

**ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA INTERAKSI
HOST-PARASITOID**

SKRIPSI

**OLEH
MAHDIATUL MAKNUN
NIM. 14610055**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019**

**ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA INTERAKSI
HOST-PARASITOID**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Mahdiatul Maknun
NIM. 14610055**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019**

ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA INTERAKSI

HOST-PARASITOID


SKRIPSI

Oleh
Mahdiatul Maknun
NIM. 14610055

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 12 November 2018

Pembimbing I,

Pembimbing II,


Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001


Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004



Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

**ANALISIS DINAMIK MODEL MATEMATIKA INTERAKSI
HOST-PARASITOID**

SKRIPSI

Oleh
Mahdiatul Maknun
NIM. 14610055

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 28 November 2018

Penguji Utama : Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D

Ketua Penguji : Ari Kusumastuti, M.Si., M.Pd

Sekretaris Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Anggota Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si



Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Mahdiatul Maknun
NIM : 14610055
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Penelitian : Analisis Dinamik Model Matematika Interaksi
Host-Parasitoid

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 November 2018
Yang membuat pernyataan,



Mahdiatul Maknun
NIM. 14610055

MOTO

“Jangan pernah berusaha untuk menjadi yang terbaik. Tapi tunjukkan versi terbaik dari dirimu, sehingga tak akan ada penyesalan atas segalanya”

“You think big, you get ever bigger”



PERSEMBAHAN

Penulis persembahkan karya tulis ini kepada:

Orang tua tercinta Papa Totok Eko Harianto dan Mama Khotimatul Hasanah,
Seluruh pihak yang sayang terhadap penulis, serta sahabat yang senantiasa
memberikan dukungan dan doa.





KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah, segala puji dan syukur hanya bagi Allah SWT atas limpahan rahmat, hidayah dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan baik yang berjudul “ Analisis Dinamik Model Matematika Interaksi *Host-Parasitoid*”.

Shalawat dan salam semoga tetap terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun umatnya dari zaman yang jauh dari ilmu pengetahuan ke zaman yang penuh dengan cahaya keilmuan yakni agama Islam.

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini dapat diselesaikan dengan bantuan, bimbingan, dan arahan dari berbagai pihak. Doa serta ucapan terima kasih sebesar-besarnya dan dengan segenap kerendahan hati penulis sampaikan kepada :

1. Prof Dr. H. Abd Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

- sekaligus sebagai dosen pembimbing I yang memberikan arahan, nasihat, dan motivasi kepada penulis.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang memberikan arahan, nasihat, dan motivasi kepada penulis.
 5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam perkuliahan.
 6. Mama, papa dan seluruh keluarga tercinta yang senantiasa memberikan doa, semangat dan motivasi kepada penulis.
 7. Sahabat-sahabat terbaik penulis yang selalu menemani, membantu dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
 8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2014 (Math Eigen) khususnya Matematika-B 2014, kontrakan greenhouse, sahabat-sahabat PMII rayon “Pencerahan” Galileo, sahabat-sahabat Komisariat PMII Sunan Ampel, teman-teman Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) “Integral” Matematika, teman-teman DEMA-U yang berjuang bersama meraih mimpi, terimakasih kenang-kenangan indah yang sudah dirajut bersama dalam menggapai cita dan impian.
 9. Seluruh pendukung penulis di jurusan matematika Iffana Intanlya F yang selalu menjadi tempat keluh kesah penulis. Kamal yang sudah menjadi kakak bagi penulis. Halimah, Adji, Atika, Luluk, Ulul, Anik, Nanum, Abdul, Yogas, Farah Aunil, Farah R, Ummah and the geng, dan terimakasih kepada seluruh

teman-teman jurusan yang telah mensukseskan dan memperlancar penulis dalam mengerjakan skripsi.

