ANALISIS GELOMBANG SOLITON MENGGUNAKAN PERSAMAAN KLEIN-GORDON NONLINEAR

SKRIPSI

Oleh:
<u>MARATUS SHOLIKAH</u>
NIM. 15640005

JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

ANALISIS GELOMBANG SOLITON MENGGUNAKAN PERSAMAAN KLEIN-GORDON NONLINEAR

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
MARATUS SHOLIKAH
NIM. 15640005

JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2019

HALAMAN PERSETUJUAN

ANALISIS GELOMBANG SOLITON MENGGUNAKAN
PERSAMAAN KLEIN-GORDON NONLINEAR

SKRIPSI

Oleh:
Maratus Sholikah
NIM. 15640005

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Pada tanggal, 13 Desember 2019

Pembimbing I	Pembimbing II
Erika Rani, M.Si.	Ahmad Abthoki, M.Pd.
NIP. 19810613 200604 2 002	NIP. 19761003 200312 1 004

Mengetahui
Ketua Jurusan Fisika

Drs. Abdul Basid, M.Si.
NIP. 19650504 199003 1 003

HALAMAN PENGESAHAN

ANALISIS GELOMBANG SOLITON MENGGUNAKAN
PERSAMAAN KLEIN-GORDON NONLINEAR

SKRIPSI

Oleh:
Maratus Sholikah
NIM. 15640005

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji
Dan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Pada Tanggal, 23 Desember 2019

Penguji Utama	:	Erna Hastuti, M.Si. NIP. 19811119 200801 2 009	
Ketua Penguji	:	Drs. Abdul Basid, M.Si. NIP. 19650504 199003 1 003	
Sekretaris Penguji	:	Erika Rani, M.Si. NIP. 19810613 200604 2 002	
Anggota Penguji	:	Ahmad Abthoki, M.Pd. NIP. 19761003 200312 1 004	

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Fisika

Drs. Abdul Basid, M.Si.
NIP. 19650504 199003 1 003

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	:	Maratus Sholikah
NIM	:	15640005
Jurusan	:	Fisika
Fakultas	:	Sains Dan Teknologi
Judul Penelitian	:	Analisis Gelombang Soliton Menggunakan Persamaan Klein-Gordon Nonlinear

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan maka saya bersedia untuk menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 29 November 2019
Yang Membuat Pernyataan

Maratus Sholikah
NIM. 15640005

MOTTO

"Merantaulah! Gapailah setinggi-tingginya impianmu. Berpergianlah! Maka, akan ada lima keutamaan untukmu. Melipur duka dan memulai penghidupan baru, memperkaya budi, pergaulan yang terpuji, serta meluaskan ilmu"

(Imam As-Syafi'i)

Terlambat lulus atau lulus tidak tepat waktu bukan sebuah kejahatan, bukan sebuah aib. Alangkah kerdilnya jika mengukur kepintaran seseorang hanya dari siapa yang paling cepat lulus. Bukankah sebaik-baik skripsi adalah skripsi yang selesai? Baik itu selesai tepat waktu maupun tidak tepat waktu.

HALAMAN PERSEMBAHAN

Sembah sujud serta syukur kepada Allah SWT. Taburan cinta dan kasih sayang-Mu telah memberikanku kekuatan, membekaliku dengan ilmu serta memperkenalkanku dengan cinta. Atas karunia yang Engkau berikan akhirnya karya sederhana ini dapat terselesaikan. Sholawat dan salam selalu terlimpahkan keharibaan Rasulullah Muhammad SAW.

Kupersembahkan karya sederhana ini kepada kedua Orang tua saya yang telah mengasuh saya, membimbing saya, mendidik saya, mengasihi saya dan tak henti-hentinya mendoakan saya.

Untuk Jutaan sel darah putih ku, yang telah rela berjuang, berkorban, hingga rela mati untukku. Love You 3.000 sel darah putihku.

Untuk imamku Tercinta, yang entah siapa dan dimana saat ini berada. Percayalah bahwa hanya engkaulah yang selalu ku sebut-sebut dalam benih-benih doaku, meski bayangmu hanya semu. Semoga keyakinan dan takdir ini terwujud atas Ridho dan izin-Nya.

Saya ucapkan banyak terima kasih kepada kerabat, sahabat, guru, serta semua pihak atas doa, ilmu, dukungan, dan semuanya.

Semoga Allah SWT selalu memberikan rahmat dan hidayah kepada kita semua serta memberikan manfaat dan barokah atas ilmu yang telah saya pelajari selama ini.

Aamiin.....

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji syukur bagi Allah SWT. Tuhan pencipta alam semesta serta seisinya, atas segala nikmat dan anugrah-Nya yang telah diberikan, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan kita, Nabi besar Muhammad SAW beserta segenap sahabat dan keluarganya serta para pengikutnya yang setia hingga hari kiamat nanti. Akhirnya setelah melalui proses panjang, berliku, dan penuh ujian maka atas rahmat-Nya serta dengan izin-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulis bersyukur atas rahmat-Nya, yang telah diberikan kepada penulis untuk menempuh pendidikan dijenjang universitas, khususnya program studi Fisika.

Fisika merupakan salah satu ilmu yang cukup sulit untuk dipelajari, akan tetapi mempelajari fisika mempunyai kesenangan tersendiri. Penulis sangat menyukai dunia fisika, khususnya fisika teori (*Theoretical Physics*). Alasan penulis memilih fisika teori dikarenakan banyak orang-orang besar yang terlahir dari bidang ini, contohnya: Abdussalam (ilmuwan fisika islam pertama yang telah mendapatkan hadiah nobel), Albert Einstein, dan Issac Newton. Mayoritas pemikiran-pemikiran mereka sangat berpengaruh pada dunia sains dan teknologi. Penulis berharap juga dapat memberikan konstribusi terhadap agama, negara, serta dunia khususnya dibidang sains dan teknologi.

Skripsi dengan judul "Analisis Gelombang Soliton Menggunakan Persamaan Klein-Gordon Nonlinear" ini tidak lain adalah karya kecil dari penulis, yang mungkin nanti dijadikan sumber perangsang tumbuhnya ilmuwan-ilmuwan baru. Dalam penulisan skripsi dan selama masa perkuliahan, terdapat banyak pihak yang terlibat serta mendukung penulis. Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M.Ag selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

3. Drs. Abdul Basid, M.Si selaku Ketua Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Erika Rani, M.Si selaku sebagai dosen pembimbing penulisan skripsi ini, sekaligus dosen yang sering memberikan motivasi, arahan petunjuk, dan mengajarkan ilmunya dengan penuh kegigihan serta penuh kesabaran sehingga penulisan skripsi ini bisa terselesaikan dengan baik.
5. Ahmad Abthoki, M.Pd selaku dosen pembimbing integrasi agama. Terima kasih atas segala bantuan serta nasehatnya.
6. Segenap dosen Jurusan Fisika yang tidak dapat disebut satu-persatu atas bimbingan, arahan, dan motivasi.
7. Segenap staf admin Jurusan Fisika atas bantuan, layanan informasi, dan kerjasamanya selama ini.
8. Keluarga tercinta, yang telah mendukung penulis dalam segala hal dan memberikan kasih sayang dan nasehat serta selalu memberikan doa yang tiada henti-hentinya kepada penulis.
9. Teman-teman S1 angkatan 2015 atas persahabatan dan motivasi yang diberikan selama ini, terutama semua teman-teman dari Jurusan Fisika, terlebih lagi dari minat fisika Teori.
10. Kepada pihak-pihak lain yang tidak tersebutkan satu-persatu dalam halaman ini yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini.

Semoga sebuah karya sederhana ini dapat memberikan sumbangan bagi ilmu pengetahuan nasional terlebih internasional. Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini juga tidak luput dari kesalahan, untuk itulah penulis mohon maaf. Penulis juga mohon saran dan kritik untuk penyempurnaan skripsi ini.

Malang, 29 November 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Sholikah, Maratus. 2019. **Analisis Gelombang Soliton Menggunakan Persamaan Klein-Gordon Nonlinear** . Skripsi. Jurusan Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Erika Rani, M.Si (II) Ahmad Abthoki, M.Pd.

Kata Kunci: Soliton, Persamaan Klein-Gordon Nonlinear, Metode Tanh

Soliton adalah gelombang soliter (sebuah paket gelombang atau pulsa), berperilaku seperti partikel, cenderung mempertahankan bentuk, dan menjalar dengan kecepatan konstan yang tercipta karena efek nonlinear dan efek dispersif dalam medium. Pada penelitian ini, gelombang soliton dianalisis menggunakan persamaan Klein-Gordon Nonlinear. Dibangun berdasarkan analogi dari persamaan hukum nonlinearitas (*equations with Power-law Nonlinearitas*). Analisis gelombang soliton menggunakan metode tangen hiperbolik (Tanh), dimana metode ini merupakan metode yang efektif untuk menangani kasus persamaan differensial parsial nonlinear. Solusi yang didapatkan mengarah ke gelombang soliton dan gelombang anti-soliton pada persamaan Klein-Gordon Nonlinear Model I.

ABSTRACT

Sholikah, Maratus. 2019. **Soliton Wave Analysis Using The Klein-Gordon Nonlinear Equation**. Thesis. Physics Department, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University, Malang.
Advisor: (I) Erika Rani, M.Si (II) Ahmad Abthoki, M.Pd.

Keywords: *Soliton, The Klein-Gordon Nonlinear Equation, The Tanh Method*

Soliton is a solitary wave (a package of waves or pulses), behave like particles, tend to retain shape, and propagate at a constant pace created due to the non-linear effects and the effects of dispersive in the medium. In this study, soliton waves were analyzed using the Klein-Gordon nonlinear equation. It builds on the analogy of the law of nonlinearity (equations with Power-law Nonlinearitas). Analysis of soliton waves using the hyperbolic tangent method (Tanh), whereby this method is an effective method to handle cases of partial nonlinear differential equations. The acquired solution leads to the soliton wave and the anti-soliton wave on the Klein-Gordon Nonlinear Model I equation.

الملخص

الصالحة، مراة. 2019. التحليل الموجه سولتون باستخدام معادله كلاين–غوردون غير الخطية اطروحه.
قسم الفيزياء، كلية العلوم والتكنولوجية، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج.
المشرف: ١) اريكا ران الماجستير ٢) احمد ابثوكي الماجستير.

لكلمات المفتاحيات: سولتون، المعادلةالغير خطيه كلاين غوردون، طريقه **Tanh**

سولتون هو موجه الانفرادي (حزمه من الموجات أو البقول)، تتصرف مثل الجزيئات، تميل إلى الاحتفاظ بالشكل، وتنتشر بوتيرة ثابته خلقت بسبب الآثار غير الخطية وأثار التشتت في الوسط. في هذه الدراسة، تم تحليل موجات المغناطيس باستخدام معادله كلاين–غوردون غير الخطية. هو يبني علي التماثل من القانون من [نونلينليتس] (معادلات مع [بوور–لو]، حيث هذا الأسلوب هو وسيله (**Tanh**) [نونلينيرتاس]). تحليل موجات المغناطيس باستخدام أسلوب الظل القطعي فعاله للتعامل مع حالات المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية. الحل المكتسب يؤدي إلى موجه المغناطيس وموجه المضادة للمغناطيس علي المعادلة كلاين غوردون النموذج الأول.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Soliton adalah gelombang soliter (sebuah paket gelombang atau pulsa) yang mempertahankan bentuknya dan menjalar dengan kecepatan konstan yang tercipta karena efek nonlinear dan efek dispersif dalam medium. Efek dispersif ini merujuk pada hubungan dispersi, yaitu hubungan antara frekuensi dan kecepatan gelombang dalam medium. Jonh Scott Russel (1808-1882), fisikawan Skotlandia, mengamati fenomena gelombang air di kanal Edinburg-Glasgow. Fenomena ini disebut sebagai gelombang besar translasi. Gelombang air tersebut menjalar dengan bentuk tak berubah dalam rentang waktu relatif lama sepanjang kanal (Hadi, 2008).

Berbeda dengan gelombang biasa yang linear, soliton merupakan gelombang nonlinear yang memiliki sifat; (1) terlokalisasi dan merambat tanpa perubahan bentuk maupun kecepatan, (2) stabil melawan tumbukan. Kedua sifat ini muncul jika efek nonlinearitas seimbang dengan efek dispersif gelombang pada media penjalarnya. Sifat pertama merupakan kondisi gelombang soliter dalam hidrodinamika, sedangkan sifat yang kedua menandakan bahwa gelombang tersebut berkelakuan seperti partikel. Dalam fisika modern, akhiran "-on" digunakan untuk menunjukkan kelas partikel, misalnya fonon (*phonon*) dan foton (*photon*). Sifat soliton yang tampak sebagai partikel menjadi salah satu topik penelitian fisika yang cukup aktif hingga saat ini.

Fenomena soliton dalam sains muncul dibanyak bidang. Mulai dari fisika partikel, nuklir, zat padat, plasma, fluida, biofisika (misal DNA), neurosains, kosmologi, akustik, kontrol hingga teknologi informasi. Dalam tinjauan partikel, soliton adalah vorteks fluida, vorteks merupakan rotasi lokal atau aliran bergolak (turbulensi) memutar dengan garis-garis arus tertutup. Semua anggota keluarga partikel, semisal elektron, proton, neutron, quark, neutrino adalah soliton, yakni vorteks-vorteks fluida. Instanton merupakan salah satu contoh soliton tiga dimensi. Solusi instanton membawa informasi tentang *quantum tunneling*. Dalam teori medan kuantum, instanton merupakan konfigurasi medan nontrivial topologi dalam ruang euklidian empat dimensi.

Persamaan Schrodinger merupakan salah satu persamaan yang penting dalam mekanika kuantum untuk menggambarkan keadaan yang tidak bisa dijelaskan pada mekanika klasik. Persamaan Schrodinger dapat menyelesaikan berbagai permasalahan mikro, salah satunya partikel maupun gelombang dalam kotak khususnya sumur potensial keadaan terikat. Model potensial sumur keadaan terikat ini dapat digunakan untuk membahas beberapa permasalahan fisika salah satunya gelombang soliton. Fungsi gelombang pada sumur potensial ditentukan oleh besar energi partikel yang datang dan tinggi dinding potensial kotak (Rahmayani, 2014).

Persamaan Klein-Gordon merupakan versi relativistik dari Schrodinger, yaitu persamaan yang menggambarkan persamaan medan untuk partikel skalar (spin-0). Persamaan Klein-Gordon menjadi persamaan yang sering dipelajari untuk menggambarkan dinamika partikel dalam teori medan kuantum. Persamaan dengan berbagai jenis potensial muncul karena efek yang ditimbulkan oleh persamaan Klein-Gordon nonlinear, sebagai contohnya adalah gelombang soliton (Saadatmand, 2017).

Teori soliton menunjukkan bahwa setiap paket gelombang selalu mempunyai pasangan anti-paket gelombang termasuk soliton yang memiliki pasangan anti-soliton, biasa disebut kink dan anti-kink. Hal ini mengindikasikan bahwa Tuhan menciptakan semuanya dalam keadaan berpasang-pasangan, bahkan dalam dunia kuantum sekalipun sebagaimana dijelaskan dalam Surat adz-Dzaariyaat (51):

وَمِنْ كُلِّ شَيْءٍ خَلَقْنَازَوْجَيْنِ لَعَلَّكُمْ تَذَكَّرُونَ

"dan segala sesuatu Kami ciptakan berpasang-pasangan supaya kamu mengingat akan kebesaran Allah" (Q.S. adz-Dzaariyaat (51): 49).

Kata zaujaini adalah bentuk jamak dua dari kata zaujun. Hal ini menurut Muhammad Abduh, karena tentang penciptaan zauj (pasangan) setelah keterangan 18 tentang penciptaan manusia tidak menunjukkan selang waktu, dan kata sambung wawu tidak menunjukkan arti berurutan, tetapi merupakan tafshiil (perincian) dari ijmal (global) (Nurjannah, 2003).

Selama tiga dekade terakhir banyak peneliti yang konsisten meneliti tentang gelombang soliton, karena sifat gelombang soliton yang dapat berinteraksi dengan soliton lainnya sangat memungkinkan digunakan dalam berbagi teknologi kuantum. Studi soliton dalam persamaan Klein-Gordon Nonlinear menghasilkan solusi berupa paket gelombang yang terlokalisai (Bellazzini, 2016). Saadatmand (2017) menemukan interaksi soliton dengan potensial *barrier* menjadi lebih elastis dengan pendekatan dua model. Model pertama mengindikasikan bahwa potensial eksternal dapat ditambahkan dalam persamaan gerak Lagrangian dan juga dalam densitas Hamiltonian. Model kedua dengan menambahkan potensial untuk sistem lagrangian melalui metrik ruang-waktu. Dinamika persamaan Klein-Gordon Nonlinear dalam Limit *Nonrelativistic* dengan menganggap orde-r sebagai normalisasi dari persamaan Klein-Gordon Nonlinear sehingga menghasilkan solusi berupa orde waktu $\mathcal{O}\left(c^{2(r-1)}\right)$ (Pasquali, 2018).

Persamaan Klein-Gordon Nonlinear dibangun dengan kekuatan persamaan hukum nonlinearitas (*equations with Power-Law Nonlinearitas*). Dalam kategori ini, solusi persamaan nonlinear yang mendeskripsikan dinamika nonlinear muncul sebagai soliton. Persamaan ini diturunkan berdasarkan adanya metode tanh dan metode sech yang mengarah pada solusi gelombang soliton.

Selain pembahasan pada penelitian di atas, pembahasan mengenai analisis gelombang soliton sangat penting untuk dilakukan, terutama untuk menentukan fungsi gelombangnya. Agar dapat menentukan fungsi gelombang soliton, maka gelombang tersebut perlu dianalisis. Dalam analisis gelombang soliton diperlukan koreksi perhitungan yang tidak sederhana, sehingga perlu dikaji kembali supaya memperoleh formulasi yang lebih mapan. Dari sinilah ide studi dari penulis muncul, bagaimana untuk mengetahui persoalan gelombang soliton menggunakan pendekatan nonliniear khususnya dalam kerangka Klein-Gordon Nonliniear.

1.2 Rumusan Masalah

Penelitian ini merumuskan dua permasalahan pokok sebagai berikut:

1. Bagaimana solusi persamaan gelombang yang didapatkan pada kasus gelombang soliton menggunakan persamaan Klein-Gordon Nonlinear ?
2. Bagaimana hasil visualisasi persamaan gelombang soliton menggunakan persamaan Klein-Gordon Nonlinear?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui solusi persamaan gelombang yang didapatkan pada kasus gelombang soliton menggunakan persamaan Klein-Gordon Nonlinear.
2. Untuk mengetahui hasil visualisasi persamaan gelombang soliton menggunakan persamaan Klein-Gordon Nonlinear.

1.4 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya mengkaji secara teoritik gelombang soliton dengan menggunakan persamaan Klein-Gordon Nonlinear.

1.5 Manfaat Penelitian

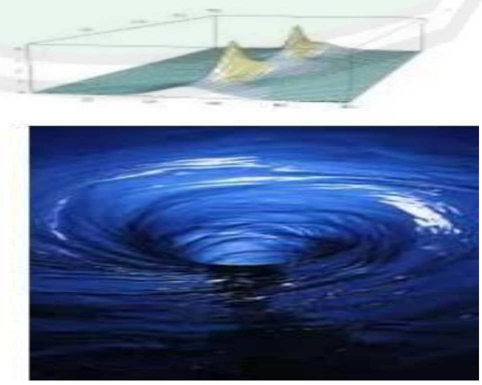
Dari pendiskripsian secara teoritikal ini, diharapkan dapat memberikan dasar maupun rujukan bagi kajian lebih lanjut serta mendalam untuk menjelaskan fenomena-fenomena mikroskopik khususnya fisika partikel terutama dalam analisis gelombang soliton.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Soliton

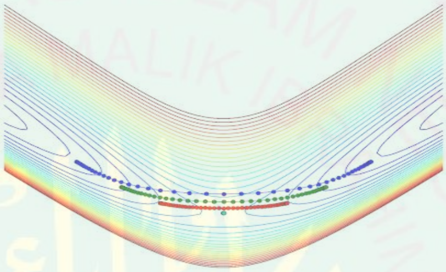
Soliton merupakan gelombang yang berperilaku seperti partikel. Jika dua soliton ditempatkan terpisah dan masing-masing menjalar saling mendekati satu sama lain dengan bentuk dan kecepatan konstan, maka saat kedua gelombang tersebut semakin mendekat dan bertumbukan, secara berangsur-angsur berubah bentuk kemudian menjadi paket gelombang tunggal. Stabilitas soliton berfungsi menyeimbangkan efek nonlinearitas dan dispersi. Nonlinearitas memandu gelombang soliton untuk terlokalisasi, sedangkan dispersi menyebarkan gelombang terlokalisasi tersebut. Jika salah satu dari efek tersebut hilang, maka soliton tidak stabil dan akan menghilang (Hadi, 2010).

