ESTIMASI PARAMETER MODEL *COX INGERSOLL ROSS* MENGGUNAKAN METODE *GENERALIZED LEAST SQUARE*

SKRIPSI

OLEH
NOVIA VICKI RINANTI
NIM. 15610004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2019

ESTIMASI PARAMETER MODEL *COX INGERSOLL ROSS* MENGGUNAKAN METODE *GENERALIZED LEAST SQUARE*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Novia Vicki Rinanti
NIM. 15610004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2019

ESTIMASI PARAMETER MODEL *COX INGERSOLL ROSS*
MENGGUNAKAN METODE *GENERALIZED LEAST SQUARE*

SKRIPSI

Oleh
Novia Vicki Rinanti
NIM. 15610004

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 02 Desember 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II
Abdul Aziz, M.Si	Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19760318 200604 1 002	NIP. 19720604 199903 2 001

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER MOSEL *COX INGERSOLL ROSS* MENGGUNAKAN METODE *GENERALIZED LEAST SQUARE*

SKRIPSI

Oleh
Novia Vicki Rinanti
NIM. 15610004

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 26 Desember 2019

Penguji Utama	:	Dr. Sri Harini, M.Si	....
Ketua Penguji	:	Dr. H. Imam Sujarwo, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Abdul Aziz, M.Si	....
Anggota Penguji	:	Evawati Alisah, M.Si	....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Novia Vicki Rinanti

NIM : 15610004

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Estimasi Parameter Model *Cox Ingersoll Ross* menggunakan Metode *Generalized Least Square*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 2 November 2019
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
5BE3FADF931435956
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Novia Vicki Rinanti
NIM.15610004

MOTTO

"Akan lebih mudah jika kamu ikhlas menjalaninya"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

ibunda Umiyati tersayang yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasehat dan kasih sayang yang tak ternilai, serta adik-adik tersayang Evan dan Mayang yang selalu memberi semanggat yang sanggatberarti bagi penul

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah dan Ibu serta kakak dan adik tercinta yang selalu memberikan do'a, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Sahabat-sahabat terbaik penulis yang selalu menemani, membantu, dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2015 yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terimakasih kenang-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 02 Desember 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

y : Variabel terikat

x : Variabel bebas

y' : Turunan pertama y

y'' :Turunan kedua y

∂ : Turunan parsial

$W(t)$: Proses Wiener

Y_i : Variabel terikat periode ke-*i*

β_1 : Titik potong kurva terhadap sumbu y

β_2 : Koefisien kemiringan atau *slope*

X_i : Variabel bebas periode ke-*i*

u : *Error* $(u_i \sim N(0, \sigma^2))$

n : Banyak data penelitian

k : Indeks dari variabel bebas

μ : Rata-rata populasi

P : Populasi atau presentase

σ^2 : Variansi

σ : Simpangan baku

ρ : Koefisien korelasi

β : Koefisien regresi

θ : Parameter

r : Suku bunga

κ : Kelajuan r menuju level θ

θ : Level rata-rata atau *reversion level*

σ : Suku difusi atau simpangan baku sesaat dari r

ABSTRAK

Rinanti, Nofia Vicki, 2019. **Estimasi Parameter Model *Cox Ingersoll Ross* menggunakan Metode *Generalized Least Square*.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Kata kunci: estimasi, estimasi *Ordinary Least Square*, *Cox Ingersoll Ross*, *Generalized Least Square.*

Penelitian ini membahas tentang estimasi parameter pada model tingkat suku bunga yaitu *Cox Ingersoll Ross* dimana model tinggkat suku bunga ini bernilai positif. Kemudian diestimasi denggan menggunakan metode *Generalized Least Square* (GLS) yang merupakan varian lain dari metode *Ordinary Least Square* dimana metode GLS ini digunakan ketika asumsi-asumsi yang disyaratkan oleh metode OLS tidak terpenuhi. Tujuan dari peneltian ini yaitu untuk menggetahui bentuk dan hasil estimasi parameter model suku bunga *Cox Ingersoll Ross* dengan menggunakan metode *Generalized Least Square*. Dari hasil estimasi parameter tersebut diimplementasikan pada data pengaruh PDB, suku bunga, nilai ekspor dan nilai impor setiap negara terhadap FDI di Indonesia pada tahun 1987 hingga 2016 yang menghasilkan nilai parameter sebesar $\kappa = 0,02806$ $\theta = 0,06335,$ dan $\sigma = 5,0395e-04.$

ABSTRACT

Rinanti, Novia Vicki. 2019. **Parameter Estimation of Cox Ingersoll Ross Model *Generalized Least Square* Method**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Abdul Aziz, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd

.

Kata kunci: estimation, *Ordinary Least Square* estimation, *Cox Ingersoll Ross*, *Generalized Least Square.*

This study discusses the parameter estimation in the interest rate model, Cox Ingersoll Ross, where the interest rate model is positive. Then it is estimated by using the Generalized Least Square (GLS) method which is another variant of the Ordinary Least Square method where the GLS method is used when the assumptions required by the OLS method are not met. The purpose of this research is to find out the form and the results of the estimated parameters of the Cox Ingersoll Ross interest rate model using the Generalized Least Square method. . From the estimation results these parameters are implemented on the data of the effect of PDB, interest rates, export value and import value of each country on FDI in Indonesia in 1987 to 2016, which results in parameter values of $\kappa = 0,02806$ $\theta = 0,06335,$ and $\sigma = 5,0395e-04.$

ملخص

رينانتي، نوفيا فيكي. ٢٠١٩. **تقدير معلمة نموذج *Cox Ingersoll Ross* باستخدام طريقة *Generalized Least Square***. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا ملك إبراهيم مالانج. المشرف : (١) عبدالعزيز الماجستير (٢) افاواتي اليساي الماجستير

الكلمات المفتاحية: CIR، تقدير المعلمة، *Generalized Least Square*

تتناول هذه الدراسة تقدير المعلمة علي نموذج سعر الفائدة الذي هو *Cox Ingersoll Ross* حيث النموذج العالي لسعر الفائدة إيجابي. ثم يتم تقديره باستخدام طريقة *Generalized Least Square*(GLS) والذي يعد متغيرًا آخر من طريقة *Ordinary Least Square* حيث طريقة GLS يستخدم عند عدم استيفاء الافتراضات المطلوبة بواسطة الطريقة OLS. الغرض من هذه الدراسة هو تحديد شكل ونتيجة بارامترات نموذج سعر الفائدة *Cox Ingersoll Ross* باستخدام طريقة *Generalized Least Square*. من النتائج المقدرة للمعلمات المنفذة في بيانات الأثر PDB، في إندونيسية من سنة ١٩٨٧ إلى ٢٠١٦ مما ينتج عنه قيم المعلمات $\kappa = 0{,}02806$، $\theta = 0{,}6335$، و $\sigma = 5{,}0395e - 04$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam dunia ekonomi tidak asing dengan istilah investasi. Menurut Tandelilin (2010), investasi adalah komitmen atas sejumlah dana atau sumber daya lainnya yang dilakukan pada sast ini dengan tujuan memperoleh keuntungan dimasa yang akan datang. Karena tujuannya memperoleh keuntungan maka investor akan melakukan berbagai cara untuk mendapatkan keuntungan.

Menurut Saukirno (1998), tingkat suku bunga menentukan jenis-jenis investasi yang akan dilakukan oleh pengusaha. Pada dasarnya motif utama investor adalah meraup keuntungan sebesar-besarnya, maka dari itu mereka akan mempertimbangkan faktor tingkat suku bunga sehingga investor tidak mengalami kerugian. investor akan melakukan investasi apabila tingkat pengembalian modal lebih tinggi dari tingkat suku bunga. Sehingga tingkat suku bunga mempunyai pengeruh yang penting dalam menentukan harga dari suatu instrumen investasi.

Pergerakan tingkat suku bunga berubah-ubah sepanjang waktu secara stokastik, sehingga dibutuhkan model tingkat suku bunga untuk waktu yang kontinu.Salah satu model pergerakan tingkat suku bunga yaitu model *Cox Ingersoll Ross* (CIR), model ini pertama kali diperkenalkan pada tahun 1985 oleh Cox, Ingersoll, dan Ross. Model stokastik ini menjamin tingkat suku bunga bernilai positif dan juga memiliki kecendrungan kembali ke nilai rata-rata jangka panjang (Budiman dkk, 2015).

Terdapat tiga parameter dalam model tingkat suku bunga CIR yang tidak diketahui dan harus diestimasi, sehingga diperlukannya suatu estimasi yang mendekati data sebenarnaya. Dalam statistik, model CIR dapat diestimasikan dengan beberapa metode salah satunyayaitu metode *Generalized Least Squares* (GLS). Metode GLS merupakan varian lain dari metode *Least Square*metode ini digunakan ketika asumsi-asumsi yang disyaratkan oleh metode OLS (heteroskedastis dan autokorelasi) tidak terpenuhi. Penanggulangan kasus heteroskedastisitas dapat dilakukan dengan estimasi melalui pembobotan (*weighted*) yang dapat pula dikatakan sebagai kuadrat terkecil yang diberlakukan secara umum atau disebut *Generalized Least Squares* (Greene,1997 dalam Rizki,2011)

Padabuku yang ditulisolehAbdussyakir (2007), di dalam Al-Qur'an telah dijelaskan mengenai estimasi yaitu pada firman Allah surat Ash-Shaffat ayat 147 yang berbunyi:

وَأَرسَلنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلفٍ أَو يَزِيدُونَ (١٤٧)

"Dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih" (QS. ash-Shaffat/37:147)

Pada al-Qur'an surat ash-Shaffat ayat 147 tersebut dijelaskan bahwa nabi Yunus diutus kepada umatnya yang jumlahnya 100000 orang atau lebih. Jika membaca ayat tersebut secara seksama, maka terdapat rasa atau kesan ketidakpastian dalam menentukan jumlah umat nabi Yunus. Mengapa harus menyatakan 100000 atau lebih? Mengapa tidak menyatakan dengan jumlah yang sebenarnya? Bukankah Allah Swt maha mengetahui yang gaib dan yang nyata? Bukankah Allah Swt maha mengetahui segala sesuatu, termasuk jumlah umat nabi

Yunus? Jawaban terhadap pertanyaan tersebut adalah adalah contoh estimasi (taksiran).

Penelitian yang dilakukan oleh Widyaningsih, dkk (2014) yang membahas tentang estimasi model *Seemingly Unrelated Regression* dengan menggunakan dua metode yaitu metode*Generalized Least Squares* dan metode Kuadrat Terkecil. Dari kedua metode ini dihasilkan galat yang berbeda. Disimpulkan bahwa model *Seemingly Unrelated Regression* dengan menggunkan metode GLS akan menghasilkan galat yang lebih kecil daripada menggunakan metode kuadrat terkecil.

Pada penelitian yang dilakukan oleh Mariana, dkk (2015) telah melakukan estimasi parameter pada model suku bunga CIR dengan menggunkan metode*Kalman Filter* untuk menentukan harga *Zero Coupon Bond*. Namun, nilai parameter dari model CIR tidak bisa diestimasi dengan menggunakan metode *Kalman Filter, Extended Kalman Filter, Ensamble Kalman Filter* dari grafik hasil estimasi dan eror estimasi, hasil estimasi jauh dari nilai yang sebenarnya. Sehingga digunakan metode OLS untuk mengestimasi tingkat suku bunga harian. Dari hasil simulasi didapatkan bahwa semakin dekat dengan jatuh tempo, harga *Zero Coupon Bond* semakin tinggi.

Pada penelitian yang dilakukan oleh Budiman, dkk (2015) yang juga membahas estimasi parameter model *Cox Ingersoll Ross* namun menggunakan metode yang berbeda yaitu metode Maximum Likelihood. Data yang digunakan pada penelitian ini berdasarkan data tingkat suku bunga Bank Indonesia mulai Januari 2006 hingga Januari 2015. Dari data ini diperoleh hasil estimasi parameter pada model *Cox Ingersoll Ross* yaitu rata-rata jangka panjang dari tingkat suku bunga Bank Indonesia, kecepatan proses kembali menuju rata-rata jangka panjang dan volatilitas atau besarnya jarak antara fluktuasi tingkat suku bunga Bank Indonesia.

Sehingga berdasarkan beberapa uraian diatas, penulis tertarik ingin mengembangkan penelitian yang telah dilakukan oleh Mariana dkk (2015) dengan melakukan estimasi pada model yang sama yaitu CIR, namun pelunis mengubah metodenya dengan menggunakan metode GLS.

1.2 Rumusan Masalah

Penelitian ini mengangkat beberapa rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana bentuk estimasi parameter pada model CIR menggunakan metode GLS?
2. Bagaimana hasil implementasi estimasi parameter model CIR dengan menggunakan metode GLS?

1.3 Tujuan Peneltian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, tujuan dari penlitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui bentuk estimasi parameter pada model CIR menggunakan metode GLS.
2. Untuk mengetahui hasil implementasi estimasi parameter model CIR dengan menggunakan metode GLS?