10. Seluruh sahabat-sahabat penulis Dinda ipink, Moza kucing, Ghulam, Aidana, mas Hamdan yang selalu memberikan doa dan dukungan serta motivasi agar penulis selalu semangat mengerjakan skripsi.
11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas atau bahkan hikmah bagi penulis, pembaca, dan seluruh mahasiswa

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 12 Februari 2019

Penulis

DAFTAR ISI

| | |
|--|------|
| HALAMAN JUDUL | |
| HALAMAN PENGAJUAN | |
| HALAMAN PERSETUJUAN | |
| HALAMAN PENGESAHAN | |
| HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN | |
| HALAMAN MOTO | |
| HALAMAN PERSEMBAHAN | |
| KATA PENGANTAR | vii |
| DAFTAR ISI | x |
| DAFTAR GAMBAR | xii |
| DAFTAR TABEL | xiii |
| ABSTRAK | xiv |
| ABSTRACT | xv |
| ملخص | xvi |
| BAB 1 PENDAHULUAN | |
| 1.1 Latar Belakang | 1 |
| 1.2 Rumusan Masalah | 3 |
| 1.3 Tujuan Penelitian..... | 3 |
| 1.4 Manfaat Penelitian..... | 3 |
| 1.5 Batasan Masalah..... | 3 |
| 1.6 Metode Penelitian..... | 4 |
| 1.7 Sistematika Penulisan..... | 5 |
| BAB II KAJIAN PUSTAKA | |
| 2.1 Sistem Dinamik | 6 |
| 2.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Bergantung Waktu..... | 6 |
| 2.3 Sistem Persamaan Linier dan Nonlinier..... | 8 |
| 2.4 Solusi Umum Sistem Persamaan Diferensial..... | 11 |
| 2.5 Titik Tetap..... | 16 |
| 2.6 Linierisasi | 16 |
| 2.7 Nilai Eigen dan Vektor Eigen | 18 |
| 2.8 Kriteria Routh-Hurwitz | 20 |
| 2.9 Kestabilan Titik Tetap..... | 20 |

| | | |
|------|---|----|
| 2.10 | Host-parasitoid | 23 |
| 2.11 | Kajian Al-Qur'an tentang Kestabilan Ekosistem | 23 |

BAB III PEMBAHASAN

| | | |
|-------|--|----|
| 3.1 | Model Persamaan Diferensial Biasa <i>Host – Parasitoid</i> | 25 |
| 3.1.1 | Identifikasi Model <i>Host-Parasitoid</i> | 25 |
| 3.1.2 | Analisis Model <i>Host-Parasitoid</i> | 27 |
| 3.1.3 | Analisis Perilaku <i>Host-Parasitoid</i> | 28 |
| 3.1.4 | Parameter | 29 |
| 3.2 | Analisis Dinamik Model <i>Host–Parasitoid</i> | 29 |
| 3.2.1 | Titik Tetap | 29 |
| 3.2.2 | Linierisasi | 33 |
| 3.2.3 | Analisis Kestabilan | 35 |
| 3.3 | Simulai Model Matematika <i>Host – Parasitoid</i> | 41 |

BAB IV PENUTUP

DAFTAR RUJUKAN

LAMPIRAN-LAMPIRAN



DAFTAR GAMBAR

| | | |
|-------------------|---|----|
| Gambar 2.1 | (a) Node Tidak Stabil, (b) Node stabil Asimtotik, (c) Node Tidak Stabil, (d) Node Stabil Asimtotik, (e) Saddle tidak Stabil, (f) Center Stabil, (g) Spiral tidak Stabil, (h) Spiral Stabil Asimtotik..... | 23 |
| Gambar 3.1 | Grafik Simulasi <i>Host Pieris Brassicae</i> , persamaan 3.1 dengan nilai awal $N(0) = 0.75$ dan Nilai $t = 700$ | 41 |
| Gambar 3.2 | Grafik Simulasi <i>Host Pieris Rapae</i> , persamaan 3.2 dengan nilai awal $N(0) = 0.75$ dan Nilai $t = 700$ | 42 |
| Gambar 3.3 | Grafik Simulasi <i>parasitoid cotesia glomerata</i> , persamaan 3.3 dengan nilai awal $P(0) = 0.075e^{-125x^2}$ dan $t = 700$ | 43 |
| Gambar 3.4 | Grafik Simulasi <i>parasitoid parasitoid cotesia rubecula</i> , persamaan 3.4 dengan nilai awal $Q(0) = 0.075e^{-125x^2}$ dan nilai $t = 700$ | 44 |
| Gambar 3.5 | Grafik Simulasi interaksi <i>host-parasitoid</i> 4 persamaan dengan $t = 700$ | 45 |