Contoh soliton dalam tiga dimensi yaitu monopol, instanton, dan skyrmion, serta simpul soliton. Monopol adalah soliton yang membawa muatan magnetik dan muncul dalam teori gauge yang Mills-Higgs. Teori ini menggunakan dualitas listrik-magnet, dimana partikel elementer pembawa muatan listrik merangkap monopol muatan magnet.



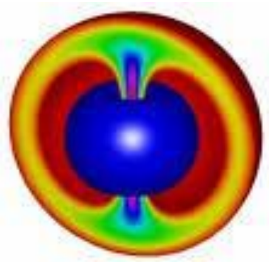
Gambar 2.1 Monopol dalam Air
(http://www.fisika.lipi.go.id/webfisika/content/soliton-nan-cantik-dan-eksotik, 2005)

Instanton merupakan solusi persamaan medan nonlinear yang muncul dalam teori gauge yang Mills-Higgs; sebuah generalisasi nonlinear dari teori elektromagnetik Maxwell yang memberikan deskripsi fundamental dari interaksi partikel elementer. Solusi instanton membawa informasi tentang *quantum tunneling*. Dalam teori medan kuantum, instanton merupakan konfigurasi medan nontrivial topologi dalam ruang euklidian empat dimensi.



Gambar 2.2 Instanton dalam Moleku H_2
(http://khoiruddin.blog.uns.ac.id/2009/09/08/berkenalan-dengan-soliton, 2009)

Skyrmion merupakan deskripsi soliton dari nuklir, jumlah soliton diidentifikasi dengan bilangan baryon. Model skyrmion adalah model sigma nonlinear yang termodifikasi dan solusi klasiknya diperoleh dengan komputasi numerik. Meskipun demikian, memungkinkan untuk menggunakan aproksimasi dimana skyrmion dapat dikonstruksi dari pemetaan rasional antara bola Riemann. Pendekatan ini bermanfaat untuk memahami struktur skyrmion.



Gambar 2.3 Skyrmion
(http://khoiruddin.blog.uns.ac.id/2009/09/08/berkenalan-dengan-soliton, 2009)

Simpul soliton dikenal sebagai soliton distabilisasi dengan invariansi Hopf, muncul dalam model sigma termodifikasi (model Skyrme-Faddeev). Dapat ditinjau medan tertentu untuk soliton dengan satu sampai delapan muatan Hopf. Dapat ditinjau pula beberapa soliton yang terdiri dari loop tunggal dimana dalam beberapa kasus dibelit, akan tetapi untuk soliton diatas muatan lima, kaitan dan simpul akan muncul. Konfigurasi muatan tujuh berupa simpul daun semanggi.

Gambar 2.4 Simpul Soliton
(http://khoiruddin.blog.uns.ac.id/2009/09/08/berkenalan-dengan-soliton, 2009)

2.2 Penemuan Gelombang Soliton

Persamaan Klein-Gordon Nonlinear dapat ditulis dengan alasan bahwa nonlinearitas dan dispersi dapat terjadi secara bersamaan. Akan tetapi, persamaan Klein-Gordon Nonlinear tidak hanya menawan secara matematika tetapi juga penting secara praktis. Untuk memperkenalkan aspek ini, dapat ditinjau bagaimana gelombang soliton pertama kali muncul dalam kancah ilmiah (Drazin, 1989).

Gelombang soliton, disebut demikian karena gelombang itu seringkali terjadi sebagai entitas tunggal dan terlokalisasi, yang pertama kali diamati oleh J. Scott Russell di kanal Edinburgh-Glasgow pada tahun 1834; ia menyebutnya "*gelombang besar translasi"*. Russell melaporkan pengamatannya ke *British Association* dalam *Report on Waves* pada tahun 1844, dalam kata-kata berikut:

Saya yakin akan lebih baik saya perkenalkan fenomena ini dengan mendeskripsikan keadaan dari pengenalan pertama saya dengannya. Saya sedang mengamati gerak kapal yang ditarik dengan cepat sepanjang sebuah kanal sempit oleh sepasang kuda, ketika kapalnya tiba-tiba berhenti – tidak demikian halnya dengan massa air pada kanal yang telah digerakkannya; gelombang itu berakumulasi mengelilingi haluan kapal dalam keadaan golakan dahsyat, dan kemudian dengan tiba-tiba meninggalkan haluan kapal, menjalar ke depan dengan kecepatan besar, dalam bentuk tumpukan air terpisah dengan ukuran ketinggian dan bundaran, sebuah rangkaian, halus dan himpunan terdefinisi dengan baik dari air, yang melanjutkan penjalarannya sepanjang kanal tanpa mengalami perubahan bentuk atau pengurangan kecepatan. Saya mengikuti gelombang itu di punggung kuda, dan setelah menyusuli gelombang itu terus menjalar pada laju sekitar delapan atau sembilan mil per jam, dan tetap mempertahankan bentuk awalnya dengan panjang sekitar tiga puluh kaki panjangnya dan tinggi satu setengah kaki. Tingginya secara berangsur menurun, dan setelah pengejaran satu atau dua mil saya kehilangannya pada belokan kanal.

Russell juga melakukan beberapa percobaan laboratorium, untuk membangkitkan gelombang soliton dengan menjatuhkan benda pada salah satu ujung kanal air. Ia mampu mendeduksi secara empirik bahwa volume air di gelombang sama dengan volume air yang dipindahkan dan kecepatan gelombang soliton (c^2) diperoleh dari

$$c^2 = g(h + a), \tag{2.1}$$

dimana a adalah amplitudo gelombang, h kedalaman air tenang dan g percepatan gravitasi. Persamaan (2.1) juga berlaku terhadap gelombang elevasi; usaha untuk membangkitkan gelombang tekan dan berakhir dengan terciptanya gelombang osilasi, sebagaimana ditemukan Russell dalam percobaan-percobaannya.

Untuk meletakkan formula Russell (2.1) pada dasar yang kokoh, Boussinesq (1871) dan Lord Rayleigh (1876) mengasumsikan bahwa gelombang soliton memiliki skala panjang yang jauh lebih besar dibandingkan kedalaman air. Dari persamaan gerak untuk fluida inkompresibel, Boussinesq-Rayleigh berhasil menurunkan rumus tak tertekan, yakni rumus Russell untuk c, serta berhasil menunjukkan bahwa profil gelombang $z = \phi(x, t)$ diberikan oleh

$$\phi(x, t) = a\,\mathrm{sech}^2\{\mu(x - ct)\}, \tag{2.2}$$

dimana $\mu = \sqrt{\frac{\alpha}{(a^2 - c^2)}}$ untuk sembarang $a > 0$, walaupun sech^2 benar jika $\frac{\alpha}{a} \ll 1$. Namun, Boussinesq-Rayleigh tidak demikian menulis persamaan sederhana untuk $\phi(x, t)$. Boussinesq-Rayleigh menuliskan persamaan (2.2) sebagai solusi.

Petunjuk pertama bahwa terdapat sesuatu yang tak biasa dalam persamaan Klein-Gordon Nonlinear dan gelombang soliton muncul di tahun 1955. Fermi, Pasta dan Ulam bekerja di Los Alamos pada model numerik fonon dalam kisi nonharmonik, sebuah model yang menghasilkan kaitan erat terhadap diskritisasi persamaan Klein-Gordon Nonlinear (Fermi, Pasta & Ulam, 1955). Mereka mengamati bahwa tak ada ekipartisi energi diantara berbagai modus getar. Kajian ulang di tahun 1965, Zabusky-Kuskal meninjau persoalan nilai awal untuk persamaan

$$u_t + uu_x + \delta^2 u_{xx} = 0 \,, \tag{2.3}$$

dengan syarat batas periodik (soal lebih rumit dibanding domain tak terbatas gelombang soliton, namun cocok untuk komputasi numerik). Persamaan (2.3) dapat diselesaikan dengan

$$u(x,0) = \cos \pi x, \quad 0 \le x \le 2, \tag{2.4}$$

dan u_t, u_x, u_{xx} periodik pada [0, 2] untuk seluruh t; dan memilih $\delta =$ 0,022. Setelah waktu yang singkat, gelombangnya naik tajam dan hampir menghasilkan kejut, namun suku dispersif ($\delta^2 u_{xx}$) kemudian menjadi sangat berperan dan terjadilah keseimbangan lokal antara nonlinearitas dan dispersi. Selang beberapa waktu kemudian solusinya menghasilkan sederetan delapan gelombang yang terdefinisi dengan baik, masing-masing seperti fungsi sech^2, dengan gelombang lebih cepat (yang lebih tinggi) mengejar dan menyusul gelombang lebih lambat (lebih pendek). (Terdapat kejutan lain: setelah selang waktu yang sangat panjang, muncul fenomena yang memerlukan topologi torus untuk menjelaskannya. Hal ini adalah contoh *keadaan terulang (recurrence)*).

Inti dari pengamatan ini terletak temuan bahwa gelombang-gelombang nonlinear dapat berinteraksi kuat dan kemudian melanjutkan penjalarannya setelah tidak ada interaksi sama sekali. Sifat ketakubahan bentuk gelombang ini menginspirasi Zabusky-Kruskal untuk menciptakan nama *"soliton"* (setelah fonon, proton, dst.), untuk menekankan karakter mirip partikel dari gelombang yang cenderung mempertahankan bentuknya dalam tumbukan. Dalam konteks persamaan Klein-Gordon Nonlinear, persamaan KdV dan persamaan lain yang serupa, solusi yang dihasilkan merujuk pada solusi soliton-tunggal sebagai gelombang soliton, namun bila lebih dari satu gelombang yang muncul dalam solusi, maka disebut *soliton-soliton*. Cara lain untuk menyatakan hal ini adalah dengan mengatakan bahwa soliton menjadi gelombang soliton ketika terpisah sangat jauh dari soliton lain. Solusi gelombang soliton mungkin bukan fungsi sech^2; sebagai contoh, terdapat fungsi sech dan juga fungsi $\arctan(e^{\alpha x})$. Selanjutnya, beberapa sistem nonlinear memiliki gelombang-gelombang soliton tetapi *bukan* soliton-soliton dengan kata lain Anti-Soliton-soliton, sedangkan yang lain memiliki gelombang-gelombang soliton yakni soliton-soliton.

2.3 Gelombang Soliton dalam Tinjauan Al Quran

Soliton merupakan solusi persamaan diferensial. Solusi ini berupa fungsi bebas artinya bebas memilih, jika tidak cocok dapat direvisi atau diganti. Fungsi bebas ini biasa dikenal dengan nama "ansatz". Energi gelombang soliton berupa Lagrangian, terdiri dari energi potensial dan energi kinetik. Jika sistemnya tertutup (tidak dipengaruhi interaksi luar), maka energi kinetiknya adalah nol, sehingga yang tertinggal hanya energi potensialnya saja (Drazin, 1989).

Persamaan Klein-Gordon Nonlinear dibangun menggunakan persamaan hukum nonlinearitas (*Equations with Power-Law Nonlinearitas*). Dalam hal ini, solusi persamaan nonlinear muncul sebagai soliton. Persamaan ini diturunkan berdasarkan adanya metode tanh dan metode sech yang mengarah pada solusi gelombang soliton.

Teori soliton menunjukkan bahwa setiap paket gelombang selalu mempunyai pasangan anti-paket gelombang termasuk soliton yang memiliki pasangan anti-soliton, biasa disebut kink dan anti-kink. Hal ini mengindikasikan bahwa Tuhan menciptakan semuanya dalam keadaan berpasang-pasangan, bahkan dalam dunia kuantum sekalipun sebagaimana dijelaskan dalam Surat adz-Dzaariyaat (51):

وَمِنْ كُلِّ شَيْءٍ خَلَقْنَازَوْجَيْنِ لَعَلَّكُمْ تَذَكَّرُونَ

"dan segala sesuatu Kami ciptakan berpasang-pasangan supaya kamu mengingat akan kebesaran Allah" (Q.S. adz-Dzaariyaat (51): 49)

Kata zaujaini adalah bentuk jamak dua dari kata zaujun. Hal ini menurut Muhammad Abduh, karena tentang penciptaan zauj (pasangan) setelah keterangan 18 tentang penciptaan manusia tidak menunjukkan selang waktu, dan kata sambung wawu tidak menunjukkan arti berurutan, tetapi merupakan tafshiil (perincian) dari ijmal (global) (Nurjannah, 2003).

Allah SWT menciptakan segala macam sesuatu maupun kejadian dalam bentuk yang berlainan dan dengan sifat yang bertentangan pula. Setiap sesuatu maupun kejadian itu merupakan lawan atau pasangan bagi yang lain, seperti dijadikan-Nya kebahagiaan dan kesengsaraan, petunjuk dan kesesatan, malam dan siang, hitam dan putih, gelap dan terang, hidup dan mati, surga dan neraka, dan sebagainya. Semuanya itu dimaksudkan agar manusia ingat dan sadar serta mengambil pelajaran darinya, sehingga mengetahui bahwa hanya Allah SWT Tuhan Yang Maha Esa yang berhak disembah dan tidak ada sekutu bagi-Nya. Allah SWT Yang Maha Kuasa menciptakan segala sesuatu berpasang-pasang, bermacam-macam jenis dan bentuk, sedangkan selain Allah adalah makhluk-Nya yang tidak berdaya yang semestinya mereka menyadari itu (Bustami, 1991).

Ayat di atas belum sepenuhnya menjelaskan pasangan-pasangan yang bisa diketahui oleh manusia sampai saat ini. Apalagi jika dikaitkan dengan pasangan yang lainnya (sulit diketahui) sebagaimana dijelaskan dalam Surat Yaasinn (36): 36;

سُبْحَانَ الَّذِي خَلَقَ الْأَزْوَاجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنبِتُ الْأَرْضُ وَمِنْ أَنفُسِهِمْ وَمِمَّا لَا يَعْلَمُونَ

"Maha Suci Tuhan yang telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka maupun dari apa yang tidak mereka ketahui" (Q.S. Yaasinn (36): 36).

Maha Suci Allah Yang Maha Mulia. Maha Suci Allah Yang Maha Agung. Maha Suci Allah yang telah menciptakan aneka ragam pepohonan, buah-buahan, biji-bijian, dan manusia; pria dan wanita, serta semua makhluk. Juga bermacam benda yang tidak diketahui oleh manusia. Berhubung hanya Allah semata yang telah menciptakan itu semua maka hanya Allah yang berhak untuk disembah dan tidak disekutukan dengan sesuatu apapun (Al-Qarni, 2008).

Hal yang menarik dari ayat ini adalah nomor surat dan ayatnya sama yakni 36. Yang lebih menarik lagi adalah pemilihan bilangan 36 pada ayat ini. Dimana 36 adalah bilangan dua digit yang memiliki pasangan faktor bilangan bulat terbanyak. Jumlah pasangan faktornya sebanyak 5 pasang, yakni 1 dengan 36, 2 dengan 18, 3 dengan 12, 4 dengan 9, dan 6 dengan 6. Ini menunjukkan bahwa angka 36 muncul dari beberapa pasangan angka. Dari nomor ayat dan suratnya sudah mengisyaratkan tentang penciptaan pasangan.

Sementara ulama membatasi makna *Azwaj* yang berarti pasangan pada ayat ini, hanya pada makhluk hidup saja. Tim penulis tafsir Al Muntakhab misalnya menulis bahwa: "kata *Min* dalam ayat ini berfungsi sebagai penjelas. Yakni bahwa Allah telah menciptakan pejantan dan betina pada semua makhluk ciptaan-Nya, baik berupa tumbuh-tumbuhan, hewan, manusia dan makhluk hidup lainnya yang tak kasat mata dan belum diketahui manusia" (Shihab, 2003).

Azwaj berasal dari bahasa Arab yang artinya adalah istri-istri, bentuk plural (jamak) dari kata *zauj*. Dalam ensiklopedi bahasa karya Raghib al-Isfahani, kata *zauj* artinya pasangan yang bisa digunakan untuk benda seperti sepasang sepatu, untuk hewan seperti sepasang ayam (jantan dan betina), dan untuk manusia seperti suami dan istri (Zadah, 2005).

Tafsir untuk rangkaian kalimatnya adalah sebagai berikut: *subkhaanalladzii kholaqol azwaaja* ulama' berkata: *kullahaa mimmaa tunbitul ardhu* yakni jenis-jenis *semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi* biji-bijian dan lain sebagainya. *Wa min anfusihim dan dari diri mereka* berjenis laki-laki dan perempuan. *Wa mimmaa laa ya'lamuun yakni maupun dari apa yang tidak mereka ketahui* diantara makhluk-makhluk unik dan asing. *Subkhaana Maha Suci* selalu berada dalam keadaan *manshub* sebagai *maf'ul mathlaq* yang *fungsi*-nya wajib dihapus; aslinya adalah *tasbikhaallah*, dan *tasbikhaa* adalah *mashdar* dari *sabakha*. Jadi *fungsi*-nya dihapus, yakni kata kerja *sabakha*. Sedangkan *mashdar* dirubah menjadi *isim mashdar*, yakni *tasbikhaa* dirubah menjadi *subkhaana* yang diambil dari kalimat *subkhaa*, yakni berenang didalam laut. Jadi makna *attasbiikha* yang ada bagi *sabakhaanallah* adalah mensucikan Allah SWT dari segala sesuatu yang tidak layak bagi-Nya. Yang tidak layak bagi Allah ada dua pekara: *pertama*, kekurangan dalam sifat-sifat-Nya. *Kedua*, menyerupakan dengan makhluknya pada sifat-sifat tersebut. Bisa juga digolongkan yang kedua ini kepada yang pertama. Dengan arti lain dapat dikatakan bahwa penyerupaan dengan makhluk adalah kekurangan, karena menyamakan sesuatu yang sempurna dengan sesuatu yang kurang akan menjadikannya kurang pula (Muhammad, 2004).

Jadi, setiap makhluk tidak dapat berdiri sendiri kecuali dengan rangkaian dua materi atau lebih. Segala sesuatu yang berasal dari bumi, dari bani adam (manusia), dari binatang-binatang ternak, maupun makhluk yang tidak ketahui oleh manusia tidak dapat tersusun hanya dengan satu materi saja. Hal ini sesuai dengan penggalan ayat berikut

وَمِنْ كُلِّ شَيْءٍ خَلَقْنَازَوْجَيْنِ

"Dan segala sesuatu Kami ciptakan berpasang-pasangan"
(Q.S. adz-Dzaariyaat (51): 49).

Jadi, setiap makhluk pasti memiliki keragaman, sedangkan *al-Khalid* (Maha Pencipta) disucikan dari keragaman. Sebagaimana firman Allah SWT: *subkhaanalladzii kholaqol azwaaja kullaha* (Maha Suci Tuhan yang telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya) dimana Allah tidak mengatakan: *alkhamdulillahilladzi kholaqol azwaaja* (Segala puji bagi Allah yang menciptakan pasangan-pasangan semuanya), melainkan mengatakan: *subkhaana* (Maha Suci). Karena segala sesuatu membutuhkan pasangan menunjukkan akan kesempurnaan dzat yang Maha Esa yang tidak dapat dipermisalkan oleh sesuatupun dari makhluk-makhluk-Nya, baik dari dzat-Nya maupun dari sifat-sifat-Nya.

Dari ayat-ayat al-Qur'an di atas, jelas bahwa Allah SWT benar-benar menciptakan makhluk-Nya memiliki pasangan. Akan tetapi, ada sesuatu yang belum diketahui dari Surat Yaasinn (36): 36 jika dicermati lebih dalam, yaitu arti penggalan ayat yang berbunyi *"maupun dari apa yang tidak mereka ketahui"*. Dari sini, bahwa Allah juga menciptakan sesuatu yang berpasangan namun sulit diketahui oleh manusia.

Salah satu pasangan yang telah disebutkan di atas adalah pasangan materi dan anti-materi jika dilihat dari sudut pandang fisika partikel (Purwanto, 2008). Anti-materi merupakan lawan dari materi, yang mana mempunyai kesamaan massa dan spin, namun memiliki muatan yang berlawanan tanda dengan keadaan materinya. Jika materi bertemu dengan anti-materinya, keduanya akan saling memusnahkan (*pair annihilation*) dan berubah menjadi gelombang radiasi. Sebaliknya, materi dan anti-materi dapat muncul dari gelombang radiasi, yang sering dikenal sebagai (*pair production*). Al-Qur'an sudah menjelaskan proses ini sebagaiman Surat al-'Aadiyat (100): 1-3;

وَالْعَادِيَاتِ ضَبْحًا ﴿١﴾ فَالْمُورِيَاتِ قَدْحًا ﴿٢﴾ فَالْمُغِيرَاتِ صُبْحًا ﴿٣﴾

"(1) Demi kuda perang yang berlari kencang dengan terengah-engah, (2) dan kuda yang mencetuskan api dengan pukulan (kuku kakinya), (3) dan kuda yang menyerang dengan tiba-tiba di waktu pagi" (Q.S. al-'Aadiyaat (100): 1-3).