1.4 Batasan Masalah

Untuk membatasi masalah agar sesuai dengan apa yang dimaksud dan tidak menimbulkan masalah baru maka penulis memberikan batasan pada penelitian ini adalah:

1. Data yang digunakan yaitu data pengaruh PDB, suku bunga, nilai ekspor dan nilai impor setiap negara terhadap FDI di Indonesia pada tahun 1987 hingga 2016.
2. Menggunakan Softwer Matlab.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah:

1. Bagi Penulis

   Memberikan kontribusi untuk bahan diskusi, literatur penunjang, dan bahan perbandingan dengan metode yang berbeda.
2. Bagi Pembaca

   Sebagai tambahan wawasan dan pengetahuan mengenai prosedur penyelesaian estimasi parameter model CIR menggunakan metode GLS.
3. Bagi Instansi

   Sebagai sumbangan pemikiran keilmuan dan menambah kepustakaan untuk menambah pengetahuan keilmuan dalam bidang matematika khususnya pada bidang estimasi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maliki Malang.

1.6 Sistematika Penulisan

Untuk memudahkan pemahaman penelitian ini secara menyeluruh, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari 5 bagian, yaitu:

Bab I Pendahuluan

Bab ini menguraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini akan diuraikan tentang kajian teori yang mendasari pembahasan serta teori yang berhubungan dengan penelitian seperti analisis suku bunga, model CIR, gerak brown, proses wiener, proses stokastik, estimasi parameter dengan metode GLS, penelitian sebelumnya dan konsep estimasi dalam al-Qur'an.

Bab III Metode Penelitan

Bab ini penulis menguraikan mengenai pendekatan penelitian, variabel penelitian, jenis dan sumber data serta metode analisis data.

Bab IV Pembahasan

Bagian ini penulis menguraikan pembahasan mengenai implementasi metode GLS pada model CIR.

Bab V Penutup

Bagian ini diuraikan tentang hasil pokok dan simpulan dari analisis terhadap data yang diolah dan berisi saran untuk pembaca dan peneliti selanjutnya.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Turunan

Menurut Razali (2010) turunan merupakan suatu limit unik yang bentuknya adalah sebagai berikut:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.1}$$

Digunakan notasi $f'(x)$ dibaca f aksen x untuk menyatakan turunan yang didefinisikan oleh limit tersebut. Proses penentuan turunan fungsi $f(x)$ disebut pendiferensialan.

2.1.1 Aturan dalam Turunan

Adapun aturan-aturan dalam menentukan turunan yaitu diantara:

a. Aturan Fungsi Konstanta

Jika $f(x) = c$ dimana c adalah konstanta, maka untuk sebarang x berlaku

$$f'(x) = 0$$

b. Aturan Pangkat

Jika $f(x) = x^n$ dimana n sebarang bilangan rasional, maka turunannya adalah:

$$f'(x) = n.x^{n-1}$$

c. Aturan Jumlah-Selisih

Jika diberikan fungsi $f(x) = g(x) \pm h(x)$ dimana $g(x)$ dan $h(x)$ terdiferensialkan, maka

$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

d. Aturan Perkalian

Jika $f(x) = g(x).h(x)$ dimana $g(x)$ dan $h(x)$ dapat diturunkan, maka turunan dari $f(x)$ adalah:

$$f^{'}(x) = g(x).h^{'}(x) + g^{'}(x).h(x) \tag{2.2}$$

(Razali, 2010).

2.1.2 Turunan Fungsi Eksponensial dan Fungsi Logaritma

Fungsi eksponensial dan fungsi logaritma dengan basis $e(e \approx\sim 2,71828...$ adalah bilangan natural). Fumgsi eksponensial natural e^x adalah yang terpenting begitupun dengan logaritma. Turunan fungsi eksponensial dan logaritma diantaranya:

a. Turunan fungsi eksponensial $y = e^x$

$$\text{jika } f(x) = e^x \text{ maka } f^{'}(x) = e^x$$

Turunan fungsi eksponensial $y = e^{g(x)}$

Untuk menentukan fungsi turunan eksponensial yang pangkatnya adalah fungsi x, seperti $y = e^{g(x)}$ dimana $g(x)$ adalah fungsi x, gunakanlah aturan rantai:

$$\text{Jika } y = e^{g(x)} \text{ maka, } \frac{dy}{dx} = e^{g(x)}.g^{'}(x) \tag{2.3}$$

b. Turunan fungsi eksponensial $y = a^x$

Menentukan turunan fungsi eksponensial dengan basis a dimana $y = a^x$. Disini a adalah sebarang bilangan real yang nilainya lebh besar dari nol dan $a \neq e.$

$$\text{Jika } y = a^x \text{ maka, } \frac{dy}{dx} = a^x.\ln a$$

Kemudian

$$\text{Jika } y = a^{g(x)} \text{ maka, } \frac{dy}{dx} = (a^{g(x)} \ln a).g^{'}(x)$$

c. Turunan Fungsi Logaritma $y = \ln x$

Fungsi logaritma $y = \ln x$ adalah loaritma dengan basis bilangan natural e

$$\text{Jika } y = \ln x \text{ maka, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

d. Turunan Fungsi Logaritma $y = \ln\left[g(x)\right]$

Jika $y = \ln\left[g(x)\right]$ maka turunanya adalah $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{g(x)} \cdot g^{'}(x)$ turunan dari jumlah atau selisih dua fungsi adalah sama dengan jumlah atau selisih dari turunan keduanya. Aturan ini berfungsi pada tiga fungsi atau lebih (Razali, 2010).

2.2 Persamaan Differensial

Menurut Finizio (1982) persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan-turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Meskipun disebut sebagai “persamaan turunan”, namun istilah “persamaan diferensial” (*aequatio differentialis*) telah dikemukakan oleh Leibniz pada tahun 1676. Seperti contoh berikut:

$$y' + xy = 3 \tag{2.4}$$

$$y'' = \left(1 + y'^2\right)\left(x^2 + y^2\right) \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{2.6}$$

Contoh (2.4) – (2.6) merupakan persamaan-persamaan diferensial. Persamaan tersebut memuat suatu fungsi yang tidak diketahui y dan turunannya terhadap variabel bebas. Persamaan diferensial dapat dibagi menjadi persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

2.2.1 Persamaan Diferensial Biasa

Menurut kartono (2012) dengan memperhatikan banyaknya variabel bebas yang terlibat, Persamaan Diferensial Biasa (PDB)apabila ada satu variabel bebas yang terlibat. Bentuk umum PDB adalah

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{2.7}$$

Persamaan (2.5) menunjukkan bahwa terdapat hubungan antara variabel bebas x dan variabel terikat y beserta turunan-turunannya dalam bentuk himpunan persamaan yang secara identik sama dengan nol yang menyatakan model matematika dari fenomena perubahan yang terjadi. Sebuah persamaan diferensial disebut mempunyai orde n jika orde turunan tertinggi yang terlibat adalah n, sedangkan jika turunan dengan orde tertinggi itu berderajat k maka persamaan itu dinamakan persamaan diferensial berderajat k.

Dalam contoh persamaan (2.1) - (2.3) fungsi yang tidak diketahui adalah y dan fungsi satu peubah bebasnya adalah x, dengan $y = f(x)$. Argumen x dalam $f(x)$ beserta turunanya biasanya dihilangkan untuk menyederhanakan notasi.

Simbol $y'' = f'(x)$ menunjukkan turunan pertama dan $y'' = f''(x)$ adalah turunan kedua dan seterusnya. Dikarenakan contoh (2.1) - (2.3) hanya memiliki satu peubah bebas, maka dikatakan PDB (Finizio, 1982).

2.2.2 Persamaan Diferensial Parsial

Suatu persamaan diferensial disebut Persamaan Diferensial Parsial (PDP) apabila memuat turunan parsial dari fungsi dua atau lebih variabel bebas. Bentuk umum dari PDP adalah

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_1}, \cdots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_n}, \cdots\right) = 0 \tag{2.8}$$

PDP biasanya memiliki variabel bebas untuk ruang dan waktu. Variabel bebas untuk ruang biasanya dinotasikan sebagai (x, y, z) atau dengan tambahan variabel waktu menjadi (x, y, z, t). Berikut contoh PDP sederhana dengan u sebagai fungsi yang belum diketahui (*unknown function*) dan hanya memiliki dua variabel bebas. Dalam hal ini diberikan contoh pada persamaan (2.4), fungsi yang tidak diketahui adalah u yang dianggap sebagai fungsi dua peubah bebas t dan x, dengan $\boldsymbol{u} = u(t, x)$. Argumen $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ dan $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dikatakan sebagai turunan kedua dari fungsi u terhadap t dan x. Dikarenakan memiliki dua peubah bebas, maka dikatakan sebagai PDP (Gunawan, 2016).

Contoh lain dari PDP ini adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial^3 k}{\partial^3 y} - \frac{\partial k}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 k}{\partial^2 z} = 0 \tag{2.9}$$

Dalam persamaan (2.7) fungsi yang tidak diketahui adalah $\boldsymbol{k}$ dengan tiga peubah bebas yaitu $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}$, dan $\boldsymbol{z}$. Persamaan $\frac{\boldsymbol{\partial^3 k}}{\boldsymbol{\partial^3 y}}$ menunjukkan turunan ketiga dari $\boldsymbol{k}$

terhadap y. persamaan $\frac{\partial k}{\partial x^3}$ menunjukkan turunan pertama dari $\boldsymbol{k}$ terhadap $\boldsymbol{x^3}$. Persamaan $\frac{\partial^2 k}{\partial^2 z}$ menunjukkan turunan kedua dari $\boldsymbol{k}$ terhadap $\boldsymbol{z}$. Persamaan ini memiiki turunan dengan orde tertinggi berderajat tiga sehingga dinamakan persamaan diferensial berderajat tiga.

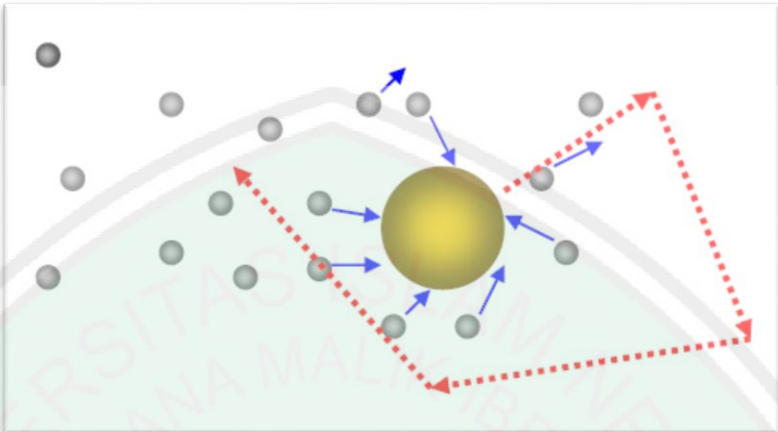
2.3 Stokastik

Pemanfaatan model yang menggunakan probabilitas lebih diminati dibanding model yang deterministik. Pengamatan dilakukan pada saat-saat yang berbeda, tidak dilakukan pada suatu periode waktu tertentu, sehingga menyangkut masalah probabilitas. Banyak fenomena fisika, sosial, teknik dan manajemen saat ini diselidiki merupakan fenomena yang random dengan suatu probabilitas. Proses Stokastik (*Stochastic Processes*) adalah himpunan variabel random yang merupakan fungsi dari "waktu" (*time*). Parameter "waktu" diartikan dalam arti luas. Proses stokastik sering juga disebut Proses Random (*Random Processes*)(Srinadi,2013).

2.3.1 Gerak Brown

Gerak *Brown* adalah gerak acak atau gerak terus-menerus dari partikel saat dimasukkan dalam suatu fluida (cair ataupun gas). Gerak ini dinamakan gerak *Brown* karena yang pertama kali mengamati adalah seorang botanis asal Skotlandia bernama Robert Brown pada tahun 1827. Menggunakan mikroskop, Brown menemukan gejala gerak acak saat mengamati partikel dari serbuk sari ketika dilarutkan dalam air dimana partikel menyebar ke segala arah dengan lintasan yang tidak teratur. Brown kemudian mengambil kesimpulan bahwa lintasan dari gerak partikel sangat tidak teratur dan gerakan akan semakin cepat bila temperatur dinaikkan (Taylor dan Karlin,1998).

Perhatikan gambar sekema dari gerak *Brown* berikut:



Gambar 2.1 Skema Gerak Brown (Ahamadi, 2002)

Gambar 2.1 merupakan skema dari Gerak Brown. Misalkan partikel *a* yang terlihat pada gambar tersebut, bergerak naik ke kanan, turun ke kanan, turun ke kiri, dan naik ke kiri yang ditunjukkan dengan anak panah merah secara acak. Hal tersebut menunjukkan partikel-partikel zat cair ataupun gas bergerak terus menerus secara acak atau tidak beraturan.

Setelah Brown, seorang peneliti bernama Gouy melakukan eksperimen untuk membuktikan keberadaan gerak *Brown* dan mendapatkan kesimpulan sebagai berikut:

1. Gerakan ini sangat tidak teratur, gabungan dari translasi dan rotasi dan lintasannya nampak tidak mempunyai garis singgung.
2. Dua partikel nampak bergerak secara saling bebas, bahkan ketika mereka mendekati satu samalain dalam jarak yang lebih dekat dibandingkan diamete rmereka.

