

**STUDI PERSAMAAN KLEIN GORDON
PADA SUMUR POTENSIAL TAK TERHINGGA
DENGAN DINDING BERGERAK**

SKRIPSI

Oleh:

RUBY MAULANA PUTRA

NIM. 13640060



**JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK
IBRAHIM MALANG
2019**

HALAMAN PENGAJUAN

**STUDI PERSAMAAN KLEIN GORDON
PADA SUMUR POTENSIAL TAK TERHINGGA
DENGAN DINDING BERGERAK**

SKRIPSI

Diajukan kepada:

**Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

Oleh:

**RUBY MAULANA PUTRA
NIM. 13640060**

**JURUSAN FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019**

HALAMAN PERSETUJUAN

STUDI PERSAMAAN KLEIN GORDON PADA SUMUR POTENSIAL TAK TERHINGGA DENGAN DINDING BERGERAK

SKRIPSI

Oleh:

Ruby Maulana Putra
NIM. 13640060

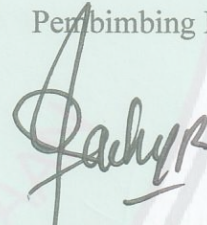
Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Pada tanggal 13 Desember 2019

Pembimbing I



Erika Rani, M.Si
NIP. 19810613 200604 2 002

Pembimbing II



Ahmad Abtokhi, M. Pd
NIP. 19761003 200312 1 004

Mengetahui

Ketua Jurusan Fisika



Drs. Abdul Basid, M. Si
NIP. 19650504 199003 1 003

HALAMAN PENGESAHAN

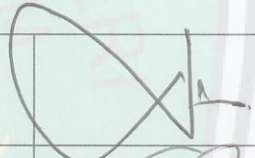
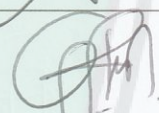
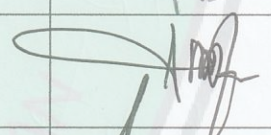
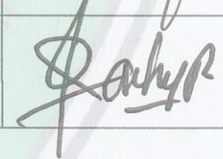
STUDI PERSAMAAN KLEIN GORDON PADA SUMUR POTENSIAL TAK TERHINGGA DENGAN DINDING BERGERAK

SKRIPSI

Oleh:

Ruby Maulana Putra
NIM. 13640060

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji
Dan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Pada Tanggal, 20 Desember 2019

Penguji Utama :	<u>Drs. Abdul Basid, M. Si</u> NIP. 19650504 199003 1 003	
Ketua Penguji :	<u>Erna Hastuti M.Si</u> NIP. 19811119 200801 2 009	
Sekretaris Penguji :	<u>Erika Rani, M.Si</u> NIP. 19810613 200604 2 002	
Anggota Penguji :	<u>Ahmad Abtokhi, M. Pd</u> NIP. 19761003 200312 1 004	

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Fisika



Drs. Abdul Basid, M. Si
NIP. 19650504 199003 1 003

HALAMAN PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Ruby Maulana Putra
NIM : 13640060
Jurusan : Fisika
Fakultas : Sains Dan Teknologi
Judul Penelitian : Studi Persamaan Klein Gordon pada Sumur Potensial Tak Terhingga dengan Dinding Bergerak

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan maka saya bersedia untuk menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 Desember 2019
Yang Membuat Pernyataan



Ruby Maulana Putra
NIM. 13640060

MOTTO

You're Nothing Without Allah

You'll Never Walk Alone.

Orang yang tinggi akhlaknya, walaupun rendah ilmunya lebih mulia dari orang yang banyak ilmunya tapi kurang akhlaknya. (Habib Umar bin Hafidz)

Tidak ada pemberian ibu bapak yang paling berharga kepada anaknya daripada pendidikan akhlak mulia. (HR. Bukhari)



HALAMAN PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Puji syukur yang tiada henti saya haturkan kepada Allah Swt yang telah memberikan saya nikmat yang begitu besar baik berupa kekuatan, kemampuan, kesabaran, kesehatan, dan lain-lain.

Skripsi yang menjadi syarat untuk saya mendapatkan gelar S.Si ini saya persembahkan untuk orang-orang yang telah mengasuh saya, membimbing saya, mendidik saya, mengasihi saya dan tak henti-hentinya mendo'akan saya.

Untuk kedua orang tua saya Bapak Mohammad Rasyad dan Ibu Ida Ismaniyah yang tak pernah lelah mengasuh, membimbing, mendidik, dan memberikan kasih sayang. Kakak saya Rasyidah Amaliyah Putri yang selalu menasehati, memberi dukungan dan mengalirkan do'anya untuk saya. Adik saya Walady Faizal Adhim yang selalu memberikan dukungan dan mengalirkan do'anya untuk saya.

Untuk seluruh dosen Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah mendidik saya, mengajarkan berbagai ilmu pengetahuan kepada saya, untuk teman-temanku Fisika angkatan 2013 yang telah memberikan kenangan indah bersama, membantu saya dalam kesulitan, menemani saya dan mensupport saya untuk berjuang di Fisika.

Semoga Allah Swt selalu memberikan rahmat, mahabbah, taufik, dan hidayah kepada kita semua serta memberikan manfaat dan barokah atas ilmu yang telah saya pelajari selama ini.

Amin,,,,,,,,,,,,,

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT yang senantiasa memberikan rahmat, mahabbah, taufiq dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“Studi Persamaan Klein Gordon pada Sumur Potensial Tak Terhingga dengan Dinding Bergerak”**. Sholawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun manusia menuju zaman zakiyah, yakni Addinul Islam Wal Iman.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi. Ucapan terimakasih penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Abdul Haris, M.Ag selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Drs. Abdul Basid, M.Si selaku Ketua Jurusan Fisika Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan selaku Dosen Penguji Utama yang telah memberikan pertanyaan dan masukan untuk hasil penelitian penulis agar menjadi lebih baik.
4. Erika Rani, M.Si selaku Dosen Pembimbing yang senantiasa memberikan saran, arahan, motivasi dan meluangkan waktu untuk membimbing penulis selama proses penyusunan skripsi dengan baik.
5. Ahmad Abtokhi, M.Pd selaku Dosen pembimbing agama yang bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan dalam bidang integrasi sains dan Al-Quran.
6. Erna Hastuti, M.Si selaku Dosen Ketua Penguji yang telah memberikan pertanyaan dan masukan untuk hasil penelitian penulis agar menjadi lebih baik.

7. Seluruh dosen, Laboran dan Admin Jurusan Fisika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
8. Orangtuaku, Bapak Mohammad Rasyad dan Ibu Ida Ismaniyah serta keluarga di rumah yang selalu memberi doa dan dukungan, baik riil maupun materiil selama proses penelitian.
9. Diriku sendiri, yang tetap berjuang untuk menyelesaikan skripsi ini meski disetiap melangkah selalu menemukan jalan buntu.
10. Sohib 4 serangkai sehidup sesurga yaitu Zainal, Kholisin dan Abu yang selalu mendukung dan memberi semangat kepadaku. Khusus Zainal As-Situbandawi yang tak pernah lelah untuk selalu menyampaikan Dawuh KHR. Kholil As'ad Syamsul Arifin tentang menjaga sambungan kepada Sayyidina Muhammad Shollallahu'alaihi Wasallam agar nantinya dengan sambungan itu dapat menuntun kita ke Allah Subhanahu Wata'ala.
11. Teman-teman fisika (para pencari diskon dan gratisan) yaitu Najib, Salsa, Cindy yang senantiasa menemani disaat senang dan menghilang disaat sama-sama stress dan susah.
12. Zainul Mustofa (Ensteinnya Fisika 2013) yang telah membantu terkait perhitungan disaat menemukan jalan buntu.
13. Semua pihak yang secara langsung maupun tidak langsung memberikan dukungan dalam penulisan skripsi ini.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis menyadari bahwa masih terdapat banyak kekurangan dan kekeliruan. Untuk itu, penulis mengharapkan segala kritik dan saran yang bersifat membangun. Demikian yang dapat penulis sampaikan, semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah pengetahuan bagi orang lain.

Malang, 20 Desember 2019

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
HALAMAN PERNYATAAN	v
MOTTO	vi
HALAMAN PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR LAMPIRAN	xii
ABSTRAK	xiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	6
1.4 Manfaat Penelitian	6
1.5 Batasan Masalah	7
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	8
2.1 Persamaan Klein-Gordon	8
2.2 Integrasi Al-Qur'an dalam Hasil Rapat Probabilitas	13
2.3 Batas Nonrelativistik	15
2.4 Partikel Bebas Berspin Nol (0)	17
BAB III SOLUSI PERSAMAAN KLEIN GORDON DALAM SUMUR POTENSIAL TAK TERHINGGA	24
3.1 Jenis Penelitian	24
3.2 Waktu dan Tempat Pelaksanaan	24
3.3 Langkah Penelitian	24
3.4 Diagram Penelitian	26
3.5 Persamaan Klein Gordon	27
BAB IV KASUS DINDING BERGERAK	34
4.1 Invariansi Lorentz	34
4.2 Fungsi Alfa dan Beta	38
4.3 Fungsi Gelombang	43
4.4 Rapat Probabilitas	45
4.5 Integrasi Al-qur'an dalam Tingkatan Energi	50
4.6 Grafik Fungsi Gelombang	53
4.7 Grafik Posisi Rata-Rata Partikel	56
4.8 Grafik Rapat Probabilitas	58
4.9 Grafik Energi	59
BAB V PENUTUP	63
5.1 Kesimpulan	63
5.2 Saran	64
DAFTAR PUSTAKA	
LAMPIRAN	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Sumur potensial tak terhingga.....	3
Gambar 2.1 Spektrum Energi dari persamaan Klein-Gordon.....	10
Gambar 4.1 Salah satu dinding bergerak ke arah sumbu x.....	33
Gambar 4.2 Fungsi gelombang dengan $n=10$	53
Gambar 4.3 Fungsi Gelombang dengan $n=20$	54
Gambar 4.4 Fungsi Gelombang dengan $n=30$	54
Gambar 4.5 Nilai Posisi rata-rata Partikel dengan $n=30$	56
Gambar 4.6 Rapat probabilitas dengan $n=30$	58
Gambar 4.7 Energi dengan $n=30$	60

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Bukti Konsultasi Skripsi



ABSTRAK

Putra, Ruby Maulana. 2019. **Studi Persamaan Klein Gordon Pada Sumur Potensial Tak Terhingga Dengan Dinding Bergerak**. Skripsi. Jurusan Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Erika Rani, M.Si (II) Ahmad Abtokhi, M.Pd

Kata Kunci: Klein Gordon, Sumur Potensial Tak Terhingga, Dinding Bergerak, Fungsi Gelombang, Rapat Probabilitas, Energi, Posisi Rata-Rata

Sumur potensial merupakan suatu sistem kuantum yang memiliki potensial penghalang berbentuk sumur dengan syarat batas tertentu yang mana di dalamnya terdapat suatu partikel. Pada penelitian ini sistem sumur potensial tak terhingga salah satu dindingnya dibuat bergerak maka perlu menggunakan persamaan Klein Gordon dalam hubungan relativistik untuk mendapatkan solusi fungsi gelombang. Untuk mendapatkan fungsi gelombang, persamaan Klein Gordon perlu diinvariansikan menggunakan transformasi Lorentz. Variabel yang digunakan pada transformasi adalah fungsi alfa dan beta yang menggambarkan kerangka bergerak. Setelah didapatkan hasil invariansi maka dipisahkan menggunakan separasi variabel sehingga didapatkan fungsi gelombang. Fungsi gelombang digunakan untuk mendapatkan persamaan lainnya seperti rapat probabilitas, posisi rata-rata dan energi partikel. Hasil dari perhitungan yang menghasilkan fungsi gelombang menunjukkan bahwa pola variasi pada grafik fungsi gelombang dipengaruhi oleh dinding yang bergerak dengan kecepatan konstan. Grafik probabilitas dan posisi rata-rata menunjukkan bahwa partikel banyak ditemukan di daerah dekat dinding yang bergerak dengan rentang 80-90. Pada grafik energi menampilkan nilai energi partikel yang tinggi di rentang 0-10. Daerah tersebut berada di dekat dinding statis. Nilai energi mulai turun setiap rentang 10 dan di rentang 80-90 nilai energi partikel paling kecil. Energi yang turun dipengaruhi oleh tumbukan partikel di daerah dekat dinding bergerak.

ABSTRACT

Putra, Ruby Maulana. 2019. **The Study of Klein Gordon's Equations in Infinite Potential Well with Moving Walls**. Thesis. Department of Physics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisor: (I) Erika Rani, M.Sc. (II) Ahmad Abtokhi, M.Pd

Keywords: Klein Gordon, Infinite Potential Well, Moving Wall, Wave Function, Probability Density, Energy, Average Position

Potential well is a quantum system that has a well-shaped barrier potential with certain boundary conditions in which there is a particle. In this study, the infinite potential well system of one of the walls is made to move so it is necessary to use the Klein Gordon equation in a relativistic relationship to get the wave function solution. To get the wave function, the Klein Gordon equation needs to be varied using the Lorentz transformation. The variables used in the transformation are alpha and beta functions which describe the movable framework. After the invariance results are obtained, they are separated using variable separation so that the wave function is obtained. The wave function is used to get other equations such as probability density, average position and particle energy. The results of calculations that produce wave functions show that the variation patterns on the wave function graph are influenced by walls that are moving at a constant speed. Probability and average position graphs show that many particles are found in the area near a moving wall with a range of 80-90. In the energy graph shows the high energy value of particles in the range 0-10. The area is near a static wall. The energy value starts to fall every 10th and in the range 80-90 the smallest particle energy. The energy that is dropped is affected by the collision of particles in the area near the moving wall

ملخص البحث

فوترا، روبي مولانا. 2019. دراسة لمعادلة كلاين جوردون في البئر المحتمل اللانهائي مع الجدار المتحرك. البحث الجامعي. قسم الفيزياء، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الحكومية الإسلامية مالانج. المشرفان: (1) إريكا راني، الماجستير (2) أحمد أبطخي، الماجستير

الكلمات الرئيسية: كلاين جوردون، البئر المحتمل اللانهائي، الجدار المتحرك، وظيفة الموجة، اجتماع الاحتمالات، الطاقة، الموضع المتوسط

البئر المحتملة عبارة عن نظام كمي يحتوي على إمكانات حاجز على شكل جيد مع بعض الظروف الحدودية التي يتم فيها احتواء الجسيم. في هذه الدراسة، تم تصميم نظام البئر المحتمل اللامحدود لأحد الجدران، لذلك من الضروري استخدام معادلة كلاين جوردون في علاقة نسبية للحصول على حل دالة الموجة. للحصول على دالة الموجة، يجب تغيير معادلة كلاين جوردون باستخدام تحويل لورنتز. المتغيرات المستخدمة في التحول هي وظائف ألفا وبيتا التي تصف الإطار المنقول. بعد الحصول على نتائج الثبات، يتم فصلها باستخدام فصل متغير بحيث يتم الحصول على دالة الموجة. يتم استخدام وظيفة الموجة للحصول على معادلات أخرى مثل كثافة الاحتمال، متوسط الموقع والطاقة الجسيمية. تظهر نتائج العمليات الحسابية التي تنتج وظائف موجية أن أنماط التباين في الرسم البياني لوظيفة الموجة تتأثر بالجدران التي تتحرك بسرعة ثابتة. توضح الرسوم البيانية للاحتتمالية ومتوسط الموضع أن العديد من الجزيئات موجودة في المنطقة بالقرب من جدار متحرك بمدى يتراوح بين 80 و 90. في الرسم البياني للطاقة يوضح قيمة الطاقة العالية للجزيئات في المدى 0-10. المنطقة بالقرب من جدار ثابت. تبدأ قيمة الطاقة في الانخفاض كل 10 وفي حدود 80-90 أصغر طاقة جسيمية. تتأثر الطاقة التي يتم خفضها بتصادم الجسيمات في المنطقة القريبة من الجدار المتحرك.



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sumur potensial adalah salah satu pemodelan fisika kuantum dan secara teori sudah mapan bahkan diaplikasikan untuk beberapa kasus partikel yang lebih spesifik yaitu partikel boson dan fermion. Sumur potensial merupakan suatu sistem kuantum yang memiliki potensial penghalang berbentuk sumur dengan syarat batas tertentu yang mana di dalamnya terdapat suatu partikel. Setiap partikel yang berada dalam sumur potensial memiliki probabilitas sepanjang x dan waktu t , yang mana informasi mengenai partikel tersebut terkandung dalam fungsi gelombang.

Sumur potensial yang memiliki karakteristik yaitu suatu penghalang dengan syarat batas tertentu kebenarannya diperkuat dalam Al-Qur'an tepatnya surah Al-Furqan ayat 53 yang berbunyi:

وَهُوَ الَّذِي مَرَجَ الْبَحْرَيْنِ هَذَا عَذْبٌ فُرَاتٌ وَهَذَا مِلْحٌ أُجَاجٌ وَجَعَلَ بَيْنَهُمَا بَرْزَخاً وَحِجْرًا

مَخْجُورًا ﴿٥٣﴾

“Dan Dialah yang membiarkan dua laut yang mengalir (berdampungan); yang ini tawar lagi segar dan yang lain asin lagi pahit; dan Dia jadikan antara keduanya dinding dan batas yang menghalangi” (Q.S.Al-Furqan [25] : 53).