Pada ayat-ayat Surat al-‘Aadiyaat di atas, Allah bukan membicarakan tentang kuda, melainkan mengartikan masalah penciptaan atas suatu hal. Ketika ilmu pengetahuan modern belum berkembang, benda yang paling mudah dikenali sebagai sesuatu yang melesat cepat (*dhabhan*) adalah kuda, sehingga *‘adiyat* sering ditafsirkan kuda, meskipun orang Arab tidak pernah menyebutkan hewan itu dengan istilah *‘adiyat*. Akan tetapi, saat ini sesuatu yang diketahui orang sebagai benda yang bergerak cepat adalah partikel. Sehingga kata kuda pada ayat di atas ditafsirkan sebagai manifestasi dari suatu partikel (Purwanto, 2008).

Setiap partikel selalu mempunyai pasangannya, partikel dan anti-partikel. Partikel-partikel al-‘Aadiyaat inilah yang saling berbenturan dengan kecepatan melesat (*dhabhan*), sehingga bunga-bunga api (*al-muriyat*) yaitu panas dan cahaya terpancar (*qad-han*), maka terjadilah (*shubhan*) partikel-partikel baru (*al-mughirat*) (dari kata *ghayara* (berubah) atau *ghair* (lain)), seperti partikel meson yang terbentuk dari quark dan anti-quark (Komaruddin, 2017).

Dalam peristiwa gelombang tidak lepas kaitannya dengan energi. Energi telah dijelaskan dalam al-Qur’an, sebagaimana yang difirmankan Allah dalam Surat asy-Syam (91): 1;

وَالشَّمْسِ وَضُحَاهَا ﴿١﴾

“Demi matahari dan cahayanga di pagi hari” (Q.S. asy-Syam (91): 1).

Surat asy-Syam (91): 1 sudah sangat jelas dan eksklusif menjelaskan bahwa matahari memiliki cahaya, dan cahayanya dapat bersinar di pagi hari. Dalam fisika modern cahaya dapat dikatakan sebagai gelombang karena memenuhi sifat-

sifat sebagai gelombang dan juga diketahui bahwa matahari memiliki energi cahaya maupun energi panas. Matahari merupakan sumber energi panas dan cahaya terbesar di muka bumi. Karena itulah kita patut bersyukur kepada Sang Pencipta matahari itu sendiri, Dia lah Allah SWT.

2.4 Persamaan Klein-Gordon Linear

Allah SWT berfirman:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَاوَاتِ وَالأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ

شَيْءٍ فَقَدَّرَهُ تَقْدِيرًا﴿٢﴾

"yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Allah tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Allah telah menciptakan segala sesuatu, dan Allah menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya". (QS. Al-Furqan/25:2).

Menurut tafsir Ibn Katsir (2004), pada akhir ayat di atas dijelaskan bahwa segala sesuatu selain Allah adalah *makhluk* (yang diciptakan) dan yang *marbub* (yang berada di bawah kekuasaan-Nya). Allahlah pencipta segala sesuatu, Rabb, Raja, dan Ilahnya. Sedangkan segala sesuatu berada di bawah kekuasaan, aturan, tatanan, dan takdir-Nya.

Dijelaskan pula dalam Tafsir Al-Maraghi (1993) bahwa Allah mengadakan segala sesuatu sesuai dengan tuntutan kehendak-Nya yang didasarkan atas hikmah yang sempurna, serta mempersiapkannya untuk menerima apa yang dikehendaki-nya, berupa keistimewaan dan perbuatan yang sesuai dengannya. Sehingga Allah mempersiapkan manusia untuk dapat memahami dan memikirkan urusan dunia dan akhirat dan memanfaatkan apa yang terdapat di permukaan serta di dalam perut bumi. Allah juga mempersiapkan berbagai jenis hewan untuk melakukan berbagai pekerjaan yang sesuai dengannya dan kemampuannya.

Alam dunia yang meliputi langit, bumi dan seluruh isinya terdiri dari benda-benda yang beraneka ragam. Nainggolan (2012) menjelaskan bahwa semua benda yang ada di alam ini terdiri atas partikel-partikel elementer yang menyusunnya. Partikel elementer merupakan partikel paling dasar yang membentuk partikel lainnya (materi) dan tidak lagi tersusun atas partikel yang lebih kecil. Dalam kenyataannya, atom dianggap sebagai partikel-partikel dasar yang dimaksud. Sehingga atom merupakan unsur pokok yang membangun setiap materi yang ditemukan di alam ini (Djayadi, 2008).

Atom juga digambarkan seperti bola yang mempunyai suatu inti bermuatan positif serta dikelilingi elektron bermuatan negatif yang berputar mengelilingi inti atom. Berdasarkan teori elektromagnetis, bila ada partikel bermuatan (elektron) bergerak atau berputar mengelilingi inti akan memancarkan gelombang elektromagnetis. Setiap elektron akan berputar mengelilingi inti atom dalam lintasan (*orbit*) tertentu dan secara fisis perputaran mempunyai momentum sudut tertentu (Djayadi, 2008). Nainggolan (2012) dalam penelitiannya menyatakan bahwa persamaan Klein-Gordon dapat menjelaskan pergerakan elektron saat mengelilingi atom dalam lintasan (*orbit*) tertentu.

Persamaan Klein-Gordon merupakan versi relativistik dari Schrodinger, yaitu persamaan yang menggambarkan persamaan medan untuk partikel skalar (spin-0). Persamaan Klein-Gordon menjadi persamaan yang sering dipelajari untuk menggambarkan dinamika partikel dalam teori medan kuantum. Persamaan dengan berbagai jenis potensial muncul karena efek yang ditimbulkan oleh persamaan Klein-Gordon Nonlinear, sebagai contohnya adalah potensial soliton (Saadatmand, 2017).

Persamaan Schrodinger merupakan persamaan gelombang yang mampu menjelaskan perilaku elektron termasuk menentukan tingkat-tingkat energinya. Akan tetapi, ketika gerak elektron diasumsikan sebagai gerak relativistik $(v \approx c)$, maka persamaan Schrodinger harus diubah menjadi persamaan Klein-Gordon (persamaan Schrodinger relativistik). Solusi persamaan Klein-Gordon berupa fungsi gelombang, rapat probabilitas dan tingkat-tingkat energi elektron (Humaidi, 2016).

Berdasarkan postulat tentang pendeskripsian keadaan gerak sistem, yaitu keadaan gerak sistem dideskripsikan sebagai fungsi gelombang $\psi(x,t)$. Artinya, sebagai pendeskripsi keadaan maka fungsi gelombang tersebut memuat semua informasi tentang sistem yang dibicarakan, misalnya: posisi, momentum linier, energi, momentum sudut dan besaran-besaran dinamis lain yang diperlukan. Sehingga didapatkan petunjuk berikutnya tentang persamaan Schrodinger bahwa fungsi gelombang $\psi(x,t)$ yang dihasilkan harus dapat digunakan untuk mengetahui nilai berbagai besaran yang dimiliki sistem (Sutopo, 2005).

Cara mengetahui nilai besaran fisika adalah dengan melakukan pengukuran. Menurut postulat tentang pengukuran, mengukur adalah mengerjakan operator (yang mewakili besaran fisika yang diukur) pada fungsi gelombang yang mendeskripsikan keadaan sistem saat pengukuran.

Seperti halnya fungsi gelombang Schrodinger pada kondisi non-relativistik, fungsi gelombang Schrodinger pada kondisi relativistik juga dilambangkan dengan simbol ψ, yang mengandung fungsi ψ adalah fungsi terhadap ruang tiga dimensi (x, y, z) dan juga fungsi φ adalah fungsi terhadap waktu t. Dengan demikian fungsi gelombang Schrodinger pada kondisi relativistik dapat dinyatakan oleh persamaan (Sugiyono, 2016):

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)\varphi(t). \tag{2.5}$$

Jika fungsi ψ dapat dinyatakan sebagai fungsi eksponensial, maka dapat dituliskan:

$$\psi(x, y, z) = Ae^{i(A_1x + A_2y + A_3z)} + Be^{-i(A_1x + A_2y + A_3z)}, \tag{2.6}$$

dan fungsi φ dapat dinyatakan sebagai fungsi eksponensial, maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\varphi(t) = De^{-i\omega t}. \tag{2.7}$$

Persamaan (2.6) dan persamaan (2.7) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.5), sehingga dapat ditulis secara lengkap menjadi:

$$\psi = ADe^{i(A_1x + A_2y + A_3z)}e^{-i\omega t} + BDe^{-i(A_1x + A_2y + A_3z)}e^{-i\omega t} \tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) dapat disederhanakan lagi menjadi:

$$\psi = C_1e^{i(A_1x + A_2y + A_3z)}e^{-i\omega t} + C_2e^{-i(A_1x + A_2y + A_3z)}e^{-i\omega t} \tag{2.9}$$

maka turunan kedua dari fungsi gelombang ψ terhadap waktu dapat dinyatakan menjadi:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = (-i\omega)^2\psi = -4\pi^2 f^2\psi \tag{2.10}$$

Kuanta energi menurut Planck adalah $E = hf$ dan konstanta Planck persatuan 2π adalah $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Oleh karena itu, persamaan (2.10) juga dapat ditulis sebagai:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\frac{E^2}{\hbar^2}\psi \tag{2.11}$$

Jika fungsi gelombang ψ diturunkan (secara parsial) terhadap ruang tiga dimensi sebanyak dua kali, maka:

$$\nabla^2\psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi$$

$$= -\frac{E^2}{\hbar^2}\psi = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\psi \tag{2.12}$$

Panjang gelombang menurut gagasan de Broglie dapat dinyatakan sebagai $\lambda = \frac{h}{p}$ dan konstanta Planck persatuan 2π adalah $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Dengan demikian persamaan (2.12) akan menjadi (Sugiyono, 2016):

$$\nabla^2\psi = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi. \tag{2.13}$$

Selanjutnya, untuk memperoleh bentuk persamaan Klein-Gordon akan digunakan persamaan energi dan momentum 4-vektor relativistik.

$$\boldsymbol{E}^2 = \boldsymbol{P}^2c^{\boldsymbol{2}} + m^{\boldsymbol{2}}c^4. \tag{2.14}$$

Dari persamaan (2.14) tersebut, persamaan gelombang secara umum dapat disusun dengan memadukan antara gagasan kuantum dan gagasan klasik pada kondisi yang relativistik. Selanjutnya persamaan energi total relativistik dengan fungsi gelombang ψ. Maka akan diperoleh persamaan (Ryder, 1985):

$$\boldsymbol{E}^2\psi = (\boldsymbol{P}^2c^{\boldsymbol{2}} + m^{\boldsymbol{2}}c^4)\psi, \tag{2.15}$$

Sebagaimana pada penurunan persamaan Schrodinger, definisi operator dan energi pada persamaan (2.11) dan persamaan (2.13) ke dalam persamaan (2.15), kemudian masing-masing ruas persamaan dikerjakan pada sembarang fungsi gelombang $\psi(x,t)$ sehingga akan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{E}^2\psi = (\boldsymbol{P}^2c^2 + m^2c^4)\psi$$

$$-\hbar^2\frac{1}{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\psi = -\hbar^2c^2\frac{1}{\psi}\nabla^2\psi\psi + m^2c^4\psi$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = (-\hbar^2\nabla^2c^2 + m^2c^4)\psi\ . \qquad (2.16)$$

Selanjutnya, persamaan (2.16) dibagi dengan kuadrat kecepatan cahaya c^2, dan diperoleh sebuah persamaan:

$$-\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \hbar^2\nabla^2\psi - m^2c^2\psi = 0. \qquad (2.17)$$

Jika diuraikan ∇^2 menjadi $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, maka akan diperoleh:

$$-\hbar^2\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\psi - m^2c^2\psi = 0. \qquad (2.18)$$

Persamaan (2.18) disederhanakan dengan menggunakan **operator D'Alembert** yang dapat dinyatakan oleh:

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\ . \qquad (2.19)$$

Dengan demikian, secara umum persamaan Schrodinger pada kondisi relativistik dapat dinyatakan dengan menyederhanakan persamaan (2.18) dan mengalikan dengan $\frac{1}{\hbar^2c^2}$, sehingga menjadi (Ryder, 1985):

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0\ , \qquad (2.20)$$

atau

$$(\Box - K^2)\psi = 0. \qquad (2.21)$$

Persamaan ini pertama kali dirumuskan oleh Oskar Klein; V. Fock dan Walter Gordon dan disebut persamaan Klein-Gordon, dimana $\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{d^2\psi}{dt^2}$ dan $K^2 = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}$ (Ryder, 1985).

2.5 Persamaan Klein-Gordon Nonlinear Soliton

Persamaan Klein-Gordon Nonlinear merupakan persamaan yang menggambarkan keadaan suatu partikel yang bergerak periodik dalam keadaan tertentu. Persamaan Klein-Gordon Nonlinear dibangun berdasarkan analogi dari persamaan hukum nonlinearitas (*equations with Power-Law Nonlinearitas)*, dan diduga bahwa gelombang soliton dan gelombang anti-soliton muncul di persamaan (2.22) (Polyanin dan Zaitsev, 2004):

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \alpha\phi - \beta\phi^3 = 0\ , \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \alpha\phi - \beta\phi^3 + \gamma\phi^5 = 0\ , \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \alpha\phi - \beta\phi^n + \gamma\phi^{2n-1} = 0, \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \alpha\phi - \beta\phi^n = 0, \tag{2.25}$$

dimana $\alpha, \beta\ dan\ \gamma$ tidak sama dengan nol. α merupakan parameter yang terkait dengan nonlinear, dan β merupakan parameter yang terkait dengan dispersi, sedangkan γ merupakan parameter suseptibilitas orde tiga dari medium yang dilalui dinamika nonlinear.

Persamaan (2.22) dikenal dengan persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I, sedangkan persamaan (2.23) dikenal dengan persamaan Klein-Gordon model II, dimana kedua persamaan tersebut ketika dianalisis menggunakan metode tanh dan metode sech akan memiliki solusi yang mengarah pada gelombang soliton. Solusi gelombang soliton dan gelombang anti-soliton didapatkan dengan cara analitik. Gelombang soliton ditunjukkan dengan fungsi trigonometri hiperbolik (fungsi hiperbola) yang merupakan fungsi nonlinear. Sedangkan gelombang anti-soliton ditunjukkan dengan fungsi trigonometri biasa (fungsi periodik) yang merupakan fungsi linear.

2.6 Metode Tanh/Coth Soliton

Metode tanh/coth merupakan metode yang efektif untuk menangani kasus persamaan differensial parsial nonlinear. Metode ini dikembangkan oleh W. Malfliet dan W. Hereman yang menggunakan Aljabar untuk menemukan solusi dari persamaan Nonlinear.

Langkah pertama dalam metode tanh/coth adalah menggabungkan variabel bebas x dan t menjadi satu variabel, dimana variabel tersebut dikenal sebagai variabel gelombang $\xi = x - t$, dan diturunkan secara parsial (*Partial Derivatives Exact*) dalam dua variabel bebas tersebut.

$$P\left(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right) = 0\ , \tag{2.26}$$

menjadi sebuah persamaan *Ordinary Derivatives Exact* (ODE)

$$Q\left(\phi, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right) = 0\ , \tag{2.27}$$

lalu digabungkan semua konstanta yang mengandung turunan, konstanta tersebut biasa dianggap nol. Teknik tanh/coth didasarkan pada asumsi bahwa solusi gelombang dapat dinyatakan dalam fungsi tanh/coth, kemudian diperkenalkan variabel bebas yang baru

$$Y = \tanh(\mu\xi)\ , \tag{2.28}$$

$$\phi(x,t) = a_0 + a_1 \tanh(\mu\xi), \tag{2.29}$$

$$\phi(x,t) = a_0 + a_1 \coth(\mu\xi), \tag{2.30}$$

yang mengarah pada perubahan derivatif:

$$\frac{d}{d\xi} = \mu(1 - Y^2)\frac{d}{dY},$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2} = \mu^2(1 - Y^2)\left(-2Y\frac{d}{dY} + (1 - Y^2)\frac{d^2}{dY^2}\right) \tag{2.31}$$

kemudian diperkenalkanlah metode Frobenius:

$$\phi(\mu\xi) = S(Y) = \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \tag{2.32}$$

Dimana M adalah bilangan bulat positif, dalam banyak kasus biasanya M sudah ditentukan. Namun, jika M bukan bilangan bulat, maka digunakan rumus transformasi. Substitusi persamaan (2.31) dan persamaan (2.32) ke dalam persamaan (2.27) akan menghasilkan persamaan dalam bentuk variabel Y. Parameter M ditentukan menggunakan prosedur keseimbangan dengan membandingkan Y^M dalam turunan tingkat tinggi nonlinear, dan akan memberikan sistem persamaan aljabar yang melibatkan parameter $a_k, (k = 0, \dots, M), \mu, dan\ c$, sehingga diperoleh solusi analitik $\phi_{(x,t)}$.

2.7 Metode Tan/Cot Anti-Soliton

Solusi tan Anti-Soliton diperkenalkan oleh persamaan (Wazwaz, 2005):

$$\phi(x,t) = a_0 + ia_1 \tan(\mu\xi), \tag{2.33}$$

dimana a_0, a_1 merupakan parameter konstanta yang sudah diketahui nilainya. Sedangkan solusi cot Anti-Soliton diperkenalkan oleh persamaan berikut (Wazwaz, 2005):

$$\phi(x,t) = a_0 + ia_1 \cot(\mu\xi). \quad (2.34)$$

2.8 Metode Sech/Csch Soliton

Solusi sech Soliton diperkenalkan oleh persamaan (Wazwaz, 2005):

$$\phi(x,t) = a_0 + a_1 \operatorname{sech}(\mu\xi), \quad (2.35)$$

dimana a_0, a_1 merupakan parameter konstanta yang sudah diketahui nilainya. Sedangkan solusi csch Soliton diperkenalkan oleh persamaan berikut

(Wazwaz, 2005):

$$\phi(x,t) = a_0 - a_1 \operatorname{csch}(\mu\xi), \quad (2.36)$$

2.9 Metode Sec/Csc Anti-Soliton

Solusi sec Anti-Soliton diperkenalkan oleh persamaan (Wazwaz, 2005):

$$\phi(x,t) = a_0 + a_1 \sec(-\mu\xi), \quad (2.37)$$

dimana a_0, a_1 merupakan parameter konstanta yang sudah diketahui nilainya.