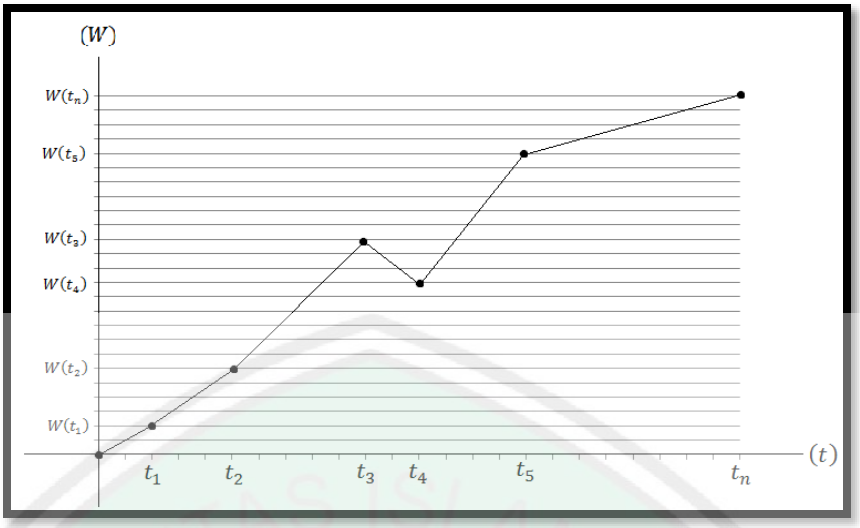
3. Gerakan ini semakin cepat untuk partikel yang semakin kecil.
4. Gerakan ini tidak dipengaruhi oleh komposisi dan rapatan partikel.
5. Gerakan ini semakin cepat dalam fluida yang viskositasnya semakin kecil.
6. Gerakan ini semakin cepat pada suhu yang semakin tinggi.
7. Gerakan ini tidak pernah berhenti.

Penelitian dari kedua ilmuwan tersebut tidak memberikan penjelasan mengenai penyebab gerak *Brown* namun hanya menyatakan sifat-sifat gerak Brown tersebut. Penjelasan mengenai asal usul gerak *Brown* pertama kali dilakukan oleh Einstein. Melalui disertasinya. Einstein mengasumsikan bahwa gerak acak dari partikel-partikel serbuk sari tersebut berasal dari tumbukan molekul-molekul penyusun fluida yang bergerak terus-menerus dalam fluida dan pergerakan dari partikel serbuk sari sangat tidak teratur sehingga hanya dapat dijelaskan menggunakan konsep probabilistik (Taylor dan Karlin,1998)

2.3.2 Proses Wiener

Menurut Wiersema (2008) proses *Wiener* adalah bentuk dari proses stokastik pada waktu kontinu, terdefinisi pada ruang keadaan, tidak ada pengaruh gaya luar serta berangkat dari waktu dan posisi 0. Sesuai definisi diatas, proses stokastik $W(t)$disebut gerak Brown jika memenuhi:

1. $W(t) = 0$ untuk $t = 0$, maka $W(0) = 0$
2. $W(t)$ memiliki kenaikan yang independen, yakni untuk setiap $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n, W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ merupakan kumpulan peubah acak yang independen atau saling bebas.



Gambar 2. 2 Grafik Kenaikan yang Independen

Dari grafik 2.2 terlihat kenaikan yang dimiliki tidak selalu naik, kenaikan yang dimiliki grafik tersebet bersifat independen atau kenaikannya bebas sehingga bisa turun bisa saja naik.

Untuk setiap pergerakan atau kenaikan yang terjadi pada interval waktu dengan panjang $\mathbf{0 \leq t < t + dt}$ hampir semua lintasan sampel dari $\boldsymbol{W(t+dt) - W(t) = dW(t)}$ berdistribusi normal dengan mean 0 dan variansi sama dengan panjang interval watu tersebut.

2.3.3 Proses Stokastik

Menurut Ross (2010) Sebuah proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$ adalah kumpulan variabel acak. Yaitu, untuk setiap $t \in T, X(t)$ adalah variabel acak. t didefinisikan sebagai waktu. $X(t)$ didefinisikan sebagai proses pada waku t. Contoh untuk proses stokastik adalah $X(t)$ merupakan jumlah total pelanggan yang telah memasuki supermarket pada waktu t.

Himpunan T disebut himpunan indeks dari proses. Ketika T adalah himpunan yang dapat dihitung, maka proses stokastik dikatakan sebagai proses diskrit. Contoh, $\{X_n, n = 0,1, ...\}$ adalah proses stokastik diskrit yang indeksnya oleh bilangan bulat non negatif. Ketika T adalah interval pada garisnya, maka proses stokastik dikatakan sebagai proses waktu kontinu. Contoh $\{X(t), t \geq 0\}$ adalah proses stokastik kontinu yang indeksnya oleh bilangan real non-negatif (Ross,2010)

Menurut Wiersema (2008) sebuah proses stokastik $\{W(t), t \geq 1\}$ disebut sebagai proses *Wiener* jika memenuhi beberapa syarat, salah satunya yaitu fungsikepadatan peluangdarivariabel random yang berdistribusi normal, dengan rata-rata adalah μ dan variansi σ^2 adalah

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (2.10)$$

Kumpulan dari sebuah proses *Wiener* pada interval $[t, t + dt]$ berdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan variansi sama dengan panjang interval. Fungsi distribusi dari kenaikan tersebut ditulis sebagai berikut:

$$P\left[W(t+dt) - W(t) \leq a\right] = \int_{x=-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{dt}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{dt}}\right)^2\right] dx \quad (2.11)$$

Kovarians dari proses *Wiener* pada waktu s dan t dimana $s < t$ merupakan nilai harapan dari variabel random tersebut, yaitu:

$$\text{cov}\left[W(s), W(t)\right] = \text{E}\left[\left\{W(s) — \text{E}\left[W(s)\right]\right\}\left\{W(t) — \text{E}\left[W(t)\right]\right\}\right] \quad (2.12)$$

Jika mengikuti syarat dari proses *Wiener* nilai dari $E[W(s)]$dan $E[W(t)]$adalah 0, sehingga

$$\operatorname{cov}\left[W(s),W(t)\right]=\mathrm{E}\left[W(s)W(t)\right] \tag{2.13}$$

Dengan sedikit modifikasi pada $W(t)$ maka dapat ditulis:

$$W(t)=W(s)+\{W(t)—W(s)\} \tag{2.14}$$

maka

$$\begin{aligned}
E[W(s)W(t)] = Cov(W(s)W(t)) \\
&= E[W(s)-E(W(s))W(t)-E(W(t))] \\
&= E[W(s)-E(W(s))W(s)+(W(t)-W(s)) \\
&\quad -E(W(s)+(W(t)-W(s))] \\
&= E[W(s)^2+(W(s)W(b)-W(s)^2) \\
&\quad -E(W(s)^2+(W(s)W(b)-W(s)^2) \\
&\quad -E(W(s)^2+E(W(s)W(t)-W(s)^2) \\
&\quad +(E(W(s))^2+E(W(s)W(t)-W(s)^2)] \\
&= E[W(s)^2+(W(s)W(t)-W(s)^2)-0] \\
&= E[W(s)^2+(W(s)W(t)-W(s))] \\
&= E[W(s)^2+(W(s)\{W(t)-W(s)\})] \\
&= E[W(s)^2]+E[(W(s)\{W(t)-W(s)\}] \\
&= E[W(s)^2+E[W(s)]E[W(t)-W(s))] \\
&= s+0 \\
&= s
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Apabila $t < s$ maka $E[W(s)W(t)] = t$ untuk sembarang waktu s dan $t$sehingga ditulis

$$E\left[W(s)W(t)\right]=\min(s,t) \tag{2.16}$$

2.3.4 Proses Ito

Jenis selanjutnya dari proses stokastik dikenal dengan proses ito. Proses ito adalah proses wiener umum dimana parameter a dan b adalah fungsi-fungsi dari nilai variabel yang bersangkutan x dan t, yaitu (Hull, 1946) :

$$dx=a(x,t)dt+b(x,t)dW(t) \tag{2.17}$$

Baik laju drift maupun laju variansi dari proses ito dapat berubah dari waktu ke waktu. Dalam interval waktu yang kecil antara t dan $t + \Delta t$, variabelnya berubah dari x ke $x + \Delta x$, dimana

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{2.18}$$

Hubungan ini melibatkan perkiraan yang kecil. Diasumsikan bahwa laju drift dan laju variansi x tetap konstan, nilai-nilainya sama pada waktu t, selama interval waktu antara t dan $t + \Delta t$ (Hull, 1946).

Menurut Øksendal (2000) bentuk umum dari persamaan diferensial stokastik adalah sebagai berikut:

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dWt$$

atau dapat juga ditulis dalam bentuk integral stokastik

$$\int_0^t dX(t) = \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dWs$$

$$X(t) - X(0) = \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dWs$$

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dWs$$

Ito Isometry

$$E\left[\left(\int_0^T X(t)dW(t)\right)^2\right] = \int_0^T E\left[X^2(t)\right]dt$$

2.4 Analisis Regresi

Analisis regresi merupakan studi kasus yang berkaitan dengan variabel terikat dan satu atau lebih variabel bebas dengan tujuan untuk mengetahui pengaruhnya. Dengan cara memperkirakan atau memprediksi rata-rata suatu populasi dalam pengambilan sampel yang berulang (Gujarati, 2004).

Bagian ini akan membahas tentang regresi linier dimana terdapat satu variabel terikat ($\boldsymbol{Y}$) dan satu atau lebih variabel bebas ($\boldsymbol{X}$). Dalam model ini digunakan untuk mengetahui pengaruh antara variabel terikat dan variabel bebasnya. Adapun pembagian regresi linier sebagai berikut (Gujarati, 2004):

a. Regresi Linier Sederhana

Regresi yang paling dasar adalah model regresi linier sederhana yang diberikan dalam bentuk sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + e_i \tag{2.19}$$

dimana:

$\boldsymbol{Y_i}$ = Nilai Variabel terikat priode ke - *i*

$\boldsymbol{\beta_1}$ = Intersep (titik potong kurva terhadap sumbu Y)

$\boldsymbol{\beta_2}$ = Koefisien kemiringan (*slope*)

$\boldsymbol{X_i}$ = Variabel bebas periode ke- *i*

$\boldsymbol{e_i}$: Galat periode ke-*i* ($\boldsymbol{e_i} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\sigma^2})$)

$\boldsymbol{n}$ = banyak data penelitian

Untuk $\boldsymbol{i = 1, 2, 3 \ldots n}$, sehingga diperoleh:

$$\begin{array}{cccc} Y_1 & = & \beta_0 & +\beta_1 X_1 & +e_1 \\ Y_2 & = & \beta_0 & +\beta_1 X_2 & e_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_n & = & \beta_0 & +\beta_1 X_n & e_n \end{array} \tag{2.20}$$

Kemudian dinotasikan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Dari bentuk matriks tersebut diperoleh bentuk sederhana:

$$y = x\beta + e \tag{2.22}$$

dimana:

$\boldsymbol{y}$ = vektor kolom dari variabel terikat Y

$\boldsymbol{x}$ = matriks data dari banyak pengamatan $\boldsymbol{n}$

$\boldsymbol{\beta}$ = vektor kolom dari parameter yang belum diketahui $\boldsymbol{\beta_1}$ sampai $\boldsymbol{\beta_n}$

$\boldsymbol{u}$ = vektor kolom dari error

b. Regresi Linier Berganda

Regresi linier berganda merupakan bentuk persamaan yang digunakan untuk menunjukkan pengaruh antara satu variabel terikat (Y) dan satu atau lebih variabel bebas (X). Dengan rumus sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + u_i \tag{2.23}$$

dimana:

$\boldsymbol{Y_i}$ = Variabel terikat peride ke-*i*

$\boldsymbol{\beta_1}$ = intersep

$\boldsymbol{\beta_{2,}} \ldots . \boldsymbol{\beta_k}$ = Koefisien regresi

$\boldsymbol{X_2}, \ldots . \boldsymbol{X_k}$ = Variabel bebas periode ke-*i*

$\boldsymbol{e_i}$ = galat periode ke-*i* ($\boldsymbol{e_i} \sim \boldsymbol{N(0, \sigma^2)}$)

$\boldsymbol{n}$ = banyak data penelitian

$\boldsymbol{k}$ = index dari variabel bebas

Untuk $\boldsymbol{i = 1, 2, 3} \ldots \boldsymbol{n}$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \ldots + \beta_k X_{k1} + e_1 \\ Y_2 &= \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \ldots + \beta_k X_{k2} + e_2 \\ &\vdots \\ Y_n &= \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \ldots + \beta_k X_{kn} + e_n \end{aligned} \tag{2.24}$$

Kemudian dinotasikan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & \cdots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & \vdots & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & \cdots & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

Dari bentuk matriks tersebut diperoleh bentuk sederhana:'

$$y = x\beta + e \tag{2.26}$$

dimana:

$\boldsymbol{y}$ = vektor kolom dari variabel terikat Y

$\boldsymbol{x}$ = matriks data dari banyak pengamatan $\boldsymbol{n}$ pada index $\boldsymbol{k-1}$ pada variabel $\boldsymbol{X_2}$ sampai $\boldsymbol{X_k}$

$\boldsymbol{\beta}$ = vektor kolom dari parameter yang belum diketahui $\boldsymbol{\beta_1}$ sampai $\boldsymbol{\beta_n}$

$\boldsymbol{e}$ = vektor kolom dari error

2.5 Estimasi Parameter

Beberapa penjelasan estimasi akan dibahas pada tahap ini. Pertama akan di jelaskan melalui pengertian estimasi kemudian diikuti dengan penjelasan tentang sifat-sifat estimator. Berikut merupakan penjelasan yang berkaitan dengan estimasi.