Firman Allah SWT pada ayat di atas menjelaskan tentang dua laut yang mengalir berdampungan dan diantara yang satu dengan yang lain memiliki jenis

karakteristik yang berbeda. Maka Allah menjadikan diantara keduanya sebuah dinding pembatas yang dapat menghalanginya untuk menyatu. Dengan mengambil gambaran dari kutipan ayat di atas, maka sesungguhnya Allah tidak hanya menciptakan sebuah dinding pembatas yang mampu menghalangi dua laut dengan jenis yang berbeda, tetapi Allah juga menciptakan sebuah dinding pembatas dengan sistem yang sama dengan konsep dan tujuan yang berbeda yakni dinding pembatas pada sumur potensial.

Ada pula ayat lain yang menggambarkan dinding pembatas pada sumur potensial yakni surah Yasin ayat 9:

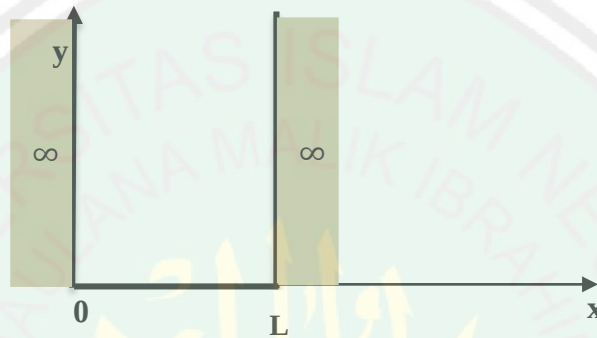
وَجَعَلْنَا مِنْ بَيْنِ أَيْدِيهِمْ سَدًّا وَمِنْ خَلْفِهِمْ سَدًّا فَأَعْشَيْنَاهُمْ فَهُمْ لَا يُبْصِرُونَ ﴿٩﴾

“Dan Kami adakan dihadapan mereka dinding dan di belakang mereka dinding (pula), dan Kami tutup (mata) mereka sehingga mereka tidak dapat melihat” (Q.S. Yasin 36 : 9).

Firman Allah SWT pada ayat di atas menjelaskan tentang Abu Jahal yang ingin membunuh Nabi Muhammad SAW, jika dia bertemu dengannya. Namun disaat Rasulullah berada di dekatnya, Allah membuat mata Abu Jahal tidak dapat melihat Rasulullah SAW. Dalam penjelasan ini Allah membuat dinding di depan dan di belakang mereka hingga mereka terhalang pandangannya dan tidak mampu melihat Rasulullah.

Jika gambaran dari penjelasan di atas diartikan secara keseluruhan dengan mempertimbangkan pemahaman fisika terkait sumur potensial maka dinding yang Allah beri kepada Abu Jahal merupakan dinding yang sifatnya tertutup sehingga Abu Jahal tak mampu melihat Rasulullah. Dinding tertutup ini seperti halnya

dinding potensial pembatas yang mana memiliki nilai yang sangat besar sehingga partikel berada dalam keadaan terikat. Dalam arti lain keadaan terikat terjadi saat potensial dalam dinding bernilai nol maka partikel akan sulit keluar dari dinding yang memiliki nilai yang lebih besar. Keadaan terikat biasanya digunakan dalam sistem sumur potensial berhingga dan tak terhingga.



Gambar 1.1 Sumur potensial tak terhingga (Purwanto, 2005)

Sumur potensial ini memiliki potensial penghalang selebar x dengan kedalaman sumur tak terhingga, namun bersifat statis atau dinding tidak mengalami pergerakan. Dengan demikian sistem ini merupakan sistem sumur potensial tak terhingga yang menggunakan potensial yang tak bergantung waktu. Dinding potensial hanya berada dalam jangkauan tertentu dan tidak mengalami perubahan tiap waktunya. Telah diketahui bahwa fungsi gelombang pada sistem sumur potensial tak terhingga memberikan visualisasi berbentuk grafik yang berupa gelombang berdiri. Grafik ini menggambarkan energi pada suatu partikel dan probabilitas adanya partikel dalam sistem tersebut.

Sistem sumur potensial tak terhingga ini dapat diperluas lagi jangkauan dari dinding tersebut dengan membuat salah satu dinding bergerak atau dinding sumur bergantung waktu. Pada kasus ini dinding dari sumur potensial mengalami

pergerakan dengan kecepatan konstan yang mana jika kecepatan perpindahan kecil, objek relevansi fisik seperti rapat probabilitas, posisi rata-rata atau nilai rata-rata dari energi mengalami perubahan dari nilai awal ketika dinding tidak mengalami pergerakan. semakin besar perpindahan dengan kecepatan konstan maka semakin besar pula perubahan yang terjadi.

Fermi (1949) menyarankan untuk pertama kalinya bahwa partikel sinar kosmik dapat dipercepat dan mendapatkan energi dalam jumlah besar dengan menggunakan interaksi medan magnet galaksi yang bergerak. Kemudian Ullmann memodelkan kasus dari akselerator Fermi ke dalam sistem kotak potensial tak terbatas dengan dinding bergerak.

Martino (2013) merepresentasikan ruang Hilbert yang diperluas dengan mendefinisikan semua operator dengan nol yang berada di luar kotak dan tidak nol di dalam kotak. Hasil penelitian tersebut menyatakan bahwa adanya pergerakan dinding yang mengakibatkan partikel bebas akan mengalami kecepatan dalam dinding dan mengalami tumbukan dengan partikel lain sehingga terjadi perubahan energi.

Pergerakan partikel yang diakibatkan oleh pergerakan dinding erat kaitannya dengan dimensi ruang dan waktu. Dalam mekanismenya, dinding sumur potensial tak terhingga tersebut bergerak dengan kecepatan konstan sejauh sumbu x dalam waktu t . kasus ini biasanya disebut juga dengan kasus relativistik.

Salah satu dinding yang bergerak pada sistem sumur potensial tak terhingga menarik untuk dikaji dimana pergerakan dinding mampu memberikan perubahan dari hasil yang signifikan terhadap rapat probabilitas dan energi dari

sebuah partikel. Perubahan rapat probabilitas dan energi menggambarkan perilaku partikel yang dipengaruhi oleh kontraksi dinding. Oleh karena itu untuk menentukan solusi umum bagi interaksi partikel dalam sumur potensial tak terhingga dengan salah satu dinding bergerak, maka diperlukan persamaan Klein Gordon dalam kasus relativistik.

Dalam skripsi ini akan dijabarkan persamaan Klein Gordon dalam kasus nonrelativistik yang mana untuk mendapatkan solusi umum digunakan metode separasi variabel maka didapatkan fungsi gelombang dan rapat probabilitas. Kemudian untuk kasus relativistik, persamaan Klein Gordon menggunakan transformasi Lorentz. Perubahan ini dilakukan untuk mendapatkan persamaan Klein Gordon dengan kerangka acuan yang bergerak namun bersifat invarian, kemudian untuk mendapatkan solusi umum berupa fungsi gelombang dalam kasus dinding yang bergerak maka diperlukan metode separasi variabel. Dari pemisahan variabel itu akan didapatkan solusi umum variabel masing-masing. Solusi tersebut dikembalikan ke dalam fungsi gelombang sehingga fungsi gelombang bisa digunakan untuk mendapatkan persamaan lain yang dicari seperti rapat probabilitas, energi dan posisi rata-rata.

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang di atas, dirumuskan beberapa masalah yang diuraikan sebagaimana berikut:

1. Bagaimana fungsi gelombang dari persamaan Klein Gordon dalam kasus salah satu dinding dibuat bergerak pada sumur potensial tak terhingga?

2. Bagaimana rapat probabilitas dalam kasus salah satu dinding dibuat bergerak pada sumur potensial tak terhingga?
3. Bagaimana Energi dan posisi rata-rata partikel saat salah satu dinding dibuat bergerak pada sumur potensial tak terhingga?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan masalah di atas maka cakupan tujuan penelitian ini dirumuskan sebagai berikut:

1. Mengkaji fungsi gelombang dari persamaan Klein Gordon dalam kasus salah satu dinding dibuat bergerak pada sumur potensial tak terhingga.
2. Mengkaji rapat probabilitas dalam kasus salah satu dinding dibuat bergerak pada sumur potensial tak terhingga.
3. Mengkaji energi dan posisi rata-rata saat salah satu dinding dibuat bergerak pada sumur potensial tak terhingga.

1.4 Manfaat Penelitian

Telaah ini diharapkan dapat memberikan manfaat antara lain sebagaimana berikut:

1. Sebagai kajian yang kedepannya dapat dikembangkan dalam meneliti kasus-kasus terkini di bidang fisika partikel terkait pembahasan kuantum relativistik.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Kasus yang terjadi adalah dinding yang bergerak dengan kecepatan konstan.
2. Penelitian ini dilakukan menggunakan persamaan Klein Gordon, metode yang digunakan adalah metode separasi variabel dan pemberian visualisasi terhadap rapat probabilitas, energi dan posisi rata-rata secara simulatif.



BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Klein-Gordon

Persamaan Klein Gordon merupakan persamaan Schrodinger yang telah dimodifikasi sedemikian rupa dalam ranah relativistik. Penerapan sederhana untuk partikel bebas dengan hubungan relativistik diawali oleh persamaan Schrodinger yang diberikan sebagai berikut:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right] \psi(x, t), \quad (2.1)$$

dan bentuk operator diperkenalkan,

$$\bar{E} \equiv \frac{\bar{p}^2}{2m} + V(x) \quad (2.2)$$

$$\bar{E} \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \bar{p} = -i\hbar \nabla, \quad (2.3)$$

dimana persamaan (2.3) adalah operator energi dan momentum. Partikel bebas dengan hubungan relativistik diterapkan pada persamaan Schrodinger untuk mendapatkan persamaan gelombang relativistik. Dalam relativitas khusus, diperkenalkan momentum empat yaitu generalisasi dari momentum tiga dimensi klasik menjadi ruang-waktu empat dimensi. Persamaannya dapat ditulis sebagai berikut (Greiner, 1986):

$$\bar{p}^\mu \bar{p}_\mu \equiv \frac{E^2}{c^2} - p \cdot p = m_0^2 c^2, \quad (2.4)$$

dimana $\bar{p}^\mu$ adalah operator momentum empat dimensi kovarian yang didefinisikan:

$$\bar{p}^\mu \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial (ct)}, +i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1}, +i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2}, +i\hbar \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv i\hbar\nabla^\mu \\
&= \left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial(ct)}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right\} \\
&= i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial(ct)}, -\nabla \right\} = \{\bar{p}_0, \bar{p}\}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

dengan demikian, didapatkan persamaan Klein-Gordon untuk partikel bebas dalam bentuk momentum empat dimensi:

$$p^\mu p_\mu \psi = m_0^2 c^2 \psi, \tag{2.6}$$

di sini m_0 adalah massa diam partikel yang didefinisikan sebagai massa yang diukur di dalam kerangka diamnya dan c kecepatan cahaya dalam vakum. Dengan mensubstitusikan persamaan (2.5) ke dalam persamaan (2.6) didapatkan (Greiner, 1986):

$$\begin{aligned}
p^\mu p_\mu \psi &= m_0^2 c^2 \psi \\
(p^\mu p_\mu \psi - m_0^2 c^2 \psi) &= 0 \\
-\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi - m_0^2 c^2 \psi &= 0 \\
\left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi &= 0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

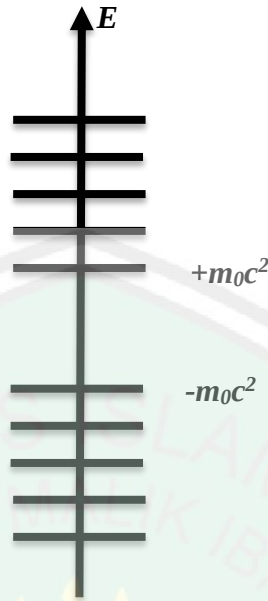
Persamaan Klein Gordon dapat diverifikasi kovariansi lorentznya, seperti $p^\mu p_\mu$ adalah invarian dalam transformasi Lorentz. Persamaan (2.7) identik dengan persamaan gelombang klasik dimana suku $m_0^2 c^2 / \hbar^2$ menjadi konstanta k . Solusi bebas berbentuk (Greiner, 1986):

$$\begin{aligned}
\psi &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu\right) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} (p_0 x^0 - p \cdot x)\right] \\
&= \exp\left[+\frac{i}{\hbar} (p \cdot x - Et)\right].
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) memberikan solusi persamaan gelombang sebagai fungsi posisi dan fungsi waktu sekaligus, berbeda dengan persamaan gelombang klasik yang hanya fungsi posisi untuk partikel bebas. Dengan menyisipkan persamaan (2.8) ke dalam persamaan (2.6) maka diperoleh (Griffiths, 2005):

$$\begin{aligned}
 p_\mu p^\mu \psi &= m_0^2 c^2 \psi \\
 p^\mu p_\mu \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu\right) &= m_0^2 c^2 \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu\right) \\
 p^\mu p_\mu &= m_0^2 c^2 \\
 \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} &= m_0^2 c^2 \\
 \frac{E^2}{c^2} - p^2 &= m_0^2 c^2 \\
 \frac{E^2}{c^2} &= m_0^2 c^2 + p^2 \\
 E^2 &= (m_0^2 c^4 + p^2 c^2) \\
 E &= \pm \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Dengan demikian, persamaan (2.9) merepresentasikan dua solusi yaitu energi positif $E = +(m_0^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2}$ dan energi negatif $E = -(m_0^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2}$. Solusi persamaan (2.9) yang menghasilkan energi negatif menunjukkan adanya antipartikel. Lebih jelasnya, lihat gambar (2.1) yang merupakan gambaran dari adanya energi positif dan negatif (Greiner, 1986).



Gambar 2.1 Spektrum Energi dari persamaan Klein-Gordon (Greiner, 1986)

Kemudian persamaan (2.6) digunakan untuk membangun rapat probabilitas empat dimensi j_μ yang mana harapan dari analogi ini dapat menghasilkan hukum kontinuitas. Persamaan (2.6) dapat ditulis dalam bentuk (Greiner, 1986):

$$(p_\mu p^\mu - m_0^2 c^2) \psi = 0, \quad (2.10)$$

dan konjugat kompleks dari persamaan (2.10) dapat ditulis:

$$(p_\mu p^\mu - m_0^2 c^2) \psi^* = 0. \quad (2.11)$$

Selanjutnya persamaan (2.10) dikalikan dengan ψ^* dan persamaan (2.11) dikalikan dengan ψ dari kiri. Hasil dari pengalian persamaan (2.10) dikurangi dengan persamaan (2.11) menjadi (Greiner, 1986):

$$\psi^* (p_\mu p^\mu - m_0^2 c^2) \psi - \psi (p_\mu p^\mu - m_0^2 c^2) \psi^* = 0$$

$$\psi^* (i\hbar \nabla_\mu \cdot i\hbar \nabla^\mu - m_0^2 c^2) \psi - \psi (i\hbar \nabla_\mu \cdot i\hbar \nabla^\mu - m_0^2 c^2) \psi^* = 0$$

$$\begin{aligned}
& -\psi^*(\hbar^2\nabla_\mu\nabla^\mu + m_0^2c^2)\psi + \psi(\hbar^2\nabla_\mu\nabla^\mu + m_0^2c^2)\psi^* = 0 \\
& -\hbar^2\nabla_\mu(\psi^*\nabla^\mu\psi) - \psi^*m_0^2c^2\psi + \hbar^2\nabla_\mu(\psi\nabla^\mu\psi^*) + \psi m_0^2c^2\psi^* = 0 \\
& -\hbar^2\nabla_\mu(\psi^*\nabla^\mu\psi) + \hbar^2\nabla_\mu(\psi\nabla^\mu\psi^*) = 0 \\
& -\hbar^2\nabla_\mu(\psi^*\nabla^\mu\psi - \psi\nabla^\mu\psi^*) = 0 \\
& \nabla_\mu(\psi^*\nabla^\mu\psi - \psi\nabla^\mu\psi^*) \equiv \nabla_\mu j^\mu = 0,
\end{aligned} \tag{2.12}$$

j^μ didefinisikan sebagai rapat arus empat dimensi, dengan:

$$j_\mu = \frac{i\hbar}{2m_0}(\psi^*\nabla_\mu\psi - \psi\nabla_\mu\psi^*). \tag{2.13}$$

Persamaan (2.12) telah dikalikan dengan $\frac{i\hbar}{2m_0}$, jadi komponen nol j_0 memiliki dimensi dari rapat probabilitas, sehingga persamaan (2.12) dapat ditulis:

$$\begin{aligned}
& \nabla_\mu j_\mu = 0 \\
& \left(\frac{\partial}{c\partial t} - \nabla\right) \frac{i\hbar}{2m_0} \left(\psi^* \left(\frac{\partial}{c\partial t} - \nabla\right) \psi - \psi \left(\frac{\partial}{c\partial t} - \nabla\right) \psi^*\right) = 0 \\
& \left(\frac{\partial}{c\partial t} - \nabla\right) \frac{i\hbar}{2m_0} \left(\left(\psi^* \frac{\partial\psi}{c\partial t} - \psi^* \nabla\psi\right) - \left(\psi \frac{\partial\psi^*}{c\partial t} - \psi \nabla\psi^*\right)\right) = 0 \\
& \left(\frac{\partial}{c\partial t} - \nabla\right) \frac{i\hbar}{2m_0} \left(\psi^* \frac{\partial\psi}{c\partial t} - \psi \frac{\partial\psi^*}{c\partial t} - (\psi^* \nabla\psi - \psi \nabla\psi^*)\right) = 0 \\
& \frac{\partial}{c\partial t} \frac{i\hbar}{2m_0} \left(\left(\psi^* \frac{\partial\psi}{c\partial t} - \psi \frac{\partial\psi^*}{c\partial t}\right) - (\psi^* \nabla\psi - \psi \nabla\psi^*)\right) \\
& - \nabla \frac{i\hbar}{2m_0} \left(\left(\psi^* \frac{\partial\psi}{c\partial t} - \psi \frac{\partial\psi^*}{c\partial t}\right) - (\psi^* \nabla\psi - \psi \nabla\psi^*)\right) = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{i\hbar}{2m_0c^2} \left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) \right] - \nabla \frac{i\hbar}{2m_0} (-(\psi^* \nabla\psi - \psi \nabla\psi^*)) = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{i\hbar}{2m_0c^2} \left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) \right] + \left(\frac{i\hbar}{2m_0}\right) \nabla[\psi^*(\nabla\psi) - \psi(\nabla\psi^*)] = 0.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Ungkapan dari persamaan (2.12) memiliki bentuk persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla j = 0, \tag{2.15}$$

Sehingga persamaan (2.15) menyimpulkan bahwa:

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_0c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right). \quad (2.16)$$

Max Born pada tahun 1926 mengatakan bahwa fungsi gelombang ψ itu sendiri tidak mempunyai arti fisis, tetapi perkalian antar fungsi gelombang diinterpretasikan sebagai kerapatan probabilitas. Fungsi gelombang ψ merupakan kuantitas teoritis fundamental di dalam mekanika kuantum (Purwanto, 2005).