Sedangkan solusi csc Anti-Soliton diperkenalkan oleh persamaan berikut

(Wazwaz, 2005):

$$\phi(x,t) = a_0 + a_1 \csc(-\mu\xi), \quad (2.38)$$

2.10 Metode Sinh/Cosh Soliton

Solusi sinh Soliton diperkenalkan oleh persamaan (Wazwaz, 2005):

$$\phi(x,t) = a_0 - a_1 \sinh(\mu\xi), \tag{2.39}$$

dimana a_0, a_1 merupakan parameter konstanta yang sudah diketahui nilainya. Sedangkan solusi cosh Soliton diperkenalkan oleh persamaan berikut (Wazwaz, 2005):

$$\phi(x,t) = a_0 - a_1 \cosh(\mu\xi), \tag{2.40}$$

2.11 Metode Sin/Cos Anti-Soliton

Solusi sin Anti-Soliton diperkenalkan oleh persamaan (Wazwaz, 2005):

$$\phi(x,t) = a_0 + ia_1 \sin(-\mu\xi), \tag{2.41}$$

dimana a_0, a_1 merupakan parameter konstanta yang sudah diketahui nilainya. Sedangkan solusi cos Anti-Soliton diperkenalkan oleh persamaan berikut (Wazwaz, 2005):

$$\phi(x,t) = a_0 + ia_1 \cos(-\mu\xi), \tag{2.42}$$

BAB III
PERSAMAAN KLEIN-GORDON NONLINEAR MODEL I

3.1 Metode Frobenius

Menurut Nagy (2012) salah satu masalah dalam persamaan diferensial adalah memperoleh solusi dari persamaan diferensial biasa koefisien variabel, sehingga dibutuhkan sebuah metode untuk memperolehnya yaitu solusi deret. Solusi deret pada titik t dapat digunakan jika $t = 0$ adalah titik biasa (*ordinary point*) dari persamaan diferensial biasa, akan tetapi jika $t = 0$ adalah titik singular, maka dibutuhkan suatu deret pangkat yang diperluas, metode ini dikenal dengan metode Frobenius.

$$\begin{aligned} Y(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ &= \sum_{k=0}^{\sim} a_k x^k \; . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Untuk mendapatkan persamaan solusi gelombang soliton dan anti-soliton. Dilakukan pemisahan variabel gelombang $\xi = x - ct$ pada persamaan (2.22) yang dibuktikan dalam lampiran A dan diperoleh

$$(c^2 - a^2)\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \alpha\phi - \beta\phi^3 = 0 \; , \tag{3.2}$$

untuk menyeimbangkan antara fungsi $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ dan ϕ^3 diberikan parameter M yang bernilai $M = 1$. Dengan menerapkan metode Frobenius, persamaan (3.1) menjadi

$$\begin{aligned} S(Y) &= \sum_{k=0}^{M} a_k Y^k \\ &= \sum_{k=0}^{M=1} a_k Y^k \\ &= a_0 Y^0 + a_1 Y^1 \end{aligned}$$

$$S(Y) = a_0 Y^0 + a_1 Y \tag{3.3}$$

Selanjutnya dilakukan substitusi dari persamaan (3.3) ke dalam persamaan (2.32) dengan mengabaikan variabel Y

$$0 = (a_0 + a_1) - a^2(a_0 + a_1) + \alpha(a_0 + a_1) - \beta(a_0 + a_1)^3$$

$$0 = a_0 + a_1 - a^2 a_0 - a^2 a_1 + \alpha a_0 + \alpha a_1$$
$$-\beta({a_0}^3 + 3{a_0}^2 a_1 + 3a_0 {a_1}^3 + {a_1}^3)$$

$$0 = a_0 + a_1 - a^2 a_0 - a^2 a_1 + \alpha a_0 + \alpha a_1$$
$$-\beta {a_0}^3 - 3\beta {a_0}^2 a_1 - 3\beta a_0 {a_1}^3 - \beta {a_1}^3$$

$$0 = \alpha a_0 + a_0 - a^2 a_0 - \beta {a_0}^3 - 3\beta {a_0}^2 a_1 - 3\beta a_0 {a_1}^3$$
$$+a_1 + \alpha a_1 - \beta {a_1}^3$$

$$0 = a_0(\alpha + 1 - a^2 - \beta {a_0}^2 - 3\beta a_0 a_1 - 3\beta {a_1}^3)$$
$$+a_1(\alpha + 1 - \beta {a_1}^2) \quad (3.4)$$

untuk memperoleh nilai konstanta a_0, diambillah persamaan sebagai berikut

$$a_0(\alpha + 1 - a^2 - \beta {a_0}^2 - 3\beta a_0 a_1 - 3\beta {a_1}^3) = 0$$
$$a_0 = 0 \quad (3.5a)$$

Dan, untuk memperoleh nilai dari konstanta a_1, diambillah persamaan sebagai berikut dengan mengabaikan angka satu. Sehingga didapatkan

$$a_1(\alpha + 1 - \beta {a_1}^2) = 0$$
$$\alpha a_1 - \beta {a_1}^3 = 0$$
$$\alpha a_1 = \beta {a_1}^3$$
$$\alpha = \beta {a_1}^2$$
$${a_1}^2 = \frac{\alpha}{\beta}$$
$$a_1 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (3.5b)$$

Didefinisikan bahwa $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma^2} - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma\partial\xi} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\right)$, maka persamaan (3.2) menjadi

$$(c^2 - a^2)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma^2} - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma\partial\xi} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\right) + \alpha\phi - \beta\phi^3 = 0\,, \qquad (3.6)$$

diambillah nilai suku ke dua untuk menentukan nilai μ, dan di definisikan bahwa $\gamma = \xi$, sehingga

$$(c^2 - a^2)(-2)\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma\partial\xi} + \alpha\phi - \beta\phi^3 = 0 \qquad (3.7)$$

$$(c^2 - a^2)(-2)\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + \alpha\phi - \beta\phi^3 = 0$$

$$(c^2 - a^2)(-2)\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} - \beta\phi^3 = -\alpha\phi$$

$$-2(c^2 - a^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} - \beta\phi^3 = -\alpha\phi$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} - \beta\phi^3 = \frac{-\alpha}{-2(c^2-a^2)}\phi$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} - \beta\phi^3 = \frac{\alpha}{2(c^2-a^2)}\phi\,. \qquad (3.8)$$

Dengan menerapkan persamaan (2.31) didapatkanlah konstanta μ yang bernilai

$$\mu^2 = \frac{\alpha}{2(c^2-a^2)}\,,$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\alpha}{2(c^2-a^2)}}\,, \qquad (3.9)$$

dimana $\frac{\alpha}{c^2-a^2} > 0$

Dari persamaan (3.5a), (3.5b) dan persamaan (3.9) didapatkan solusi

$$\phi(x,t) = a_1\tanh(\mu\xi) \qquad (3.10)$$

dimana $\xi = x - ct$

Sehingga solusi untuk gelombang soliton (kink) adalah

$$\phi(x,t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\tanh\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2(c^2-a^2)}}\,(x-ct)\right) \tag{3.11}$$

dan,

$$\phi(x,t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\coth\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2(c^2-a^2)}}\,(x-ct)\right) \tag{3.12}$$

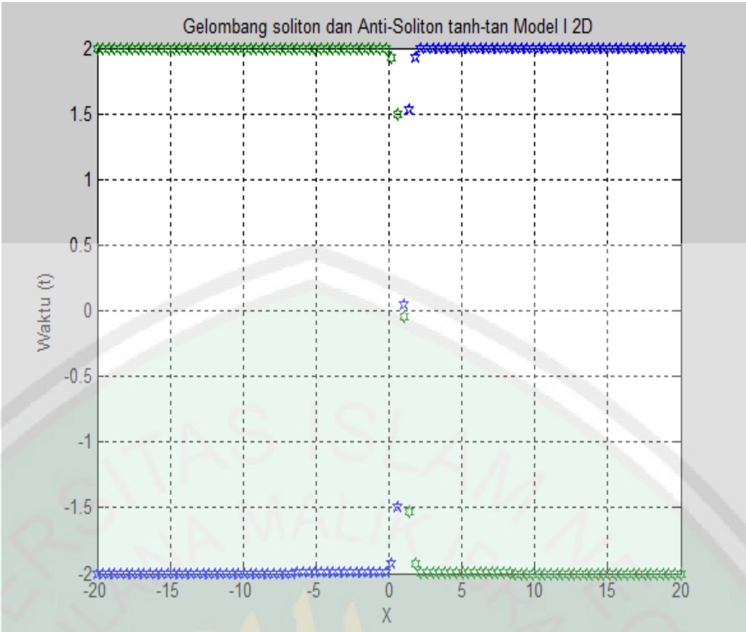
Untuk solusi gelombang anti soliton (Anti-kink) ditandai dengan solusi kompleks dimana $\frac{\alpha}{c^2-a^2} < 0$, yakni

$$\phi(x,t) = i\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\tan\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{2(c^2-a^2)}}\,(x-ct)\right) \tag{3.13}$$

dan,

$$\phi(x,t) = i\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cot\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{2(c^2-a^2)}}\,(x-ct)\right) \tag{3.14}$$

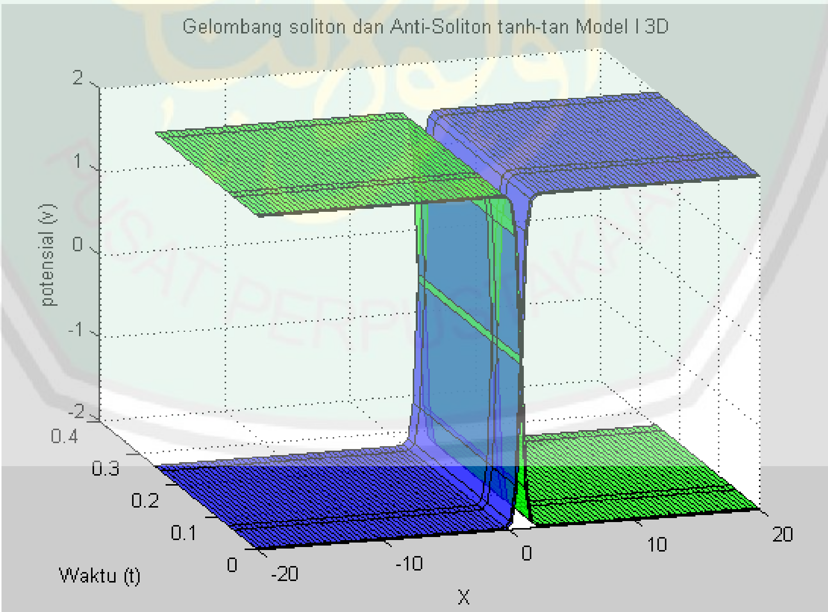
Dari persamaan (3.11) hingga persamaan (3.14) didapatkan pemodelan kurva menggunakan program Matlab yang memvisualisasikan fungsi gelombang soliton dan anti-soliton. Hasil visualisasi ditampilkan pada Gambar 3.1, Gambar 3.2, Gambar 3.3 dan Gambar 3.4.



Gambar 3.1 Gelombang Soliton dan Anti-Soliton Tanh-Tan Model I 2D

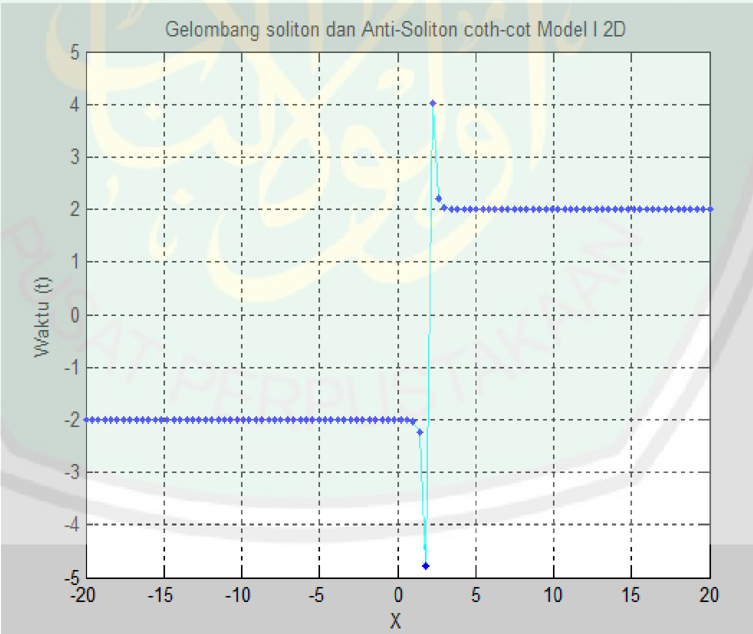
Gambar 3.1 merupakan visualisasi gelombang soliton dan gelombang anti-soliton menggunakan persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I dalam bentuk dua dimensi, dimana persamaan tersebut memiliki dua bentuk solusi gelombang. Solusi pertama berupa fungsi gelombang tanh (persamaan (3.11)) yang menunjukkan adanya gelombang soliton (kink). Gelombang soliton divisualisasikan dengan kurva yang berwarna biru, dimana gelombang tersebut stabil pada rentang $x = -20$ hingga $x = 0$ karena statabilitas soliton berperan aktif untuk menyeimbangkan efek dispersi yang kecil $(\beta < 0)$ dan efek nonlinearitas yang kecil $(\alpha < 0)$. Sehingga gelombang soliton berada pada titik $y = -2$ dan mengalami kenaikan gelombang disaat $x = 1$ hingga $x = 3$ yang disebabkan peningkatan efek dispersi (nilai β besar), sehingga menyebabkan gelombang soliton mengalami gelombang kejut. Kemudian gelombang tersebut stabil kembali pada rentang $x = 4$ hingga $x = 20$ karena gelombang kejut akibat efek dispersi distabilkan oleh stabilitas soliton.

Sedangkan solusi kedua berupa fungsi gelombang tan (persamaan (3.13)) yang menunjukkan adanya lawan dari gelombang soliton, yang dikenal dengan gelombang anti-soliton (anti-kink). Gelombang anti-soliton divisualisasikan dengan kurva yang berwarna hijau, dimana gelombang tersebut stabil pada rentang $x = -20$ hingga $x = 0$ karena statabilitas soliton berperan aktif untuk menyeimbangkan efek dispersi yang besar ($\beta > 0$) dan efek nonlinearitas yang besar ($\alpha > 0$). Sehingga gelombang anti-soliton berada pada titik $y = 2$ dan mengalami penurunan gelombang disaat $x = 1$ hingga $x = 3$ yang disebabkan penurunan efek dispersi (nilai β kecil), sehingga menyebabkan gelombang anti-soliton mengalami gelombang kejut. Kemudian gelombang tersebut stabil kembali pada rentang $x = 4$ hingga $x = 20$ karena gelombang kejut akibat efek dispersi distabilkan oleh stabilitas soliton.



Gambar 3.2 Gelombang Soliton dan Anti-Soliton Tanh-Tan Model I 3D

Gambar 3.2 merupakan visualisasi gelombang soliton dan gelombang anti-soliton menggunakan persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I dalam bentuk tiga dimensi, dimana persamaan tersebut memiliki dua bentuk solusi gelombang. Solusi pertama berupa fungsi gelombang tanh (persamaan (3.11)) yang menunjukkan adanya gelombang soliton (kink). Gelombang soliton divisualisasikan dengan kurva yang berwarna biru, dimana gelombang tersebut ketika berada pada jarak (x) yang berubah-ubah dan waktu (t) berubah, nilai potensial selalu tetap. Sedangkan solusi kedua berupa fungsi gelombang tan (persamaan (3.13)) yang menunjukkan adanya lawan dari gelombang soliton, yang dikenal dengan gelombang anti-soliton (anti-kink). Gelombang anti-soliton divisualisasikan dengan kurva yang berwarna hijau, dimana gelombang tersebut ketika berada pada jarak (x) yang berubah-ubah dan waktu (t) berubah, nilai potensial selalu tetap.

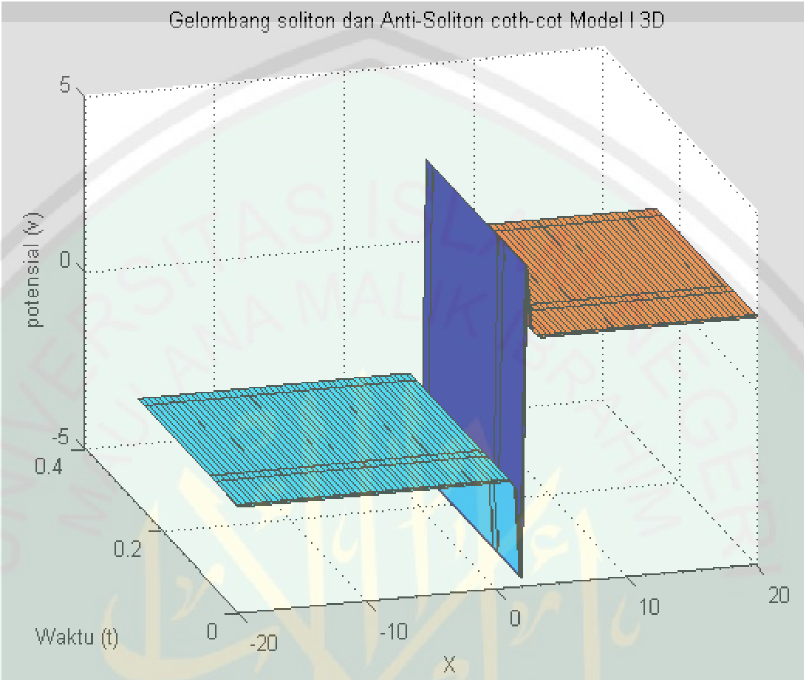


Gambar 3.3 Gelombang Soliton dan Anti-Soliton Coth-Cot Model I 2D

Gambar 3.3 merupakan visualisasi gelombang soliton dan gelombang anti-soliton menggunakan persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I dalam bentuk dua dimensi, dimana persamaan tersebut memiliki dua bentuk solusi gelombang.

Solusi pertama berupa fungsi gelombang coth (persamaan (3.12)) yang menunjukkan adanya gelombang soliton (kink). Gelombang soliton divisualisasikan dengan kurva yang berwarna biru, dimana gelombang tersebut stabil pada rentang $x = -20$ hingga $x = 0$ karena statabilitas soliton berperan aktif untuk menyeimbangkan efek dispersi yang kecil ($\beta < 0$) dan efek nonlinearitas yang kecil ($\alpha < 0$). Sehingga gelombang soliton berada pada titik $y = -2$ dan menghilang disaat $x = 1$ hingga $x = 3$ yang disebabkan penurunan efek dispersi secara drastis (nilai β sangat kecil) dan efek nonlinearitas yang tidak ada ($\alpha = 0$). Kemudian gelombang tersebut stabil kembali pada rentang $x = 4$ hingga $x = 20$ karena gelombang hilang akibat efek dispersi dan efek nonlinearitas distabilkan kembali oleh stabilitas soliton. Sehingga gelombang soliton berada pada titik $y = 2$.

Sedangkan solusi kedua berupa fungsi gelombang cot (persamaan (3.14)) yang menunjukkan adanya lawan dari gelombang soliton, yang dikenal dengan gelombang anti-soliton (anti-kink). Gelombang anti-soliton divisualisasikan dengan kurva yang berwarna toska, dimana gelombang tersebut muncul dan mengalami penurunan drastis pada rentang $x = 1$, kemudian gelombang tersebut mengalami kenaikan secara drastis disaat $x = 2$ yang disebabkan peningkatan efek dispersi (nilai β besar), sehingga menyebabkan gelombang anti-soliton mengalami gelombang kejut, dan mengalami penurunan kembali saat $x = 3$ karena terjadi penurunan efek dispersi (nilai β kecil), sehingga menyebabkan gelombang anti-soliton mengalami gelombang kejut kemudian gelombang tersebut menghilang karena efek dispersi dan efek nonlinear mendekati sama dengan nol. Saat gelombang tersebut muncul dan mengalami penurun drastis, kemudian mengalami kenaikan secara drastis lalu menghilang, artinya stabilitas soliton tidak berperan aktif.



Gambar 3.4 Gelombang Soliton dan Anti-Soliton Coth-Cot Model I 3D

Gambar 3.4 merupakan visualisasi gelombang soliton dan gelombang anti-soliton menggunakan persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I dalam bentuk tiga dimensi, dimana persamaan tersebut memiliki dua bentuk solusi gelombang. Solusi pertama berupa fungsi gelombang coth (persamaan (3.12)) yang menunjukkan adanya gelombang soliton (kink). Gelombang soliton divisualisasikan dengan kurva yang berwarna toska dan merah bata, dimana gelombang tersebut ketika berada pada jarak (x) yang berubah-ubah dan waktu (t) berubah, nilai potensial selalu tetap. Sedangkan solusi kedua berupa fungsi gelombang cot (persamaan (3.14)) yang menunjukkan adanya lawan dari gelombang soliton, yang dikenal dengan gelombang anti-soliton (anti-kink).

Gelombang anti-soliton divisualisasikan dengan kurva yang berwarna biru dongker (navy), dimana gelombang tersebut ketika berada pada jarak (x) tetap dan waktu (t) berubah, nilai potensial selalu berubah.

Hal ini menunjukkan bahwa gelombang soliton dan anti-soliton muncul pada kurva yang divisusialisasikan pada gambar 3.1, karena pada kurva tersebut menjelaskan bahwa stabilitas berperan aktif. Ketika stabilitas soliton tidak berperan, maka gelombang soliton dan anti-soliton tidak akan ada.

