:,1));
V=gradient(Y(:,2));
% quiver(Y(:,1),Y(:,2),U,V,'r','LineWidth',5);hold on; grid on;
plot(T,Y(:,1),T,Y(:,2),'LineWidth',2),legend('Q=host
population','W=vektor population')

xlabel('t(Time)');
ylabel('Populasi vektor dan host');
```

Lampiran 3

Prgram simulasi numerik model dengan waktu tunda

```
function dydt=ddex1de(t,y,Z)
ylag1=Z(:);

dy1=0.26*y(2)*(1-ylag1(1))-0.1*ylag1(1);
dy2=ylag1(1)*(1-y(2))-0.24*y(2);

dydt=[dy1;dy2];
end

clc; clear all; close all;
tspan=[0 500]; % waktu perhitungan solusi
lags=5; % waktu tunda
sol = dde23(@ddex1de,lags,[0.5 0.5],tspan);
plot(sol.x,sol.y,'-o');
xlabel('Time t');
ylabel('Solution y');
legend('y_1','y_2');
```

RIWAYAT HIDUP



Amalia Wahyuning Tyas, lahir di Pasuruan pada tanggal 06 Oktober 1997. Biasa dipanggil Tyas. Putri kedua dari 2 bersaudara dari pasangan Bapak Arif Suherman dan Ibu Ining Usriatin. Selama di Malang bertempat tinggal di Jl. Sunan Ampel I No 10 Lowokwaru Kota Malang.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Randupitu dan lulus pada tahun 2009. Setelah itu melanjutkan ke SMPN 2 Gempol, lulus pada tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMK 1 Purwosari dan lulus pada tahun 2015. Selanjutnya, pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Amalia Wahyuning Tyas
NIM : 15610024
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Analisis Kestabilan pada Model Penularan Penyakit Demam Berdarah Tanpa Kekebalan dengan Waktu Tunda
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M.Si
Pembimbing II : Juhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1	27 Mei 2019	Konsultasi Bab I & Bab II	1.
2	18 Juni 2019	Revisi Bab I, Bab II dan Konsultasi Bab III	2.
3	21 Juni 2019	Konsultasi Agama Bab I & Bab II	3.
4	27 Juni 2019	Revisi Bab III dan ACC Bab I & Bab II	4.
5	25 Juli 2019	ACC Agama Bab I & Bab II	5.
6	30 Oktober 2019	Revisi Bab II & III	6.
7	06 November 2019	ACC Bab II & Revisi Bab III	7.
8	14 November 2019	Konsultasi Agama Bab III	8.
9	19 November 2019	Revisi Bab III & Konsultasi Bab IV	9.
10	20 November 2019	Revisi Bab III & Revisi Bab IV	10.
11	27 November 2019	ACC Keseluruhan	11.
12	28 November 2019	ACC Agama Keseluruhan	12.

Malang, 28 November 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001