Rapat probabilitas pada persamaan (2.16) merepresentasikan energi yang bernilai positif dan negatif. Hal ini menjadi masalah dalam interpretasi probabilitas dimana nilai negatif menjadi sesuatu yang tidak masuk akal. Namun setelah ada teori mengenai antipartikel maka solusi energi negatif pada rapat probabilitas dihubungkan dengan keberadaan antipartikel tersebut, nilai negatif ini digambarkan sebagai probabilitas dari antipartikel itu sendiri (Greiner, 1986).

2.2 Integrasi Al-Qur'an dalam Hasil Rapat Probabilitas

Antipartikel yang merupakan pasangan dari suatu partikel, sebelumnya telah dijelaskan dalam Al-qur'an dengan surah Yasin ayat ke 36:

سُبْحَانَ الَّذِي خَلَقَ الْأَزْوَاجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنْبِتُ الْأَرْضُ وَمِنْ أَنْفُسِهِمْ وَمِمَّا لَا يَعْلَمُونَ ﴿٣٦﴾

“Maha Suci Tuhan yang telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka maupun dari apa yang tidak mereka ketahui” (Q.S Yasin: 36).

Maha suci Allah yang telah melimpahkan Rahmat dan Mahabbah-Nya.

Maha suci Allah yang memberikan kehidupan kepada para makhluk-Nya. Maha

suci Allah yang mengatur alam semesta beserta isinya. Maha suci Allah yang Maha adil. Maha suci Allah yang menciptakan langit dan bumi. Rasa syukur atas apa yang telah Allah berikan kepada para makhluk-Nya. Allah memberikan nikmat berupa pasangan kepada para makhluk-Nya. Segala sesuatu yang diciptakan oleh Allah pasti memiliki pasangan, baik itu makhluk Allah yang tampak maupun yang tak tampak (ghaib), baik itu berukuran besar maupun kecil, baik itu berbentuk maupun tak berbentuk, semuanya pasti memiliki pasangan.

Pasangan ini memiliki arti yang sangat luas, tergantung pada apa yang ada dalam makhluk itu. Contoh pasangan dari makhluk Allah yaitu malaikat ridwan dan malik, laki-laki dan perempuan, sifat baik dan buruk, serta partikel dan antipartikel. Sebenarnya ada banyak contoh dari pasangan yang Allah ciptakan, namun para makhluk-Nya tidak banyak mengetahui karena hanya Allah yang Maha mengetahui. Berhubung Allah yang telah menciptakan itu semua maka hanya Allah yang berhak untuk disembah dan tidak disekutukan dengan sesuatu apapun (Al-Qarni, 2008).

Sementara kata **أَزْوَاجٌ** yang berarti pasangan pada ayat ini hanya diberikan kepada makhluk Allah yang hidup, yaitu manusia, hewan, tumbuhan dan makhluk hidup lainnya yang tak dapat dilihat secara kasat mata dan yang tidak diketahui manusia. Dalam ayat ini Allah memberikan gambaran secara jelas mengenai pengelompokan dari pasangan yang Allah ciptakan yaitu kata **مِمَّا تُنْبِتُ الْأَرْضُ** yang berarti dari apa yang ditumbuhkan di bumi.

Sesuatu yang ditumbuhkan di bumi yaitu tumbuhan dan semua yang tumbuh dari bumi. Kata **مِنْ أَنْفُسِهِمْ** yang berarti dari diri mereka, maka yang

dimaksud mereka disini adalah manusia. Sedangkan kata $\text{مِمَّا لَا يَعْلَمُونَ}$ yang berarti dari apa yang tidak kamu ketahui, dapat didefinisikan segala sesuatu yang tidak diketahui oleh manusia baik yang tidak dapat dilihat secara kasat mata dan yang mampu dilihat oleh mata.

Dalam ranah sains sesuatu yang tidak dapat dilihat secara kasat mata jumlahnya banyak baik itu di bumi maupun di luar bumi. Contohnya bakteri, virus, atom, elektron, partikel dan materi lainnya. Dan sesuatu yang tidak diketahui manusia juga terhitung banyak. Dalam dunia kuantum ada partikel berspin nol, partikel spin $\frac{1}{2}$ dan partikel spin 1. Dan setiap partikel memiliki pasangannya sendiri yaitu antipartikel.

2.3 Batas Nonrelativistik

Solusi persamaan Klein-Gordon (2.6) dalam kasus nonrelativistik dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$\psi(r, t) = \varphi(r, t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t\right), \quad (2.17)$$

yaitu dimana ψ dibentuk oleh dua fungsi yang keduanya mengandung variabel t yaitu $\varphi(r, t)$ dan $\exp\left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t\right)$ yang mana fungsi eksponen mengandung massa diam. Dalam batas nonrelativistik selisih energi total dari partikel dan massa diam $m_0 c^2$ adalah kecil. Oleh karena itu didefinisikan (Greiner, 1986):

$$E' = E - m_0 c^2,$$

dan E' adalah energi kinetik nonrelativistik, yang berarti $E' \ll m_0 c^2$, oleh karena itu:

$$\left| i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| \approx E' \varphi \ll m_0 c^2 \varphi, \quad (2.18)$$

dengan mendiferensialkan persamaan (2.17) menggunakan differensial orde dua maka dihasilkan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\varphi(r, t) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right) \right] \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right) + \varphi \frac{\partial}{\partial t} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right) \right] \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right) + \varphi \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right) \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \varphi \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right) \\ &\approx -\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \varphi \exp \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \varphi \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \varphi \right] \exp \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \varphi \right) \frac{\partial}{\partial t} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right) \right] \\ &= \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \exp \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \varphi \right) \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right) \\ &= \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{2i}{\hbar} m_0 c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{\hbar^2} m_0^2 c^4 \varphi \right] \exp \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right) \\ &\approx \left[-\frac{2i}{\hbar} m_0 c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{\hbar^2} m_0^2 c^4 \varphi \right] \exp \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right) \\ &= -\left[\frac{2i}{\hbar} m_0 c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\hbar^2} m_0^2 c^4 \varphi \right] \exp \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right), \end{aligned}$$

kemudian mensubstitusikan hasil differensial ke dalam persamaan (2.6) menghasilkan:

$$p^\mu p_\mu \psi = m_0^2 c^2 \psi$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{c^2 \partial t^2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi \\
-\frac{1}{c^2} \left[\frac{2i}{\hbar} m_0 c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\hbar^2} m_0^2 c^4 \varphi \right] \exp \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right) \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \varphi \exp \left(-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t \right) \\
\left[-\frac{2i}{\hbar} m_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{\hbar^2} m_0^2 c^2 \varphi \right] &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \varphi \\
-\frac{2i}{\hbar} m_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi, \\
\text{dikali } -\frac{\hbar^2}{2m_0} \text{ dari sebelah kiri:} \\
-\frac{\hbar^2}{2m_0} \cdot -\frac{2i}{\hbar} m_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi \\
i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Persamaan (2.19) adalah persamaan Schrodinger bebas untuk partikel tanpa spin. Persamaan ini menunjukkan bahwa persamaan Klein Gordon dengan syarat batas nonrelativistik akan kembali ke persamaan Schrodinger (Greiner, 1986).

2.4 Partikel Bebas Berspin Nol (0)

Sebelumnya pada persamaan (2.19) telah dibahas bahwa persamaan Schrodinger didapat dari persamaan Klein Gordon dengan syarat batas nonrelativistik. Sebaliknya persamaan Klein Gordon didapat dari persamaan energi-momentum relativistik dengan mensubstitusikan operator-operator diferensial untuk energi E dan momentum p yang diberikan dalam mekanika kuantum.

Persamaan Klein Gordon disebut juga persamaan gelombang dengan partikel berspin nol dalam kasus relativistik. Partikel berspin nol pada kasus relativistik dapat ditemukan keberadaannya dalam sistem dengan mengintegralkan persamaan kontinuitas (2.15) menghasilkan:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} d^3x$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d^3x = - \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F},$$

karena $\mathbf{F} = -\nabla V$,

$$- \int_F \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F} = 0,$$

maka:

$$\int_V \rho d^3x = \text{const.} \quad (2.20)$$

Secara lebih spesifik, rapat probabilitas pada persamaan (2.20) memberikan suatu bentuk kemungkinan untuk mendapatkan partikel yang dideskripsikan berada dalam elemen volume d^3x disekitar posisi $\mathbf{x}$ pada saat t . Lebih lanjut persamaan (2.13) dikalikan dengan muatan dasar e menghasilkan (Purwanto, 2005):

$$j'_\mu = \frac{ie\hbar}{2m_0} (\psi^* \nabla_\mu \psi - \psi \nabla_\mu \psi^*) = \{c\rho', -\mathbf{j}'\}, \quad (2.21)$$

sedangkan persamaan (2.16) juga dikalikan dengan e menjadi:

$$\rho' = \frac{ie\hbar}{2m_0 c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right), \quad (2.22)$$

menandakan rapat muatan dan:

$$\mathbf{j}' = \frac{ie\hbar}{2m_0} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*), \quad (2.23)$$

menunjukkan rapat arus dan muatan menghasilkan nilai positif dan negatif. Hal ini telah dijelaskan sebelumnya pada penjelasan persamaan (2.16) mengenai keberadaan partikel dan antipartikel dalam teori. Dari persamaan (2.8) dan (2.9) untuk gelombang bebas terdapat dua kemungkinan solusi untuk diberikannya momentum p : satu dengan positif, yang lain dengan energi negatif (Greiner, 1986).

$$E_p = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4},$$

$$\psi_{(\pm)} = A_{(\pm)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p \cdot x \mp |E_p| t) \right], \quad (2.24)$$

$A_{(\pm)}$ adalah konstanta normalisasi. Fungsi gelombang pada persamaan (2.24) dikonjugatkan sehingga menjadi:

$$\psi_{(\pm)}^* = A_{(\pm)} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (p \cdot x \mp |E_p| t) \right]. \quad (2.25)$$

Selanjutnya persamaan (2.24) dan (2.25) didiferensialkan masing-masing terhadap waktu t didapatkan:

$$\frac{\partial \psi_{(\pm)}}{\partial t} = \left(\frac{i}{\hbar} |E_p| \right) A_{(\pm)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p \cdot x \mp |E_p| t) \right]$$

$$\frac{\partial \psi_{(\pm)}}{\partial t} = \left(\frac{i}{\hbar} |E_p| \right) \psi_{(\pm)}, \quad (2.26)$$

dan,

$$\frac{\partial \psi_{(\pm)}^*}{\partial t} = \left(-\frac{i}{\hbar} |E_p| \right) A_{(\pm)} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (p \cdot x \mp |E_p| t) \right]$$

$$\frac{\partial \psi_{(\pm)}^*}{\partial t} = \left(-\frac{i}{\hbar} |E_p| \right) \psi_{(\pm)}^*. \quad (2.27)$$

Persamaan (2.26) dan (2.27) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.22) sehingga menghasilkan:

$$\varrho_{(\pm)} = \frac{i\hbar e}{2m_0 c^2} \left(\psi_{(\pm)}^* \frac{\partial \psi_{(\pm)}}{\partial t} - \psi_{(\pm)} \frac{\partial \psi_{(\pm)}^*}{\partial t} \right)$$

$$\begin{aligned}
Q_{(\pm)} &= \frac{i\hbar e}{2m_0 c^2} \left(\psi_{(\pm)}^* \left(\frac{i}{\hbar} |E_p| \right) \psi_{(\pm)} - \psi_{(\pm)} \left(-\frac{i}{\hbar} |E_p| \right) \psi_{(\pm)}^* \right) \\
Q_{(\pm)} &= \frac{i\hbar e}{2m_0 c^2} \left(\psi_{(\pm)}^* \left(\frac{i}{\hbar} |E_p| \right) \psi_{(\pm)} + \psi_{(\pm)} \left(\frac{i}{\hbar} |E_p| \right) \psi_{(\pm)}^* \right) \\
Q_{(\pm)} &= \frac{i\hbar e}{2m_0 c^2} \left(2 \left(\frac{i}{\hbar} |E_p| \right) \psi_{(\pm)}^* \psi_{(\pm)} \right) \\
Q_{(\pm)} &= \pm \frac{e|E_p|}{m_0 c^2} \psi_{(\pm)}^* \psi_{(\pm)}. \tag{2.28}
\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan penafsiran berikut: $\psi_{(+)}$ menentukan partikel dengan muatan $+e$; $\psi_{(-)}$ menentukan partikel dengan massa yang sama, tetapi dengan muatan $-e$. Solusi umum dari persamaan gelombang selalu merupakan kombinasi linier dari kedua jenis fungsi. Pada sistem sumur potensial dengan syarat batas dimana partikel dalam keadaan terikat dan tidak dapat keluar memiliki tingkat energi dan momentum. Oleh karena itu, fungsi gelombang dari persamaan (2.24) menjadi (Greiner, 1986):

$$\psi_{n(\pm)} = A_{n(\pm)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_n \cdot x \mp E_{p_n} t) \right], \tag{2.29}$$

dimana,

$$p_n = \frac{2\pi}{L} n, \quad n = \{n_x, n_y, n_z\}; \quad n_i \in \mathbb{N},$$

dan,

$$E_{p_n} = \sqrt{p_n^2 c^2 + m_0^2 c^4} \equiv E_n, \tag{2.30}$$

Di sini p_n dan E_n merupakan tingkat energi dan momentum ke n dan n adalah sebuah vektor (diskrit) dalam ruang kisi dengan sumbu n_x, n_y, n_z . Dengan menggunakan persamaan (2.28), faktor normalisasi $A_{(\pm)}$ ditentukan oleh persyaratan (Greiner, 1986):

$$\pm e = \int_{L^3} d^3x \, \varrho_{(\pm)}$$

$$\pm e = \int_{L^3} d^3x \pm \frac{e|E_p|}{m_0 c^2} \psi_{(\pm)}^* \psi_{(\pm)}$$

$$\begin{aligned} \pm e = \int_{L^3} dx \pm \frac{e|E_p|}{m_0 c^2} A_{n(\pm)}^* \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (p_n \cdot x \mp E_{p_n} t) \right] \\ \times A_{n(\pm)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_n \cdot x \mp E_{p_n} t) \right], \end{aligned}$$

karena $\exp[x] \cdot \exp[-x] = 1$ maka:

$$\pm e = \pm \frac{e E_{p_n}}{m_0 c^2} A_{n(\pm)}^* \cdot A_{n(\pm)} \int_{L^3} dx$$

$$\pm e = \pm \frac{e E_{p_n}}{m_0 c^2} |A_{n(\pm)}|^2 L^3$$

$$1 = \frac{E_{p_n}}{m_0 c^2} |A_{n(\pm)}|^2 L^3,$$

setelah persamaan (2.28) dijabarkan maka amplitudo didapatkan:

$$A_{n(\pm)} = \sqrt{\frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n}}}. \quad (2.31)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.27) ke dalam persamaan (2.29).