3.2 Metode Sech

Menurut wazwaz (2005) persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I akan lebih menarik jika dapat diselesaikan dengan menggunakan metode sech yang diperkenalkan:

$$\phi(x,t) = a_0 + a_1 \operatorname{sech}(\mu\xi) \,, \tag{3.15}$$

dari penjabaran persamaan (3.4) diambil persamaan berikut untuk mendapatkan nilai dari konstanta a_1.

$$\alpha a_0 + \alpha a_1 - \beta {a_1}^3 = 0 \,, \tag{3.16}$$

diasumsikan bahwa $a_0 = a_1$, sehingga

$$\alpha a_1 + \alpha a_1 - \beta {a_1}^3 = 0$$

$$2\alpha a_1 = \beta {a_1}^3$$

$$2\alpha = \beta {a_1}^2$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}} \,, \tag{3.17}$$

didefinisikan bahwa $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma^2} - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma\partial\xi} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\right)$, maka persamaan (3.2) menjadi

$$(c^2 - a^2)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma^2} - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma\partial\xi} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\right) + \alpha\phi - \beta\phi^3 = 0\ , \tag{3.18}$$

$$(c^2 - a^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + \alpha\phi - \beta\phi^3 = 0\ , \tag{3.19}$$

$$(c^2 - a^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + \alpha\phi - \beta\phi^3 = 0\ ,$$

$$(c^2 - a^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} - \beta\phi^3 = -\alpha\phi,$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} - \beta\phi^3 = \frac{-\alpha}{(c^2-a^2)}\phi,$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} - \beta\phi^3 = \frac{\alpha}{(a^2-c^2)}\phi\ . \tag{3.20}$$

Dengan menerapkan persamaan (2.31) didapatkanlah konstanta μ yang bernilai

$$\mu^2 = \frac{\alpha}{(a^2 - c^2)}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\alpha}{(a^2-c^2)}} \tag{3.21}$$

dimana $\frac{\alpha}{a^2-c^2} > 0$

Dengan menerapkan persamaan (3.15) didapatkan solusi untuk gelombang soliton

$$\phi(x,t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}\operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{(a^2-c^2)}}\ (x - ct)\right) \tag{3.22}$$

dan,

$$\phi(x,t) = \sqrt{-\frac{2\alpha}{\beta}}\operatorname{csch}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{(a^2-c^2)}}\ (x - ct)\right) \tag{3.23}$$

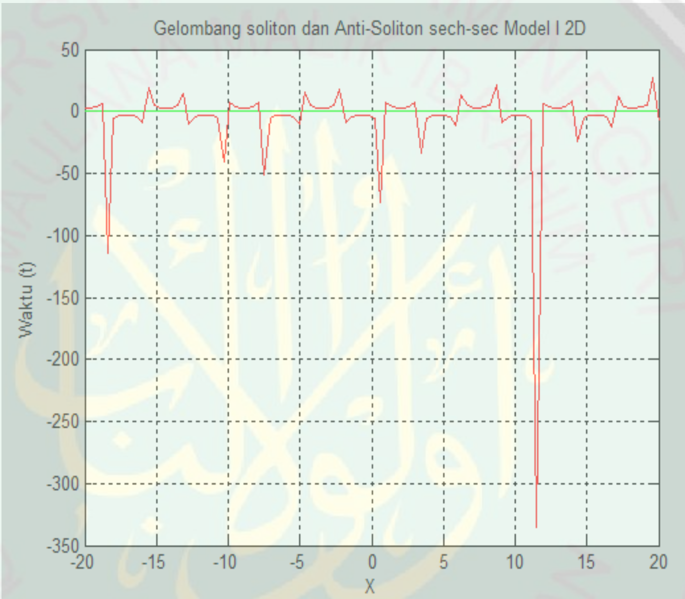
Untuk solusi periodik $\frac{\alpha}{a^2-c^2} < 0$

$$\phi(x,t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}\sec\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{(a^2-c^2)}}\ (x - ct)\right) \tag{3.24}$$

Untuk solusi kompleks

$$\phi(x,t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}\csc\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{(a^2-c^2)}}\,(x-ct)\right) \tag{3.25}$$

Dari persamaan (3.22) hingga persamaan (3.25) didapatkan pemodelan kurva menggunakan program Matlab yang memvisualisasikan fungsi gelombang soliton dan anti-soliton. Hasil visualisasi ditampilkan pada Gambar 3.3 dan Gambar 3.4.

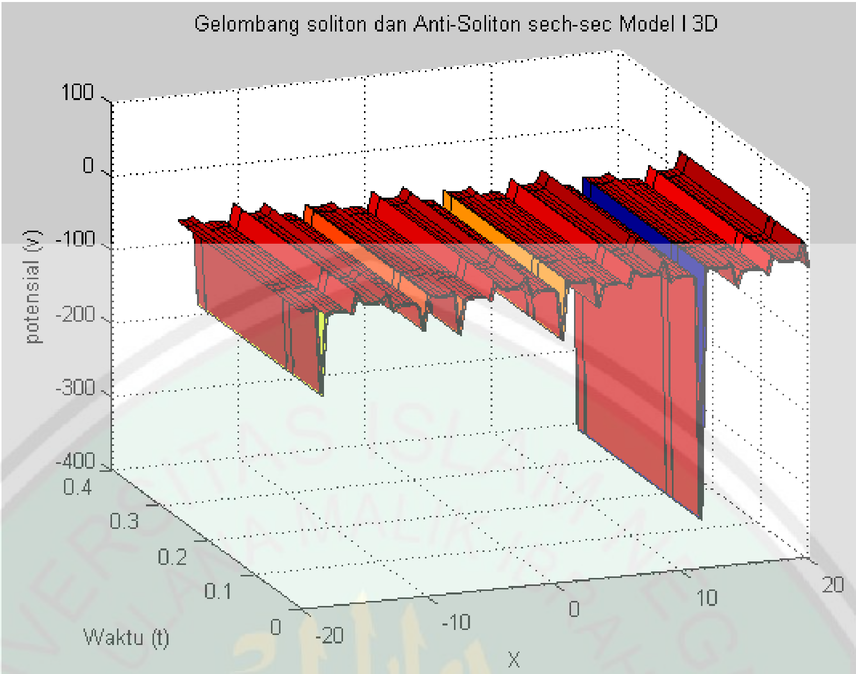


Gambar 3.5 Gelombang Soliton dan Anti-Soliton Sech-Sec Model I 2D

Gambar 3.5 merupakan visualisasi gelombang soliton dan gelombang anti-soliton menggunakan persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I dalam bentuk dua dimensi, dimana persamaan tersebut memiliki dua bentuk solusi gelombang. Solusi pertama berupa fungsi gelombang sech (persamaan (3.22)) yang menunjukkan adanya gelombang soliton (kink). Gelombang soliton divisualisasikan dengan kurva yang berwarna merah, dimana gelombang tersebut selalu berubah-ubah polanya pada rentang $x = -20$ hingga $x = 20$.

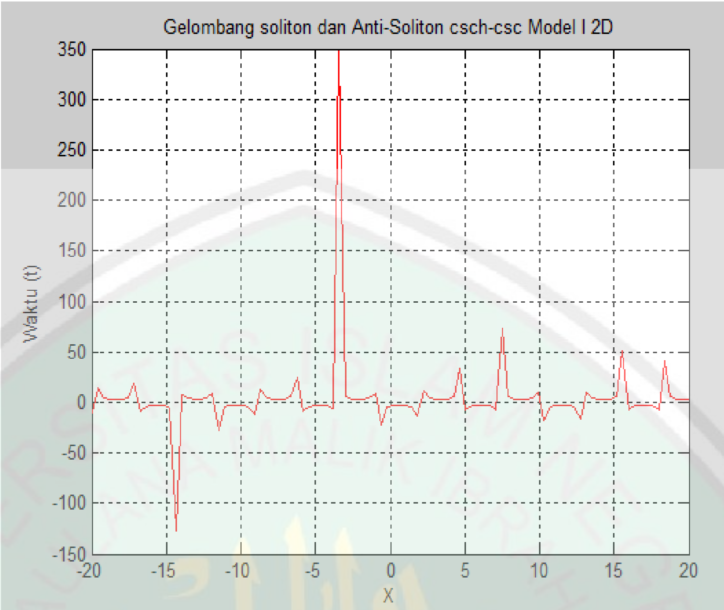
Persamaan (3.22) merupakan solusi dimana $\frac{\alpha}{a^2-c^2} > 0$ menandakan bahwa parameter $\beta < 0$ yang artinya mengalami penurunan efek dirpersi, sehingga terjadilah gelombang kejut. Ketika $\alpha > 0$ mengindikasikan bahwa $\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}} < 0$, hal inilah yang menyebabkan efek dispersi dan efek nonlinearitas menurun drastis. Sehingga terjadilah gelombang kejut dibeberapa titik dari rentang $x = -20$ hingga $x = 20$. Hal inilah yang menyebabkan stabilitas soliton tidak berperan aktif untuk menyeimbangkan antara efek dispersi dan efek nonlinearitas, sehingga grafik terlihat berubah-ubah dan memiliki beberapa pola gelombang kejut dibeberapa titik.

Sedangkan solusi kedua berupa fungsi gelombang sec (persamaan (3.24)) yang menunjukkan adanya lawan dari gelombang soliton, yang dikenal dengan gelombang anti-soliton (anti-kink). Gelombang anti-soliton divisualisasikan dengan kurva yang berwarna hijau, dimana gelombang tersebut konstan di fungsi nol dari rentang $x = -20$ hingga $x = 20$. Hal ini disebabkan karena $\frac{\alpha}{a^2-c^2} < 0$ dan menyebabkan suku $\frac{-\alpha}{a^2-c^2} < 0$ pada persamaan (3.24), sehingga menyebabkan efek nonlinearitas sangatlah kecil. Hal tersebut mengindikasikan bahwa parameter $\beta < 0$ dari suku $\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}$, sehingga menyebabkan gelombang anti-soliton hanya muncul di $y = 0$ karena efek dispersi dan efek nonlinearitas sangatlah kecil dan membuat stabilitas soliton tidak berperan sama sekali.



Gambar 3.6 Gelombang Soliton dan Anti-Soliton Sech-Sec Model I 3D

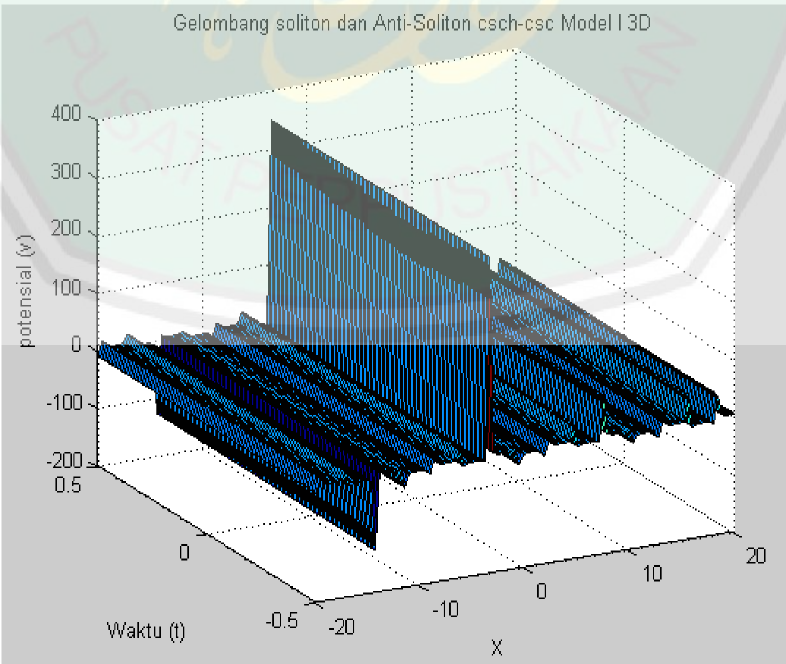
Gambar 3.6 merupakan visualisasi gelombang soliton dan gelombang anti-soliton menggunakan persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I dalam bentuk tiga dimensi, dimana persamaan tersebut memiliki dua bentuk solusi gelombang. Solusi pertama berupa fungsi gelombang sech (persamaan (3.22)) yang menunjukkan adanya gelombang soliton (kink). Gelombang soliton divisualisasikan dengan kurva yang berwarna merah bata, dimana gelombang tersebut ketika berada pada jarak (x) yang berubah-ubah dan waktu (t) berubah, nilai potensial selalu berubah. Sedangkan solusi kedua berupa fungsi gelombang sec (persamaan (3.24)) yang menunjukkan adanya lawan dari gelombang soliton, yang dikenal dengan gelombang anti-soliton (anti-kink). Gelombang anti-soliton divisualisasikan dengan kurva yang berwarna hijau, dimana gelombang tersebut konstan (tidak berubah) pada jarak (x) dan waktu (t)yang sama, nilai potensial selalu konstan.



Gambar 3.7 Gelombang Soliton dan Anti-Soliton Csch-Csc Model I 2D

Gambar 3.7 merupakan visualisasi gelombang soliton dan gelombang anti-soliton menggunakan persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I dalam bentuk dua dimensi, dimana persamaan tersebut memiliki dua bentuk solusi gelombang. Solusi pertama berupa fungsi gelombang csch (persamaan (3.23)) menunjukkan adanya gelombang soliton (kink). Gelombang soliton divisualisasikan dengan kurva yang berwarna merah. Persamaan (3.23) merupakan solusi urutan terendah, dimana $\frac{\alpha}{a^2-c^2} > 0$ menandakan bahwa parameter $\beta < 0$ yang artinya mengalami penurunan efek dirpersi, sehingga terjadilah gelombang kejut. Ketika $\alpha > 0$ mengindikasikan bahwa $\sqrt{-\frac{2\alpha}{\beta}} < 0$, hal inilah yang menyebabkan efek dispersi dan efek nonlinearitas menurun drastis. Sehingga terjadilah gelombang kejut di beberapa titik dari rentang $x = -20$ sampai $x = 20$. Hal inilah yang menyebabkan stabilitas soliton tidak berperan aktif untuk menyeimbangkan antara efek dispersi dan efek nonlinearitas, sehingga grafik terlihat berubah-ubah dan memiliki beberapa pola gelombang kejut yang terlihat kecil-kecil.

Sedangkan solusi kedua berupa fungsi gelombang csc (persamaan (3.25)) yang menunjukkan adanya lawan dari gelombang soliton, yang dikenal dengan gelombang anti-soliton (anti-kink). Gelombang anti-soliton divisualisasikan dengan kurva yang berwarna hijau, dimana gelombang tersebut tidak muncul sama sekali (gelombang hilang). Hal ini disebabkan karena $\frac{\alpha}{a^2-c^2} < 0$ dan menyebabkan suku $\frac{-\alpha}{a^2-c^2} \ll 0$ pada persamaan (3.25), sehingga menyebabkan efek nonlinearitas sangatlah kecil. Hal tersebut mengindikasikan bahwa parameter $\beta << 0$ dari suku $\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}$, sehingga menyebabkan gelombang anti-soliton tidak muncul karena efek dispersi dan efek nonlinearitas sangatlah kecil dan membuat stabilitas soliton tidak berperan sama sekali.



Gambar 3.8 Gelombang Soliton dan Anti-Soliton Csch-Csc Model I 3D

Gambar 3.8 merupakan visualisasi gelombang soliton dan gelombang anti-soliton menggunakan persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I dalam bentuk tiga dimensi, dimana persamaan tersebut memiliki dua bentuk solusi gelombang. Solusi pertama berupa fungsi gelombang csch (persamaan (3.23)) menunjukkan adanya gelombang soliton (kink). Gelombang soliton divisualisasikan dengan kurva yang berwarna biru dongker (navy), dimana gelombang tersebut ketika berada pada jarak (x) yang berubah-ubah dan waktu (t) berubah, nilai potensial selalu berubah.

Hal ini menunjukkan bahwa gelombang soliton dan anti-soliton hanya bisa dicari menggunakan metode Frobenius yang melibatkan metode tanh, serta gelombang soliton dan anti-soliton hanya muncul pada kurva yang divisusialisasikan pada gambar 3.1, karena pada kurva tersebut menjelaskan bahwa stabilitas soliton berperan aktif. Ketika stabilitas soliton tidak berperan, maka gelombang soliton dan anti-soliton tidak akan ada.

BAB IV
PERSAMAAN KLEIN-GORDON NONLINEAR MODEL II

4.1 Metode Frobenius

Analisis yang dilakukan pada persamaan (2.22) atau persamaan Klein-Gordon model I menggunakan dua metode yakni metode Frobenius dan metode Sech. Kedua metode tersebut pada dasarnya sama-sama digunakan untuk memperoleh solusi dari persamaan diferensial biasa koefisien variabel. Namun pada kenyataannya, persamaan (2.22) yang dianalisis mengunakan metode sech tidak terdapat pasangan gelombang soliton dan gelombang anti-soliton saat fungsi persamaan gelombang divisualisasikan dalam program Matlab. Oleh karena itu, persamaan Klein-Gordon Nonlinear model II (persamaan (2.23)) hanya di analisis menggunakan metode Frobenius yang terdapat pada persamaan (2.32).

Untuk mendapatkan persamaan solusi gelombang soliton dan anti-soliton. Dilakukan pemisahan variabel gelombang $\xi = x - ct$ pada persamaan (2.23) yang dibuktikan dalam lampiran A dan diperoleh:

$$(c^2 - a^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \alpha\phi - \beta\phi^3 + \gamma\phi^5 = 0\,, \tag{4.1}$$

untuk menyeimbangkan antara fungsi $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ dengan ϕ^5 diberikan parameter M yang bernilai $M = \frac{1}{2}$, dan didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = U''\,, \tag{4.2}$$

$$\phi = U\,, \tag{4.3}$$

$$\psi^{\frac{1}{2}} = \nu^{\frac{1}{2}}\,, \tag{4.4}$$

Fungsi $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$ dan ϕ^5 diterapkan pada sistem transformasi $\phi = \psi^{\frac{1}{2}}$. Dengan definisi di persamaan (4.2), (4.3), dan persamaan (4.4), sehingga persamaan (4.1) akan menjadi

$$(c^2 - a^2)U'' + \alpha U - \beta U^3 + \gamma U^5 = 0\,, \tag{4.5}$$

dimana,

$$U = \nu^{\frac{1}{2}}\,, \tag{4.6}$$

$$U' = \frac{dU}{d\xi} = \frac{dU}{dv}\frac{dv}{d\xi}$$

$$= \frac{1}{2}\nu^{-\frac{1}{2}}\frac{dv}{d\xi}$$

$$= \frac{v'}{2\sqrt{v}} \tag{4.7}$$

$$U'' = \frac{d}{d\xi}\frac{dU}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{v'}{2\sqrt{v}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{dv^{-\frac{1}{2}}}{d\xi}v' + v^{-\frac{1}{2}}\frac{dv'}{d\xi}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{dv^{-\frac{1}{2}}}{d\xi}\frac{dv}{d\xi}v' + v^{-\frac{1}{2}}\frac{dv'}{d\xi}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}v^{-\frac{3}{2}}(v')^2 + v^{\frac{1}{2}}v^2\right)$$

$$= -\frac{1}{4}v^{-\frac{3}{2}}(v')^2 + \frac{1}{2}v''v^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{(v')^2}{4v^{\frac{3}{2}}} + \frac{v''}{2v^{\frac{1}{2}}} \tag{4.8}$$

Dengan menggunakan definisi perubahan variabel, didapatkan

$$U' = \frac{dU}{d\xi}\,,$$

$$\frac{dU}{dv}\frac{dv}{d\xi} = \frac{dU}{dv}\nu'\,,$$

$$\frac{d^2U}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi}\left[\frac{dU}{dv}v'\right], \qquad (4.9)$$

Sehingga menjadi

$$0 = (c^2 - a^2)\left(-\frac{(v')^2}{4v^{\frac{3}{2}}} + \frac{v''}{2v^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$0 = (c^2 - a^2)\left(-\frac{(v')^2}{4v^{\frac{3}{2}}}\right) + (c^2 - a^2)\frac{v''}{2v^{\frac{1}{2}}}$$

$$0 = -\frac{1}{4}(c^2 - a^2)(v')^2\frac{1}{v^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2}(c^2 - a^2)\frac{v''}{v^{\frac{1}{2}}} \qquad (4.10)$$

Persamaan (4.10) kemudian dikalikan $v^{\frac{3}{2}}$, sehingga

$$0 = -\frac{1}{4}(c^2 - a^2)(v')^2 + \frac{1}{2}(c^2 - a^2)vv'' \qquad (4.11)$$

Dengan menggunakan definisi di persamaan (4.8), persamaan (4.11) akan menjadi

$$\left\{-\frac{1}{4}(c^2 - a^2)(v')^2 + \frac{1}{2}(c^2 - a^2)vv''\right\} + \alpha v - \beta v^3 + \gamma v^5 = 0 \qquad (4.12)$$