2.5.1 Pengertian Estimasi

Penarikan sampel (*sampling*) adalah salah satu konsep paling dasar dalam statistik. Sampel diambil dari suatu kelompok yang lebih besar disebut dengan populasi. Populasi sering dikatakan sebagai himpunan keseluruhan objek. Sedangkan nilai-nilai sampelnya disebut dengan statistik sampel. Estimasi (estimation) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau memperkiraan hubungan parameter populasi yang tidak diketahui berdasarkan informasi dari sampel. Dalam hal ini, peubah acak akan diambil dari populasi yang bersangkutan, jadi dengan estimasi ini keadaan parameter populasi dapat dapat diketahui (Hasan, 2002).

Penduga (*estimator*) adalah suatu nilai statistika (harga sampel) yang digunakan untuk menduga suatu parameter. Dengan pedugaan dapat diketahui seberapa jauh suatu parameter populasi yang tidak dietahui berada di sekitar sampel (statistik sampel). Secara umum, parameter diberi lambang θ (dibaca: *theta*) dan penduga diberi lambang $\hat{\theta}$(dibaca: *theta* topi atau *theta* cap). Untuk lebih jelasnya perhatikan tabel berikut ini:

Tabel 2.1 Parameter, Penduga, dan Statistik

Parameter $(\boldsymbol{\theta})$	Penduga $(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$	Statistik
μ(rata-rata populasi)	$\hat{\mu}$	$\bar{x}$
π (populasi/presentase)	$\hat{\pi}$	ρ
σ^2 (variansi)	$\hat{\sigma}^2$	S^2
σ (simpangan baku)	$\hat{\sigma}$	S
ρ (koefisien korelasi)	$\hat{\rho}$	r
β (koefisien regresi)	$\hat{\beta}$	b

2.5.2 Sifat-Sifat Estimator

Terdapat beberapa sifat untuk menentukan apakah sebuah penduga tergolong baik atau tidak. Suatu penduga dikatakan baik apabila memiliki sifat berikut (Sleeper, 2006):

a. Tak Bias

Estimator tidak bias jika, untuk setiap ukuran sampel n, nilai rata-rata estimator atas semua sampel yang mungkin adalah nilai parameter populasi. Semua estimator adalah jumlah acak. Untuk beberapa sampel, penaksir akan terlalu besar, dan untuk sampel lain, penaksir yang sama akan terlalu kecil. Rata-rata estimator yang tidak bias akan tepat.

Misalkan T adalah statistic sampel, digunakan sebagai penduga untuk parameter populasi θ, jadi $\hat{\theta} = T$. Bias dari estimator T adalah $E[T] - \theta$, yang merupakan nilai rata-rata yang diharapkan dari parameter populasi θ. Estimator T dikatakan tidak bias jika

$$E[T] = \theta.$$

b. Konsisten

Estimator konsisten jika seiring n bertambah besar, penaksir akan mendekati nilai parameter populasi sebenarnya. Jika sampel ukuran tak terbatas dapat dianalisis, penaksir yang konsisten akan memberikan nilai parameter populasi yang tepat, sedangkan penaksir yang tidak konsisten tidak akan memberikan nilai parameter populasi yang tepat.

Misalkan sampel ukuran n dipilih dari suatu populasi. θ menjadi parameter populasi, dan T_n menjadi penaksir θ berdasarkan sampel ukuran n.T_n membentuk urutan penaksir saat n bertambah besar. Urutan estimator T_n

dikatakan konsisten jika untuk setiap nilai $a > 0$ (a adalah urutan estimator) untuk setiap kemungkinan θ. $P[|T_n - \theta| > a] \rightarrow 0$ dengan $n \rightarrow \infty$.

2.5.3 Metode *Ordinary Least Square*

Ordinary Least Square (OLS) adalah regresi mengggunakan metode kuadrat kesalahan terkecil yang sederhana. OLS adalah keluarga estimator *Least Square* yang paling sederhana. Estimator ini memiliki banyak asumsi yang harus dipenuhi agar didapatkan hasil regresi yang tidak bias, konsisten, dan efisien. Metode estimator *Least Square* pada prinsipnya menentukan nilai parameter dengan cara meminimumkan kuadrat kesalahan (Ekananda, 2005).

Menurut Aziz (2010), misalkan model statistik linier

$$y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_k X_k + e \tag{2.27}$$

dimana variabel terikat y bergantung kepada variabel bebas x sebesar β, dengan sejumlah n data observasi maka model linier ini dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

sehingga model ini dapat disederhanakan sebagai

$$y = X\beta + e \tag{2.28}$$

Menurut Aziz (2010), berkaitan dengan model regresi yang telah dikemukakan sebelumnya, Gauss telah membuat asumsi mengenai variabel e sebagai berikut:

1. Nilai rata-rata atau harapan variabel e adalah sama dengan nol atau

$$E(e) = 0$$

yang berarti nilai bersyarat e yang diharapkan adalah sama dengan nol dimana syaratnya yang dimaksud tergantung pada nilai x. Dengan demikian, untuk nilai x tertentu mungkin saja nilai e sama dengan nol, mungkin positif atau negatif, tetapi untuk banyak nilai x secara keseluruhan nilai rata-rata e diharapkan sama dengan nol.

2. Tidak terdapat korelasi serial atau autokorelasi antar variabel untuk setiap observasi. Dengan demikian dianggap bahwa tidak terdapat hubungan yang positif atau negatif antara e_i dan e_j, dan tidak terdapat heteroskedastisitas antar variabel e untuk setiap observasi, atau dikatakan bahwa setiap variabel e memenuhi syarat homoskedastisitas. Artinya variabel e mempunyai variansi yang positif dan konstan yang nilainya σ^2, yaitu

$$Var(e_i, e_j) = \begin{cases} \sigma^2, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

atau dalam bentuk matriks

$$cov(e) = \begin{bmatrix} var(e_1) & cov(e_1, e_2) & \dots & cov(e_1, e_n) \\ cov(e_2, e_1) & var(e_2) & \dots & cov(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(e_n, e_1) & cov(e_n, e_2) & \dots & var(e_n) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

sehingga asumsi kedua ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$Cov(e) = E\left[\left(e - E(e)\right)(e - E(e))'\right] = E(ee') = \sigma^2 I_n \qquad (2.29)$$

3. Variabel x dan variabel e adalah saling tidak tergantung untuk setiap observasi sehingga

$$Cov(x_i, e_i) = E\big[\big(x_i - E(x_i)\big)\big(e_i - E(e_i)\big)\big]$$
$$= E[(x_i - \bar{x})(e_i - 0)]$$
$$= E[(x_i - \bar{x})e_i] \tag{2.30}$$
$$= 0$$

Dari ketiga asumsi ini diperoleh,

$$E(y) = E(X\beta) + E(e)$$
$$= X\beta + 0$$
$$E(y) = X\beta \tag{2.31}$$

dan

$$Cov(y) = E\left[\big(y - E(y)\big)\big(y - E(y)\big)'\right]$$
$$= E[(y - X\beta)(y - X\beta)']$$
$$= E[(X\beta + e - X\beta)(X\beta + e - X\beta)'] \tag{2.32}$$
$$= E[ee']$$
$$= \sigma^2 I_n$$

Misalkan sampel untuk y diberikan. Maka aturan main yang memungkinkan pemakaian sampel tadi untuk mendapatkan taksiran dari β adalah dengan membuat $e = y - X\beta$ sekecil mungkin. Dengan aturan main ini, diharapkan akan menghasilkan komponen sistematik yang lebih berperan dari pada komponen stokastiknya. Karena bila komponen stokastik yang lebih berperan artinya hanya diperoleh sedikit informasi tentang y. Dengan kata lain, X tidak mampu menjelaskan y. Untuk tujuan ini maka perlu memilih parameter β sehingga,

$$S = e'e = (y - X\beta)'(y - X\beta) \tag{2.33}$$

sekecil mungkin (minimal) (Aziz, 2010).

Persamaan (2.42) adalah skalar, sehingga komponen-komponennya juga skalar. Akibatnya, transpose skalar tidak merubah nilai skalar tersebut. Sehingga S dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} S &= (y - X\beta)'(y - X\beta) \\ &= (y' - \beta'X')(y - X\beta) \\ &= y'y - y'X\beta - \beta'X'y + \beta'X'X\beta \\ &= y'y - (y'X\beta)' - \beta'X'y + \beta'X'X\beta \\ &= y'y - \beta'X'y - \beta'X'y + \beta'X'X\beta \\ &= y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta \end{aligned} \tag{2.34}$$

Untuk meminimumkannya dapat diperoleh dengan melakukan turunan parsial pertama S terhadap β (Aziz, 2010):

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\beta} &= 0 - 2X'y + X'X\beta + (\beta'X'X)' \\ &= -2X'y + X'X\beta + X'X\beta \\ &= -2X'y + 2X'X\beta \end{aligned} \tag{2.35}$$

dan menyamakannya dengan nol diperoleh

$$X'X\beta = X'y \tag{2.36}$$

yang dinamakan sebagai persamaan normal, dan

$$\hat{\beta}_{ols} = (X'X)^{-1}X'y \tag{2.37}$$

yang dinamakan sebagai penaksir (estimator) parameter β secara kuadrat terkecil (*Ordinary Least Square*, OLS).

Selanjutnya, karena mencari nilai minimum dari errornya, maka dilakukan turunan parsial kedua S terhadap β yang harus bernilai lebih besar dari nol :

$$\frac{d}{d\beta'}\left(\frac{dS}{d\beta}\right) = \frac{dS}{d\beta'}(-2X'y + 2X'X\beta)$$

$$= 0 + 2X'X$$

$$= 2X'X \qquad (2.38)$$

dimana $2X'X > 0$.

2.5.4 Metode *Generalized Least Square*

Generalized Least Square merupakan pengembangan lain dari metode *Least Square*. Metode ini digunakan ketika asumsi-asumsi yang disyaratkan oleh metode OLS tidak di penuhi. Menurut Aziz (2010) model statistik linier yang diperumum adalah

$$y = X\beta + e$$

dengan $e \sim N(0, \varphi)$, dimana:

$$\Phi = \sigma^2\Psi = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \qquad (2.39)$$

Karena Φ matriks simetris dan *positive definite* maka ada matriks $\boldsymbol{C}$ yang otogonal $(CC' = C'C = I)$ sedemikian sehingga $C'\Phi C = D$ adalah matriks diagonal yang elemennya merupakan nilai-nilai eigen dari Φ, yaitu

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

misalkan

$$W = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\lambda_n \end{bmatrix}$$

karena Φ maka $W'C'\Phi\, CW = W'DW = I$, maka diperoleh $W'DW = I$.

Misalkan $P = W'C'$ maka $I = W'C'\Phi CW = P\Phi P'$ akibatnya diperoleh $\Phi = P^{-1}(P')^{-1} = (PP')$ atau $\Phi^{-1} = P'P$. Dari persamaan model linier diperoleh transformasi model menjadi

$$Py = P(X\beta + e) = PX + Pe$$

atau

$$y^* = X^*\beta + e^* \qquad (2.40)$$

dimana

$$E(e^*) = E(pe) = PE(e) = 0$$

dan

$$E\left(e^*e^{*'}\right) = E(Pe(Pe)') = E(Pee'P') = PE(ee')P' = P\varphi P' = I \qquad (2.41)$$

sehingga persamaan model transformasi dari $y^* = X^*\beta + e^*$ memenuhi asumsi standar model statistik linier (Aziz, 2010)

Dengan cara serupa, yaitu karena Ψ juga matriks simetris dan *positive define* maka ada matreiks Q sedemikian sehingga $Q\,\Psi\,Q = I$ dan diperoleh $\Psi = (QQ')^{-1}$ atau $\Psi^{-1} = Q'Q$ akibatnya diperoleh model statistik

$$Qy = Q(X\beta + e) = Q < \beta + Qe \qquad (2.42)$$

atau

$$\hat{y} = \hat{X}\beta + \hat{e}$$

dimana

$$E(\hat{e}) = E(Qe) = QE(e) = 0 \qquad (2.43)$$

dan

$$E(\hat{e}\hat{e}') = E(Qe(Qe)') = E(EQee'Q')$$
$$= QE(ee')Q' = Q\Phi Q'$$
$$= Q\sigma^2\Psi Q' = \sigma^2 Q\Psi Q = \sigma^2 I \qquad (2.44)$$

yang memenuhi syarat asumsi standar model statistik linier (Aziz, 2010)

Estimasi parameter-parameter pada β untuk model transformasi statistik linier untuk persamaan $y = X\beta + e$ disebut sebagai *Generalized Least Square Eestimator* (GLSE), yaitu sebagai berikut:

$$\hat{\beta}_{gls} = \left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}X^{*}y^{*}$$
$$= [(PX)'(PX)]^{-1}(PX)^{*}(Py)$$
$$= (X'P'PX)^{-1}X'P'Py$$
$$= (X'\Phi^{-1}PX)^{-1}X'\Phi^{-1}y$$
$$= \left(X'(\sigma^2\Psi)\right)^{-1}X'(\sigma^2\Psi)^{-1}y$$
$$= \sigma^2(X'\Psi^{-1})X'^{\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)}\Psi^{-1}y$$
$$= (X'\Psi^{-1}X)^{-1}X\Psi^{-1}y \qquad (2.45)$$

yang merupakan *Best Linier Unbiased Estimator* (BLUE) dengan matriks kovariansi

$$Cov\left(\hat{\beta}_{gls}\right) = \left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}$$
$$= \left[\left(PX\right)'\left(PX\right)\right]^{-1}$$
$$= \left(X'P'PX\right)^{-1}$$
$$= \left(X'\Phi^{-1}X\right)^{-1}$$
$$= \left(X'\left(\sigma^2\Psi\right)X\right)^{-1}$$
$$= \sigma^2\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} \qquad (2.46)$$