DAFTAR TABEL

| | | |
|------------------|--|----|
| Tabel 2.1 | Kestabilan Titik Keseimbangan dari Sistem Dinamik..... | 22 |
| Tabel 3.1 | Nilai Parameter persamaan diferensial biasa <i>Host-Parasitoid</i> | 33 |
| Tabel 3.2 | Nilai Awal <i>Host-Parasitoid</i> | 33 |



ABSTRAK

Maknun, Mahdiatul. 2018. **Analisis Dinamik Model Matematika Interaksi *Host-Parasitoid***. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Mohammad Jamhuri, M.Si.

Kata kunci: *Host-Parasitoid*, Model populasi, Analisis Dinamik, Titik tetap, Linierisasi, Kestabilan.

Sistem Dinamik merupakan formulasi dari suatu model matematis untuk setiap aturan yang tetap dan menggambarkan tentang ketergantungan suatu titik dalam ruang di sekitar parameter. Dalam hal ini parameter yang digunakan adalah waktu. Suatu sistem dinamik dapat di analisis dengan melakukan analisis dinamik yaitu dengan menentukan titik tetap, linierisasi, analisis kestabilan, menentukan nilai Eigen dan vektor Eigen, dan membuat gambar grafik dinamik.

Terdapat banyak model interaksi antar makhluk hidup didalam suatu ekosistem, salah satunya adalah model interaksi *Host-Parasitoid*. Model *Host-Parasitoid* ini terdiri dari empat spesies, dua spesies *host* (*pieris brassicae* dan *pieris rapae*), dan dua spesies *Parasitoid* (*cotesia glomerata* dan *cotesia rubecula*). *Cotesia glomerata* merupakan generalis, karena merupakan spesies yang menyerang kedua *host*. kemudian *cotesia rubecula* adalah spesies yang menjadi parasit pada spesies *host pieris rapae*. Model dari persamaan *Host-Parasitoid* ini termasuk dalam sistem persamaan diferensial nonlinier.

Berdasarkan dari permasalahan *Host-Parasitoid*, maka penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana analisis dinamik model matematika interaksi *Host-Parasitoid* tersebut. Sehingga dapat mengetahui bagaimana pengaruh antara spesies *host* dan spesies *Parasitoid*, serta dapat mengetahui proses punahnya spesies *host* maupun spesies *Parasitoid*. Analisis dinamik dari sistem persamaan diferensial *Host-Parasitoid* menghasilkan suatu titik tetap dan hasil dari analisis kestabilan titik tetap tersebut adalah stabil.

ABSTRACT

Maknun, Mahdiatul. 2018. **Dynamic Analysis of Mathematical Models *Host-Parasitoid* Interaction**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Mohammad Jamhuri, M.Si.

Keyword: *Host-Parasitoid*, Population model, dynamic analysis, fixed point, linearization, stability.

Dynamic System is a formulation of a mathematical model for each fixed rule and describes the dependence of a point in space around the parameters. In this case the parameter used is time. A dynamic system can be analyzed by performing dynamic analysis, namely by determining the point of reference, linearization, stability analysis, determining the Eigen value and Eigen vector, and drawing a dynamic graph image.