Kemudian persamaan (4.12) dikalikan dengan 4

$$0 = \{-(c^2 - a^2)(v')^2 + 2(c^2 - a^2)vv''\} + 4\alpha v - 4\beta v^3 + 4\gamma v^5$$

$$0 = -(c^2 - a^2)(v')^2 + 2(c^2 - a^2)vv'' + 4\alpha v - 4\beta v^3 + 4\gamma v^5$$

$$0 = 2(c^2 - a^2)vv'' - (c^2 - a^2)(v')^2 + 4\alpha v - 4\beta v^3 + 4\gamma v^5 \qquad (4.13)$$

vv'' dengan v^5 harus seimbang, maka diperkenalkan faktor $M = 1$

$$v(x,t) = S(Y)$$

$$= \sum_{k=0}^{M=1} a_k Y^k$$

$$= a_0 Y^0 + a_1 Y^1$$

$$v(x,t) = a_0 + a_1 Y \qquad (4.14)$$

Persamaan (4.14) disubstitusikan ke dalam persamaan (4.13) dengan mengabaikan variabel Y, sehingga

$$0 = 2(c^2 - a^2)(a_0 + a_1) - (c^2 - a^2)(a_0 + a_1) + \alpha(c^2 - a^2)$$
$$-\beta(c^2 - a^2)^3 + \gamma(c^2 - a^2)^5$$

$$0 = 2(c^2a_0 + c^2a_1 - a^2a_0 - a^2a_1) - (c^2a_0 + c^2a_1 - a^2a_0 - a^2a_1) + \alpha a_0 + \alpha a_1 - \beta({a_0}^2 + 2a_0a_1 + {a_1}^2)(a_0 + a_1) + \gamma({a_0}^2 + 2a_0a_1 + {a_1}^2)(a_0 + a_1)^3$$

$$0 = 2c^2a_0 + 2c^2a_1 - 2a^2a_0 - 2a^2a_1 - c^2a_0 - c^2a_1 + a^2a_0 + a^2a_1 + \alpha a_0 + \alpha a_1 - \beta({a_0}^3 + {a_0}^2a_1 + 2{a_0}^2a_1 + 2a_0{a_1}^2 + {a_1}^2a_0 + {a_1}^3) + \gamma({a_0}^2 + 2a_0a_1 + {a_1}^2)({a_0}^3 + 3{a_0}^2a_1 + 3a_0{a_1}^2 + {a_1}^3)$$

$$0 = 2c^2a_0 + 2c^2a_1 - 2a^2a_0 - 2a^2a_1 - c^2a_0 - c^2a_1 + a^2a_0 + a^2a_1 + \alpha a_0 + \alpha a_1 - \beta{a_0}^3 - 3\beta{a_0}^2a_1 - 3\beta a_0{a_1}^2 - \beta{a_1}^3 + \gamma({a_0}^5 + 3{a_0}^4a_1 + 3{a_0}^3{a_1}^2 + {a_0}^2{a_1}^3 + 2{a_0}^4a_1 + 6{a_0}^3{a_1}^2 + 6{a_0}^2{a_1}^3 + 2a_0{a_1}^4 + {a_1}^2{a_0}^3 + 3{a_0}^2{a_1}^3 + 3a_0{a_1}^4 + {a_1}^5)$$

$$0 = c^2a_0 + c^2a_1 - a^2a_0 - a^2a_1 + \alpha a_0 + \alpha a_1 - \beta{a_0}^3 - 3\beta{a_0}^2a_1 - 3\beta a_0{a_1}^2 - \beta{a_1}^3 + \gamma\left({a_0}^5 + 5{a_0}^4a_1 + 10{a_0}^3{a_1}^2 + 10{a_0}^2{a_1}^3 + 5a_0{a_1}^4 + {a_1}^5\right)$$

$$0 = c^2a_0 + c^2a_1 - a^2a_0 - a^2a_1 + \alpha a_0 + \alpha a_1 - \beta{a_0}^3 - 3\beta{a_0}^2a_1 - 3\beta a_0{a_1}^2 - \beta{a_1}^3 + \gamma{a_0}^5 + 5\gamma{a_0}^4a_1 + 10\gamma{a_0}^3{a_1}^2 + 10\gamma{a_0}^2{a_1}^3 + 5\gamma a_0{a_1}^4 + \gamma{a_1}^5, \tag{4.15}$$

untuk mengetahui nilai konstanta a_0 dan a_1 pada variabel α dan β, maka diambil persamaan

$$\alpha a_0 + \alpha a_1 - \beta{a_0}^3 = 0\ , \tag{4.16a}$$

untuk mengetahui nilai konstanta a_0, maka didefinisikan bahwa $a_1 = a_0$, sehingga persamaan (4.16a) menjadi

$$2\alpha a_0 - \beta {a_0}^3 = 0$$

$$2\alpha = \beta {a_0}^2$$

$${a_0}^2 = \frac{2\alpha}{\beta}$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}, \tag{4.16b}$$

dan untuk mengetahui nilai konstanta a_1, maka didefinisikan bahwa $a_0 = a_1$, sehingga persamaan (4.16a) menjadi

$$2\alpha a_1 - \beta {a_1}^3 = 0$$

$$2\alpha = \beta {a_1}^2$$

$${a_1}^2 = \frac{2\alpha}{\beta}$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}} \tag{4.16c}$$

Didefinisikan bahwa $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial \gamma^2} - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma\partial\xi} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\right)$, maka persamaan (4.1) menjadi

$$0 = (c^2 - a^2)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial \gamma^2} - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma\partial\xi} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\right) + \alpha\phi - \beta\phi^3 + \gamma\phi^5 \tag{4.17}$$

$$0 = (c^2 - a^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + \alpha\phi - \beta\phi^3 + \gamma\phi^5 \tag{4.18}$$

$$-\alpha\phi = (c^2 - a^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} - \beta\phi^3 + \gamma\phi^5$$

$$-\frac{\alpha\phi}{(c^2 - a^2)} = \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} - \beta\phi^3 + \gamma\phi^5$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} = -\frac{\alpha\phi}{(c^2 - a^2)} + \beta\phi^3 - \gamma\phi^5 \tag{4.19}$$

Dengan menerapkan persamaan (2.32) didapatkan konstanta μ yang bernilai

$$\mu^2 = -\frac{\alpha}{(c^2 - a^2)}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\alpha}{(a^2-c^2)}}, \tag{4.20}$$

dimana $\frac{\alpha}{a^2-c^2} > 0$

Dari persamaan (4.16b), (4.16c) dan persamaan (4.20) didapatkan solusi

$$\phi(x,t) = a_0 + a_1 \tanh(\mu\xi), \tag{4.21}$$

dimana $\xi = x - ct$

Menginggat $U = v^{\frac{1}{2}}$, sehingga persamaan (4.21) menjadi

$$\phi(x,t) = \{a_0 + a_1 \tanh(\mu\xi)\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.22}$$

Sehingga solusi untuk gelombang soliton (kink) adalah

$$\phi(x,t) = \left\{\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}\left[1 + \tanh\left(\sqrt{\frac{\alpha}{(a^2-c^2)}}\ (x-ct)\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{4.23}$$

dan,

$$\phi(x,t) = \left\{\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}\left[1 + \coth\left(\sqrt{\frac{\alpha}{(a^2-c^2)}}\ (x-ct)\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{4.24}$$

Untuk solusi gelombang anti soliton (Anti-kink) ditandai dengan solusi kompleks dimana $\frac{\alpha}{a^2-c^2} < 0$, yakni

$$\phi(x,t) = \left\{\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}\left[1 + \mathrm{i}\tan\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{(a^2-c^2)}}\ (x-ct)\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{4.25}$$

dan,

$$\phi(x,t) = \left\{\sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}}\left[1 - \mathrm{i}\cot\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{(a^2-c^2)}}\ (x-ct)\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{4.26}$$

Dari persamaan (4.23) hingga persamaan (4.26) kurva tidak dapat dimodelkan menggunakan program Matlab yang memvisualisasikan fungsi gelombang soliton dan anti-soliton, karena terdapat nilai imajiner. Namun, hanya bisa menampilkan nilai variabel x, t dan v sebanyak dua puluh satu iterasi. Nilai variabel x, t dan v untuk persamaan (4.23) sebagai berikut:

N =

-10.0000	-0.5000	1.4142 - 8.6939i
-9.0000	-0.4500	1.4142 -19.5069i
-8.0000	-0.4000	1.4142 +65.4536i
-7.0000	-0.3500	1.4142 +11.5670i
-6.0000	-0.3000	1.4142 + 6.0630i
-5.0000	-0.2500	1.4142 + 3.9223i
-4.0000	-0.2000	1.4142 + 2.7476i
-3.0000	-0.1500	1.4142 + 1.9721i
-2.0000	-0.1000	1.4142 + 1.3840i
-1.0000	-0.0500	1.4142 + 0.8626i
0	-0.0000	1.4142
1.0000	0.0500	2.1196
2.0000	0.1000	2.3329
3.0000	0.1500	2.4596
4.0000	0.2000	2.5440
5.0000	0.2500	2.6036

6.0000	0.3000	2.6475
7.0000	0.3500	2.6807
8.0000	0.4000	2.7063
9.0000	0.4500	2.7265
10.0000	0.5000	2.7426

Nilai variabel x, t dan v untuk persamaan (4.24) sebagai berikut:

N =

1.0e+008 *

-0.0000	-0.0000	0.0000 + 0.0000i
-0.0000	-0.0000	0.0000 + 0.0000i
-0.0000	-0.0000	0.0000 - 0.0000i
-0.0000	-0.0000	0.0000 - 0.0000i
-0.0000	-0.0000	0.0000 - 0.0000i
-0.0000	-0.0000	0.0000 - 0.0000i
-0.0000	-0.0000	0.0000 - 0.0000i
-0.0000	-0.0000	0.0000 - 0.0000i
-0.0000	-0.0000	0.0000 - 0.0000i
-0.0000	-0.0000	0.0000 - 0.0000i
0	-0.0000	2.0793
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000

0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000

Nilai variabel x, t dan v untuk persamaan (4.25) sebagai berikut:

N =

1.0e+002 *

-0.1000	-0.0050	-0.0728
-0.0900	-0.0045	-0.3760
-0.0800	-0.0040	1.9778
-0.0700	-0.0035	0.4768
-0.0600	-0.0030	0.3173
-0.0500	-0.0025	0.2495
-0.0400	-0.0020	0.2065
-0.0300	-0.0015	0.1719
-0.0200	-0.0010	0.1387
-0.0100	-0.0005	0.1004
0	-0.0000	0.0141 + 0.0000i
0.0100	0.0005	0.0141 + 0.0847i
0.0200	0.0010	0.0141 + 0.1194i

0.0300	0.0015	0.0141 + 0.1464i
0.0400	0.0020	0.0141 + 0.1695i
0.0500	0.0025	0.0141 + 0.1903i
0.0600	0.0030	0.0141 + 0.2097i
0.0700	0.0035	0.0141 + 0.2280i
0.0800	0.0040	0.0141 + 0.2455i
0.0900	0.0045	0.0141 + 0.2625i
0.1000	0.0050	0.0141 + 0.2790i

Nilai variabel x, t dan v untuk persamaan (4.26) sebagai berikut:

N =

1.0e+009 *

-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000
0	-0.0000	0.0000 + 2.2872i
0.0000	0.0000	0.0000 + 0.0000i

0.0000	0.0000	0.0000 + 0.0000i
0.0000	0.0000	0.0000 + 0.0000i
0.0000	0.0000	0.0000 + 0.0000i
0.0000	0.0000	0.0000 + 0.0000i
0.0000	0.0000	0.0000 + 0.0000i
0.0000	0.0000	0.0000 + 0.0000i
0.0000	0.0000	0.0000 + 0.0000i
0.0000	0.0000	0.0000 + 0.0000i
0.0	0.0000	0.0000 + 0.0000i

4.2 Integrasi

Dari kurva-kurva yang memvisualisasikan adanya gelombang soliton dan anti-soliton dari persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I (persamaan (2.22)) menunjukkan bahwa gelombang soliton dan anti-soliton hanya bisa dicari menggunakan metode Frobenius yang melibatkan metode tanh, serta gelombang soliton dan anti-soliton hanya muncul pada kurva yang divisusialisasikan pada gambar 3.1, karena pada kurva tersebut menjelaskan bahwa stabilitas soliton berperan aktif. Ketika stabilitas soliton tidak berperan, maka gelombang soliton dan anti-soliton tidak akan ada. Pasangan gelombang soliton dan anti-soliton mengisyaratkan tentang adanya penciptaan pasangan. Hal ini dijelaskan dalam Surat Yaasinn (36): 36;

سُبْحَانَ الَّذِي خَلَقَ الْأَزْوَاجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنبِتُ الْأَرْضُ وَمِنْ أَنفُسِهِمْ وَمِمَّا لَا يَعْلَمُونَ

"Maha Suci Tuhan yang telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka maupun dari apa yang tidak mereka ketahui" (Q.S. Yaasinn (36): 36).

Maha Suci Allah Yang Maha Mulia. Maha Suci Allah Yang Maha Agung. Maha Suci Allah yang telah menciptakan aneka ragam pepohonan, buah-buahan, biji-bijian, dan manusia; pria dan wanita, serta semua makhluk. Juga bermacam benda yang tidak diketahui oleh manusia. Berhubung hanya Allah semata yang telah menciptakan itu semua maka hanya Allah yang berhak untuk disembah dan tidak disekutukan dengan sesuatu apapun (Al-Qarni, 2008).

Hal yang menarik dari ayat ini adalah nomor surat dan ayatnya sama yakni 36. Yang lebih menarik lagi adalah pemilihan bilangan 36 pada ayat ini. Dimana 36 adalah bilangan dua digit yang memiliki pasangan faktor bilangan bulat terbanyak. Jumlah pasangan faktornya sebanyak 5 pasang, yakni 1 dengan 36, 2 dengan 18, 3 dengan 12, 4 dengan 9, dan 6 dengan 6. Ini menunjukkan bahwa angka 36 muncul dari beberapa pasangan angka. Dari nomor ayat dan suratnya sudah mengisyaratkan tentang penciptaan pasangan.

Sementara ulama membatasi makna *Azwaj* yang berarti pasangan pada ayat ini, hanya pada makhluk hidup saja. Tim penulis tafsir Al Muntakhab misalnya menulis bahwa: "kata *Min* dalam ayat ini berfungsi sebagai penjelas. Yakni bahwa Allah telah menciptakan pejantan dan betina pada semua makhluk ciptaan-Nya, baik berupa tumbuh-tumbuhan, hewan, manusia dan makhluk hidup lainnya yang tak kasat mata dan belum diketahui manusia" (Shihab, 2003).

Azwaj berasal dari bahasa Arab yang artinya adalah istri-istri, bentuk plural (jamak) dari kata *zauj*. Dalam ensiklopedi bahasa karya Raghib al-Isfahani, kata *zauj* artinya pasangan yang bisa digunakan untuk benda seperti sepasang sepatu, untuk hewan seperti sepasang ayam (jantan dan betina), dan untuk manusia seperti suami dan istri (Zadah, 2005).

Tafsir untuk rangkaian kalimatnya adalah sebagai berikut: *subkhaanalladzii kholaqol azwaaja* ulama' berkata: *kullahaa mimmaa tunbitul ardhu* yakni jenis-jenis *semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi* biji-bijian dan lain sebagainya. *Wa min anfusihim dan dari diri mereka* berjenis laki-laki dan perempuan. *Wa mimmaa laa ya'lamuun yakni maupun dari apa yang tidak mereka ketahui* diantara makhluk-makhluk unik dan asing. *Subkhaana Maha Suci* selalu berada dalam keadaan *manshub* sebagai *maf'ul mathlaq* yang *fungsi*-nya wajib dihapus; aslinya adalah *tasbikhaallah*, dan *tasbikhaa* adalah *mashdar* dari *sabakha*. Jadi *fungsi*-nya dihapus, yakni kata kerja *sabakha*. Sedangkan *mashdar* dirubah menjadi *isim mashdar*, yakni *tasbikhaa* dirubah menjadi *subkhaana* yang diambil dari kalimat *subkhaa*, yakni berenang didalam laut. Jadi makna *attasbiikha* yang ada bagi *sabakhaanallah* adalah mensucikan Allah SWT dari segala sesuatu yang tidak layak bagi-Nya. Yang tidak layak bagi Allah ada dua pekara: *pertama*, kekurangan dalam sifat-sifat-Nya. *Kedua*, menyerupakan dengan makhluknya pada sifat-sifat tersebut. Bisa juga digolongkan yang kedua ini kepada yang pertama. Dengan arti lain dapat dikatakan bahwa penyerupaan dengan makhluk adalah kekurangan, karena menyamakan sesuatu yang sempurna dengan sesuatu yang kurang akan menjadikannya kurang pula (Muhammad, 2004).

Ciptaan Allah diatas muka bumi dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungannya yang mapan dan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Segalanya saling melengkapi antara satu sama lain. Q.S Al-Qomar (54): 49 menjelaskan bahwa:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ

"*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*" (Q.S Al-Qamar (54): 49).

Ayat diatas menjelaskan bahwa alam dan isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran, takaran, dan hitungan yang seimbang. Shihab (2003) menafsirkan bahwa kata *qadar* pada ayat di atas diperselisihkan oleh para ulama. Dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti *kadar* tertentu yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti kuasa. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka lebih tepat memahaminya dalam arti ketentuan dan system yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspeknya saja. Manusia misalnya, telah ada kadar yang ditetapkan Allah baginya.

Q.S Al-Furqaan (25):2 dijelaskan bahwa:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَاوَاتِ وَالأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ

فَقَدَّرَهُ تَقْدِيرًا

"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (Q.S Al-Furqaan (25):2).

Ayat diatas menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya, atau persamaannya. Ahli matematika atau fisik tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan, sehingga rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan oleh manusia itu sendiri melainkan sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa Matematika. Oleh karena itu, semua hasil perhitungan yang didapatkan dari hasil analisis sudah ditetapkan dengan menggunakan rumus-rumus yang ada.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

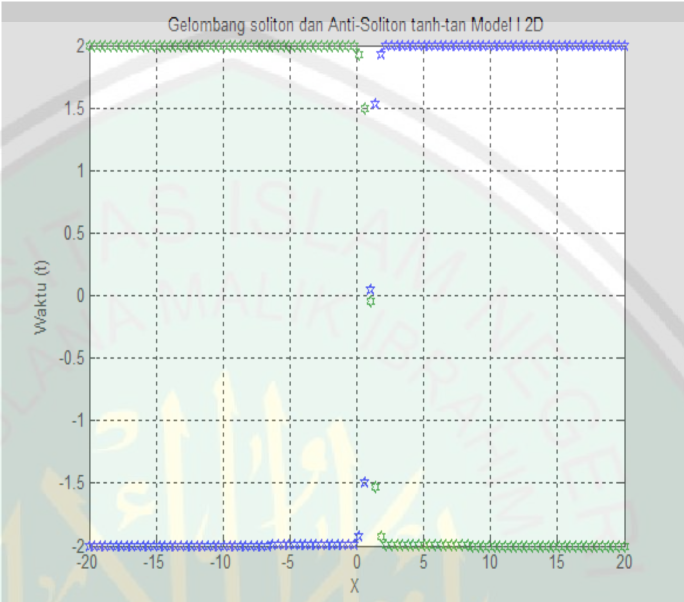
1. Dari analisis yang dilakukan, solusi persamaan Klein-Gordon Nonlinear berupa fungsi gelombang soliton dan fungsi gelombang anti-soliton akan lebih baik dianalisis menggunakan metode Tanh dibandingkan metode Sech, solusi untuk gelombang soliton (kink) adalah

$$\phi(x,t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\tanh\left(\sqrt{\frac{\alpha}{2(c^2-a^2)}}\,(x-ct)\right), \qquad (3.11)$$

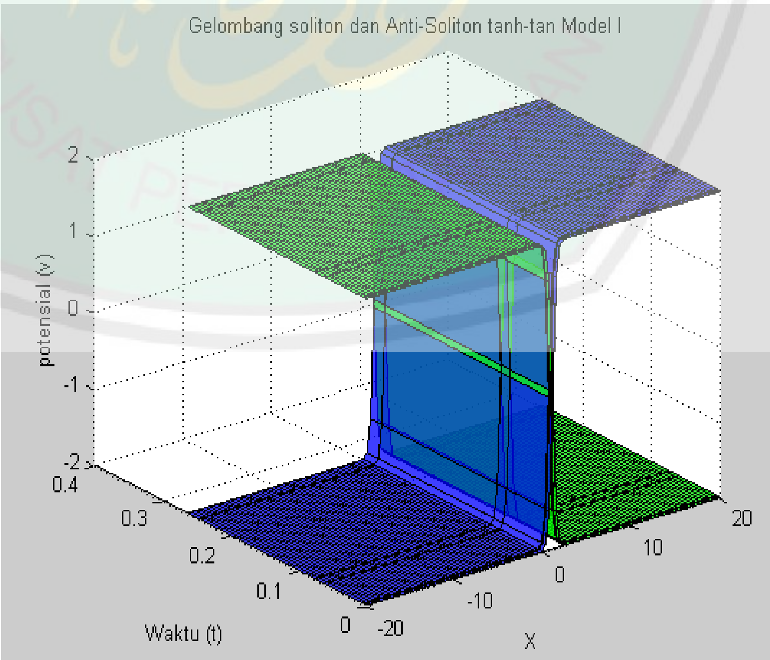
   untuk solusi gelombang anti soliton (Anti-kink) ditandai dengan solusi kompleks dimana $\frac{\alpha}{c^2-a^2} < 0$, yakni

$$\phi(x,t) = i\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\tan\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{2(c^2-a^2)}}\,(x-ct)\right), \qquad (3.13)$$

2. Hasil visualisasi persamaan gelombang soliton menggunakan persamaan Klein-Gordon Nonlinear berupa kurva 2D dan kurva 3D, visualisasi untuk kurva 2D adalah



Visualisasi untuk kurva 3D adalah



5.2 Saran

Penelitian ini merupakan awal atau pondasi dasar untuk melakukan penelitian selanjutnya sampai tahap pengembangan dalam bidang teknologi komunikasi yang kaitannya dengan kabel fiber optik.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Maraghi, A. M. 1993. *Tafsir Al-Maraghi*. Semarang: CV. TOHA PUTRA.