Menurut Aziz (2010) jika digunakan penaksiran *Ordanary Least Squares* terhadap β yaitu $\hat{\beta}_{als} = (X'X)^{-1}X'y$ maka penaksiran ini adalah tidak efisien, meskipun *unbiased estimator*, karena matriks kovariansi sebenarnya adalah

$$Cov\left(\hat{\beta}_{ols}\right) = \left(X^{'}X\right)^{-1} X^{'}\Phi X \left(X^{'}X\right)^{-1}$$

sehingga

$$Cov\left(\hat{\beta}_{ols}\right) - Cov\left(\hat{\beta}_{gls}\right) > 0$$

Sedangkan estimasi untuk σ^2 secara *Generalized Least Squares* adalah

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2_{gls} &= \frac{1}{n-k}\left(y \wedge - X \wedge \hat{\beta}_{gls}\right)'\left(y \wedge - X \wedge \hat{\beta}_{gls}\right) \\
&= \frac{1}{n-k}\left(Qy - QX\hat{\beta}_{gls}\right)^{'}\left(Qy - QX\hat{\beta}_{gls}\right) \\
&= \frac{1}{n-k}\left(Q\left(y - X\hat{\beta}_{gls}\right)\right)^{'}\left(Q\left(y - X\hat{\beta}_{gls}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n-k}\left(y - X\hat{\beta}_{gls}\right)^{'} Q'Q\left(y - X\hat{\beta}_{gls}\right) \\
&= \frac{1}{n-k}\left(y - X\hat{\beta}_{gls}\right)^{'} \Psi^{-1}\left(y - X\hat{\beta}_{gls}\right) \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

Menurut Gujarati (2004) Sifat-sifat estimator pada metode *Generalized Least Square* adalah:

1. *Linear*

   Estimator yang diperoleh dengan metode *Generalized Least Square* adalah linear, dimana

$$\hat{\beta}_{gls} = \left(X^{'}\Psi^{-1}X\right)^{-1} X\Psi^{-1}y \qquad (2.48)$$

   sehingga $\hat{\beta}$ adalah fungsi linear terhadap y.

2. *Unbiased*

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\hat{\beta}$ adalah estimator tak bias (*Unbiased*) dari β yakni sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
E\left(\hat{\beta}_{gls}\right) &= E\left[\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'V^{-1}y\right] \\
&= E\left[\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X^{1}\Psi^{-1}\left(X\beta+e\right)\right] \\
&= E\left[\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1}X\beta+\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{1}e\right] \\
&= E\left[I\beta+\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1}e\right] \\
&= E(\beta)+E\left(\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1}e\right) \\
&= \beta+\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1}E(e) \\
&= \beta+0 \\
&= \beta
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

dari sini terbukti bahwa $\hat{\beta}$ adalah estimator tak bias dari β

3. *Best*

Cara menunjukkan bahwa $\hat{\beta}_{gls}$ adalah estimator-estimator terbaik (*best*) yaitu, harus dibuktikan bahwa $\hat{\beta}_{gls}$ mempunyai variansi terkecil atau minimum diantara variansi estimator-estomator tak bias linear yang lain, Misalkan:

$$\hat{\beta}^{*} = \left[\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1}+c\right]y \tag{2.50}$$

dengan c adalah matriks konstanta yang diketahui. Sehingga persamaan (2.39) menjadi:

$$\hat{\beta}^* = \left[\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1} + c\right] y$$
$$= \left[\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1} + c\right]\left(X\hat{\beta}_{gls} + e\right)$$
$$= \left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1}X\beta + cX\beta + \left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1}e + ce$$
$$= I\beta + cX\beta + \left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1}e + ce$$
$$= \hat{\beta}_{gls} + cX\hat{\beta} + \left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1}e + ce$$

Karena diasumsikan $\hat{\beta}^*$ merupakan estimator tak bias dari β maka $E(\hat{\beta}^*)$ seharusnya β. Dengan kata lain, $cX\beta$ seharusnya merupakan matriks nol atau $cX = 0$,

$$\hat{\beta}^* - \beta = \left[\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1} + c\right] y - \beta$$
$$= \left[\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1} + c\right](X\beta + e) - \beta$$
$$= \left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1}X\beta - \beta + \left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1}e + cX\beta + ce)$$
$$= I\beta - \beta + \left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1}e + ce)$$
$$= \left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1}e + ce$$
$$= \left[\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1} + c\right] e$$

Jadi hasil dari $\hat{\beta}^* - \beta = \left[\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1} + c\right] e$

$$var\left(\hat{\beta}^*\right) = E\left[\left(\hat{\beta}^* - \beta\right)\left(\hat{\beta}^* - \beta\right)'\right]$$
$$= E\left(\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1} + c\right)ee'\left(\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1} + c\right)'$$
$$= \left(\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1} + c\right)E(ee')\left(\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1} + c\right)'$$
$$= \left(\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1} + c\right)(\sigma^2\Psi)\left(\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1} + c\right)'$$
$$= \sigma^2\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1}\Psi\left(\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1} + c\right)' +$$
$$\left(\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1}\Psi c' + c\Psi\left(\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} X'\Psi^{-1} + c\right)' + c\Psi c'\right)$$
$$= \sigma^2\left(\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1} + c\Psi c'\right)$$
$$= \text{var}(\hat{\beta}_{gls}) + \sigma^2 c\Psi c'$$

Persamaan di atas menunjukan bahwa matriks variansi estimator alternatif linear tak bias $\hat{\beta}^*$ merupakan penjumlahan matriks variansi estimator GLS dengan $\sigma^2 c\Psi c'$. Secara matematis terbukti bahwa

$$var\left(\hat{\beta}_{gls}\right) \leq var\left(\hat{\beta}^*\right)$$

2.6 Tingkat Suku Bunga

Pengertian tingkat suku bunga *(interest rate)* menurut Samuel dan Nordhaus (1995) adalah sebagai berikut:

"The interest rate is the amount of interest paid per unit of time. In other words, people must pay for the opportunity to borrow money. The cost of borrowing money, measured in dollar per year per dollar borrowed, is the interest rate".

Tingkat suku bunga adalah jumlah dari tingkat pembayaran per unit tiap waktu. Dengan kata lain, seseorang harus membayar sesuai dengan berapa banyaknya uang yang dipinjam. Banyaknya uang yang dipinjam ini diukur atau diasumsikan dalam dollar. Sehingga jumlah yang telah dipinjam ini akan diakumulasikan dalam dolar tiap tahunnya.

Menurut Keynes dalam Kuncoro (2001), menyatakan bahwa tingkat bunga terjadi karena adanya permintaan dan penawaran akan uang dari masyarakat, sedangkan perubahan naik-turunnya tingkat suku bunga mempengaruhi keinginan untuk mengadakan investasi, misalnya pada surat berharga, dimana harga dapat naik atau turun tergantung pada tingkat bunga (bila tingkat bunga naik maka surat berharga turun dan sebaliknya), sehingga ada kemungkinan pemegang surat berharga akan menderita *capital loss* atau *gain*.

2.6.1 Suku Bunga Stokastik

Sehubungan dengan tingkat suku bunga, selama ini perhitungan premi dilakukan dengan menggunakan suku bunga tetap, sedangkan berdasarkan kenyataan yang ada suku bunga selalu berubah-ubah secara tidak menentu dalam periode tertentu karena berbagai faktor yang memengaruhinya yang disebut sebagai suku bunga stokastik (Zeytun dan Gupta, 2007).

Menurut Hull (1946), terdapat beberapa model suku bunga stokastik, diantaranya yaitu model keseimbangan. Model keseimbangan pada umumnya dimulai dengan asumsi tentang variabel ekonomi dan proses penurunan bunga jangka pendek, r. Model keseimbangan tersebut kemudian dikembangkan dan diimplikasikan untuk menentukan harga *bond* dan harga opsi. Pada umumnya proses-proses dengan resiko netral dijelaskan sebagai proses Ito dalam bentuk :

$$dr = m(r)dt + s(r)dW \qquad (2.51)$$

Secara singkat, drift m, dan standar deviasi s, diasumsikan menjadi fungsi terhadap r. Persamaan umum (2.56) terus dikembangkan, sehingga didapatkan beberapa model suku bunga yaitu :

$m(r) = \kappa(\theta - r); \quad s(r) = \sigma$ (Model Vasicek)

$m(r) = \kappa(\theta - r); \quad s(r) = \sigma\sqrt{r}$ (Model Cox Ingersoll Ross)

2.6.2 Model Cox Ingersoll Ross

Menurut Zeytun dan Gupta (2007), model CIR mengikuti persamaan diferensial stokastik (2.16) sebagai berikut:

$$dr\,(t) = \kappa\big(\theta - r(t)\big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \qquad r(0) = r_0 \qquad (2.52)$$

dimana:

r : tingkat suku bunga

κ : kelajuan r menuju level θ

θ : level rata-rata (*reversion level*)

σ : suku difusi (simpangan baku sesaat dari r)

$W(t)$: gerak *Brown*

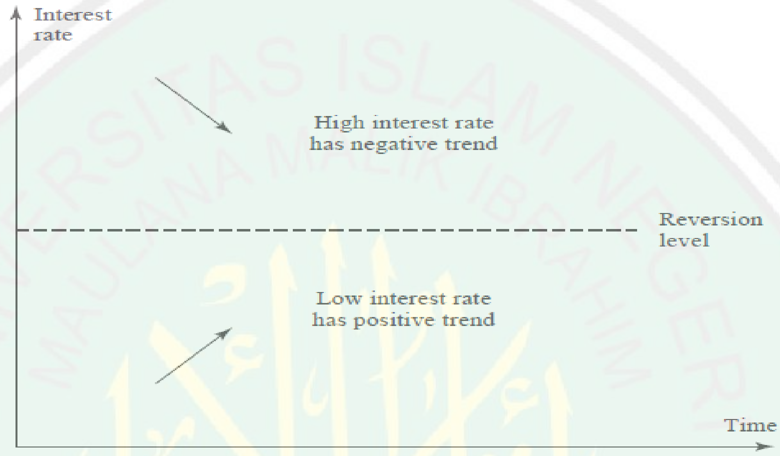
dengan r_0, κ, θ dan σ merupakan konstanta positif.

Ketika dalam kondisi $2\kappa\theta > \sigma^2$ maka suku bunga selalu positif, sebaliknya hanya bisa menjamin bahwa itu non negatif (dengan probabilitas positif untuk mengakhiri pada nol).

Hal terpenting dari model ini adalah *mean reversion*, yaitu suatu kecenderungan nilai $r(t)$ berada di sekitar level rata-rata. Faktor drift model CIR adalah $\kappa\ (\theta\ -\ r\ (t))$. Oleh karena itu, suku bunga jangka pendek adalah *mean revertion* dengan mean jangka panjang θ dan kecepatan *mean reversion* sama dengan κ. Istilah volatilitas σ dikalikan dengan $r\ (t)$ dan ini dapat menghilangkan kelemahan utama dari model Vasicek yaitu probabilitas positif yang memperoleh suku bunga negatif. Saat suku bunga mendekati nol maka volatilitas $\sigma\sqrt{r\ (t)}$ mendekati nol yang dapat membatalkan pengaruh secara acak, sehingga suku bunga tetap selalu positif. Ketika tingkat bunga tinggi maka volatilitasnya tinggi dan ini adalah sifat yang diinginkan (Zeytun dan Gupta, 2007).

Sebuah argumentasi ekonomi yang mendukung mengenai *mean reversion* menyatakan bahwa ketika suku bunga tinggi, ekonomi cenderung melambat dan mengakibatkan rendahnya permintaan dana dari peminjam. Oleh karena itu, suku bunga akan ditarik kembali ke nilai keseimbangannya. Sebaliknya, ketika suku bunga rendah, akan terjadi kecenderungan naiknya permintaan dana dari peminjam. Teori *mean reversion* sangat tepat untuk menggambarkan tingkat suku bunga, karena jika tanpa teori tersebut, pergerakan suku bunga dapat meningkat secara permanen seperti halnya harga saham, yang di dalam kehidupan nyata seharusnya tingkat suku bunga bergerak secara tidak permanen (dapat naik ataupun turun dalam periode tertentu) (Zeytun dan Gupta, 2007).

Teori *mean reversion* ditunjukkan pada Gambar 2.3 (Hull, 1946).



Gambar 2.3 *Mean Reversion*

Gambar 2.3 menunjukkan tentang *Mean Reversion*. Apabila suku bunga tinggi, ekonomi cenderung akan melambat. Oleh karena itu suku bunga akan kembali menuju nilai keseimbangannya. Sebaliknya, ketika suku bunga rendah, akan terjadi kecenderungan meningkatnya permintaan dana dari peminjam. Oleh karena itu suku bunga juga akan kembali menuju nilai keseimbangannya.

2.7 Penelitian Sebelumnya

Penelitian sebelumnya dilakukan oleh Mariana dkk (2015) dengan judul "Estimasi Parameter pada Model Suku Bunga Cox Ingeroll Ross (CIR) Menggunakan *Kalman Filter* untuk Menentukan Harga *Zero Coupon Bond"*.