There are many models of interaction between living things in an ecosystem, one of which is a model of *Host-Parasitoid* interactions. The *Host-Parasitoid* model consists of four species, two host species (*Pieris brassicae* and *Pieris rapae*), and two species of parasitoid (*Cotesia glomerata* and *Cotesia rubecula*). *Cotesia glomerata* as a generalist that attacks both hosts. Then *Cotesia rubecula* is a parasitic species in the host species *Pieris Rapae*. The model of the *Host-Parasitoid* is a system of nonlinear differential equations.

Based on the problem of *Host-Parasitoid*, this research is aimed to know how dynamic analysis of the mathematical models interaction *Host-Parasitoid*. So that it can find out how the influence between host species and parasitoid species. Then we can know the extinction process of host species or parasitoid species. The dynamic analysis of the system of *Host-Parasitoid* differential equations produces a fixed point and the results of the analysis of the fixed point stability above are stable.

ملخص

مكون, مهديّة. ٢٠١٨. لتحليل الديناميكي للنماذج الرياضية للتفاعل بين الطفيليات المضيفة. بحث جامعي. قسم الرياضيات, كلية العلوم والتكنولوجيا, الجامعة الحكومية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. . المشرف: (١) الدكتور عثمان فاغلاي الماجستير (٢) مُجّد جمهوري الماجستير

كلمة المفتاحية: المضيف طفيل، نموذج السكان، التحليل الديناميكي، النقطة الثابتة، الخطية، الاستقرار،

النظام الديناميكي عبارة عن تركيبة نموذج رياضي لكل قاعدة ثابتة ويصف اعتماد نقطة في الفضاء حول المعلمات. في هذه الحالة، تكون المعلمة المستخدمة هي الوقت. يمكن تحليل النظام الديناميكي عن طريق إجراء تحليل ديناميكي، وتحديدًا من خلال تحديد نقطة المرجعية، الخطية، تحليل الثبات، تحديد قيمة Eigen و Eigen vector، ورسم صورة الرسم البياني الديناميكي.

ناك العديد من نماذج التفاعل بين الكائنات الحية في نظام بيئي، أحدها نموذج للتفاعلات الطفيلية. يتكون نموذج العدوى المضيفة من أربعة أنواع، نوعان مستضيفان (*pierris brassicae*) و (*pierris rapae*)، ونوعان من الطفيليات (*cotesia glomerata*) و *Cotesia rubecula*. *glomerata* هو اختصاصي، لأنه نوع يهاجم كلا المضيفين. ثم *cotesia rubecula* هو نوع طفيلي في الأنواع المضيفة *Pieris rapae*. يتم تضمين نموذج معادلة الطفيلي المضيف في نظام المعادلات التفاضلية غير الخطية.

استناداً إلى مشكلة الطفيلي المضيف، تهدف هذه الدراسة إلى معرفة كيفية تحليل ديناميكي للنموذج الرياضي للتفاعل بين الطفيل المستضيف. حتى يتسنى لها معرفة مدى التأثير بين الأنواع المضيفة وأنواع الطفيليات، ويمكنها معرفة عملية انقراض الأنواع المضيفة وأنواع الطفيليات. التحليل الديناميكي لنظام معادلات التفاضل بين المضيفين الطفيلية ينتج نقطة ثابتة: نتائج تحليل استقرار النقطة الثابتة أعلاه مستقرة.

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sistem dinamik adalah formalisasi matematis untuk setiap aturan yang tetap (fungsi) yang menggambarkan ketergantungan posisi titik dalam beberapa ruang di sekitar parameter. Parameter di sini sering disebut dengan “waktu” dan dapat berbentuk diskrit yang dinyatakan dalam bilangan bulat dan kontinu yang dinyatakan dalam suatu interval di R (Tohaneanu, 2014:1).