Persamaan (2.29) dapat ditulis kembali menjadi:

$$\psi_{n(\pm)} = \sqrt{\frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n}}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_n \cdot x \mp E_{p_n} t) \right]. \quad (2.32)$$

Persamaan (2.32) mendeskripsikan sebuah partikel ke n dan antipartikel ke n memiliki pasangan energinya masing-masing pada saat terjadi momentum dalam sebuah sistem. Fungsi gelombang yang menggambarkan keadaan partikel tersebut dibedakan menjadi:

$$\psi_{(+)} = \sum_n a_n \psi_{n(+)} = \sum_n a_n \sqrt{\frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n}}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_n \cdot x - E_{p_n} t) \right], \quad (2.33)$$

dan,

$$\psi_{(-)} = \sum_n b_n \psi_{n(-)} = \sum_n b_n \sqrt{\frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n}}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_n \cdot x + E_{p_n} t) \right]. \quad (2.34)$$

Persamaan (2.33) menggambarkan sebuah partikel yang memiliki pasangan energi negatif dan momentum sehingga partikel bergerak dalam arah sumbu x. sedangkan persamaan (2.34) menggambarkan sebuah antipartikel yang memiliki pasangan energi positif dan momentum sehingga partikel juga bergerak dalam arah sumbu x. kedua persamaan ini memiliki nilai komut sehingga dapat dituliskan:

$$\psi^* = \psi. \quad (2.30)$$

Persamaan (2.30) dapat dibuktikan dengan menggunakan persamaan (2.32) untuk menggambarkan fungsi gelombang dari partikel netral:

$$\begin{aligned} \psi_{n(0)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{(+)}^n(p_n) + \psi_{(-)}^n(-p_n)) \\ \psi_{n(0)} &= \sqrt{\frac{m_0 c^2}{L^3 E_{p_n}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_n \cdot x - E_{p_n} t) \right] + \exp \left[\frac{i}{\hbar} (-p_n \cdot x + E_{p_n} t) \right] \right\} \\ \psi_{n(0)} &= \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2L^3 E_{p_n}}} \left\{ \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p_n \cdot x - E_{p_n} t) \right] + \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (p_n \cdot x - E_{p_n} t) \right] \right\}, \end{aligned}$$

dengan definisi $2 \cos \theta = \exp[i\theta] + \exp[-i\theta]$ maka:

$$\psi_{n(0)} = \sqrt{\frac{m_0 c^2}{2L^3 E_{p_n}}} 2 \cos \frac{(p_n \cdot x - E_{p_n} t)}{\hbar}. \quad (2.31)$$

Dengan demikian $\psi_{(0)}^n = \psi_{(0)}^{n*}$, oleh karena itu persamaan (2.22) dapat ditulis kembali menjadi:

$$\varrho' = \frac{i\hbar e}{2m_0 c^2} \left(\psi_{n(0)}^* \frac{\partial \psi_{n(0)}}{\partial t} - \psi_{n(0)} \frac{\partial \psi_{n(0)}^*}{\partial t} \right) = 0. \quad (2.32)$$

Persamaan (2.32) menyatakan bahwa rapat probabilitas dari partikel netral memberikan nilai nol. Hasil ini didapat dari fungsi gelombang untuk partikel

netral yang bersifat komut. Oleh karena itu, dalam kasus partikel netral tidak berlaku hukum konservasi yang mana rapat probabilitas dapat mengalami perubahan. Dalam teori nonrelativistik, partikel tanpa spin dapat merambat secara bebas dengan didefinisikan momentum p secara baik. Dalam kasus relativistik, Perubahan dari rapat probabilitas menjelaskan bahwa suatu partikel dapat bergerak secara bebas tiga arah dalam ruang (Greiner, 1986).



BAB III

SOLUSI PERSAMAAN KLEIN GORDON DALAM SUMUR POTENSIAL TAK TERHINGGA

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan jenis penelitian teoritis yang didasari pengkajian Al-Quran. Metode penelitian teoritis ini dilakukan dari beberapa jurnal internasional dan buku-buku teks standar dengan melakukan eksplorasi formulasi dasar sampai tingkat riset. Sedangkan kajian Al-Quran merupakan bentuk metode integrasi ayat-ayat Al-Quran dalam upaya untuk menjelaskan problem yang diangkat (Al-Quran sebagai sumber utamanya).

3.2 Waktu dan Tempat Pelaksanaan

Penelitian ini dilaksanakan pada bulan Februari 2019 – selesai di laboratorium Mekanika (Perpustakaan Fisika Teori) Fakultas Sains dan Teknologi serta di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

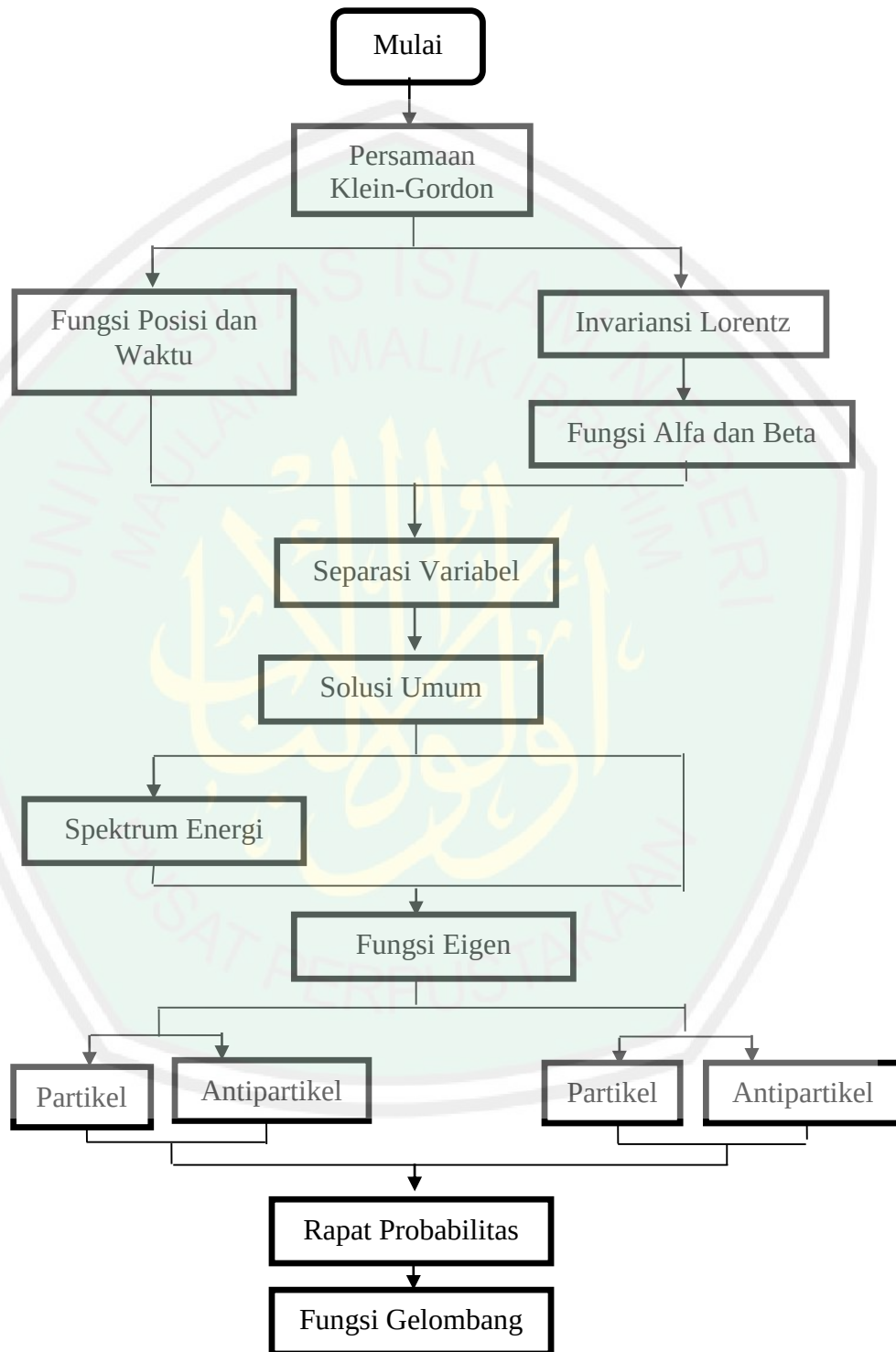
3.3 Langkah Penelitian

Metode yang digunakan adalah Separasi variabel dengan mengetahui konsep dan persamaan gerak dari sistem sumur potensial tak terhingga dengan dinding yang bergerak. Maka langkah yang dilakukan pada penelitian ini sebagai berikut:

1. Menggunakan persamaan Klein-Gordon dalam kasus dinding tidak bergerak

2. Memasukkan fungsi posisi dan waktu ke dalam persamaan Klein-Gordon
3. Mendapatkan solusi umum dengan metode separasi variabel.
4. Proses lebih lanjut, akan menghasilkan energi dan fungsi eigen untuk partikel dan antipartikel.
5. Merumuskan rapat probabilitas dan menormalisasikan fungsi eigen
6. mendapatkan fungsi gelombang beserta grafiknya.
7. Menggunakan persamaan Klein-Gordon dalam kasus dinding bergerak.
8. Menggunakan transformasi Lorentz untuk mengubah kerangka diam ke dalam kerangka acuan yang bergerak.
9. Mengoperasikan persamaan Klein-Gordon dalam kasus dinding bergerak untuk diinvariansikan dengan invariansi Lorentz.
10. Memasukkan fungsi alfa dan beta ke dalam persamaan Klein-Gordon yang telah diinvariansikan.
11. Menentukan solusi umum dengan menggunakan metode separasi variabel.
12. Proses lebih lanjut akan menghasilkan fungsi eigen untuk partikel dan anti partikel.
13. Merumuskan rapat probabilitas dan menormalisasikan fungsi eigen
14. Mendapatkan fungsi gelombang.
15. Dapat menentukan formula rapat probabilitas, posisi rata-rata dan energi beserta grafiknya.

3.4 Diagram Penelitian



3.5 Persamaan Klein Gordon

Persamaan Klein Gordon adalah persamaan kuantum relativistik untuk partikel berspin nol. Persamaan Klein Gordon merupakan persamaan relativistik pertama dalam mekanika kuantum untuk fungsi gelombang dari suatu partikel. Pada penelitian ini persamaan Klein Gordon diterapkan ke dalam sistem sumur potensial tak terhingga dengan pertimbangan sistem tersebut berada dalam kondisi yang didefinisikan sebagai berikut:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L \\ \infty, & \text{yang lainnya} \end{cases} \quad (3.1)$$

persamaan (3.1) mendefinisikan bahwa sistem sumur potensial dalam keadaan terikat dimana potensial yang berada di luar dinding bernilai tak terhingga dan potensial yang berada di dalam dinding bernilai nol. Hal ini menunjukkan bahwa peluang partikel untuk berada di luar dinding adalah nol. Kemudian persamaan Klein Gordon diperkenalkan sebagai berikut:

$$\left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(x, t) = 0, \quad (3.2)$$

yang mana m_0 adalah massa diam dari partikel berspin nol dan $\square$ didefinisikan dengan:

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (3.3)$$

persamaan (3.3) menunjukkan bahwa partikel bergantung pada ruang dan waktu, maka solusi yang sesuai untuk persamaan (3.2) diberikan:

$$\psi(x, t) = U(x)T(t), \quad (3.4)$$

Persamaan (3.4) merupakan hipotesa untuk menemukan solusi yang mana berbentuk fungsi posisi dan waktu. Selanjutnya persamaan (3.4) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.2) sehingga didapatkan:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right) U(x)T(t) = 0$$

$$\frac{1}{c^2} U(x) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} - T(t) \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} U(x)T(t) = 0, \quad (3.5)$$

kemudian persamaan (3.5) dibagi dengan persamaan (3.4) menghasilkan:

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{1}{U} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} = 0. \quad (3.6)$$

Pada bentuk ini persamaan (3.6) dapat dipisahkan variabelnya menggunakan separasi variabel maka didapatkan:

$$-\frac{1}{U} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \alpha^2, \quad (3.7)$$

yang mana α^2 adalah konstanta. Persamaan (3.7) menghasilkan dua persamaan dengan variabel yang berbeda dari hasil separasi variabel. Bagian pertama untuk variabel waktu dapat dituliskan :

$$-\frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \alpha^2 \quad (3.8)$$

$$-\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \alpha^2 c^2 T$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega^2 T = 0, \quad (3.9)$$

dimana $\omega^2 = \alpha^2 c^2$ dan $\omega = \frac{E}{\hbar}$. Solusi umum untuk persamaan (3.9) diberikan:

$$T = Ae^{i\frac{Et}{\hbar}} + Be^{-i\frac{Et}{\hbar}}. \quad (3.10)$$

yang mana A dan B adalah konstanta integrasi dari fungsi waktu. Kemudian

bagian kedua yaitu fungsi ruang dari persamaan Klein Gordon (3.7) dapat dituliskan:

$$-\frac{1}{U} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} = \alpha^2 \quad (3.11)$$

$$-\frac{1}{U} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \alpha^2 - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}$$

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \left(\alpha^2 - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) U$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(\alpha^2 - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) U = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + k^2 U = 0, \quad (3.12)$$

yang mana pada persamaan (3.12) didefinisikan:

$$k^2 = \alpha^2 - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}. \quad (3.13)$$

Solusi umum dari persamaan (3.12) dapat ditulis dengan:

$$U = C \sin(kx) + D \cos(kx), \quad (3.14)$$

yang mana C dan D adalah konstanta integrasi dari fungsi ruang.

Solusi persamaan Klein Gordon yang telah dipisahkan ke dalam fungsi ruang dan waktu kemudian dimasukkan syarat batas yang sebelumnya diperkenalkan dalam persamaan (3.1). Kondisi batas ini hanya dapat diberikan pada bagian fungsi ruang seperti berikut:

$$U(x) = 0, \quad \text{untuk } x \leq 0 \text{ dan } x \geq L \quad (3.15)$$

Persamaan (3.15) dibuat untuk menjamin agar partikel tidak dapat menembus dinding dan keluar dari sistem, maka kondisi pada saat $x = 0$ mengimplikasikan:

$$U = C \sin(kx) + D \cos(kx)$$

$$0 = C \sin(0) + D \cos(0)$$

agar $U = 0$ maka:

$$D = 0, \quad (3.16)$$

persamaan (3.14) dapat dituliskan kembali dengan memasukkan hasil dari persamaan (3.16) kemudian juga dimasukkan kondisi pada saat $x = L$ maka memberikan:

$$\begin{aligned} U &= C \sin(kx) + D \cos(kx) \\ U &= C \sin(kx) + 0 \cos(kx) \\ U &= C \sin(kx) \\ 0 &= C \sin(kL) \\ 0 &= \sin kL, \end{aligned} \quad (3.17)$$

sehingga menghasilkan:

$$kL = n\pi, \quad (3.18)$$

dan dengan demikian didapatkan:

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.19)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.19) ke dalam persamaan mengarahkan pada spektrum energi dari partikel:

$$\begin{aligned} E_n^2 &= \alpha^2 c^2 \hbar^2 \\ E_n &= \pm \sqrt{k^2 \hbar^2 c^2 + m_0^2 c^4}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

atau

$$E_n = \pm \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 \hbar^2 c^2}{L^2} + m_0^2 c^4}. \quad (3.21)$$

Penambahan spektrum energi maka akan ditemukan:

$$U_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (3.22)$$

yang mana C_n adalah konstanta normalisasi. mensubstitusikan persamaan 3.22 dan persamaan 3.10 ke dalam persamaan 3.4 sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} U_n(x, t) &= U(x)T(t) \\ &= C_n \sin(k_n x) \left(A e^{i\frac{Et}{\hbar}} + B e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \right) \\ &= C_n \cdot A \cdot e^{i\frac{Et}{\hbar}} \sin(k_n x) + C_n \cdot B \cdot e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \sin(k_n x). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dari persamaan 3.23 dapat ditulis fungsi eigen untuk partikel dan anti partikel masing-masing sebagai berikut:

$$\psi_n^+ = C_n^+ e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \sin(k_n x) \quad (3.24)$$

$$\psi_n^- = C_n^- e^{i\frac{Et}{\hbar}} \sin(k_n x), \quad (3.25)$$

catatan bahwa densitas partikel r untuk partikel dan anti partikel adalah

$$\rho^\pm = \frac{-\hbar e}{2im} \left(\psi^{*\pm} \frac{\partial \psi^\pm}{\partial t} - \psi^\pm \frac{\partial \psi^{*\pm}}{\partial t} \right), \quad (3.26)$$

dari persamaan 3.24 didapat:

$$\psi_n^{*+} = C_n^+ e^{i\frac{Et}{\hbar}} \sin(k_n x) \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \psi^+}{\partial t} = C_n^+ e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \sin(k_n x) \left(-\frac{iE_n}{\hbar} \right), \quad (3.28)$$

dan

$$\frac{\partial \psi^{*+}}{\partial t} = C_n^+ e^{i\frac{Et}{\hbar}} \sin(k_n x) \left(\frac{iE_n}{\hbar} \right). \quad (3.29)$$