Penelitian terebut tidak hanya menggunakan metode *Kalman Filter* untuk mengestimasi parameter CIR, namun juga menggunakan pengembangan dari metode *Kalman Filter* yaitu *Extended Kalman Filter*, *Ensamble Kalman Filter*, dan mengunakan metode OLS.

Estimasi yang pertama dilakukan dengan menggunakan metode *Kalman Filter* namun nilai parameter dari model CIR tidak dapat diestimasi, begitu juga dengan menggunakan metode *Extended Kalman Filter* dan *Ensamble Kalman Filter* nilai dari parameter CIR tidak dapat diestimasi, sehingga nilai awal parameter didapatkan dari hasil estimasi menggunakan OLS. Dari grafik hasil yang didapatkan dengan menggunkan metode *Kalman Filter* parameter yang dihasilkan tidak cukup baik. Bagitu juga hasil dari estimasi dengan menggunakan metode *Extended Kalman Filter* dan *Ensamble Kalman.* Dapat disimpulkan hasil estimasi masih jauh dari nilai yang sebenarnya. Sehingga digunakan asil estimasi dengan metode OLS sebagai nilai parameter untuk mengestimasi tingkat suku bunga harian mdel CIR.

2.8 Estimasi dalam Al-Qur’an

Dalam Al-Qur’an, estimasi telah disinggung dalam surah Al-Baqarah ayat 259 yaitu:

أَو كَٱلَّذِي مَرَّ عَلَىٰ قَريَة وَهِيَ خَاوِيَةٌ عَلَىٰ عُرُوشِهَا قَالَ أَنَّىٰ يُحيِۦ هَٰذِهِ ٱللَّهُ بَعدَ مَوتِهَا فَأَمَاتَهُ ٱللَّهُ

مِاْئَةَ عَام ثُمَّ بَعَثَهُۥ قَالَ كَم لَبِثتَۖ قَالَ لَبِثتُ يَومًا أَو بَعضَ يَومۖ قَالَ بَل لَّبِثتَ مِاْئَةَ عَام فَٱنظُر إِلَىٰ

طَعَامِكَ وَشَرَابِكَ لَمۡ يَتَسَنَّهۡۖ وَٱنظُرۡ إِلَىٰ حِمَارِكَ وَلِنَجۡعَلَكَ ءَايَةٗ لِّلنَّاسِۖ وَٱنظُرۡ إِلَى ٱلۡعِظَامِ كَيۡفَ نُنشِزُهَا

ثُمَّ نَكۡسُوهَا لَحۡمٗاۚ فَلَمَّا تَبَيَّنَ لَهُۥ قَالَ أَعۡلَمُ أَنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيۡءٖ قَدِيرٞ (٢٥٩)

"*Atau apakah (kamu tidak memperhatikan) orang yang melalui suatu negeri yang (temboknya) telah roboh menutupi atapnya. Dia berkata: "Bagaimana Allah menghidupkan kembali negeri ini setelah hancur?" Maka Allah mematikan orang itu seratus tahun, kemudian menghidupkannya kembali. Allah bertanya: "Berapakah lamanya kamu tinggal di sini?" Ia menjawab: "Saya tinggal di sini sehari atau setengah hari". Allah berfirman: "Sebenarnya kamu telah tinggal di sini seratus tahun lamanya; lihatlah kepada makanan dan minumanmu yang belum lagi beubah; dan lihatlah kepada keledai kamu (yang telah menjadi tulang belulang); Kami akan menjadikan kamu tanda kekuasaan Kami bagi manusia; dan lihatlah kepada tulang belulang keledai itu, kemudian Kami menyusunnya kembali, kemudian Kami membalutnya dengan daging". Maka tatkala telah nyata kepadanya (bagaimana Allah menghidupkan yang telah mati) diapun berkata: "Saya yakin bahwa Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu"* (QS. al-Baqarah /2:259)

Tafsir al-Qurthubi (2007: 640-641) menyebutkan bahwa firman Allah Swt Allah bertanya: "*Berapa lamanya kamu tinggal di sini?*". Para ulama berpendapat mengenai siapa yang bertanya pada firman ini. Beberapa ulama berpendapat bahwa yang bertanya adalah Allah Swt. Beberapa ulama berpendapat bahwa orang tersebut mendapat suara dari langit. Ulama lainnya berpendapat bahwa yang bertanya adalah malaikat Jibril. Ada juga yang mengatakan bahwa ia adalah seorang Nabi. Firman Allah , Ia menjawab: "*Saya tinggal di sini sehari atau setengah* hari". Orang tersebut menjawab seperti ini karena berdasarkan pemikiran atau perkiraannya. Dengan demikian ia tidak dianggap orang yang berbohong kepada Allah Swt, karena mereka mengatakan apa yang mereka ketahui saja, seakan mereka mengatakan: Sejauh yang saya ketahui atau perkirakan saya adalah saya tinggal sehari atau kurang dari sehari saja.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Pendekatan Penelitian

Pendekatan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah pendekatan literatur dan deskriptif kuantitatif. Pendekatan literatur digunakan untuk menentukan estimasi parameter dari model CIR menggunakan metode *Generalized Least Square* (GLS). Sedangkan pendekatan deskriptif kuantitatif dilakukan dengan menganalisis data sesuai dengan kebutuhan peneliti dan data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data yang berupa angka atau data numerik.

3.2 Jenis dan Sumber Data

Penelitian ini menggunakan data sekunder yang di peroleh dari World Bank Open Data pada situs https://data.worldbank.org/. Penelitian ini menggunakan studi literatur tentang pengaruh PDB, suku bunga, nilai ekspor dan nilai impor setiap negara terhadap FDI di Indonesia pada tahun 1987 hingga 2016.

3.3 Metode Analisis Data

Langkah–langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisi data yanga akan diimplementasikan

a. Data yang digunakan merupakan data sekunder yang dikeluarkan oleh World Bank Open Data

b. Data ini menggenai pengaruh PDB, suku bunga, nilai ekspor dan nilai impor setiap negara terhadap FDI di Indonesia pada tahun 1987 hingga 2016.

c. Data yang digunakan berjumlah 150 data yang lebih lengkapnya terdapat pada Lampiran 1.

2. Mengestimasi parameter model CIR dengan metode GLS:

a. Menenentukan model CIR.

b. Mencari solusi khusus dari model CIR dan menentukan turunannya.

c. Persamaan umum pada model CIR didiskritisasikan dengan menggunkan metode *Euler*.

d. Mengubah persamaan model CIR kedalam model regresi dan dinotasikan kedalam bentuk matriks.

3. Melakukan implementasi data suku bunga Bank Indonesia sebagai berikut:

a. Mengestimasi dengan menggunakan metode OLS untuk mendapatkan *error* dengan mengimplementasikan data.

b. Dengan menggunakan *error* dari metode OLS dapat di cari varian-kovarian dari σ_{ij} untuk mendapatkan matriks varian-kovarian Ψ.

c. Mengestimasi dengan menggunakan metode GLS.

d. Hasil estimasi parameter di subtitusikan kedalam persamaan umum CIR.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Estimasi Parameter Model CIR dengan Metode GLS

4.1.1 Solusi Rekursif Model CIR

Pada persamaan (2.52) model CIR mengikuti persamman diferensial stokastik. Sehingga untuk menentukan penyelesainnya diubah sebagi berikut:

$$dr(t)+\kappa r(t)dt=\kappa\theta dt+\sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \tag{4.1}$$

Dimana $W(t)$ adalah proses Wiener untuk $t>0$, κ,θ,σ dan $r(0)$ adalah konstanta positif. Persamaan (4.1) merupakan persamaan diferensial stokastik. Sehingga untuk memperoleh solusi dari model CIR, persamaan (4.1) dapat dirubah menjadi

$$dr(t)=k\theta dt-\kappa r(t)+\sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

$$dr(t)+\kappa r(t)=k\theta dt+\sigma\sqrt{r(t)}dW(t) \tag{4.2}$$

Dari persamman (4.2) akan dicari solusi khususnya seperti pada persamaan (2.3) sehingga kedua ruas persamaan (4.2) dikalikan dengan $e^{\kappa t}$ sehingga menjadi:

$$e^{\kappa t}\left(dr(t)+\kappa r(t)\right)=e^{\kappa t}\left(k\theta dt+\sigma\sqrt{r(t)}dW(t)\right)$$

$$e^{\kappa t}dr(t)+\kappa e^{\kappa t}r(t)dt=\kappa\theta e^{\kappa t}dt+\sigma e^{\kappa t}\sqrt{r(t)}dW(t) \tag{4.3}$$

Untuk menentukan turunan dari persamaan (4.3) dengan mengikuti aturan perkalian maka dimisalkan terlebih dahulu

$$u = e^{\kappa t}$$
$$v = r(t)$$
$$d(u) = e^{\kappa t} \cdot \kappa$$
$$d(v) = d(r(t))$$

$$d(u,v) = d\left(e^{\kappa t} r(t)\right)$$

Sehingga diperoleh:

$$d\left(e^{\kappa t} r(t)\right) = \kappa\theta e^{\kappa t} dt + \sigma e^{\kappa t} \sqrt{r(t)} dW(t) \tag{4.4}$$

dan diintegralkan dengan batas [0,t] yaitu:

$$\int_0^t d\left(e^{\kappa s} r(s)\right) = \int_0^t e^{\kappa s} k\theta ds + \int_0^t e^{\kappa s} \sigma \sqrt{r(s)} dW(s)$$

$$e^{\kappa t} r(t) - e^{\kappa \cdot 0} r(0) = \int_0^t e^{\kappa s} k\theta ds + \int_0^t e^{\kappa s} \sigma \sqrt{r(s)} dW(s)$$

$$e^{\kappa t} r(t) - 1 \cdot r(0) = k\theta \int_0^t e^{\kappa s} ds + \sigma \int_0^t e^{\kappa s} \sqrt{r(s)} dW(s)$$

$$e^{\kappa t} r(t) = r(0) + k\theta \int_0^t e^{\kappa s} ds + \sigma \int_0^t e^{\kappa s} \sqrt{r(s)} dW(s)$$

$$r(t) = \frac{r(0) + k\theta \int_0^t e^{\kappa s} ds + \sigma \int_0^t e^{\kappa s} \sqrt{r(s)} dW(s)}{e^{\kappa t}}$$

$$= e^{-\kappa t}\left[r(0) + k\theta \int_0^t e^{\kappa s} ds + \sigma \int_0^t e^{\kappa s} \sqrt{r(s)} dW(s) \right]$$

$$= r(0) e^{-\kappa t} + k\theta e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} ds + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} \sqrt{r(s)} dW(s)$$

$$= r(0) e^{-\kappa t} + k\theta e^{-\kappa t} \left(e^{\kappa t} - e^{\kappa \cdot 0}\right) + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} \sqrt{r(s)} dW(s)$$

$$= r(0) e^{-\kappa t} + k\theta e^{-\kappa t} \left(e^{\kappa t}\right) + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} \sqrt{r(s)} dW(s)$$

$$= r(0) e^{-\kappa t} + k\theta e^{-\kappa t} \left(\frac{1}{\kappa} e^{\kappa t} - \frac{1}{\kappa}\right) + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} \sqrt{r(s)} dW(s)$$

$$= r(0) e^{-\kappa t} + \left(k\theta e^{-\kappa t} \frac{1}{\kappa} e^{\kappa t} - k\theta e^{-\kappa t} \frac{1}{\kappa}\right) + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} \sqrt{r(s)} dW(s)$$

$$= r(0) e^{-\kappa t} + \left(e^{0}\theta - e^{-\kappa t}\theta\right) + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} \sqrt{r(s)} dW(s)$$

$$= r(0) e^{-\kappa t} + \theta\left(1 - e^{-\kappa t}\right) + \sigma e^{-\kappa t} \int_0^t e^{\kappa s} \sqrt{r(s)} dW(s) \tag{4.5}$$