Penelitian ini membahas tentang analisis dinamik pada persamaan diferensial *Host-Parasitoid* empat spesies yang dijabarkan secara sistematis tentang persamaan diferensial dari model tersebut dan menganalisis sistem persamaan diferensial tersebut sesuai dengan perilaku pada spesies *Parasitoid* terhadap *host*. Model tersebut memiliki empat persamaan yaitu laju pertumbuhan pada spesies *host primary* (host utama) yakni *Pieris brassicae*, laju pertumbuhan pada spesies *host* kedua yakni *Pieris rapae*, laju pertumbuhan pada *Parasitoid general* yakni *cotesia glomerata*, dan laju pertumbuhan pada *Parasitoid* kedua yakni *cotesia rubecula*. Peneliti melakukan analisis untuk kestabilan pada model persamaan tersebut dengan menentukan nilai Eigen, vektor Eigen, linierisasi, dan titik tetap. Kemudian dari semua itu dapat dihasilkan gambaran dengan membuat simulasi menggunakan matlab atau maple.

Parasitoid serangga adalah serangga yang stadia pradewasanya menjadi parasit pada atau didalam tubuh serangga lain, sementara imago hidup bebas mencari nektar dan embun madu sebagai makanannya (Purnomo, 2010:26).

Fase larva parasitoid hanya dapat hidup pada fase inang tertentu terutama fase telur dan larva, sehingga kelanjutan hidup parasitoid hanya dapat ditentukan oleh ketersediaan fase inangnya yang tepat (Maisyaroh, 2014:09-10).

Persamaan yang digunakan dalam penelitian ini merupakan persamaan yang terdapat pada jurnal Pearce (2006) bahwa di dalam jurnal tersebut terdapat model *Host-Parasitoid*. Berdasarkan jurnal tersebut peneliti mencoba untuk melakukan analisis dinamik dari persamaan *Host-Parasitoid* tersebut. Model tersebut memiliki peran yang penting dalam bidang ekologi, karena *Host-Parasitoid* adalah salah satu contoh sederhana dari ekosistem didalam kehidupan sehari-hari. Kehidupan yang saling bergantung satu sama lain. Sebagaimana yang telah di jelaskan dalam QS. Al-Hijr ayat 20 yang artinya berbunyi “*Dan Kami telah menjadikan untukmu di bumi keperluan-keperluan hidup, dan (Kami menciptakan pula) makhluk-makhluk yang kamu sekali-kali bukan pemberi rezeki kepadanya*” (QS. Al-Hijr: 20).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa ekosistem di bumi memiliki manfaat masing-masing dan saling bergantung bagi makhluk hidup lainnya. Peneliti berpendapat bahwa mempelajari tentang *Host-Parasitoid* akan mengetahui pentingnya menjaga keharmonisan ekosistem termasuk rantai makanan pada ekosistem agar terjaga dan selalu berkaitan erat.

Oleh karena itu, dalam penelitian pada kali ini peneliti mengambil judul “*Analisis Dinamik Model Matematika Interaksi Host-Parasitoid*” yang akan menganalisis model persamaan diferensial biasa *Host-Parasitoid* pada jurnal Pearce.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka permasalahan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis model matematika interaksi *Host-Parasitoid*?
2. Bagaimana analisis dinamik model matematika interaksi *Host-Parasitoid*?
3. Bagaimana simulasi model matematika interaksi *Host-Parasitoid*?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan permasalahan tersebut, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui analisis dari model matematika interaksi *Host-Parasitoid*
2. Mengetahui analisis dinamik model matematika *Host-Parasitoid*
3. Dapat membuat simulasi model matematika interaksi *Host-Parasitoid*.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari dilakukannya penelitian ini adalah untuk menambah wawasan kepada pembaca tentang pemodelan matematika, kehidupan parasitoid, analisis dinamik tentang interaksi yang terjadi dalam *host – Parasitoid*.