Tanda bintang (*) diartikan sebagai konjugat kompleks. Lalu substitusikan persamaan 3.24, persamaan 3.27, persamaan 3.28 dan persamaan 3.29 ke dalam persamaan 3.26 sehingga menghasilkan:

$$\rho^+ = -\frac{\hbar e}{2im} \left[C_n^+ e^{i\frac{Et}{\hbar}} \sin(k_n x) \cdot C_n^+ e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \sin(k_n x) \left(-\frac{iE}{\hbar} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -C_n^+ e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \sin(k_n x) \cdot C_n^+ e^{i\frac{Et}{\hbar}} \sin(k_n x) \left(\frac{iE}{\hbar}\right) \Big] \\
& = -\frac{\hbar e}{2im} \left[|C_n^+|^2 \sin^2(k_n x) \left(-\frac{iE_n}{\hbar}\right) e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \right. \\
& \quad \left. - |C_n^+|^2 \sin^2(k_n x) \left(\frac{iE_n}{\hbar}\right) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} e^{\frac{iE_n t}{\hbar}} \right], \tag{3.30}
\end{aligned}$$

atau singkatnya menjadi:

$$\rho^+ = -\frac{\hbar e}{2im} \left[2|C_n^+|^2 \sin^2(k_n x) \left(-\frac{iE_n}{\hbar}\right) \right], \tag{3.31}$$

dan hasil akhirnya menjadi:

$$\rho^+ = |C_n^+|^2 \frac{E_n e}{m} \sin^2(k_n x). \tag{3.32}$$

Persamaan 3.23 adalah densitas partikel. Sedangkan densitas partikel untuk anti partikel memiliki tahapan yang sama dengan persamaan 3.30 sehingga hasil akhirnya :

$$\rho^- = -|C_n^-|^2 \frac{E_n e}{m} \sin^2(k_n x), \tag{3.33}$$

kondisi normalisasi relativistik diberikan oleh:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho^{\pm} d^3x = \pm e, \tag{3.34}$$

dimana untuk partikel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho^+ d^3x = +e, \tag{3.35}$$

dan untuk anti partikel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho^- d^3x = -e, \tag{3.36}$$

e merupakan muatan partikel. Nilai densitas partikel untuk sifat partikel disubstitusikan pada persamaan (3.32) ke dalam persamaan (3.35) maka didapatkan:

$$\int_0^L |C_n^+|^2 \frac{E_n e}{m} \sin^2(k_n x) dx = e$$

$$\int_0^L |C_n^+|^2 \frac{E_n}{m} \sin^2(k_n x) dx = 1 \quad (3.37)$$

$$\int_0^L |C_n^+|^2 \frac{E_n}{m} \frac{1}{2} (1 - \cos(2k_n x)) dx = 1 \quad (3.38)$$

$$|C_n^+|^2 \frac{E_n}{2m} \left(\int_0^L dx - \int_0^L \cos(2k_n x) dx \right) = 1 \quad (3.39)$$

$$|C_n^+|^2 \frac{E_n}{2m} (L - \sin(2k_n L)) = 1,$$

karena nilai dari $\sin(2k_n L) = 0$ maka:

$$|C_n^+|^2 \frac{E_n}{2m} (L - 0) = 1$$

$$|C_n^+|^2 \frac{E_n}{2m} L = 1$$

$$|C_n^+|^2 = \frac{2m}{LE_n}$$

$$C_n^+ = \sqrt{\frac{2m}{LE_n}}. \quad (3.40)$$

kemudian fungsi eigen dan energi eigen bisa dituliskan sebagai berikut:

$$\psi_n^\pm(x, t) = C_n^\pm \sin(k_n x) e^{\mp i \frac{Et}{\hbar}}$$

$$\psi_n^\pm(x, t) = \sqrt{\frac{2m}{LE_n}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{\mp i \frac{Et}{\hbar}} \quad (3.41)$$

$$E_n = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 \hbar^2 c^2}{L^2}} + m_0^2 c^4, \quad (3.42)$$

fungsi posisi

$$\psi_n^\pm(x) = \sqrt{\frac{2m}{LE_n}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (3.43)$$

BAB IV

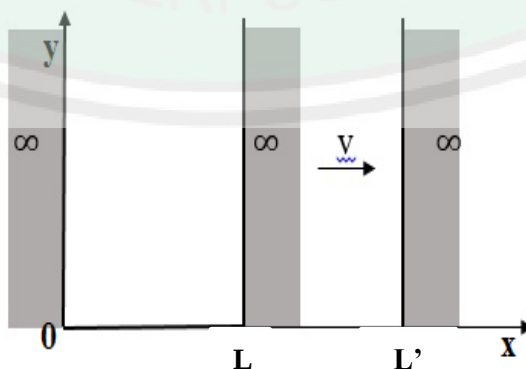
KASUS DINDING BERGERAK

4.1 Invariansi Lorentz

Pembahasan terkait peristiwa bergeraknya suatu benda telah dipelajari di dalam relativitas Einstein. Benda yang bergerak terhadap benda lain memiliki nilai interpretasi yang berbeda. Nilai yang berbeda itu terjadi karena adanya pengambilan sudut pandang yang berbeda. Dalam teori relativitas, pengambilan sudut pandang biasa dikenal dengan kerangka acuan. Penilaian terhadap suatu benda yang bergerak bergantung terhadap kerangka acuannya.

Benda bergerak yang dibahas dalam penelitian ini adalah partikel yang berada dalam sistem sumur potensial tak terhingga yang salah satu dindingnya dibuat bergerak. Pergerakan dinding pada sumur potensial akan mengakibatkan partikel mengalami pergerakan juga. Pada sistem ini dinding dibuat bergerak dengan kecepatan konstan seperti gambar dibawah ini dengan syarat batas:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L \\ \infty, & \text{yang lainnya} \end{cases}$$



Gambar 4.1 Salah satu dinding bergerak ke arah sumbu x

Dalam teori klasik partikel yang bergerak dalam sumur potensial mengalami perpindahan keadaan, dari keadaan awal berpindah ke keadaan akhir. Teori relativitas menyatakan bahwa partikel yang bergerak mengalami perubahan kerangka acuan. Pada saat partikel diam berarti partikel berada dalam kerangka yang diam dan saat partikel mulai bergerak berarti terjadi perubahan yang mana partikel berada dalam kerangka acuan yang bergerak.

Dalam hubungan relativistik, persamaan Klein Gordon perlu ditransformasikan menggunakan transformasi Lorentz. Dengan demikian persamaan Klein Gordon bertransformasi dari koordinat (x, t) ke koordinat (α, β) atau biasa disebut dengan koordinat hiperbolik maka bentuk transformasinya adalah:

$$\alpha\beta = t + x, \quad (4.1)$$

dan

$$\frac{\alpha}{\beta} = t - x. \quad (4.2)$$

Persamaan (4.1) dan persamaan (4.2) memetakan transformasi koordinat (x, t) ke koordinat (α, β) ruang dan waktu yang mana biasanya juga didefinisikan sebagai dimensi 1+1. Untuk jarak dimensi empat dalam koordinat (x, t) diberikan oleh:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2. \quad (4.3)$$

Persamaan Klein Gordon diperkenalkan kembali dengan differensial parsial posisi dan waktu untuk partikel tanpa massa yaitu:

$$\square\psi = 0, \quad (4.4)$$

yang mana,

$$\square = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (4.5)$$

Untuk membuat transformasi persamaan Klein Gordon menjadi invarian maka persamaan (4.1) dan persamaan (4.2) diturunkan dan menghasilkan:

$$\alpha\beta = t + x$$

$$d(\alpha\beta) = dt + dx$$

$$\beta d\alpha + \alpha d\beta = dt + dx, \quad (4.6)$$

dan

$$\frac{\alpha}{\beta} = t - x$$

$$d\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = dt - dx$$

$$\frac{1}{\beta} d\alpha + \alpha d(\beta^{-1}) = dt - dx$$

$$\frac{d\alpha}{\beta} - \frac{d\beta}{\beta^2} \alpha = dt - dx, \quad (4.7)$$

kemudian persamaan (4.6) dikalikan dengan persamaan (4.7) menghasilkan:

$$(\beta d\alpha + \alpha d\beta) \left(\frac{d\alpha}{\beta} - \frac{d\beta}{\beta^2} \alpha \right) = (dt + dx)(dt - dx)$$

$$\left(d\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} d\beta^2 - d\alpha d\beta \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} d\beta d\alpha \right) = dt^2 - dx^2$$

$$d\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} d\beta^2 = dt^2 - dx^2, \quad (4.8)$$

kemudian mensubstitusikan persamaan (4.8) ke dalam persamaan (4.3) maka jarak dimensi empat bertransformasi menjadi:

$$ds^2 = d\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} d\beta^2, \quad (4.9)$$

persamaan (4.9) dimasukkan ke dalam matriks tensor, maka menjadi:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha^2}{\beta^2} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

dan invers dari persamaan (4.10) yaitu:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Selanjutnya persamaan Klein Gordon untuk partikel tanpa massa (4.4) dapat ditulis kembali dalam koordinat hiperbola yaitu:

$$\square \psi(\alpha, \beta) = 0, \quad (4.12)$$

yang mana $\square$ telah didefinisikan kembali sebagai berikut:

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu), \quad (4.13)$$

dan

$$-g = |g_{\mu\nu}| = \frac{\alpha^2}{\beta^2}, \quad (4.14)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (4.14) ke dalam persamaan (4.13) maka didapatkan:

$$\begin{aligned} \square &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}}} \partial_\mu \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta^2}} \partial^\mu \right) \\ \square &= \frac{\beta}{\alpha} \partial_\mu \left(\frac{\alpha}{\beta} \partial^\mu \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Persamaan (4.15) didiferensial terhadap koordinat ruang dan waktu menghasilkan:

$$\square = \frac{\beta}{\alpha} \partial_\alpha \left(\frac{\alpha}{\beta} \partial^\alpha \right) + \frac{\beta}{\alpha} \partial_\beta \left(\frac{\alpha}{\beta} \partial^\beta \right), \quad (4.16)$$

yang mana setelah penurunan tersebut, persamaan (4.16) dioperasikan menggunakan persamaan (4.14) menghasilkan:

$$\square = \frac{\beta}{\alpha} \partial_{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\beta} \partial_{\alpha} \right) + \frac{\beta}{\alpha} \partial_{\beta} \left(\frac{\alpha}{\beta} \left(-\frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \partial_{\beta} \right) \quad (4.17)$$

$$\square = \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{\beta} \partial_{\alpha} (\alpha \partial_{\alpha}) + \frac{\beta}{\alpha} \partial_{\beta} \left(-\frac{\beta}{\alpha} \partial_{\beta} \right)$$

$$\square = \frac{1}{\alpha} \partial_{\alpha} (\alpha \partial_{\alpha}) - \frac{\beta}{\alpha^2} \partial_{\beta} (\beta \partial_{\beta}) \quad (4.18)$$

Persamaan (4.18) adalah operator d'Alembert dalam koordinat (α, β) .

Kemudian Operator ini dioperasikan ke dalam persamaan (4.12) menjadi

$$\frac{1}{\alpha} \partial_{\alpha} (\alpha \partial_{\alpha}) \psi - \frac{\beta}{\alpha^2} \partial_{\beta} (\beta \partial_{\beta}) \psi = 0, \quad (4.19)$$

atau lebih jelasnya

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \psi - \frac{\beta}{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \psi = 0. \quad (4.20)$$

4.2 Fungsi Alfa dan Beta

Hasil dari transformasi persamaan Klein Gordon perlu adanya pemisahan variabel untuk mempermudah mendapatkan solusi. Solusi untuk persamaan (4.20) diperkenalkan dengan fungsi alfa dan fungsi beta sebagai berikut:

$$\psi = R(\alpha) \phi(\beta), \quad (4.21)$$

yang mana setelah mensubstitusikan persamaan (4.21) ke dalam persamaan (4.20) didapatkan:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) R(\alpha) \phi(\beta) - \frac{\beta}{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) R(\alpha) \phi(\beta) &= 0 \\ \frac{\phi}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial R}{\partial \alpha} \right) - \frac{\beta}{\alpha^2} R \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

membagi persamaan (4.20) dengan $R\phi$ dan mengalikan dengan α^2 menghasilkan:

$$\frac{\alpha}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial R}{\partial \alpha} \right) - \frac{\beta}{\phi} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) = 0, \quad (4.23)$$

selanjutnya persamaan (4.23) dipisahkan variabelnya menggunakan separasi variable:

$$\frac{\alpha}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial R}{\partial \alpha} \right) = \frac{\beta}{\phi} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) = -k^2, \quad (4.24)$$

yang mana k^2 adalah konstanta pemisah. Bagian α ditulis:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial R}{\partial \alpha} \right) &= -k^2 \\ \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial R}{\partial \alpha} \right) &= -k^2 R \\ \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\alpha \frac{\partial R}{\partial \alpha} \right) + k^2 R &= 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

sedangkan bagian β persamaannya menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\phi} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) &= -k^2 \\ \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) &= -k^2 \phi \\ \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) + k^2 \phi &= 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

selanjutnya dari persamaan (4.25) penurunan alfa dioperasikan menjadi:

$$\begin{aligned} \alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} \frac{\partial R}{\partial \alpha} + \alpha \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} \right) + k^2 R &= 0 \\ \alpha^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} + \alpha \frac{\partial R}{\partial \alpha} + k^2 R &= 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Persamaan (4.27) memiliki bentuk solusi $R = \alpha^m$ yang mana diferensial orde pertama mengimplikasikan:

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = m\alpha^{m-1}, \quad (4.28)$$

dan diferensial orde kedua menghasilkan:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} = m(m-1)\alpha^{m-2}. \quad (4.29)$$

Hasil diferensial dari persamaan (4.28) dan persamaan (4.29) dimasukkan ke dalam persamaan (4.27) didapatkan:

$$\begin{aligned}\alpha^2 \frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2} + \alpha \frac{\partial R}{\partial \alpha} + k^2 R &= 0 \\ \alpha^2 \cdot m(m-1)\alpha^{m-2} + \alpha \cdot m\alpha^{m-1} + k^2 \alpha^m &= 0 \\ m(m-1)\alpha^m + m\alpha^m + k^2 \alpha^m &= 0,\end{aligned}\tag{4.30}$$

membagi persamaan (4.30) dengan α^m untuk mendapatkan:

$$\begin{aligned}m(m-1) + m + k^2 &= 0 \\ m^2 - m + m + k^2 &= 0 \\ m^2 + k^2 &= 0 \\ m^2 &= -k^2 \\ m &= \pm ik,\end{aligned}\tag{4.31}$$

sehingga solusi untuk $R(\alpha)$ adalah:

$$R = A\alpha^{ik} + B\alpha^{-ik},\tag{4.32}$$

atau dalam bentuk eksponensial menjadi:

$$R = Ae^{ik \ln \alpha} + Be^{-ik \ln \alpha},\tag{4.33}$$

setelah mendapatkan solusi untuk fungsi alfa maka selanjutnya membagi persamaan (4.1) dengan persamaan (4.2) menjadi:

$$\begin{aligned}\alpha\beta: \frac{\alpha}{\beta} &= (t+x):(t-x) \\ \alpha\beta \times \frac{\beta}{\alpha} &= \frac{t+x}{t-x} \\ \beta^2 &= \frac{t+x}{t-x}.\end{aligned}\tag{4.34}$$

Untuk dinding sebelah kiri yaitu dinding sumur potensial dengan keadaan diam maka syarat batas pada titik $t = t_0$ dan $x = 0$ sehingga persamaan (4.34) mengimplikasikan:

$$\begin{aligned}\beta_L^2 &= \frac{t+x}{t-x} \\ \beta_L^2 &= \frac{t_0+0}{t_0-0} \\ \beta_L^2 &= \frac{t_0}{t_0} \\ \beta_L^2 &= 1.\end{aligned}\tag{4.35}$$

Untuk dinding sebelah kanan, dinding mengalami pergerakan se arah sumbu x dengan syarat batas $x = ut$ dan $x = L = L_0 + u(t - t_0)$ kemudian persamaan (4.34) mengimplikasikan:

$$\beta_R^2 = \frac{t+(L_0+u(t-t_0))}{t-(L_0+u(t-t_0))},\tag{4.36}$$

kemudian mensubstitusikan nilai $L_0 = ut_0$ ke dalam persamaan (4.36) didapatkan:

$$\begin{aligned}\beta_R^2 &= \frac{t+ut_0+ut-ut_0}{t-ut_0-ut+ut_0} \\ \beta_R^2 &= \frac{t+ut}{t-ut} \\ \beta_R^2 &= \frac{t(1+u)}{t(1-u)} \\ \beta_R^2 &= \frac{(1+u)}{(1-u)},\end{aligned}\tag{4.37}$$

untuk bagian fungsi beta, persamaan (4.26) didiferensialkan menjadi:

$$\begin{aligned}\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} \right) + k^2 \phi &= 0 \\ \beta \left(\frac{\partial \beta}{\partial \beta} \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial \beta^2} \right) + k^2 \phi &= 0\end{aligned}$$