4.1.2 Menggubah Persamaan dalam Model Regresi

Kemudian persamaan (2.52) jika didiskritisasikan dengan menggunakan metode *Euler* yaitu:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + y_i^{'}\Delta x \\ y_i^{'} &= \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} dr(t) &= \kappa\left(\theta - r\left(t\right)\right)dt + \sigma\sqrt{r\left(t\right)}dW\left(t\right) \\ \frac{r\left(t_{i+1}\right) - r\left(t_i\right)}{\Delta t} &= \kappa\left(\theta - r\left(t\right)\right)dt + \sigma\sqrt{r\left(t\right)}dW\left(t\right) \\ r\left(t_{i+1}\right) - r\left(t_i\right) &= \kappa\left(\theta - r\left(t_i\right)\right)\Delta t + \sigma\sqrt{r\left(t_i\right)}\sqrt{\Delta t}Z_i \\ r\left(t_{i+1}\right) - r(t_i) &= \kappa\left(\theta - r\left(t_i\right)\right)\Delta t + \sigma\sqrt{r\left(t_i\right)}\Delta W_i \end{aligned} \tag{4.7}$$

dimana $i = 0,1,\ldots n$ dan $\Delta W_i = W\left(t_{i+1}\right) - W(t_i)$ dengan $Z_i \sim N\left(0,1\right)$. Ketika tingkat suku bunga $r\left(t_i\right)$ memiliki nilai yang berbeda maka Persaman (4.7) dapat ditransformasikan ke dalam persamaan linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{r\left(t_{i+1}\right) - r(t_i)}{\sqrt{r\left(t_i\right)}} &= \frac{\kappa}{\sqrt{r\left(t_i\right)}}\left(\theta - r\left(t_i\right) + r\left(t_i\right) + r\left(t_i\right) + r\left(t_i\right)\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon\left(t_i\right) \\ &= \kappa\theta\frac{\Delta t}{\sqrt{r\left(t_i\right)}} - \kappa\sqrt{r\left(t_i\right)}\Delta t + \kappa\sqrt{r\left(t_i\right)}\Delta t + \kappa\sqrt{r\left(t_i\right)}\Delta t + \kappa\sqrt{r\left(t_i\right)}\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon\left(t_i\right) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Selanjutnya persamaan (4.8) diubah dalam bentuk persamaan regresi

$$\begin{aligned} y_i &= \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \beta_4 x_{4i} + \varepsilon_i \\ \frac{r\left(t_{i+1}\right) - r(t_i)}{\sqrt{r\left(t_i\right)}} &= \beta_0\frac{\Delta t}{\sqrt{r\left(t_i\right)}} - \beta_1\sqrt{r\left(t_i\right)}\Delta t + \beta_2\sqrt{r\left(t_i\right)}\Delta t + \beta_3\sqrt{r\left(t_i\right)}\Delta t + \beta_4\sqrt{r\left(t_i\right)}\Delta t + \varepsilon_i \end{aligned} \tag{4.9}$$

diperoleh:

$$y_i = \frac{r(t_{i+1}) - r(t_i)}{\sqrt{r(t_i)}}$$
$$\beta_0 = \kappa\theta$$
$$x_{1i} = \frac{\Delta t}{\sqrt{r(t_i)}}$$
$$\beta_1 = -\kappa$$
$$x_{2i} = \sqrt{r(t_i)}\Delta t$$
$$\beta_2 = -\kappa$$
$$x_{2i} = \sqrt{r(t_i)}\Delta t$$
$$\beta_3 = -\kappa$$
$$x_{3i} = \sqrt{r(t_i)}\Delta t$$
$$\beta_4 = -\kappa$$
$$x_{4i} = \sqrt{r(t_i)}\Delta t$$
$$\varepsilon_i = \sigma\Delta W_i$$

Untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ persamaan (4.9) dapat dinotasian dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r_1}} & \sqrt{r_1}\Delta t & \cdots & \sqrt{r_5}\Delta t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r_{n-1}}} & \sqrt{r_{n-1}}\Delta t & \cdots & \sqrt{r_{n-1}}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} + \sigma\sqrt{\Delta t} \begin{bmatrix} N_1(0,1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(0,1) \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

dimana:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r_1}} & \sqrt{r_1}\Delta t & \cdots & \sqrt{r_5}\Delta t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r_{n-1}}} & \sqrt{r_{n-1}}\Delta t & \cdots & \sqrt{r_{n-1}}\Delta t \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon = \sigma\sqrt{\Delta t} \begin{bmatrix} N_1(0,1) \\ \vdots \\ N_{n-1}(0,1) \end{bmatrix}$$

Sehingga model linier dari matriks (4.10) disederhanakan sebai berikut:

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{4.11}$$

4.2 Implementasi Metode GLS pada Model CIR

Data yang digunakan pada implementasi parameter pada model CIR ini adalah pengaruh PDB, suku bunga, nilai ekspor dan nilai impor setiap negara terhadap FDI di Indonesia pada tahun 1987 hingga 2016 yang terdapat pada Lampiran 1.

a) Dengan menggunakan metode OLS untuk mendapatkan *error*. Sehingga berdasarkan persamaan (2.36), maka secara OLS dapat diperoleh penduga parameter $\hat{\beta}_{ols}$ yaitu:

$$\hat{\beta}_{ols} = (X'X)^{-1}X'y$$

$$\hat{\beta}_{ols} = \left(\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r_1}} & \cdots & \frac{\Delta t}{\sqrt{r_{n-1}}} \\ \sqrt{r_1}\Delta t & \cdots & \sqrt{r_{n-1}}\Delta t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{r_5}\Delta t & \cdots & \sqrt{r_{n-1}}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r_1}} & \sqrt{r_1}\Delta t & \cdots & \sqrt{r_5}\Delta t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{r_{n-1}}} & \sqrt{r_{n-1}}\Delta t & \cdots & \sqrt{r_{n-1}}\Delta t \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{r_1}} & \cdots & \frac{\Delta t}{\sqrt{r_{n-1}}} \\ \sqrt{r_1}\Delta t & \cdots & \sqrt{r_{n-1}}\Delta t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{r_5}\Delta t & \cdots & \sqrt{r_{n-1}}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Dari persamaan diatas jika diimplementasikan dalam data pengaruh PDB, suku bunga, nilai ekspor dan nilai impor setiap negara terhadap FDI di Indonesia pada tahun 1987 hingga 2016 yang terdapat pada Lampiran 1 maka data tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 385 \\ 576 \\ \vdots \\ 4142 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{80844}} & \sqrt{4882}\Delta t & \cdots & \sqrt{18173}\Delta t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{861256}} & \sqrt{8299}\Delta t & \cdots & \sqrt{182167}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{149} \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

Sehingga dapat dimisalkan:

$$y = \begin{bmatrix} 385 \\ 576 \\ \vdots \\ 4142 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{80844}} & \sqrt{4882}\Delta t & \cdots & \sqrt{18173}\Delta t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{861256}} & \sqrt{8299}\Delta t & \cdots & \sqrt{182167}\Delta t \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{149} \end{bmatrix}$$

Sehingga dari persamaan (4.12) diperoleh parameter $\hat{\beta}_{ols}$ dengan data yaitu:

$$\hat{\beta}_{gls} = \left(\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{80844}} & \cdots & \frac{\Delta t}{\sqrt{861256}} \\ \sqrt{4882}\Delta t & \cdots & \sqrt{8299}\Delta t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{18173}\Delta t & \cdots & \sqrt{182167}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{80844}} & \sqrt{4882}\Delta t & \cdots & \sqrt{18173}\Delta t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{861256}} & \sqrt{8299}\Delta t & \cdots & \sqrt{182167}\Delta t \end{bmatrix} \right)^{-1} \tag{4.14}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{80844}} & \cdots & \frac{\Delta t}{\sqrt{861256}} \\ \sqrt{4882}\Delta t & \cdots & \sqrt{8299}\Delta t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{18173}\Delta t & \cdots & \sqrt{182167}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 385 \\ 576 \\ \vdots \\ 4142 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}97886 \\ 0{,}64302 \\ -0{,}88972 \\ -0{,}91005 \\ 0{,}05071 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan persamaan (4.13) dapat dihitung nilai-nilai error dengan persamaan:

$$\varepsilon = y - X\hat{\beta}_{ols} \tag{4.15}$$

dengan matriks:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 385 \\ 576 \\ \vdots \\ 4142 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{80844}} & \sqrt{4882}\Delta t & \cdots & \sqrt{18173}\Delta t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{861256}} & \sqrt{8299}\Delta t & \cdots & \sqrt{182167}\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}97886 \\ 0{,}64302 \\ -0{,}88972 \\ -0{,}91005 \\ 0{,}05071 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}00104 \\ 0{,}00872 \\ \vdots \\ 0{,}00961 \end{bmatrix}$$

b) Denggan menggunakan *error* pada persamman (4.15) dapat dilakukan estimasi untuk mendapatkan $\boldsymbol{\sigma_{iz}}$ denggan mengikuti rumus

$$\begin{aligned}\sigma_{iz} &= \frac{1}{n-K^*}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{e}_{it}\hat{e}_{iz}\right)\\ &= \frac{1}{n-K^*}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\varepsilon}_{i}\hat{\varepsilon}_{z}\right)\\ &= \frac{1}{n-K^*}\left[\left(y_i - X_i\hat{\beta}_i\right)'\left(y_z - X_z\hat{\beta}_z\right)\right]\end{aligned} \tag{4.17}$$

Sehingga dihasilkan

$$\hat{\sigma}_{11}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{t_1}^2}{n-K} = \frac{\varepsilon_1'\varepsilon_1}{n-K} = \frac{0{,}9886}{10-6} = 0{,}24715$$

$$\hat{\sigma}_{22}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{t_2}^2}{n-K} = \frac{\varepsilon_2'\varepsilon_2}{n-K} = \frac{0{,}0482}{10-6} = 0{,}01205$$

$$\hat{\sigma}_{12}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_{t_1}^2}{n-K} = \frac{\varepsilon_1'\varepsilon_1}{n-K} = \frac{0{,}02098}{10-6} = 0{,}005245 \tag{4.18}$$

c) Kemudian menggunakan matriks varian-kovarian pada persamaan (4.18) dengan $\varepsilon \sim N(0,\varphi)$ dimana:

$$\Phi = \sigma^2\Psi = \begin{bmatrix}\sigma_{12} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \sigma_{22} & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{2n}\end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Karena Ψ merupakan matriks simetris dan *positive define* maka ada matreiks Q sedemikian sehingga $Q\ \Psi\ Q = I$ dan diperoleh $\Psi = (QQ')^{-1}$ atau $\Psi^{-1} = Q'Q$ akibatnya diperoleh model statistik

$$Qy = Q(X\beta + \varepsilon) = Q < \beta + Q\varepsilon \tag{4.20}$$

atau

$$\hat{y} = \hat{X}\beta + \hat{\varepsilon}$$

dimana

$$E(\hat{\varepsilon}) = E(Q\varepsilon) = QE(\varepsilon) = 0 \tag{4.21}$$

dan

$$E(\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}^{'}) = E\left(Q\varepsilon\left(Q\varepsilon\right)^{'}\right)$$
$$= E\left(EQ\varepsilon\varepsilon^{'}Q^{'}\right)$$
$$= QE\left(\varepsilon\varepsilon^{'}\right)Q^{'}\Phi Q^{'}$$
$$= Q\sigma^{2}\Psi Q^{'}$$
$$= \sigma^{2}Q\Psi Q^{'}$$
$$= \sigma^{2}I \quad (4.22)$$

Sehingga matriks kovariannya adalah:\

$$\Psi = \begin{bmatrix} \sigma_{11}I & \sigma_{12}I & \dots & \sigma_{1n}I \\ \sigma_{21}I & \sigma_{22}I & \dots & \sigma_{2n}I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1}I & \sigma_{n2}I & \dots & \sigma_{nn}I \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Kemudian jika diimplementasikan menggunakan data pada persamaan (4.23) maka maka hasil matriksnya adalah:

$$\widehat{\Psi}^{-1}{}_{5\times 5} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}I & \sigma_{12}I & \dots & \sigma_{1n}I \\ \sigma_{21}I & \sigma_{22}I & \dots & \sigma_{2n}I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1}I & \sigma_{n2}I & \dots & \sigma_{nn}I \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 0{,}00213 & 0{,}0249 & -0{,}00654 & 0{,}00213 & 0{,}00913 \\ 0{,}05621 & 0{,}00203 & 0{,}01023 & 0{,}02775 & 0{,}00335 \\ 0{,}05608 & 0{,}00113 & 0{,}000413 & -0{,}06054 & 0{,}04253 \\ -0{,}00805 & -0{,}00654 & -0{,}00183 & 0{,}00213 & 0{,}010043 \\ 0{,}006188 & 0{,}0313 & 0{,}002643 & 0{,}0255 & 0{,}03283 \end{pmatrix}$$

Sehingga estimasi parameter-parameter pada β untuk model transformasi statistik linier untuk persamaan $y = X\beta + \varepsilon$ disebut sebagai *Generalized Least Square Eestimator* (GLSE), seperti pada persamaan (2.45) yaitu:

$$\beta_{gls} = \left(X^{'}\Psi^{-1}X\right)^{-1}X^{'}\Psi^{-1}y \quad (4.24)$$

β_{gls}

$$= \left(\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{80844}} & \cdots & \frac{\Delta t}{\sqrt{861256}} \\ \sqrt{4882}\Delta t & \cdots & \sqrt{8299}\Delta t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{18173}\Delta t & \cdots & \sqrt{182167}\Delta t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}00213 & 0{,}0249 & -0{,}00654 & 0{,}00213 & 0{,}00913 \\ 0{,}05621 & 0{,}00203 & 0{,}01023 & 0{,}02775 & 0{,}00335 \\ 0{,}05608 & 0{,}00113 & 0{,}000413 & -0{,}06054 & 0{,}04253 \\ -0{,}00805 & -0{,}00654 & -0{,}00183 & 0{,}00213 & 0{,}010043 \\ 0{,}006188 & 0{,}0313 & 0{,}002643 & 0{,}0255 & 0{,}03283 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{80844}} & \sqrt{4882}\Delta t & \cdots & \sqrt{18173}\Delta t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta t}{\sqrt{861256}} & \sqrt{8299}\Delta t & \cdots & \sqrt{182167}\Delta t \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{\sqrt{80844}} & \cdots & \frac{\Delta t}{\sqrt{861256}} \\ \sqrt{4882}\Delta t & \cdots & \sqrt{8299}\Delta t \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{18173}\Delta t & \cdots & \sqrt{182167}\Delta t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}00213 & 0{,}0249 & -0{,}00654 & 0{,}00213 & 0{,}00913 \\ 0{,}05621 & 0{,}00203 & 0{,}01023 & 0{,}02775 & 0{,}00335 \\ 0{,}05608 & 0{,}00113 & 0{,}000413 & -0{,}06054 & 0{,}04253 \\ -0{,}00805 & -0{,}00654 & -0{,}00183 & 0{,}00213 & 0{,}010043 \\ 0{,}006188 & 0{,}0313 & 0{,}002643 & 0{,}0255 & 0{,}03283 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 385 \\ 576 \\ \vdots \\ 4142 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2{,}15226 \\ 0{,}03328 \\ 2{,}88049 \\ 3{,}02517 \\ 3{,}09705 \end{bmatrix}$$