1.5 Batasan Masalah

Sistem persamaan yang di gunakan dalam penelitian ini memiliki empat persamaan diferensial. Sehingga penulis membuat batasan masalah penelitian dalam pembahasan, yaitu :

1. Model yang digunakan dalam penelitian saat ini adalah model persamaan diferensial biasa pada *Host-Parasitoid* yang diambil dari jurnal Pearce (2006) dengan empat persamaan

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)(1 - N(t)) - s_1P(t)(1 - e^{-\rho_1N(t)}) \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM(t)}{dt} = & \gamma M(t)(1 - M(t)) - s_2P(t)(1 - e^{-\rho_2M(t)}) \\ & - s_3Q(t)(1 - e^{-\rho_3M(t)}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = c_1P(t)(1 - e^{-\rho_1N(t)}) + c_2P(t)(1 - e^{-\rho_2M(t)}) - \mu_1P(t) \quad (1.3)$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = c_3Q(t)(1 - e^{-\rho_3M(t)}) - \mu_2Q(t) \quad (1.4)$$

2. Analisis model tersebut ditujukan kepada analisis kestabilan di sekitar titik tetap dan simulasi model.

1.6 Metode Penelitian

Beberapa langkah yang dilakukan penulis dalam melakukan analisis dinamik dan interpretasi pada penelitian tersebut :

1. Melakukan identifikasi pada model *Host-Parasitoid*
2. Melakukan analisis model *Host-Parasitoid*
3. Melakukan analisis perilaku *Host-Parasitoid*
4. Menentukan titik tetap.
5. Melakukan linierisasi sistem persamaan model *Host-Parasitoid*
6. Menentukan kestabilan
7. Menentukan nilai Eigen dan vektor Eigen
8. Membuat simulasi dengan menggunakan Matlab
9. Melakukan interpretasi gambar atau menganalisis hasil simulasi
10. Membuat kesimpulan

1.7 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan yang akan digunakan agar penulisan skripsi ini lebih baik, terarah, mudah dipahami, dan mudah ditelaah adalah terdiri dari empat bab yang masing-masing bab nya dibagi ke dalam beberapa subbab yaitu sebagai berikut :

BAB I Pendahuluan

Pada bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Kajian Pustaka

Pada bab kedua ini berisi tentang kajian – kajian yang akan menjadi landasan pada masalah yang dibahas, yaitu tentang sistem dinamik, persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial linier dan nonlinier, titik tetap, linierisasi, vektor Eigen dan nilai Eigen, analisis kestabilan, dan parasitoid.

BAB III Pembahasan

Pada bab ketiga ini dibahas tentang analisa persamaan diferensial pada interaksi *Host-Parasitoid*, linearisasi, titik tetap dan analisis kestabilan pada model *Host-Parasitoid*, membuat simulasi model dan interpretasi gambar.

BAB IV Penutup

Berisi tentang kesimpulan dan saran

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah formalisasi matematis untuk setiap aturan yang tetap (fungsi) yang menggambarkan ketergantungan posisi titik dalam beberapa ruang di sekitar parameter. Parameter di sini sering disebut dengan “waktu” dan dapat berbentuk diskrit yang dinyatakan dalam bilangan bulat dan kontinu yang dinyatakan dalam suatu interval di R (Tohaneanu, 2014:1). Jika dikaji secara geometri, sistem dinamik menggambarkan pergerakan titik-titik di dalam ruang fase sepanjang kurva-kurva solusi dari sistem persamaan diferensialnya (Roat, 2012:7).

Suatu sistem dinamik terdiri dari satu himpunan dari variabel-variabel yang menggambarkan keadaan dan aturan yang menjelaskan perubahan keadaan dari suatu variabel-variabel terhadap waktu (yaitu, bagaimana keadaan dari sistem di saat berikutnya yang tergantung waktu dan keadaan yang ada pada waktu sebelumnya) (Izhikevich, 2007:8).