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \beta^2} + \beta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + k^2 \phi = 0, \quad (4.38)$$

persamaan (4.38) memiliki solusi dalam bentuk $\phi(\beta) = \beta^q$ yang mana diferensial orde pertama menghasilkan:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\beta} &= \frac{d}{d\beta} [\beta^q] \\ \frac{d\phi}{d\beta} &= q\beta^{q-1}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

dan diferensial orde kedua menghasilkan:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi}{d\beta^2} &= \frac{d}{d\beta} \left[\frac{d\phi}{d\beta} \right] \\ \frac{d^2 \phi}{d\beta^2} &= \frac{d}{d\beta} [q\beta^{q-1}] \\ \frac{d^2 \phi}{d\beta^2} &= q(q-1)\beta^{q-2}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Persamaan (4.39) dan persamaan (4.40) disubstitusikan ke dalam persamaan (4.38) menghasilkan:

$$\begin{aligned} \beta^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \beta^2} + \beta \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + k^2 \phi &= 0 \\ \beta^2 \cdot q(q-1)\beta^{q-2} + \beta \cdot q\beta^{q-1} + k^2 \beta^q &= 0 \\ q(q-1)\beta^q + q\beta^q + k^2 \beta^q &= 0, \end{aligned} \quad (4.41)$$

membagi persamaan (4.41) dengan β^q didapatkan:

$$\begin{aligned} q(q-1) + q + k^2 &= 0 \\ q^2 - q + q + k^2 &= 0 \\ q^2 + k^2 &= 0 \\ q^2 &= -k^2 \\ q &= \pm ik. \end{aligned} \quad (4.42)$$

maka solusi dari $\phi(\beta)$ menjadi:

$$\phi(\beta) = C\beta^{ik} + D\beta^{-ik} \quad (4.43)$$

atau dalam bentuk ekponensial yaitu,

$$\phi(\beta) = Ce^{ik \ln \beta} + De^{-ik \ln \beta}. \quad (4.44)$$

4.3 Fungsi Gelombang

Persamaan (4.21) diperkenalkan kembali dengan memperjelas bahwa fungsi gelombang bergantung pada variabel α dan β , maka dari itu solusi umum menghasilkan:

$$\psi(\alpha, \beta) = R(\alpha)\phi(\beta). \quad (4.45)$$

Dengan demikian kondisi batas yang lebih sederhana dapat ditulis $\phi(\beta_L) = \phi(\beta_R) = 0$. Kondisi batas pertama untuk $\beta = \beta_L = 1$, $\psi(\alpha, \beta = 1) = 0$ maka persamaan (4.44) menjadi:

$$\phi(\beta = 1) = Ce^{ik \ln 1} + De^{-ik \ln 1}$$

$$\phi(\beta = 1) = Ce^{ik(0)} + De^{-ik(0)}$$

$$\phi(\beta = 1) = Ce^0 + De^0$$

$$0 = C + D$$

$$C = -D. \quad (4.46)$$

Selanjutnya hasil dari persamaan (4.46) dimasukkan ke dalam persamaan (4.44) didapatkan:

$$\phi(\beta) = Ce^{ik \ln \beta} + De^{-ik \ln \beta}$$

$$\phi(\beta) = Ce^{ik \ln \beta} - (-D)e^{-ik \ln \beta}$$

$$\phi(\beta) = Ce^{ik \ln \beta} - Ce^{-ik \ln \beta}$$

$$\phi(\beta) = C(e^{ik \ln \beta} - e^{-ik \ln \beta}), \quad (4.47)$$

dengan menggunakan definisi $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$ maka persamaan (4.47)

menjadi:

$$\phi(\beta) = 2iC \sin(k \ln \beta) \quad , \quad (4.48)$$

dimana $2iC = \tilde{C}$, maka,

$$\phi(\beta) = \tilde{C} \sin(k \ln \beta), \quad (4.49)$$

kondisi batas kedua ketika $\beta = \beta_R$ dan $\psi(\alpha, \beta = \beta_R) = 0$ maka persamaan (4.49)

menjadi:

$$\phi(\beta) = \tilde{C} \sin(k \ln \beta)$$

$$\phi(\beta = \beta_R) = \tilde{C} \sin(k \ln \beta_R)$$

$$0 = \tilde{C} \sin(k \ln \beta_R) \quad (4.50)$$

$$0 = \sin(k \ln \beta_R)$$

$$\frac{n\pi}{k} = \ln \beta_R$$

$$\frac{n\pi}{\ln \beta_R} = k_n \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.51)$$

mensubstitusikan persamaan (4.51) ke dalam persamaan (4.49) didapatkan:

$$\phi(\beta) = \tilde{C} \sin\left(\frac{n\pi}{\ln \beta_R} \ln \beta\right), \quad (4.52)$$

persamaan (4.33) dan persamaan (4.52) disubstitusikan ke dalam persamaan

(4.45) menjadi:

$$\psi = R(\alpha)\phi(\beta)$$

$$\psi = (Ae^{ik \ln \alpha} + Be^{-ik \ln \alpha})\tilde{C} \sin\left(\frac{n\pi}{\ln \beta_R} \ln \beta\right)$$

$$\psi = \left(A\tilde{C}e^{ik \ln \alpha} \sin\left(\frac{n\pi}{\ln \beta_R} \ln \beta\right) + B\tilde{C}e^{-ik \ln \alpha} \sin\left(\frac{n\pi}{\ln \beta_R} \ln \beta\right)\right)$$

$$\psi = \tilde{A}e^{ik \ln \alpha} \sin\left(\frac{n\pi}{\ln \beta_R} \ln \beta\right) + \tilde{B}e^{-ik \ln \alpha} \sin\left(\frac{n\pi}{\ln \beta_R} \ln \beta\right) \quad (4.53)$$

dimana $\tilde{A} = A\tilde{C}$ dan $\tilde{B} = B\tilde{C}$. Selanjutnya lihat pada persamaan (4.34):

$$\beta^2 = \frac{t+x}{t-x}, \quad (4.54)$$

kemudian persamaan (4.1) dikalikan dengan persamaan (4.2) menghasilkan:

$$\alpha\beta \times \frac{\alpha}{\beta} = (t+x) \times (t-x)$$

$$\alpha^2 = t^2 - x^2 \quad (4.55)$$

maka hasil dari persamaan (4.54) dan persamaan (4.55) disubstitusikan ke dalam persamaan (4.53) menjadi:

$$\begin{aligned} \psi_n = & \tilde{A}e^{ik_n \ln(t^2-x^2)^{1/2}} \sin\left(k_n \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)^{1/2}\right) \\ & + \tilde{B}e^{-ik_n \ln(t^2-x^2)^{1/2}} \sin\left(k_n \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)^{1/2}\right) \end{aligned} \quad (4.56)$$

atau,

$$\begin{aligned} \psi_n(t, x) = & \tilde{A}e^{\frac{ik_n}{2} \ln(t^2-x^2)} \sin\left(\frac{k_n}{2} \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right) \\ & + \tilde{B}e^{-\frac{ik_n}{2} \ln(t^2-x^2)} \sin\left(\frac{k_n}{2} \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right). \end{aligned} \quad (4.57)$$

4.4 Rapat Probabilitas

Persamaan kontinuitas diperkenalkan sebagai berikut:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0, \quad (4.58)$$

yang mana rapat probabilitas didefinisikan:

$$\rho = \frac{\hbar i e}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right), \quad (4.59)$$

dan rapat arus probabilitas didefinisikan:

$$J = \frac{\hbar i}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \quad (4.60)$$

dengan mengintegalkan persamaan kontinuitas (4.58) didapatkan:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot J$$

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3x = -\int \nabla \cdot J d^3x \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho d^3x = -\int \nabla \cdot J d^3x, \quad (4.62)$$

dengan adanya definisi dari $-\int \nabla \cdot J d^3x = 0$, kondisi normalisasi dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho d^3x = \pm e, \quad (4.63)$$

fungsi eigen untuk variabel α dan β diberikan:

$$\psi_n^\pm = A_n e^{\pm ik \ln \alpha} \text{Sin}(k_n \ln \beta), \quad (4.64)$$

kemudian fungsi eigen untuk t dan x diberikan:

$$\psi_n^\pm = A_n e^{\pm \frac{ik_n}{2} \ln(t^2 - x^2)} \text{Sin}\left(\frac{k_n}{2} \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right), \quad (4.65)$$

untuk partikel kuantum nonrelativistik ortogonalitas mengimplikasikan:

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm},$$

atau

$$\int \psi_n^* \psi_m d^3x = \delta_{nm}. \quad (4.66)$$

Sedangkan untuk partikel kuantum Klein Gordon relativistik didefinisikan

$\hbar = c = m = 1$ dan persamaan kontinuitas menjadi:

$$\int \rho d^3x = \delta_{nm}$$

$$\int i \left(\psi_n^* \frac{\partial \psi_m}{\partial t} - \psi_m \frac{\partial \psi_n^*}{\partial t} \right) d\beta = \delta_{nm}, \quad (4.67)$$

yang mana $e = 1$ dan variabel diferensial diubah ke dalam variabel α dan β maka persamaan (4.67):

$$i \int_{\beta_L}^{\beta_R} \frac{\alpha}{\beta} d\beta (\psi_n^* \partial_\alpha \psi_m - \psi_m \partial_\alpha \psi_n^*) = \delta_{nm}, \quad (4.68)$$

dengan mendefinisikan:

$$\psi_m^+ = A_m \exp[+ik_m \ln \alpha] \sin[k_m \ln \beta] \quad (4.69)$$

$$\psi_m^- = A_m^- \exp[-ik_m \ln \alpha] \sin[k_m \ln \beta], \quad (4.70)$$

mengambil konjugat dari persamaan (4.69) didapatkan:

$$\psi_n^{*(-)} = A_n^{*(-)} \exp[ik_n \ln \alpha] \sin[k_n \ln \beta], \quad (4.71)$$

dan penurunan dari persamaan (4.70) mengimplikasikan:

$$\frac{\partial \psi_m^-}{\partial \alpha} = A_m^- \exp[-ik_m \ln \alpha] \sin[k_m \ln \beta] \left(-\frac{ik_m}{\alpha}\right), \quad (4.72)$$

penurunan dari persamaan (4.71) menghasilkan:

$$\frac{\partial \psi_n^{*(-)}}{\partial \alpha} = A_n^{*(-)} \exp[ik_n \ln \alpha] \sin[k_n \ln \beta] \left(\frac{ik_n}{\alpha}\right). \quad (4.73)$$

Untuk mendapatkan konstanta normalisasi A maka persamaan (4.70), persamaan (4.71), persamaan (4.72), dan persamaan (4.73) disubstitusikan ke dalam persamaan (4.68) menghasilkan:

$$i\alpha \int_{\beta_L}^{\beta_R} \frac{d\beta}{\beta} \left[\left\{ A_n^{*(-)} e^{ik_n \ln \alpha} \sin[k_n \ln \beta] \times A_m^- \left(\frac{-ik_m}{\alpha}\right) e^{-ik_m \ln \alpha} \sin[k_m \ln \beta] \right\} \right. \\ \left. - \left\{ A_m^- e^{-ik_m \ln \alpha} \sin[k_m \ln \beta] \times A_n^{*(-)} \left(\frac{ik_n}{\alpha}\right) e^{ik_n \ln \alpha} \sin[k_n \ln \beta] \right\} \right] = \delta_{nm}, \quad (4.74)$$

Persamaan (4.74) dapat diselesaikan dengan 2 syarat:

1. Syarat pertama untuk $m = n$, maka persamaan (4.74) menjadi:

$$i\alpha \int_{\beta_L}^{\beta_R} \frac{d\beta}{\beta} \left[\left\{ A_n^{*(-)} e^{ik_n \ln \alpha} \sin[k_n \ln \beta] \times A_n^- \left(\frac{-ik_n}{\alpha} \right) e^{-ik_n \ln \alpha} \sin[k_n \ln \beta] \right\} \right. \\ \left. - \left\{ A_n^- e^{-ik_n \ln \alpha} \sin[k_n \ln \beta] \times A_n^{*(-)} \left(\frac{ik_n}{\alpha} \right) e^{ik_n \ln \alpha} \sin[k_n \ln \beta] \right\} \right] = 1$$

$$i\alpha \int_{\beta_L}^{\beta_R} \frac{d\beta}{\beta} \left[\left\{ |A_n^-|^2 \left(\frac{-ik_n}{\alpha} \right) \sin^2[k_n \ln \beta] \right\} + \left\{ |A_n^-|^2 \left(\frac{ik_n}{\alpha} \right) \sin^2[k_n \ln \beta] \right\} \right] = 1$$

$$i\alpha \int_{\beta_L}^{\beta_R} \frac{d\beta}{\beta} \left\{ |A_n^-|^2 \left(\frac{-2ik_n}{\alpha} \right) \sin^2[k_n \ln \beta] \right\} = 1 \quad (4.75)$$

$$2k_n |A_n^-|^2 \int_{\beta_L}^{\beta_R} \frac{d\beta}{\beta} \sin^2[k_n \ln \beta] = 1, \quad (4.76)$$

sebelumnya telah diperkenalkan persamaan (4.51) yaitu:

$$k_n = \frac{n\pi}{\ln \beta_R}$$

$$\ln \beta_R = \frac{n\pi}{k_n},$$

persamaan (4.51) didefinisikan kembali menjadi:

$$\frac{n\pi}{k_n} = \ln \beta = \xi$$

$$\frac{d\beta}{\beta} = d\xi, \quad (4.77)$$

kemudian yang perlu didefinisikan kembali yaitu batas dari integral $\beta = 1$ menjadi $\xi = 0$ sedangkan untuk $\beta = 0$ menjadi $\xi = n\pi/k_n$. Syarat batas dan persamaan (4.77) dimasukkan ke dalam persamaan (4.76) didapatkan:

$$2k_n |A_n^-|^2 \int_0^{\frac{n\pi}{k_n}} \sin^2[k_n \xi] d\xi = 1 \quad (4.78)$$

$$2k_n |A_n^-|^2 \int_0^{\frac{n\pi}{k_n}} \frac{1}{2} [1 - \cos(2k_n \xi)] d\xi = 1$$

$$k_n |A_n^-|^2 \left[\xi - \frac{1}{2k_n} \sin(2k_n \xi) \right]_0^{\frac{n\pi}{k_n}} = 1$$

$$k_n |A_n^-|^2 \left[\frac{n\pi}{k_n} - \frac{1}{2k_n} \sin \left(2k_n \cdot \frac{n\pi}{k_n} \right) \right] = 1$$

$$k_n |A_n^-|^2 \left[\frac{n\pi}{k_n} - \frac{1}{2k_n} \sin(2n\pi) \right] = 1, \quad (4.79)$$

dengan adanya definisi bahwa nilai $\sin(2n\pi) = 0$ maka persamaan (4.79) menjadi:

$$\begin{aligned} k_n |A_n^-|^2 \left[\frac{n\pi}{k_n} - 0 \right] &= 1 \\ k_n |A_n^-|^2 \frac{n\pi}{k_n} &= 1 \\ |A_n^-|^2 &= \frac{1}{n\pi}, \end{aligned} \quad (4.80)$$

maka konstanta normalisasi untuk partikel:

$$A_n^- = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}, \quad (4.81)$$

sedangkan konstanta untuk anti partikel:

$$A_n^+ = -\frac{1}{\sqrt{n\pi}}. \quad (4.82)$$

2. Syarat kedua untuk $m \neq n$, fungsi gelombang dari persamaan (4.74) menjadi:

$$\int_{\beta_L}^{\beta_R} (\sin[k_n \ln \beta] \sin[k_m \ln \beta]) \frac{d\beta}{\beta} = 0, \quad (4.83)$$

kemudian menggunakan perubahan yang sama dengan variabel pada persamaan (4.75) dan (4.76) sehingga persamaan (4.83) menjadi:

$$\int_{\ln \beta_L}^{\ln \beta_R} \left(\sin \left[\frac{n\pi}{\ln \beta_R} \xi \right] \sin \left[\frac{m\pi}{\ln \beta_R} \xi \right] \right) d\xi = 0, \quad (4.84)$$

dengan menggunakan hubungan $\sin \theta \sin \alpha = \frac{1}{2} [\cos(\theta - \alpha) - \cos(\theta + \alpha)]$,

persamaan (4.84) menghasilkan:

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln \beta_R} \left(\frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{n\pi}{\ln \beta_R} \xi - \frac{m\pi}{\ln \beta_R} \xi \right) - \cos \left(\frac{n\pi}{\ln \beta_R} \xi + \frac{m\pi}{\ln \beta_R} \xi \right) \right] \right) d\xi &= 0 \\ \int_0^{\ln \beta_R} \left(\frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{(n-m)\pi}{\ln \beta_R} \xi \right) - \cos \left(\frac{(n+m)\pi}{\ln \beta_R} \xi \right) \right] \right) d\xi &= 0, \end{aligned} \quad (4.85)$$

yang mana setelah dioperasikan didapatkan;

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[\frac{\ln \beta_R}{(n-m)\pi} \sin \left(\frac{(n-m)\pi}{\ln \beta_R} \xi \right) - \frac{\ln \beta_R}{(n+m)\pi} \sin \left(\frac{(n+m)\pi}{\ln \beta_R} \xi \right) \right]_0^{\ln \beta_R} = 0 \\
& \frac{1}{2} \left[\frac{\ln \beta_R}{(n-m)\pi} \sin \left(\frac{(n-m)\pi}{\ln \beta_R} \ln \beta_R \right) - \frac{\ln \beta_R}{(n+m)\pi} \sin \left(\frac{(n+m)\pi}{\ln \beta_R} \ln \beta_R \right) \right] = 0 \\
& \frac{1}{2} \left[\frac{\ln \beta_R}{(n-m)\pi} \sin((n-m)\pi) - \frac{\ln \beta_R}{(n+m)\pi} \sin((n+m)\pi) \right] = 0. \quad (4.86)
\end{aligned}$$

4.5 Integrasi Al-qur'an dalam Tingkatan Energi

Setiap sesuatu yang ada di langit dan di bumi telah tercantum dalam ayat-ayat Al-qur'an dan ilmu pengetahuan khususnya fisika memiliki hubungan saling mendukung dengan Al-qur'an sebagai petunjuk jalan yang lurus bagi manusia dalam membangun peradaban manusia. Seperti halnya tingkatan energi dan keberadaan suatu partikel dalam sumur potensial tak terhingga dengan dinding yg bergerak ini memiliki hubungan yang telah dijelaskan dalam surah Ali Imran berikut:

أَلَمْ تَرَوْا كَيْفَ خَلَقَ اللَّهُ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا ﴿١٥﴾

“*Tidakkah kamu perhatikan bagaimana Allah telah menciptakan tujuh langit bertingkat-tingkat*” (Q.S Nuh : 15).