Sehingga dari hasil diatas model liniernya adalah:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Maka sistem persamaan regresinya adalah:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \varepsilon$$

$$Y = 2{,}15226 + 0{,}03328X_1 + 2{,}88049X_2 + 3{,}02517X_3 + 3{,}09705X_4 + \varepsilon$$

Dari hasil diatas diperoleh parameter dari β_0, β_1 , β_2 , β_3 dan β_4 kemudian disubtitusikan kedalam persamaan

$$\kappa = -\beta_1 \tag{4.22}$$

$$\theta = -\frac{\beta_0}{\beta_1} \tag{4.23}$$

Dari persamaan (4.9) dapat diketahui persamaan σ yaitu:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\Delta tn}}\|\varepsilon\|$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta tn}}\left\|Y - X\hat{\beta}_{ols}\right\| \tag{4.24}$$

Sehingga dapat diperoleh parameter dari model CIR yaitu dengan nilai $\kappa = 0,02806$ $\theta = 0,06335,$ dan $\sigma = 5,0395e - 04.$:kemudian jika disubtitusikan kedalam model CIR maka dapat dihasilkan persamaan berikut:

$$dr(t) = 0,02806\left(0,06335 - r(t)\right)dt + 5,0395e - 04.\sqrt{r(t)}dW(t),$$

4.3 Integrasi Estimasi Dengan Nilai-Nilai Keislaman

Dikehidupan pasti ada yang namanya dugaan. Hal ini terjadi karena ketidak pastian sehingga perlu adanya suatu pemikiran untuk mengetahui sesuatu. Menduga ini terjadi karena adanya ketidak pastian sehingga perlu adanya suatu pemikiran untuk mengetahui sesuatu. Apabila seseorang ingin mendapatkan atau memperoleh sesuatu, tentu akan melakukan pendugaan yang berupa usaha untuk mencapai hal tersebut.

Dalam al Qur’an al-Baqarah ayat 259 mengajarkan bahwa bahwa firman Allah Swt Allah bertanya: “*Berapa lamanya kamu tinggal di sini?*”. Para ulama berpendapat mengenai siapa yang bertanya pada firman ini. Beberapa ulama berpendapat bahwa yang bertanya adalah Allah Swt. Beberapa ulama berpendapat bahwa orang tersebut mendapat suara dari langit. Ulama lainnya berpendapat bahwa yang bertanya adalah malaikat Jibril. Ada juga yang mengatakan bahwa ia adalah seorang Nabi. Firman Allah , Ia menjawab: “*Saya tinggal di sini sehari atau setengah* hari”. Orang tersebut menjawab seperti ini karena berdasarkan pemikiran atau perkiraannyaPenjelasan di atas merupakan salah satu contoh estimasi yang tercantum di dalam al-Qur’an. Konsep estimasi ini sama halnya dengan konsep estimasi yang ada di dalam statistika, yang mana dalam mengestimasi suatu parameter artinya mengestimasi nilai parameter tersebut. Jika hasil dari estimasi tersebut diaplikasikan ke dalam kehidupan nyata nilai yang sesungguhnya, maka nilai estimasi tersebut merupakan nilai yang mendekati nilai sebenarnya atau berkisar di sekitar nilai tersebut.

BAB V

PENUTUP

5.1 Simpulan

Berdasarkan pembahasan penelitian menggenai estimasi parameter model suku bunga CIR dengan menggunkan metode GLS maka diperoleh:

4. Bentuk estimasi dari model CIR dengan menggunakan metode GLS adalah

$$\beta_{gls} = \left(X^{'}\Psi^{-1}X\right)^{-1} X^{'}\Psi^{-1}y$$

5. Kemudian hasil implementasi estimasi parameter model CIR menggunakan metode GLS pada data pengaruh PDB, suku bunga, nilai ekspor dan nilai impor setiap negara terhadap FDI di Indonesia pada tahun 1987 hingga 2016 adalah $\kappa = 0,02806$ $\theta = 0,06335$, dan $\sigma = 5,0395e-04$. Apabila disubstitusikan dalam model CIR yang umum adalah sebagai berikut

$$dr(t) = 0,02806\left(0,06335 - r(t)\right)dt + 5,0395e-04.\sqrt{r(t)}dW(t),$$

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian ini, maka saran untuk penelitian selanjutnya adalah melakukan pengembangan terhadap model CIR dengan metode *Generalized Least Square* yakni melakukan peramalan data untuk periode selanjutnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussyakir. 2007.*KetikaKyaiMengajarMatematika.* UIN-Maliki Press.

Aziz, A.. 2010. *Ekonometrika (Teori dan Praktik Eksperimen dengan Matlab).* UIN-Maliki Press.

Budiman, F.S., Satyahadewi, N. dan Mara, M.N. 2015. Estimasi Parameter Model Cox Ingersoll Ross pada Tingkat Bunga Bank Indonesia Menggunkan Metode Maximum likelihood estimation. *Buletin Ilmiah Mat.Stat. dan Terapan*. Vol 4 No 3.

Greene, W.H.. 1997. *Econometric Analysis*. New York: Prentice Hall International, Inc.

Gujarati, Damodar N. 2004. *Basic Econometrics*. Fourth edition. Singapore: McGraw-Hill Inc.

Harinaldi. 2005. *Prinsip-Prinsip Statistik untuk Teknik dan Sains*. Jakarta: Elangga.

Hasan, M. I. 2002. *Pokok-Pokok Materi Statistik 1 (Statistik Deskriptif*). Jakarta: PT. Bumi Aksara.

Hull, J.C. 2012. *Options, Futures and Other Derivatives*. *Eighth Edition*. Prentice Hall: New Jersey

Latumaerissa, Julius.R, 2011, Bank dan Lembaga Keuangan Lain. Jakarta: Salemba Empat.

Mariana, E., Apriliani, E. dan Surjanto, S.D. 2015. Estimasi Parameter pada Model Suku Bunga Cox Ingersoll Ross (CIR) Menggunakan Kalman Filter untuk Menentukan Harga *Zero Coupon Bond.Jurnal Sains Dan Seni ITS*. Vol.4 (2).

Najmudin, Irham. 2018. *Studi Proses Gerak Brown Relativistik Dengan Pendekatan Hanggi-Klimontovich*. Skripsi. Malang: UIN Maulana Malik Ibahim Malang.

Ross, Sheldon M. 2010. *Introduction to Probability Models Tenth Edition.* Los Angeles: Academic Press.

Srinadi, I.Gusti, A. M. *Pengantar Proses Stokastik*. Denpasar: Universias Udayana.

Sudjana. 2001. *Teknik Analisis Regresi dan Korelasi*. Bandung: Tarsito.

Sukirno, Sadono.1998. *Ekonomi Pembangunan*. Jakarta :FE UI.

Svoboda, Simona. 2004. *Interest Rate Modelling*. New York: Palgrave Macmillan.

Tandelilin, E. 2010. Protofolio dan Investasi: Teori dan Aplikasi. Yogyakarta: Kanisius.

Taylor, H.M., dan S. Karlin. 1998. *An In troduction to Stochastic Modeling*. California:Academic Press.

Widianingsih, A., Susilawati, M. dan Sumarjaya, I.W. 2014. Estimasi Model *Seemingly Unrelated Regression* (SUR) dengan Metode *Generalized Least Square* (GLS). *Jurnal Matematika*. Vol.4 (2). Universitas Udayana.

Wiersema, Ubbo F. 2008. *Brownian Motion Calclus*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Yan, Xin and Su, Xiao Gang.2009.*Linear Regression Analysis Theory and Computing*. USA:World Scientific Publishing.

Yitnosumarto dan Suntoyo. 1990. *Dasar-Dasar Statistika*. Jakarta: CV. Rajawali.

Zeytun S., dan Gupta, A. 2007. *A Comparative Study of the Vasicek and the CIR Model of the Short Rate*. Germany: Fraunhofer Institut Techno-und Wirtschaftsmathematik.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

LAMPIRAN 1 Data FDI, PDB, Suku Bunga,Ekspor, dan Impor di Indonesia

Tahun	FDI	PDB	Suku Bunga	Impor	Ekspor
1987	385	80844	4.882	17006	18173
1988	576	89757	13.443	18492	20564
1989	682	100565	11.156	21808	24013
1990	1093	113011	10.753	27646	28192
1991	1482	124171	15.415	31470	31925
1992	1777	136.314	15.607	34650	37629
1993	2004	168234	1.204	37556	42274
1994	2109	188342	9.263	44870	46896
1995	4346	215.216	8.163	55882	53185
1996	6194	242087	9.699	60117	58717
1997	4677	229714	8.214	60700	60106
1998	-241	101624	-24.6	41250	50556
1999	-1866	149063	11.827	38402	49720
2000	-4550	175702	-1.654	50265	67621
2001	-2977	170832	3.72	49355	62626
2002	145	208325	12.322	51638	63957
2003	-596	249968	10.852	54324	71553
2004	1896	273461	5.134	70745	82744
2005	8336	304372	-0.246	85534	97387
2006	4914	388168	1.658	93412	113143
2007	6928	460193	2.34	109755	127226
2008	9318	543254	-3.852	146707	152090
2009	4877	574505	5.748	115216	130358
2010	15292	755094	4.614	169158	18348
2011	20565	892969	4.594	212997	235095
2012	21201	917870	7.75	229362	225744
2013	23282	912524	6.375	225519	218308
2014	25121	890815	6.792	217485	210820
2015	19779	861256	8.299	178472	182167
2016	4142	932259	9.212	170658	177884

LAMPIRAN 2 PROGRAM ESTIMASI DENGAN METODE GLS

```
%estimasiOLSdanGLS
%data
clc, clear

r=xlsread('datax.xlsx'),('A1:A150');
display(r)
r1=xlsread('datay.xlsx'),('A1:A150');
display(r1)

%Estimasi OLS

for t=1: length(r)
    X(t,1)=r(t);
    X(t,2)=1;
end;
display(X)

for t=1: length(r1)
    Y(t,1)=r1(t);
end;
display(Y)

Beta1=(X'*X)\X'*Y

B0=Beta0(1,1);
B1=Beta1(2,1);
B2=Beta1(3,1);
B3=Beta1(4,1);
B4=Beta1(5,1);

display(B1)

Error=Y-X*Beta1
end;
display(Error)

%untuk var-kov=W
I=[1];
sigma=[Error];
varkov=inv(sigma*I);
W=varkov;
display(W)


%Estimasi GLS
Y=xlsread('datax.xlsx');
display(Y);
X=xlsread('datay.xlsx');
display(X);
for t=1: length(r)
```

```
    X(t,1)=r(t);
    X(t,2)=1;
end;
display(X)
for t=1: length(r1)
    Y(t,1)=r1(t);
end;
display(Yj)
BetaGLS1=inv(X'*W*X)*X'*W*Y;
BG1=BetaGLS1;
display(BG1)
display(Error)
```

RIWAYAT HIDUP

Nofia Vicki Rinanti, lahir di Semarang pada tanggal 02 November 1996. Anak Pertama dari pasangan Bapak Adnan dan Ibu Umiyati dan merupakan kakak dari Evan Andika dan Mayang. Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN 1 Panderejo dan lulus pada tahun 2009. Setelah itu melanjutkan sekolah di MTsN Jembrana dan lulus tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di MAN Negare dan lulus tahun 2015. Pendidikan selanjutnya ditempuh di Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SNMPTN mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Selama di Malang tinggal di Jalan Sunan drajat Gang 2 No 7.

Selama menempuh pendidikan di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang telah mengikuti organisasi intra yakni asisten laboratorium dan mengikuti komunitas jurusan yakni SeMata dan MEC. Selain itu, disela-sela kesibukannya menjadi mahasiswa, juga pernah menjadi tentor privat.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Novia Vicki Rinanti
NIM : 15610004
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Estimasi Parameter Model *Cox Ingersoll Ross* Menggunakan Metode *Generalized Least Square*

Pembimbing I : Abdul Aziz, M.Si
Pembimbing II : Evawati Alisah, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	25 Maret 2019	Konsultasi Bab I & II	1.
2.	1 April 2019	Konsultasi Bab I & II	2.
3.	2 April 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	3.
4.	8 April 2019	Konsultasi Bab I & II	4.
5.	15 April 2019	Konsultasi Bab I & II	5.
6.	29 April 2019	Konsultasi Bab I & II	6.
7.	6 Mei 2019	Konsultasi Bab I & II	7.
8.	7 Mei 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	8.
9.	9 Mei 2019	Konsultasi Bab I & II	9.
10.	20 Mei 2019	Konsultasi Bab I & II	10.
11.	25 Juni 2019	Konsultasi Bab I, II, & III	11.
12.	3 Juli 2019	Konsultasi Bab I, II, III, & IV	12.
13.	9 Juli 2019	Konsultasi Bab I, II, III, & IV	13.
14.	16 Juli 2019	Konsultasi Bab I, II, III, & IV	14.
15.	22 Juli 2019	Konsultasi Bab I, II, III, & IV	15.
16.	6 Agustus 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	16.
17.	2 Desember 2019	ACC Keseluruhan	17.
18.	2 Desember 2019	ACC Keagamaan Keseluruhan	18.

Malang, 02 Desember 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001