2.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Bergantung Waktu

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n buah fungsi yang tidak diketahui. Sistem persamaan diferensial variabel bebas misalnya (x_1, x_2, \dots, x_n) yang dimana masing-masing darinya merupakan sebuah fungsi dari satu variabel bebas misal variabel t (Kartono, 2012).

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

dengan x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel bebas dan t adalah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, dengan $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivatif fungsi x_n terhadap t (Kartono, 2012).

Kartono (2012) membahas metode penyelesaian pada sistem persamaan diferensial dan menggunakan dua persamaan diferensial linier orde pertama

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x, y) \tag{2.2}$$

$$\frac{dy}{dt} = G(t, x, y) \tag{2.3}$$

dimana persamaan linier pada masing-masing fungsi menyatakan dalam bentuk:

$$f_1(W)x + g_1(W)y = s_1(t) \tag{2.4}$$

dengan operator $W = \frac{d}{dt}$.

Waluya (2006) memberikan contoh pada sistem persamaan diferensial tersebut. Contoh sederhana yang digunakan yaitu sistem dua massa pegas dengan masing-masing massa m_1 dan m_2 diberikan gaya berturut-turut $F_1(t)$ dan $F_2(t)$.

Pada masa berlaku hukum Newton

$$\sum F_1 = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} \text{ dan } \sum F_2 = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} \quad (2.5)$$

dengan $\sum F_1$ dan $\sum F_2$ adalah jumlah gaya pada m_1 dan m_2 berturut-turut. Pada persamaan $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ adalah pasangan karena dikaitkan dengan sebuah pegas yang mempunyai konstanta pegas k_2 . Oleh karena itu sistem yang terbentuk dinyatakan sebagai:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) + F_1 = -(k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 + F_1 \quad (2.6)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_3 x_2 + k_2 (x_2 - x_1) + F_2 = -(k_2 + k_3) x_2 + k_2 x_3 + F_2 \quad (2.7)$$

2.3 Sistem Persamaan Linier dan Nonlinier

Sistem persamaan linier merupakan persamaan yang terdiri lebih dari satu persamaan yang saling terkait. Sistem dari dua persamaan diferensial dengan dua fungsi yang tak diketahui berbentuk:

$$x_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + a_1(t)$$

$$x_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t)$$

Dimana koefisien $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ dan f_1, f_2 merupakan fungsi t yang kontinu pada suatu selang I dan x_1, x_2 adalah fungsi t yang tidak diketahui (Finizio dan Ladas, 1988:132).

Suatu operator \mathcal{L} dikatakan linier jika memenuhi sifat *superposition* dan *homogeneity* yaitu: $\mathcal{L}(u + v) = \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v)$ dan $\mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}(u)$. Untuk setiap fungsi u dan v , dan konstanta c . Suatu persamaan diferensial berbentuk $\mathcal{L}(u) = 0$ dikatakan linier jika operator \mathcal{L} linier (Hedrick dan Girard, 2010:10).

Adapun contoh sistem linier adalah sebagai berikut. Diberikan persamaan diferensial linier orde dua: $\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$.

Persamaan tersebut adalah model linier dari fungsi pegas. \dot{x} mewakili $\frac{dx}{dt}$ dan \ddot{x}

mewakili $\frac{d^2x}{dt^2}$. Untuk menghitung pergerakannya, harus diketahui posisi dari x

dan kecepatan \dot{x} . Diketahui posisi dan kecepatan adalah kuantitas untuk menghitung gerak, jadi dapat menggunakan koordinatnya. Misal $x_1 = x$ dan $x_2 = \dot{x}$, sehingga persamaan di atas dapat ditulis sebagai sistem persamaan diferensial linier orde satu.

$$x_1\dot{x}_1 = x_2\dot{x}_2 = -kx_1 - bx_2$$

atau dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Untuk melihat sistem tersebut adalah linier, akan dibuktikan bahwa dapat memenuhi definisi. Dari sistem di atas dapat diperoleh:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 + kx_1 + bx_2 \end{bmatrix}$$