Maha suci Allah yang telah menciptakan langit dan bumi. Maha suci Allah yang memberikan kehidupan kepada para makhluk-Nya. Maha suci Allah yang mengatur alam semesta beserta isinya. Maha suci Allah yang Maha adil. Maha suci Allah yang berkuasa atas segala sesuatu. Rasa syukur atas apa yang telah Allah berikan kepada para makhluk-Nya. Allah memberikan gambaran atas kekuasaan-Nya kepada para makhluk-Nya berupa penciptaan langit yang terbagi menjadi tujuh lapis bertingkat-tingkat.

Tujuh lapis langit yang bertingkat-tingkat telah ditetapkan oleh Allah dengan dipilhkan satu penjaga dan beberapa penghuni di setiap tingkatnya. Penjaga dan penghuni yang berada di setiap tingkat memiliki tugasnya masing-masing sesuai dengan apa yang telah diperintahkan oleh Allah SWT. Di setiap tingkat, satu Malaikat ditugaskan untuk menjaga pintu gerbang langit yang di dalamnya terdapat para Nabi.

Sementara kata طَبَقًا adalah bentuk jamak dari kata tingkat atau lantai طَبَق yang berarti bertingkat-tingkat. Pada ayat di atas kata jamak tersebut menunjukkan bahwa tingkatan langit ada lebih dari satu tingkat yaitu tujuh. Allah ingin manusia yang berakal lebih memperhatikan ciptaan-Nya dan manusia yang berakal pasti memperdalam pengetahuannya mengenai apa yang diinformasikan kepadanya. Informasi terkait tingkatan langit perlu diperdalam kembali, dengan memperdalam informasi tersebut maka keagungan Allah akan Nampak. Sesungguhnya hanya orang beriman yang mampu melihat keagunganNya dan mengagungkan-Nya.

Dalam ranah sains tingkatan langit memiliki penjelasan yang sama dengan tingkatan energi dari suatu partikel yang berada pada sumur potensial tak terhingga. Pada sumur potensial tak terhingga dengan dinding bergerak, keberadaan partikel ditentukan melalui tingkat energinya.

Adapun penjelasan lain mengenai tingkat energi juga telah dibahas dalam surah Ali Imran ayat 163 yang berbunyi:

هُم دَرَجَاتٌ عِنْدَ اللَّهِ وَاللَّهُ بِصِيرٍ بِمَا يَعْمَلُونَ ﴿١٦٣﴾

“(Kedudukan) mereka itu bertingkat-tingkat di sisi Allah, dan Allah Maha Melihat apa yang mereka kerjakan” (Q.S Ali Imran : 163).

Firman Allah SWT pada ayat di atas menjelaskan derajat atau kedudukan suatu makhluk itu bertingkat-tingkat di hadapan penciptanya. Allah selalu melihat dan mengawasi para makhluk ciptaanNya apa yang dilakukan mereka. Dengan mengambil gambaran dari penjelasan terkait kedudukan ini maka sesungguhnya Allah memberikan penjelasan bahwa kedudukan suatu makhluk dapat dilihat dari apa yang dikerjakannya, begitu pula dengan tingkatan energi dari sebuah partikel dalam sumur potensial tak terhingga yang salah satu dindingnya dibuat bergerak. Bergeraknya dinding pada sumur potensial akan mempengaruhi pergerakan partikel yang ada di dalamnya, dan partikel yang bergerak akan memiliki energi. Tingkat energi ke n juga akan mempengaruhi keberadaan partikel itu sendiri. Keberadaan partikel berbeda-beda di setiap tingkat energi.

Adapun keberadaan partikel di setiap tingkat juga disebutkan dalam surah Al-Insyiqaq ayat ke 19 berikut ini:

لَتَرْكَبُنَّ طَبَقًا عَنْ طَبَقٍ ﴿١٩﴾

“sesungguhnya kamu melalui tingkat demi tingkat (dalam kehidupan)” (Q.S Al-Insyiqaq : 19).

Dalam ayat di atas dijelaskan bahwa setiap makhluk pasti melalui tingkat demi tingkat dalam menjalani hidup. Hal ini juga dialami oleh beberapa partikel yang memenuhi di setiap tingkat pada sumur potensial.

4.6 Grafik Fungsi Gelombang

Untuk mendapatkan grafik fungsi gelombang maka perlu mensubstitusikan persamaan (4.81) ke dalam persamaan (4.65) menghasilkan:

$$\psi_n^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} e^{\pm \frac{ik_n}{2} \ln(t^2 - x^2)} \sin\left(\frac{k_n}{2} \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right), \quad (4.87)$$

Didefinisikan:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (4.88)$$

Dengan mengubah bentuk eksponen dari persamaan (4.87) ke dalam cosinus persamaan (4.88), maka persamaan (4.87) dapat ditulis kembali menjadi:

$$\begin{aligned} \psi_n^{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left[\cos\left(\pm \frac{k_n}{2} \ln(t^2 - x^2)\right) + i \sin\left(\pm \frac{k_n}{2} \ln(t^2 - x^2)\right) \right] \sin\left(\frac{k_n}{2} \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right) \\ \psi_n^{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cos\left(\pm \frac{k_n}{2} \ln(t^2 - x^2)\right) \sin\left(\frac{k_n}{2} \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right) \\ &\quad + \frac{i}{\sqrt{n\pi}} \sin\left(\pm \frac{k_n}{2} \ln(t^2 - x^2)\right) \sin\left(\frac{k_n}{2} \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right), \end{aligned} \quad (4.89)$$

karena bagian imajiner dari persamaan (4.89) bernilai tidak nyata maka persamaan (4.89) dapat ditulis kembali menjadi:

$$\psi_n^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cos\left(\pm \frac{k_n}{2} \ln(t^2 - x^2)\right) \sin\left(\frac{k_n}{2} \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right), \quad (4.90)$$

Kemudian definisi dari persamaan (4.51) disubstitusikan ke dalam persamaan (4.90), maka didapatkan:

$$\psi_n^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cos\left(\pm \frac{n\pi}{2 \ln \beta_L} \ln(t^2 - x^2)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2 \ln \beta_L} \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right), \quad (4.91)$$

didefinisikan $\ln \beta_L = 1$ untuk dinding sumur potensial yang statis, maka persamaan (4.91) ditulis kembali menjadi:

$$\psi_n^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cos\left(\pm \frac{n\pi}{2} \ln(t^2 - x^2)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2} \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right), \quad (4.92)$$

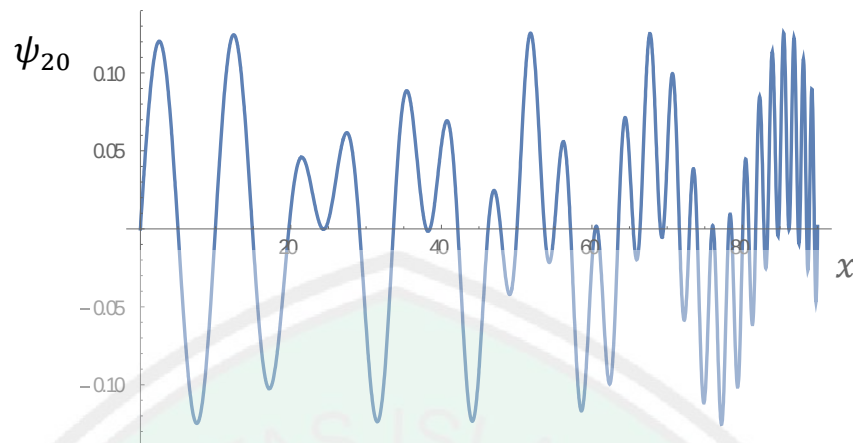
Untuk menggambarkan fungsi gelombang dan mengetahui keberadaan partikel dalam sumur potensial tak terhingga dengan dinding bergerak, maka diperlukan grafik agar lebih mudah menjelaskannya. Persamaan (4.92) dapat diinterpretasikan ke dalam grafik menggunakan wolfram mathematica sebagai berikut:



Gambar 4.2 Fungsi gelombang dengan $n=10$

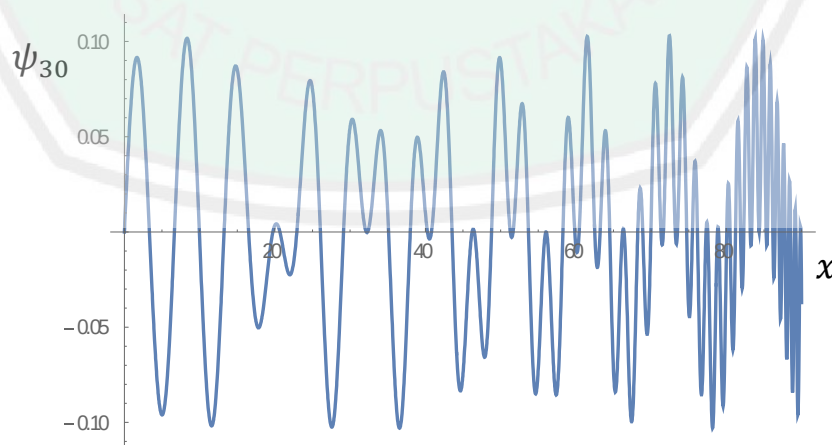
Dari gambar 4.2 di atas menjelaskan gambaran fungsi gelombang dengan bilangan kuantum atau kulit ke 10. Fungsi gelombang ψ merupakan kuantitas teoritis fundamental di dalam mekanika kuantum (Purwanto, 2005). Fungsi gelombang yang diinterpretasikan pada gambar 4.2 menunjukkan kuantitas dari partikel yang dihasilkan akibat sistem yang mempengaruhinya.

Fungsi gelombang memiliki kenampakan yang berbeda tergantung dari perpindahan dinding yang bergerak. Kenampakan ini berisi informasi dari partikel baik itu perilaku, energi dan posisi ditemukannya partikel tersebut. Kenampakan pada fungsi gelombang akan meregang secara proporsional dengan lebar sumur yang ditentukan (Cooney, 2017). Setiap dinding mulai bergerak, maka fungsi gelombang menunjukkan adanya perubahan bentuk.



Gambar 4.3 Fungsi Gelombang dengan $n=20$

Perubahan pada fungsi gelombang akibat dinding yang diperluas tidak terlalu merubah bentuk gelombangnya. Perubahan hanya terjadi pada penambahan gelombang disetiap tingkatan bilangan kuantum. Contohnya pada gambar 4.3 yang menggambarkan kenampakan fungsi gelombang dengan bilangan kuantum atau kulit ke 20. Pada gambar ini dapat dibedakan dengan gambar 4.2 berdasarkan rentang 0-20. Pada rentang 0-20, fungsi gelombang kulit ke 10 memiliki satu gelombang sedangkan untuk fungsi gelombang kulit ke 20 memiliki dua gelombang.



Gambar 4.4 Fungsi Gelombang dengan $n=30$

Pada gambar 4.2 yang menggambarkan fungsi gelombang kulit ke 10 dan gambar 4.3 yang menggambarkan fungsi gelombang kulit ke 20 memiliki pola gelombang yang sama disetiap rentangnya dengan gambar 4.4 yang menggambarkan fungsi gelombang kulit ke 30, bahkan pola juga terlihat sama dengan fungsi gelombang kulit berikutnya. Pola gelombang terlihat sama pada rentang 0-20, 20-45, dan 45-90. Pola yang sama ini dipengaruhi oleh kecepatan dinding yang konstan.

4.7 Grafik Posisi Rata-Rata Partikel

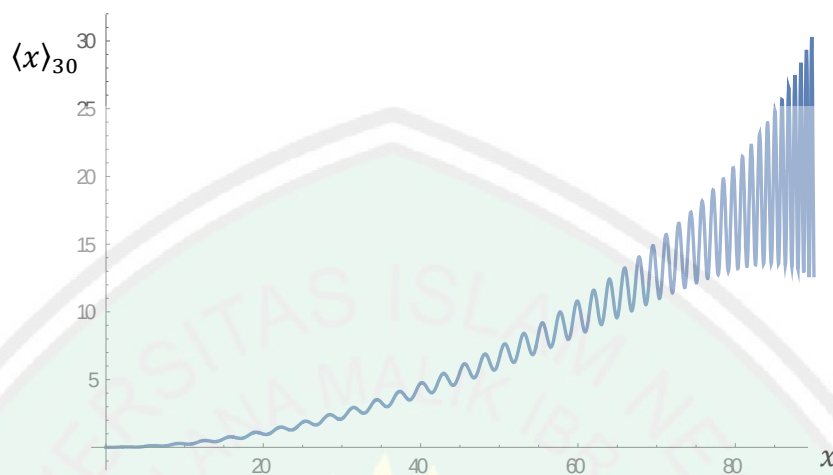
Posisi rata-rata didefinisikan dengan formula sebagai berikut:

$$\langle x \rangle_n = \int_0^L \psi_n^* \cdot x \cdot \psi_n dx, \quad (4.93)$$

persamaan (4.87) disubstitusikan ke dalam persamaan (4.93) menghasilkan:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_n &= \int_0^L \frac{1}{\sqrt{n\pi}} e^{-\frac{ik_n}{2} \ln(t^2-x^2)} \sin\left(\frac{k_n}{2} \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right) \cdot x \cdot \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{n\pi}} e^{\frac{ik_n}{2} \ln(t^2-x^2)} \sin\left(\frac{k_n}{2} \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right) dx \\ \langle x \rangle_n &= \frac{1}{n\pi} \int_0^L x \cdot \sin^2\left(\frac{k_n}{2} \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right) dx \\ \langle x \rangle_n &= \frac{1}{n\pi} \int_0^L x \cdot \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(k_n \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)\right] dx \\ \langle x \rangle_n &= \frac{1}{n\pi} \int_0^L \frac{1}{2} \left[x - x \cdot \cos\left(k_n \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)\right] dx \\ \langle x \rangle_n &= \frac{1}{2n\pi} \left[\frac{x^2}{2} - x \cdot \left(\frac{t+x}{t-x}\right) \cdot \sin\left(n\pi \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right) + \left(\frac{t+x}{t-x}\right)^2 \cos\left(n\pi \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right) \right] \Bigg|_0^L \\ \langle x \rangle_n &= \frac{L^2}{4n\pi} - \frac{L}{2n\pi} \left(\frac{t+L}{t-L}\right) \cdot \sin\left(n\pi \ln\left(\frac{t+L}{t-L}\right)\right) \\ &\quad - \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{t+L}{t-L}\right)^2 \cos\left(n\pi \ln\left(\frac{t+L}{t-L}\right)\right) + \frac{1}{2n\pi}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Adapun grafik yang dibuat menggunakan wolfram mathematica untuk persamaan (4.94) dapat diinterpretasikan sebagai berikut:



Gambar 4.5 Nilai Posisi rata-rata Partikel dengan $n=30$

Pada gambar 4.5 nilai posisi rata-rata partikel kulit ke 30 ditandai dengan munculnya banyak partikel yang terlokalisasi pada rentang 0-90 dalam kerapatan probabilitas, namun pola posisi rata-rata memiliki peningkatan di setiap rentang 20.

Grafik pada gambar 4.5 menunjukkan bahwa partikel merapat kebagian sekitar dinding yang bergerak. Partikel berkumpul dilokalisasi dekat dinding yang bergerak akibat gaya tarik dinding yang terhubung pada perilaku partikel yang mana partikel bergerak secara otomatis untuk memenuhi ruang kosong akibat dinding yang diperluas.

Jika kecepatan perpindahan kecil, objek relevansi fisik seperti posisi rata-rata memiliki perilaku yang halus. Sebaliknya jika kecepatan ini menjadi besar, banyak penyimpangan dari posisi awalnya (Fojon, 2000). Grafik menunjukkan bahwa partikel sedikit menempati ruang di dekat dinding yang statis. Semakin ke

tengah dan semakin mendekati dinding bergerak maka partikel semakin banyak menempati ruang tersebut.

Saat beberapa partikel bergerak mendekati dinding yang bergerak, partikel pertama bertumbukan dengan dinding yang bergerak. Setelah tumbukan itu, partikel bergerak ke arah sebaliknya sehingga ada kemungkinan partikel kembali bertumbukan dengan partikel lainnya. Satu hal yang terlihat lebih jelas saat partikel telah bertumbukan yaitu saat partikel menghasilkan periode gelombang, sedangkan kekuatan tumbukan tidak terlihat jelas. Kuatnya tumbukan dapat dilihat dari nilai periode partikel setelah tumbukan. Semakin besar kekuatan tumbukan partikel ke dinding, maka semakin besar periode partikel dan semakin besar pula kekuatan tumbukan partikel dengan partikel lain.