Bellazzini, J, dkk. 2016. *Solitons for the Nonlinear Klein-Gordon Equation*. ArXiv:0712.1103v1 [math.Ap] 7 Dec 2007.

Bustami, A. G. dkk. 1991. *Al-Quran Dan Tafsirnya*. Yogyakarta: PT. Dana Bhakti Wakaf.

Boussinesq, J. 1871. *Hydrodunamique-Theorie de I'inlumescence Liquid Appelee Onde Solitaire ou de Translation, se Propageant Dansun Canal Rectangulaire (dalam Bahasa Prancis)*.Informa UK Limited. 27: 755.

Departemen Agama RI. 2015. *Al-Qur'an dan Terjemahan.* Bandung: Diponegoro.

Djayadi. 2008. *Alam Semesta Bertawaf*. Yogyakarta: Lingkaran.

Drazin, P. G dan Johnson, R. S. 1989. *Solitons: an Introduction*. Inggris: Cambridge University Press.

Fermi, J, Pasta, R dan Ulam, S. M. 1955. *Technical Report LA-1940*. Los Alamos: Sci. Lab.

Hadi, Miftachul. 2005. http://www.fisika.lipi.go.id/webfisika/content/soliton-nan-cantik-dan-eksotik, diakses 4 Januari 2019.

Hadi, Miftachul. 2008. *Pengantar Soliton*. Tangerang: Pusat Penelitian Fisika LIPI.

Hadi, Miftachul dan Wospakrik, Hans Jacobus. 2010. *SU (2) Skyrme Model for Hadron*. ArXiv:1007.0888v1 [hep-ph] 6 Jul 2010.

Humaidi, Syahrul, dkk. 2016. *Analisis dan Visualisasi Persamaan Klein-Gordon pada Elektron dalam Sumur Potensial dengan Menggunakan Program Mathematic 10*. SNF 2016-TPN-19, Vol. 5.

Katsir, I. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir*, *jilid 6*. Terjemahan M. Abdul Ghoffar E. M. dan Abu Ihsan Al-Atsari. Bogor: Pustaka Imam Syafi'i.

Khoiruddin. 2009. http://khoiruddin.blog.uns.ac.id/2009/09/08/berkenalan-dengan-soliton, diakses 6 Januari 2019.

Komaruddin. 2017. *Studi Quark-AntiQuark (Meson) dengan Pendekatan Integral Lintas Feynman-Schwinger*. *Skripsi* Tidak Diterbitkan. Malang. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Muhammad, Bin Shalih al-Utsaimin. 2004. *Tafsir Surat Yasin: Menyelami Lebih Dalam Kandungan dan Faedah Surat Yasin (terjemahan)*. Bogor: Darul Ilmi Publishing.

Nagy, Gabriel. 2012. *Ordinary Differential Equations.* Michigan State University: Mathematics Department.

Nainggolan, R. D. 2012. *Penerapan Persamaan Klein-Gordon untuk Menentukan Tingkat Energi Atom Pion. Skripsi* Tidak Diterbitkan. Medan: Universitas Sumatra Utara.

Nurjannah, Ismail. 2003. *Perempuan dalam Pasungan Bias Laki-Laki dalam Penafsiran*. Yogyakarta: LkiS

Pasquali, S. 2018. *Dynamics of the Nonlinear Klein-Gordon Equation in the Nonrelativistic Limit, II*. ArXiv:1712.03768v3 [math.Ap] 12 Oct 2018.

Purwanto, Agus. 2008. Ayat-Ayat Semesta Sisi-Sisi Al-Quran Yang Terlupakan. Bandung: Mizan.

Polyanin AD dan Zaitsev VE. 2004. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.

Qarni, Aidh. 2008. *Tafsir Muyassar*. Jakarta: Qisthi Press.

Rahmayani, Hanifah, dkk. 2014. *Perhitungan Tingkat Energi Sumur Potensial Keadaan Terikat Melalui Persamaan Schrodinger Menggunakan Metode Beda Hingga*. PILLAR OF PHYSICS, Vol. 1

Rayleigh, JW. 1876. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science.* Informa UK Limited. 1 (4): 257-279. Doi: 10.1080/14786447608639037. ISSN 1941-5982.

Ryder, L.H. 1985. *Quantum Field Theory 1sted*. Cambridge: Univ. Of Cambridge.

Saadatmand, Danial dan Javidan, Kurosh. 2017. *Soliton-Potential Interaction in the Nonlinear Klein-Gordon Model*. ArXiv: 1107.1340v4 [nlin. PS] 13 Jan 2012.

Shihab, M. Quraish. 2003. *Tafsir Al-Mishbah Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Quran.* Jakarta: Lentera Hati.

Sugiyono, Vani. 2016. *Mekanika Kuantum "Indra Keenam untuk Menjelajahi Dunia Atom yang Tak Kasat Mata*.Yogyakarta: CAPS (*Center for Academic Publishing Service*).

Sutopo. 2005. *Pengantar Fisika Kuantum.* Malang: UM PRESS.

Wazwaz, Abdul Majid. 2005. *Compacton, Solitons and Periodic Solutions for Some Forms of Nonlinear Klein-Gordon Equations*. ELSEVIER: Chaos, Solitons and Fractals 28 (2006) 1005-1013.

Zabusky, N. J dan Kruskal, M. D. 1965. *Interaksi Soliton dalam Plasma Tanpa Tabrakan dan Perulangan Status Awal.* Surat Tinjauan Fisik: Masyarakat Fisik Amerika. 15 (6): 240-243. Bibcode: 1965PhRvL.. 15..240Z. doi: 10.1103/physrevlett.15.240. ISSN 0031-9007.

Zadah, Khamami. 2005. *Tafsir Surat Yaasinn. Yogyakarta:* Pustaka Pesantren (LKiS).

LAMPIRAN A
PEMBUKTIAN PERSAMAAN

PERSAMAAN 3.2

$\xi = x - ct$ dan $\gamma = x + ct$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\gamma}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial\gamma} + \frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}$$

$$= c\left(\frac{\partial\phi}{\partial\gamma} - \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right) \quad (0.1)$$

dan,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\gamma}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial\gamma} + \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial\gamma} + \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \quad (0.2)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\gamma} + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\gamma} + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\gamma} + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial\xi} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} \quad (0.3)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\gamma} - \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)$$

$$= c\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\gamma} - \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\gamma}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\gamma} - \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\xi}{\partial t}$$

$$= c^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma^2} - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma\partial\xi} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\right) \quad (0.4)$$

Persamaan (0.3) dan persamaan (0.4) disubstitusikan ke dalam persamaan Klein-Gordon Nonlinear model pertama

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \alpha\phi - \beta\phi^3 = 0$$

$$c^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma^2} - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma\partial\xi} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\right) - a^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial\xi} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\right) + \alpha\phi - \beta\phi^3 = 0$$

$$(c^2 - a^2)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma^2} - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma\partial\xi} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\right) + \alpha\phi - \beta\phi^3 = 0$$

dimana $\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma^2} - 2\frac{\partial^2\phi}{\partial\gamma\partial\xi} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2}\right)$ merupakan definisi dari $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$, sehingga

$$(c^2 - a^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \alpha\phi - \beta\phi^3 = 0 \tag{0.5}$$

PERSAMAAN 4.1

$\xi = x - ct$ dan $\eta = x + ct$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial\eta} + \frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}$$

$$= c\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta} - \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right) \tag{0.6}$$

dan,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial\eta} + \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial\eta} + \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \tag{0.7}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta} + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta} + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta} + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial\xi} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} \tag{0.8}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta} - \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)$$

$$= c\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t}$$

$$= c^2\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2}\right) \qquad (0.9)$$

Persamaan (0.8) dan persamaan (0.9) disubstitusikan ke dalam persamaan Klein-Gordon Nonlinear model kedua

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \alpha\phi - \beta\phi^3 + \gamma\phi^5 = 0$$

$$c^2\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2}\right) - a^2\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2}\right) + \alpha\phi - \beta\phi^3 + \gamma\phi^5 = 0$$

$$(c^2 - a^2)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2}\right) + \alpha\phi - \beta\phi^3 + \gamma\phi^5 = 0$$

dimana $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2}\right)$ merupakan definisi dari $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$, sehingga

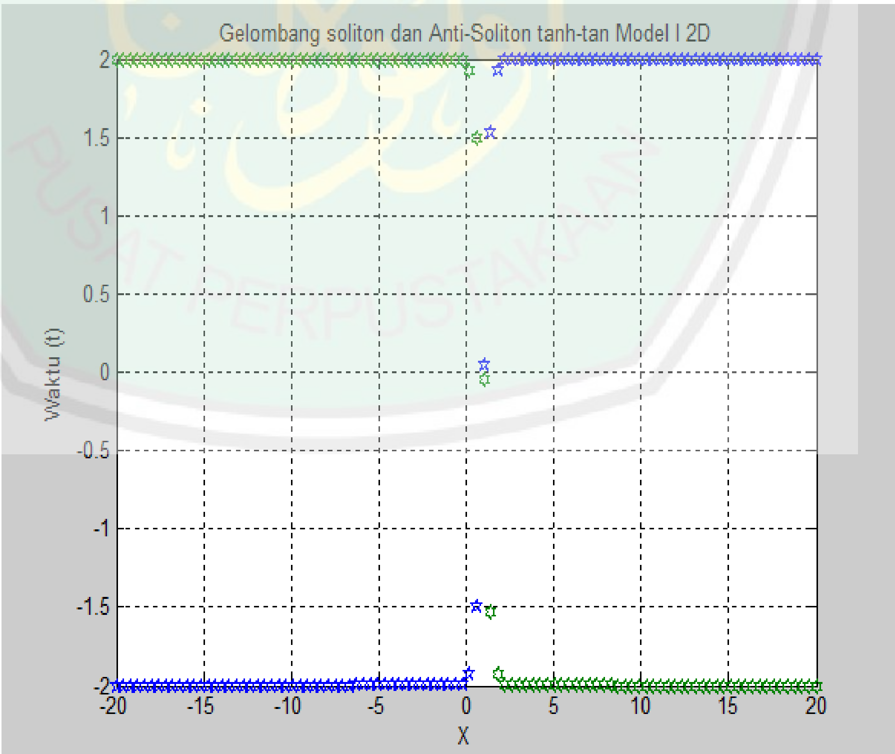
$$(c^2 - a^2)\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \alpha\phi - \beta\phi^3 + \gamma\phi^5 = 0 \qquad (0.10)$$

LAMPIRAN B

Script untuk Pemodelan Gelombang Soliton dan Gelombang Anti-Soliton

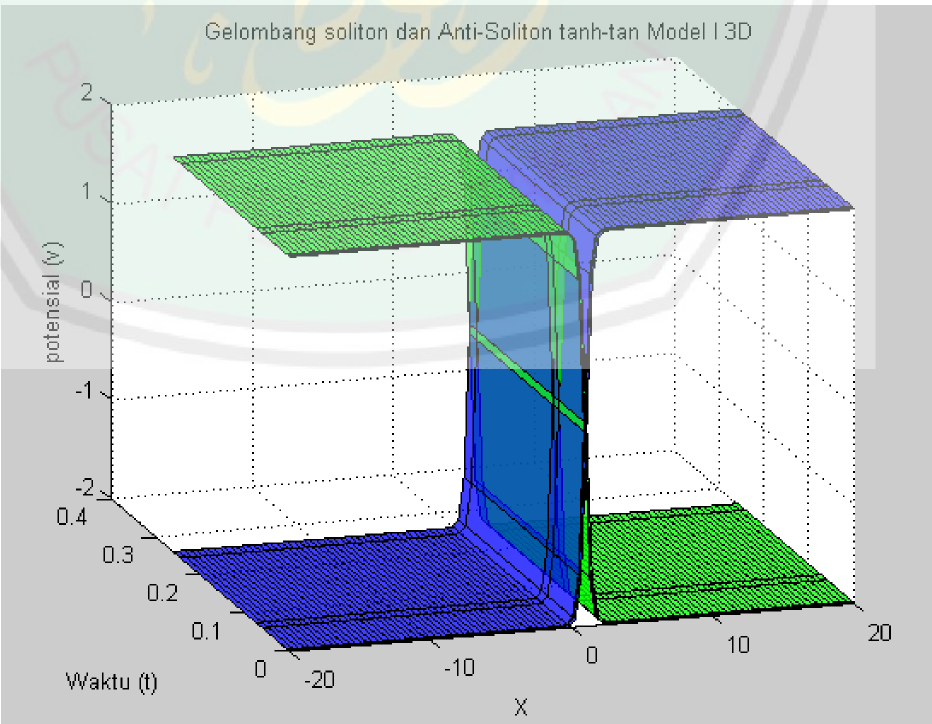
1. Script gelombang soliton dan anti-soliton dari persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I dengan solusi tan dan tanh 2D.

```
x = linspace (-20,20);
n = 4;                  %n = alfa
m = 1;                  %m = beta
c = 2;
a = 1;
t = 0.5;
w = sqrt(n/m);
k = sqrt(n/2*(c^2-a^2));
e = x-c*t;
y = w*tanh(k*e);
s = sqrt(n/-2*(c^2-a^2));
f = i*w*tan(s*e);
plot (x,y,'p',x,f,'h')
grid on
hold on
title ('Gelombang soliton dan Anti-Soliton tanh-tan Model I 2D');
xlabel('X')
ylabel('Waktu (t)')
```



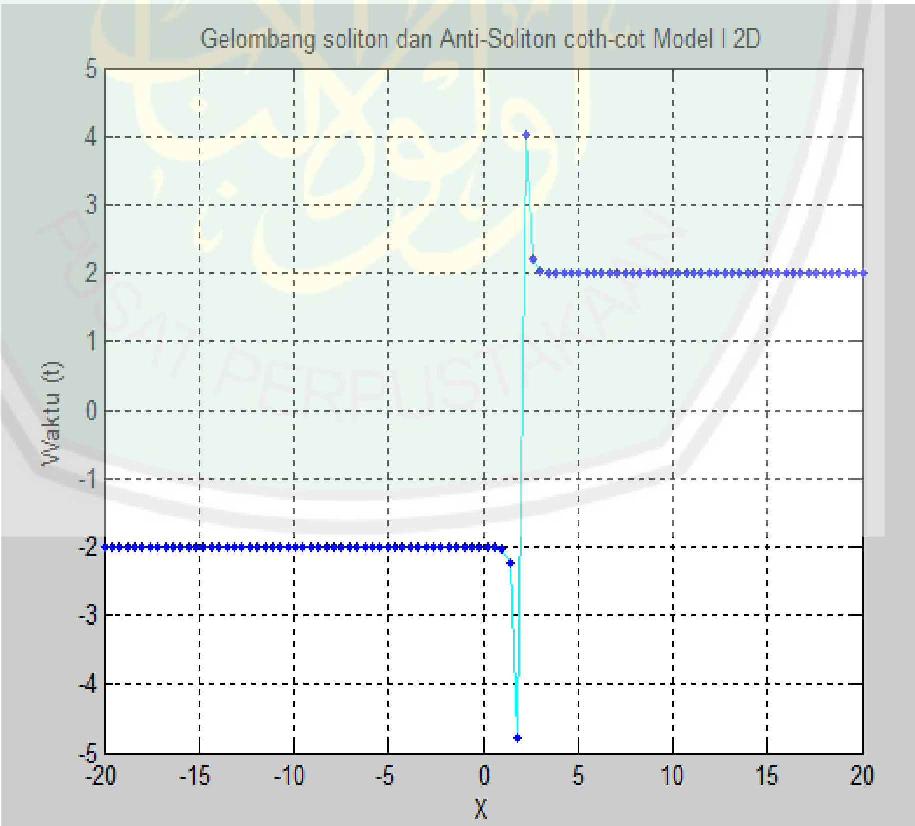
2. Script gelombang soliton dan anti-soliton dari persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I dengan solusi tan dan tanh 3D.

```
x = linspace(-20,20);
y = linspace(-0.5,0.5);
n = 4;                  %n = alfa
m = 1;                  %m = beta
c = 2;
a = 1;
t = 0.5;
w = sqrt(n/m);
k = sqrt(n/2*(c^2-a^2));
e = x-c*t;
p = w*tanh(k*e);
s = sqrt(n/-2*(c^2-a^2));
f = i*w*tan(s*e);
pp=meshgrid(p);
ff=meshgrid(f);
xx=meshgrid(x);
a = 0.3;
b = 4;
c = 2;
z = a.*exp(-b.*(x-c).^2);
zz = meshgrid(z);
figure
s1 = surf(x,z,pp);
set(s1,'FaceColor',[0 0 1],'FaceAlpha',0.5);
hold on
s2 = surf(x,z,ff);
set(s2,'FaceColor',[0 1 0],'FaceAlpha',0.5);
hold off
title ('Gelombang soliton dan Anti-Soliton tanh-tan Model I 3D')
xlabel('X')
ylabel('Waktu (t)')
Zlabel('potensial (v)')
```



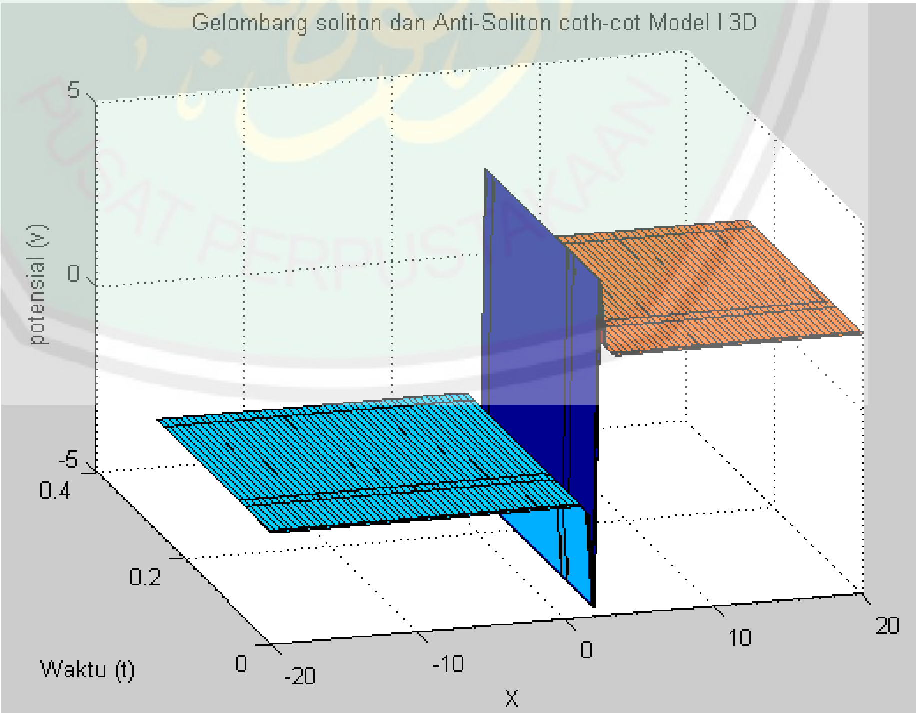
3. Script gelombang soliton dan anti-soliton dari persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I dengan solusi cot dan coth 2D.

```
x = linspace (-20,20);
n = 4;              %n = alfa
m = 1;              %m = beta
c = 2;
a = 1;
t = 1;
w = sqrt(n/m);
k = sqrt(n/2*(c^2-a^2));
e = x-c*t;
y = w*coth(k*e);
s = sqrt(n/-2*(c^2-a^2));
f = i*w*cot(s*e);
plot (x,y,'-c',x,f,'.')
grid on
hold on
title ('Gelombang soliton dan Anti-Soliton coth-cot Model I 2D');
xlabel('X')
ylabel('Waktu (t)')
```