4.8 Grafik Rapat Probabilitas

Formulasi untuk rapat probabilitas diperkenalkan sebagai berikut:

$$\rho_n = \int_0^L \psi_n^* \cdot \psi_n dx$$

$$\rho_n = \int_0^L \frac{1}{\sqrt{n\pi}} e^{-\frac{ik_n}{2} \ln(t^2-x^2)} \sin\left(\frac{k_n}{2} \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right) \\ \times \frac{1}{\sqrt{n\pi}} e^{\frac{ik_n}{2} \ln(t^2-x^2)} \sin\left(\frac{k_n}{2} \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right) dx$$

$$\rho_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^L \sin^2\left(\frac{k_n}{2} \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right) dx$$

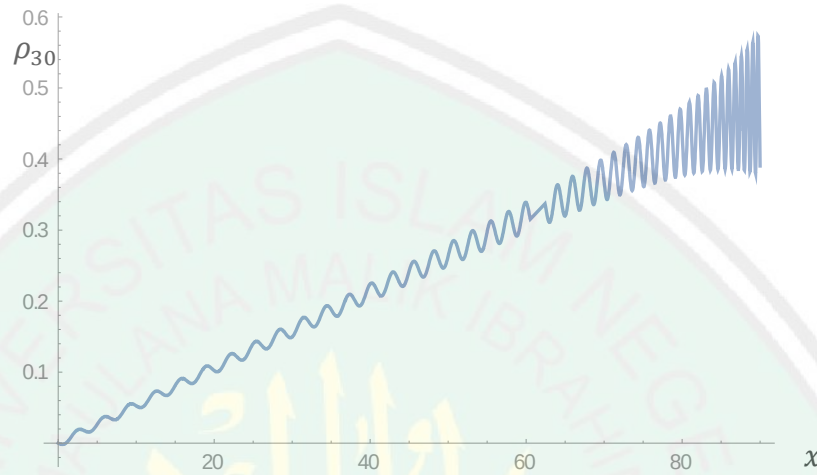
$$\rho_n = \frac{1}{2n\pi} \int_0^L \left[1 - \cos\left(n\pi \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)\right] dx$$

$$\rho_n = \frac{1}{2n\pi} \left[x - \left(\frac{t+x}{t-x}\right) \sin\left(n\pi \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right) \right] \Big|_0^L$$

$$\rho_n = \frac{1}{2n\pi} \left[L - \left(\frac{t+L}{t-L}\right) \sin\left(n\pi \ln\left(\frac{t+L}{t-L}\right)\right) \right]$$

$$\rho_n = \left[\frac{L}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{t+L}{t-L} \right) \sin \left(n\pi \ln \left(\frac{t+L}{t-L} \right) \right) \right] \quad (4.95)$$

Adapun persamaan (4.95) dapat diinterpretasikan ke dalam grafik menggunakan wolfram mathematica sebagai berikut:



Gambar 4.6 Rapat probabilitas dengan $n=30$

Gambar 4.6 menjelaskan bahwa keberadaan partikel paling banyak berada pada selang 80 hingga 90. Dalam artian, semakin mendekati dinding bergerak maka kemungkinan keberadaan partikel juga semakin besar.

4.9 Grafik Energi

Adapun formula yang digunakan untuk mendapatkan persamaan energi sebagai berikut:

$$\langle E \rangle = \int_0^x \psi^* i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi dx, \quad (4.96)$$

persamaan (4.96) dioperasikan dan didapatkan:

$$\langle E \rangle_n = \frac{i}{n\pi} \int_0^x e^{-\frac{ik_n}{2} \ln(t^2-x^2)} \sin \left(\frac{k_n}{2} \ln \left(\frac{t+x}{t-x} \right) \right) \cdot$$

$$\left[\frac{ik_n}{2} \frac{2t}{(t^2-x^2)} e^{\frac{ik_n}{2} \ln(t^2-x^2)} \sin \left(\frac{k_n}{2} \ln \left(\frac{t+x}{t-x} \right) \right) \right] -$$

$$+e^{\frac{ik_n}{2}\ln(t^2-x^2)}\cos\left(\frac{k_n}{2}\ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)\cdot\frac{k_n}{2}\left(\frac{t-x}{t+x}\right)\Big]dx$$

$$\begin{aligned}\langle E\rangle_n &= \frac{i}{n\pi}\int_0^x\left[\frac{in\pi}{2}\frac{2t}{(t^2-x^2)}\sin^2\left(\frac{k_n}{2}\ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)\right. \\ &\quad \left.+\frac{n\pi}{2}\left(\frac{t-x}{t+x}\right)\sin\left(\frac{k_n}{2}\ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)\cos\left(\frac{k_n}{2}\ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)\right]dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle E\rangle_n &= \frac{i}{n\pi}\int_0^x\left[\frac{in\pi}{2}\frac{2t}{(t^2-x^2)}\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(n\pi\ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)\right)+\right. \\ &\quad \left.\frac{n\pi}{2}\left(\frac{t-x}{t+x}\right)\frac{1}{2}\sin\left(n\pi\ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)\right]dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle E\rangle_n &= \frac{i}{n\pi}\int_0^x\left[\left(\frac{in\pi}{2}\frac{t}{(t^2-x^2)}-\frac{in\pi}{2}\frac{t}{(t^2-x^2)}\cos\left(n\pi\ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)\right)\right. \\ &\quad \left.+\frac{n\pi}{4}\left(\frac{t-x}{t+x}\right)\sin\left(n\pi\ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)\right]dx\end{aligned}$$

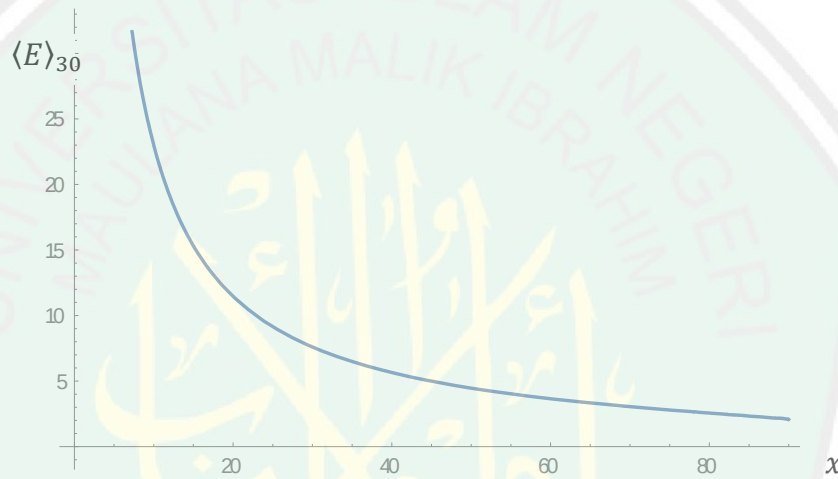
$$\begin{aligned}\langle E\rangle_n &= \frac{i}{n\pi}\left[\left(\int_0^x\frac{in\pi}{2}\frac{t}{(t^2-x^2)}dx-\int_0^x\frac{in\pi}{2}\frac{t}{(t^2-x^2)}\cos\left(n\pi\ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)dx\right)\right. \\ &\quad \left.+\int_0^x\frac{n\pi}{4}\left(\frac{t-x}{t+x}\right)\sin\left(n\pi\ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)dx\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle E\rangle_n &= \frac{i}{n\pi}\left[\frac{in\pi}{2}\left(-\frac{t}{2x}\right)\ln(t^2-x^2)\right. \\ &\quad \left.-\frac{in\pi}{2}\left[\frac{t}{(t-x)^2}\frac{1}{n\pi}\sin\left(n\pi\ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)+\frac{3t}{(n\pi)^2}\frac{t+x}{(t-x)^4}\cos\left(n\pi\ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)-\frac{3}{(n\pi)^2}\frac{1}{t^2}\right]\right. \\ &\quad \left.+\frac{n\pi}{4}\left[-\frac{1}{n\pi}\cos\left(n\pi\ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)+\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{(n\pi)^2}\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\sin\left(n\pi\ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)\right]\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle E\rangle_n &= \left[\left(\frac{t}{4x}\right)\ln(t^2-x^2)\right. \\ &\quad \left.+\frac{1}{2}\left[\frac{t}{(t-x)^2}\frac{1}{n\pi}\sin\left(n\pi\ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)+\frac{3t}{(n\pi)^2}\frac{t+x}{(t-x)^4}\cos\left(n\pi\ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right)-\frac{3}{(n\pi)^2}\frac{1}{t^2}\right]\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{4} \left[-\frac{1}{n\pi} \cos \left(n\pi \ln \left(\frac{t+x}{t-x} \right) \right) + \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{(n\pi)^2} \left(\frac{t+x}{t-x} \right) \sin \left(n\pi \ln \left(\frac{t+x}{t-x} \right) \right) \right] \\
\langle E \rangle_n & = \left[\left(\frac{t}{4x} \right) \ln(t^2 - x^2) + \frac{t}{(t-x)^2} \frac{1}{2n\pi} \sin \left(n\pi \ln \left(\frac{t+x}{t-x} \right) \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{3t}{2(n\pi)^2} \frac{t+x}{(t-x)^4} \cos \left(n\pi \ln \left(\frac{t+x}{t-x} \right) \right) - \frac{3}{2(n\pi)^2} \frac{1}{t^2} \right]. \quad (4.97)
\end{aligned}$$

Adapun persamaan (4.97) dapat diinterpretasikan ke dalam grafik menggunakan wolfram mathematica sebagai berikut:



Gambar 4.7 Energi dengan $n=30$

Pada gambar 4.7 menggambarkan energi pada bilangan kuantum atau kulit ke 30. Setiap partikel memiliki energi di dalamnya, saat partikel tersebut bergerak. Energi digunakan partikel untuk berinteraksi dengan partikel lain di dalam sistem. Energi akan hilang atau berkurang apabila partikel berinteraksi atau bertumbukan dengan partikel lain dan efek dari tumbukan tersebut menghasilkan lenting yang tidak sempurna. Lenting yang sempurna menandakan bahwa partikel memiliki energi yang sama saat awal sebelum tumbukan dan setelah tumbukan.

Tumbukan diartikan sebagai interaksi yang dahsyat antara dua benda yang berlangsung pada waktu yang relatif singkat (Zemansky, 2002). Definisi

tumbukan sebagai interaksi yang terjadi dalam waktu Δt yang dapat diabaikan terhadap lamanya waktu pengamatan sistem juga dapat dicirikan sebagai peristiwa dengan gaya eksternal yang bekerja pada sistem dapat diabaikan bila dibandingkan dengan gaya tumbukan impulsive. Misalnya ketika pemukul memukul baseball atau tongkat golf memukul bola golf atau satu bola billiard menumbuk yang lainnya, ada gaya eksternal yang bekerja pada sistem, misalnya gravitasi atau gesekan (Halliday, 1999).

Hasil grafik pada gambar 4.7 menunjukkan bahwa setiap rentang 10 pada sumbu x, energi mengalami penurunan. Penurunan energi ini bisa dipastikan karena adanya tumbukan antar partikel akibat pergeseran dinding (Dodonov, 1993). Penurunan nilai dari energi yang paling drastis terjadi pada rentang 80-90. Pada rentang tersebut partikel berada dekat dinding bergerak. Hal ini menandakan bahwa ruang yang berada didekat dinding bergerak menjadi tempat terjadinya tumbukan paling banyak. Semakin banyak partikel ditemukan pada rentang tersebut semakin besar peluang terjadinya tumbukan.

Pada saat partikel bertumbukan dengan partikel yang lain, disaat itu partikel kehilangan energi. Hilangnya energi terjadi karena partikel menggunakan energi untuk melakukan proses tumbukan. Partikel yang berada didekat dinding yang statis memiliki energi yang lebih besar daripada partikel yang berada didekat dinding yang bergerak. Jumlah partikel yang berada didekat dinding yang statis tidak terlalu banyak sehingga jarang terjadi tumbukan dan energi pun tidak banyak berkurang.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan solusi dari persamaan Klein Gordon pada sumur potensial tak terhingga dengan dinding yang bergerak dapat disimpulkan bahwa:

1. Perilaku partikel akibat pergerakan dinding terangkum dalam fungsi gelombang pada kulit ke n yaitu:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cos\left(\pm \frac{n\pi}{2} \ln(t^2 - x^2)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2} \ln\left(\frac{t+x}{t-x}\right)\right).$$

Fungsi gelombang secara fisis tidak memiliki arti. Namun interpretasi fungsi gelombang yang dibuat dalam bentuk grafik menyajikan informasi penting untuk dibahas. Pergerakan dinding mempengaruhi secara signifikan pergerakan partikel yang berada di dalam sistem tersebut. Misalnya pada gambar 4.4, gelombang memiliki pola yang berbeda saat rentang 0-20, 20-45, dan 45-90. Namun setiap tingkatan kulit memiliki pola yang terlihat sama. Hal ini dikarenakan kecepatan dinding pada sumur potensial tak terhingga dibuat konstan.

2. Rapat probabilitas yang didapatkan dari perkalian antar fungsi gelombang dapat ditulis sebagai berikut:

$$\rho_n = \left[\frac{L}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{t+L}{t-L} \right) \sin\left(n\pi \ln\left(\frac{t+L}{t-L}\right)\right) \right]$$

Grafik yang didapatkan dari persamaan rapat probabilitas yaitu pada gambar 4.6 menunjukkan bahwa partikel paling banyak ditemukan di daerah yang

memiliki rentang 80-90. Semakin mendekati dinding bergerak maka semakin besar kemungkinan keberadaan partikel.

3. Posisi rata-rata yang didapat dari fungsi gelombang dapat ditulis sebagai berikut: $\langle x \rangle_{\psi_n} =$

$$\frac{L^2}{4n\pi} - \frac{L}{2n\pi} \left(\frac{t+L}{t-L} \right) \cdot \sin \left(n\pi \ln \left(\frac{t+L}{t-L} \right) \right) - \frac{1}{2n\pi} \left(\frac{t+L}{t-L} \right)^2 \cos \left(n\pi \ln \left(\frac{t+L}{t-L} \right) \right) + \frac{1}{2n\pi}$$

Semakin dekat partikel dengan dinding bergerak maka semakin rapat gelombang yang dibentuk sehingga semakin rapat pula antar partikel dan bisa menjadi kemungkinan partikel bertumbukan dengan partikel lain.

$$\begin{aligned} \langle E \rangle = & \left[\left(\frac{t}{4x} \right) \ln(t^2 - x^2) + \frac{t}{(t-x)^2} \frac{1}{2n\pi} \sin \left(n\pi \ln \left(\frac{t+x}{t-x} \right) \right) \right. \\ & \left. + \frac{3t}{2(n\pi)^2} \frac{t+x}{(t-x)^4} \cos \left(n\pi \ln \left(\frac{t+x}{t-x} \right) \right) - \frac{3}{2(n\pi)^2} \frac{1}{t^2} \right] \end{aligned}$$

Semakin dekat partikel dengan dinding yang bergerak maka energi partikel semakin kecil. Hal ini dikarenakan jumlah partikel yang berada didekat dinding bergerak lebih banyak sehingga energi partikel juga banyak yang berkurang akibat tumbukan dengan partikel yang lain.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menambahkan pengaruh medan elektromagnetik pada sistem.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Qur'an dan Terjemah. 2009. Bandung: Departemen Agama RI.
- Al-Qarni, Dr. Aidh. 2008. *Tafsir Muyassar*. Jakarta: Qisthi Press.
- Cooney, Kieran. 2017. *The Infinite Potential Well with Moving Walls*. University College Cork.
- Departemen Agama RI. 2010. *Al-Qur'an dan Tafsirnya* (Edisi yang Disempurnakan). Jakarta: Lentera Abadi.
- Dodonov.V.V, et all.1993. *Quantum Particle in a Box with Moving Walls*.Journal of Mathematical physics.34(8).3391-3404.American Institute of Physics.
- Fermi, Enrico. 1949. *On the Origin of the Cosmic Radiation*. *Physical Review*. Vol. 75. No. 8 (April 15, 1949): 1169-1174.
- Fojon, O., Gadella, M., Lara, L. P. 2009. *The Quantum Square Well with Moving Boundaries: A Numerical Analysis*. Computers and Mathematics with application. Vol 59. 964-976. Argentina: Elsevier Ltd.
- Greiner, Professor Dr. Walter. 1986. *Relativistic Quantum Machanics Wave Equations*: Berlin.
- Griffiths, J. David. 2005. *Introduction to Quantum Mechanics Second Edition*. Pearson Education International: United States of America.
- Halliday, David. 1999. *Fisika Jilid I Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga.
- Martino, Sara Di. dkk. 2013. *A Quantum particle in a box with moving walls*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 46(August 20, 2013): 1-10. Italy. Online at stacks.10p.org/JphysA/46/365301.
- Neyman, Jerzy. Project Euclid. *Proceedings of The Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistic and Probability*: June 20 – July 30, 1960; Statistical Laboratory of The University of California. Berkeley, California: University Of California Press. 355pp. ISSN:0097-0433.

Purwanto, Agus. 2005. *Fisika Kuantum*. Yogyakarta : Penerbit Gava Media.

S.M. Ulam. 1961. *Mathematical statistic and probability*. University of California: Barkeley.

Zemansky, Sears. 2002. *Fisika Universitas Jilid I Edisi Kesepuluh*. Jakarta: Erlangga.





LAMPIRAN



LAMPIRAN I



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ruby Maulana Putra
NIM : 13640060
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Fisika
Judul Skripsi : Studi Persamaan Klein Gordon Pada Sumur Potensial Tak Terhingga Dengan Dinding Bergerak
Pembimbing I : Erika Rani, M. Si
Pembimbing II : Ahmad Abtokhi, M. Pd

NO	TANGGAL	MATERI	TANDA TANGAN
1	28 NOVEMBER 2018	Konsultasi Bab I, dan II	
2	19 DESEMBER 2018	Konsultasi Bab III	
3	21 MARET 2019	Konsultasi Pegolahan Data	
4	18 SEPTEMBER 2019	Konsultasi Pembahasan Bab IV	
5	27 NOVEMBER 2019	Konsultasi Kajian Al-Quran, Bab I, II dan IV	
6	28 NOVEMBER 2019	Konsultasi Bab IV dan V	
7	19 DESEMBER 2019	Konsultasi kajian agama dan Acc	
8	13 DESEMBER 2019	Konsultasi semua Bab, Abstrak dan Acc	

Malang,
Mengetahui,
Ketua Jurusan Fisika

Drs. Abdul Basid, M.Si
NIP. 19650504 199003 1 003