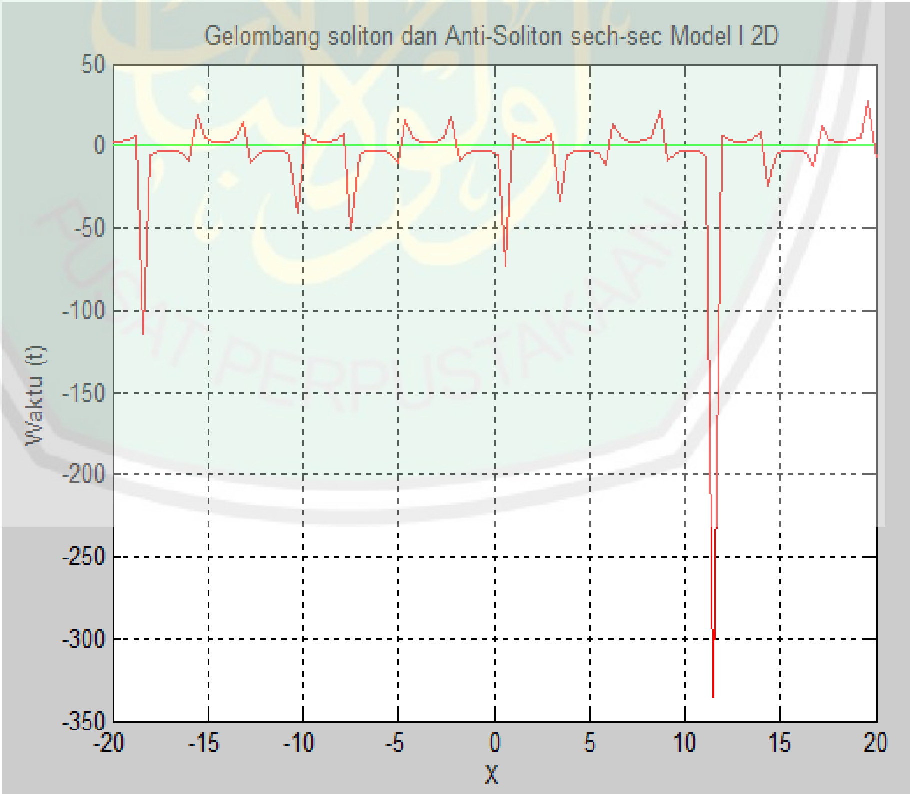
4. Script gelombang soliton dan anti-soliton dari persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I dengan solusi cot dan coth 3D.

```
x = linspace(-20,20);
ya = linspace(-20,20);
n = 4;              %n = alfa
m = 1;              %m = beta
c = 2;
a = 1;
t = 1;
w = sqrt(n/m);
k = sqrt(n/2*(c^2-a^2));
e = x-c*t;
y = w*coth(k*e);
s = sqrt(n/-2*(c^2-a^2));
f = i*w*cot(s*e);
%plot (x,y);
yyy = meshgrid (y);
xxx = meshgrid (x);
yya = meshgrid (ya);
%[xx,yy]=meshgrid(x,y);
a = 0.3;
b = 4;
c = 2;
z = a.*exp(-b.*(x-c).^2);
%surf(xx,ya,yyy)
surf (xxx,z,yyy)
title ('Gelombang soliton dan Anti-Soliton coth-cot Model I 3D');
xlabel('X')
ylabel('Waktu (t)')
Zlabel('potensial (v)')
```



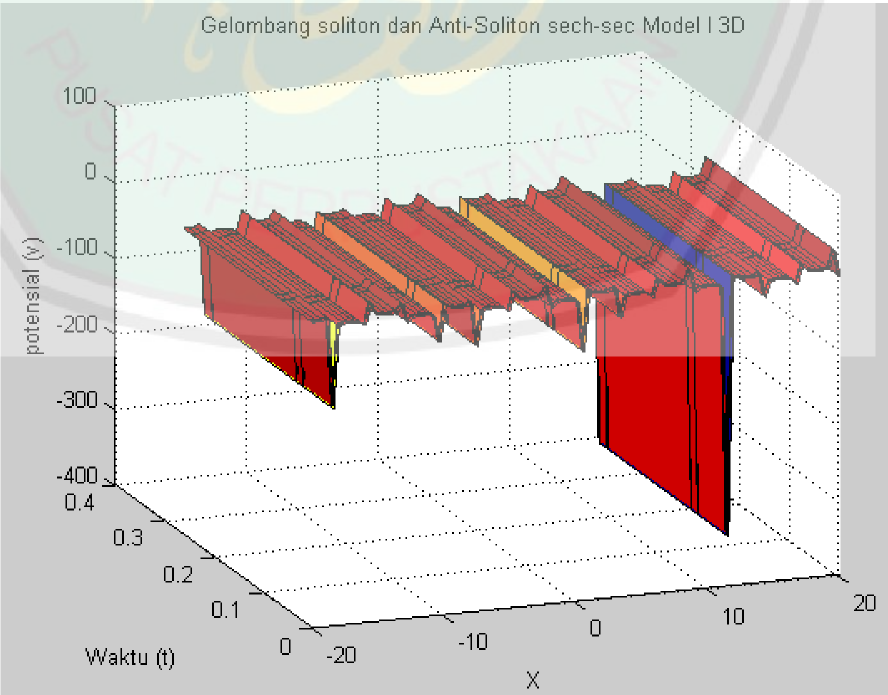
5. Script gelombang soliton dan anti-soliton dari persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I dengan solusi sec dan sech

```
x = linspace (-20,20);
n = 4;              %n = alfa
m = 1;              %m = beta
c = 2;
a = 1;
t = 1;
k = sqrt(n/(-a^2+c^2));
e = x-c*t;
v = sqrt ((2*n)/m);
h = sec (k*e);
q = v*h;
g = sqrt ((-2*n)/m);
o = sqrt (n/(a^2-c^2));
L = (sech (o*e));
f = g*L;
plot (x,f,'-g',x,q,'-r')
grid on
hold on
title ('Gelombang soliton dan Anti-Soliton sech-sec Model I 2D');
xlabel('X')
ylabel('Waktu (t)')
```



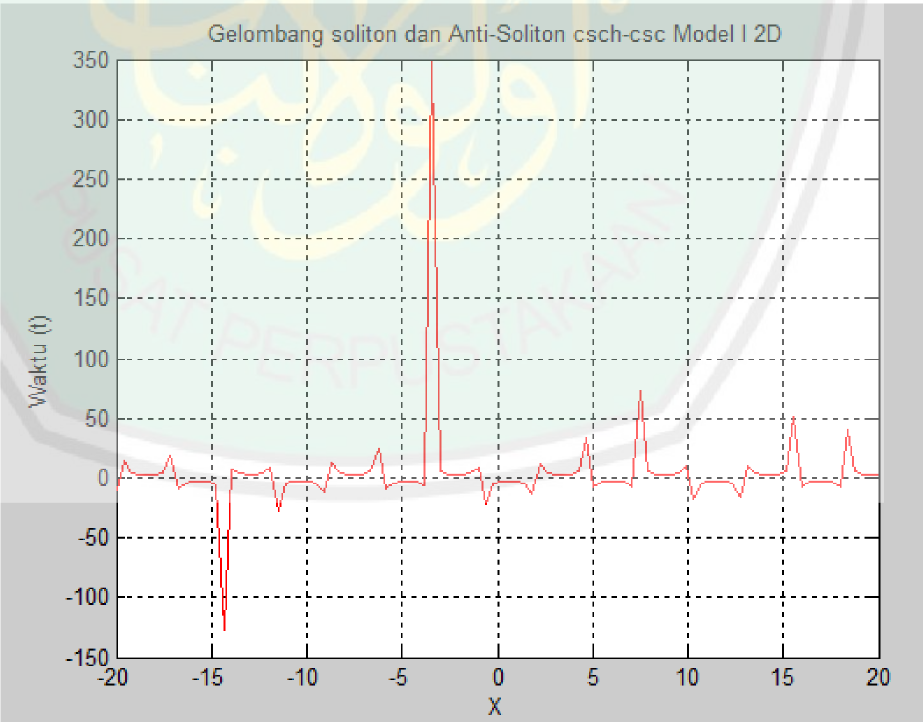
6. Script gelombang soliton dan anti-soliton dari persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I dengan solusi sec dan sech 3D.

```
x = linspace (-20,20);
ya = linspace(-20,20);
n = 4;                  %n = alfa
m = 1;                  %m = beta
c = 2;
a = 1;
t = 1;
k = sqrt(n/(-a^2+c^2));
e = x-c*t;
v = sqrt ((2*n)/m);
h = sec (k*e);
y = v*h;
g = sqrt ((-2*n)/m);
o = sqrt (n/(a^2-c^2));
L = (sech (o*e));
f = g*L;
%plot (x,y);
yyy = meshgrid (y);
xxx = meshgrid (x);
yya = meshgrid (ya);
%[xx,yy]=meshgrid(x,y);
a = 0.3;
b = 4;
c = 2;
z = a.*exp(-b.*(x-c).^2);
%surf(xx,ya,yyy)
surf (xxx,z,yyy)
title ('Gelombang soliton dan Anti-Soliton sech-sec Model I 3D')
xlabel('X')
ylabel('Waktu (t)')
Zlabel('potensial (v)')
```



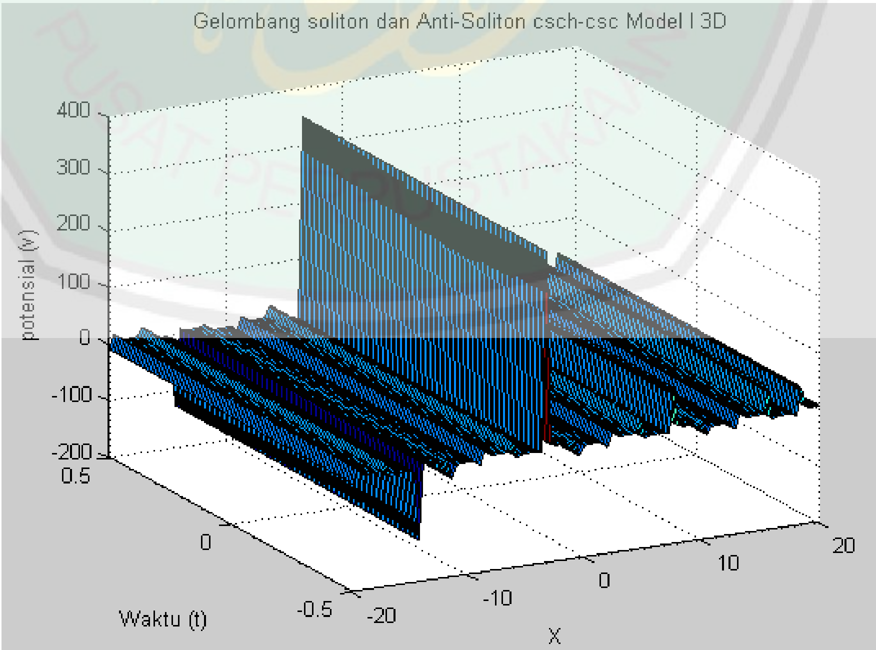
7. Script gelombang soliton dan anti-soliton dari persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I dengan solusi csc dan csch 2D.

```
x = linspace (-20,20);
n = 4;              %n = alfa
m = 1;              %m = beta
c = 2;
a = 1;
t = 1;
k = sqrt(n/(-a^2+c^2));
e = x-c*t;
v = sqrt ((2*n)/m);
h = sin (k*e);
s = 1./h;
q = v*s;
g = sqrt ((-2*n)/m);
o = sqrt (n/(a^2-c^2));
L = sinh (o*e);
r = 1./L;
f = g*r;
plot (x,f,'-g',x,q,'-r')
grid on
hold on
title ('Gelombang soliton dan Anti-Soliton csch-csc Model I 2D');
xlabel('X')
ylabel('Waktu (t)')
```



8. Script gelombang soliton dan anti-soliton dari persamaan Klein-Gordon Nonlinear model I dengan solusi csc dan csch 3D.

```
x = linspace (-20,20);
y = linspace(-0.5,0.5);
n = 4;              %n = alfa
m = 1;              %m = beta
c = 2;
a = 1;
t = 1;
k = sqrt(n/(-a^2+c^2));
e = x-c*t;
v = sqrt ((2*n)/m);
h = sin (k*e);
s = 1./h;
q = v*s;
g = sqrt ((-2*n)/m);
o = sqrt (n/(a^2-c^2));
L = sinh (o*e);
r = 1./L;
f = g*r;
[xx,yy]=meshgrid(x,y);
qq=meshgrid(q);
ff=meshgrid(f);
a = 0.3;
b = 4;
c = 2;
z = a.*exp(-b.*(xx-c).^2);
surf(x,y,qq)
hold on
surf(x,y,ff)
hold off
title ('Gelombang soliton dan Anti-Soliton csch-csc Model I 3D')
xlabel('X')
ylabel('Waktu (t)')
zlabel('potensial (v)')
```



LAMPIRAN C

Script untuk Nilai x, t, dan v Gelombang Soliton dan Gelombang Anti-Soliton pada Persamaan Klein-Gordon Nonlinear Model II

1. Script nilai x, t, dan v gelombang soliton dari persamaan (4.23).

```
a = 4;
b = 1;
c = 2;
n = 21;
N= [];
x = -10;
t = -0.5;
for i=1:n
v = (sqrt(2*a/b)*(1+tanh(sqrt(a/(a^2-c^2)*(x-c*t)))))^1/2;
N = [N;x t v];
x = x + 1;
t = t + 0.05;
end
N
```

N =

-10.0000	-0.5000	1.4142 - 8.6939i
-9.0000	-0.4500	1.4142 -19.5069i
-8.0000	-0.4000	1.4142 +65.4536i
-7.0000	-0.3500	1.4142 +11.5670i
-6.0000	-0.3000	1.4142 + 6.0630i
-5.0000	-0.2500	1.4142 + 3.9223i
-4.0000	-0.2000	1.4142 + 2.7476i
-3.0000	-0.1500	1.4142 + 1.9721i
-2.0000	-0.1000	1.4142 + 1.3840i
-1.0000	-0.0500	1.4142 + 0.8626i
0	-0.0000	1.4142
1.0000	0.0500	2.1196
2.0000	0.1000	2.3329
3.0000	0.1500	2.4596
4.0000	0.2000	2.5440
5.0000	0.2500	2.6036
6.0000	0.3000	2.6475
7.0000	0.3500	2.6807
8.0000	0.4000	2.7063
9.0000	0.4500	2.7265
10.0000	0.5000	2.7426

2. Script nilai x, t, dan v gelombang soliton dari persamaan (4.24).

```
a = 4;
b = 1;
c = 2;
n = 21;
N= [];
x = -10;
t = -0.5;
for i=1:n
v = (sqrt(2*a/b)*(1+coth(sqrt(a/(a^2-c^2)*(x-c*t)))))^1/2;
N = [N;x t v];
x = x + 1;
t = t + 0.05;
end
N
```

```
N =

  1.0e+008 *

  -0.0000            -0.0000            0.0000 + 0.0000i
  -0.0000            -0.0000            0.0000 + 0.0000i
  -0.0000            -0.0000            0.0000 - 0.0000i
  -0.0000            -0.0000            0.0000 - 0.0000i
  -0.0000            -0.0000            0.0000 - 0.0000i
  -0.0000            -0.0000            0.0000 - 0.0000i
  -0.0000            -0.0000            0.0000 - 0.0000i
  -0.0000            -0.0000            0.0000 - 0.0000i
  -0.0000            -0.0000            0.0000 - 0.0000i
  -0.0000            -0.0000            0.0000 - 0.0000i
        0            -0.0000            2.0793
   0.0000             0.0000            0.0000
   0.0000             0.0000            0.0000
   0.0000             0.0000            0.0000
   0.0000             0.0000            0.0000
   0.0000             0.0000            0.0000
   0.0000             0.0000            0.0000
   0.0000             0.0000            0.0000
   0.0000             0.0000            0.0000
   0.0000             0.0000            0.0000
   0.0000             0.0000            0.0000
```

3. Script nilai $x, t,$ dan v gelombang soliton dari persamaan (4.25).

```
a = 4;
b = 1;
c = 2;
n = 21;
N= [];
x = -10;
t = -0.5;
for i=1:n
v = (sqrt(2*a/b)*(1+i*tan(sqrt(-a/(a^2-c^2)*(x-c*t)))))^1/2;
N = [N;x t v];
x = x + 1;
t = t + 0.05;
end
N
```

```
N =

  1.0e+002 *

  -0.1000        -0.0050        -0.0728
  -0.0900        -0.0045        -0.3760
  -0.0800        -0.0040         1.9778
  -0.0700        -0.0035         0.4768
  -0.0600        -0.0030         0.3173
  -0.0500        -0.0025         0.2495
  -0.0400        -0.0020         0.2065
  -0.0300        -0.0015         0.1719
  -0.0200        -0.0010         0.1387
  -0.0100        -0.0005         0.1004
        0        -0.0000         0.0141 + 0.0000i
   0.0100         0.0005         0.0141 + 0.0847i
   0.0200         0.0010         0.0141 + 0.1194i
   0.0300         0.0015         0.0141 + 0.1464i
   0.0400         0.0020         0.0141 + 0.1695i
   0.0500         0.0025         0.0141 + 0.1903i
   0.0600         0.0030         0.0141 + 0.2097i
   0.0700         0.0035         0.0141 + 0.2280i
   0.0800         0.0040         0.0141 + 0.2455i
   0.0900         0.0045         0.0141 + 0.2625i
   0.1000         0.0050         0.0141 + 0.2790i
```

4. Script nilai $x, t,$ dan v gelombang soliton dari persamaan (4.26).

```
a = 4;
b = 1;
c = 2;
n = 21;
N= [];
x = -10;
t = -0.5;
for i=1:n
v = (sqrt(2*a/b)*(1-i*cot(sqrt(-a/(a^2-c^2)*(x-c*t)))))^1/2;
N = [N;x t v];
x = x + 1;
t = t + 0.05;
end
N
```

```
N =

  1.0e+009 *

  -0.0000            -0.0000             0.0000
  -0.0000            -0.0000             0.0000
  -0.0000            -0.0000             0.0000
  -0.0000            -0.0000             0.0000
  -0.0000            -0.0000            -0.0000
  -0.0000            -0.0000            -0.0000
  -0.0000            -0.0000            -0.0000
  -0.0000            -0.0000            -0.0000
  -0.0000            -0.0000            -0.0000
  -0.0000            -0.0000            -0.0000
        0            -0.0000             0.0000 + 2.2872i
   0.0000             0.0000             0.0000 + 0.0000i
   0.0000             0.0000             0.0000 + 0.0000i
   0.0000             0.0000             0.0000 + 0.0000i
   0.0000             0.0000             0.0000 + 0.0000i
   0.0000             0.0000             0.0000 + 0.0000i
   0.0000             0.0000             0.0000 + 0.0000i
   0.0000             0.0000             0.0000 + 0.0000i
   0.0000             0.0000             0.0000 + 0.0000i
   0.0000             0.0000             0.0000 + 0.0000i
   0.0000             0.0000             0.0000 + 0.0000i
```

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Maratus Sholikah**
NIM : **15640005**
Fakultas/ Jurusan : **Sains dan Teknologi/ Fisika**
Judul Skripsi : **Analisis Gelombang Soliton Menggunakan Persamaan Klein-Gordon Nonlinear**
Pembimbing I : **Erika Rani, M.Si**
Pembimbing II : **Ahmad Abthoki, M.Pd.**

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	17 Mei 2019	Konsultasi Bab I, dan II	
2	19 Juli 2019	Konsultasi Bab I, dan II	
3	22 Juli 2019	Konsultasi Bab I, dan II	
4	25 Juli 2019	Konsultasi Bab I, II dan III	
5	30 Juli 2019	Konsultasi Bab I, II, III dan ACC	
6	07 Agustus 2019	Konsultasi Bab IV dan V	
7	29 Agustus 2019	Konsultasi Bab IV dan V	
8	15 September 2019	Konsultasi Kajian Agama Bab I, dan IV	
9	23 Oktober 2019	Konsultasi bab 1V, V dan ACC	
10	25 November 2019	Konsultasi Kajian Agama Bab I, IV dan ACC	

Malang, 27 November 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Fisika,

Drs. Abdul Basid, M.Si
NIP. 19650504 199003 1 003