1. $\mathcal{L}(u + v, p + q) = \begin{bmatrix} (\dot{u} + \dot{v}) - (p + q) \\ (\dot{p} + \dot{q}) + k(u + v) + b(p + q) \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} (\dot{u} - p) + (\dot{v} - q) \\ (\dot{p} + ku + bp) + (\dot{q} + kv + bq) \end{bmatrix} = \mathcal{L}(u, p) + \mathcal{L}(v, q)$
2. $\mathcal{L}(cu, cv) = \begin{bmatrix} c\dot{u} + cv \\ c\dot{v} + kcu + bcv \end{bmatrix} = c\mathcal{L}(u, v)$

Terbukti bahwa sistem merupakan sistem linier. Generalisasi dari sistem linier dengan n variabel dengan koefisien konstan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n\end{aligned}\tag{2. 8}$$

dimana semua $a_{i,j}$ adalah konstanta bilangan real. Dengan menggunakan notasi matriks dapat ditulis sebagai:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

dimana \mathbf{A} adalah matriks ukuran $n \times n$ dengan konstanta real $a_{i,j}$ di dalamnya,

dan \mathbf{x} adalah vektor kolom di ruang \mathbb{R}^n , $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (Robinson,

2004:13-14).

Sistem persamaan diferensial tak linier adalah persamaan yang terdiri atas lebih dari satu persamaan yang saling terkait. Sistem dari dua persamaan diferensial tak linier dengan dua fungsi yang tak diketahui berbentuk :

$$\dot{x} = ax + by + F(x, y)$$

$$\dot{y} = cx + dy + G(x, y)$$

Dimana $ad - bc \neq 0$ (Aliyah, 2007:12).

Persamaan diferensial disebut sebagai persamaan diferensial nonlinear apabila memenuhi paling sedikit satu dari kriteria berikut (Ross, 1984 : 6),

a. Memuat variabel tak bebas dan turunan-turunannya berpangkat selain satu.

b. Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan/ atau turunan-turunannya.

2.4 Solusi Umum Sistem Persamaan Diferensial

Misalkan $x_j(t)$ adalah solusi persamaan dan c_j adalah skalar real atau kompleks untuk $j = 1, \dots, n$. Dengan menggunakan sifat dari turunan dan perkalian matriks maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t)) &= c_1\dot{x}_1(t) + \dots + c_n\dot{x}_n(t) \\ &= c_1A(t)x_1(t) + \dots + c_nA(t)x_n(t) \\ &= A(t)(c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t)) \end{aligned}$$

Jadi kombinasi linier $c_1x_1(t) + \dots + c_kx_n(t)$ juga merupakan solusi. Sehingga kombinasi linier dari solusi-solusi adalah solusi (Robinson, 2004:15).

Untuk kasus koefisien konstan, maka ada cara untuk memperoleh solusi dari matriks menggunakan eksponensial dari matriks yang akan sama dengan identitas ketika t sama dengan 0. Eksponensial ini biasanya tidak mudah untuk dihitung, tetapi sangat berguna sebagai solusi yang terkonsep.

Untuk suatu persamaan skalar $\dot{x} = ax$, solusinya adalah $x(t) = x_0e^{at}$ untuk x_0 adalah sebarang konstanta. e^{At} dipertimbangkan sebagai solusi dari matriks. Didefinisikan:

$$e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n$$

Untuk membuktikan bahwa e^{At} adalah solusi dari matriks, substitusikan e^{At} ke persamaan, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{At} &= 0 + A + \frac{t}{1!}A^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \dots \\
&= A \left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1} + \dots \right) \\
&= A(e^{At}).
\end{aligned}$$

Karena $e^{A0} = I$, e^{At} adalah solusi utama dari matriks yang akan sama dengan identitas jika t sama dengan 0. Jika \mathbf{v} adalah sebarang vektor, maka $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{v}$ adalah solusi dengan $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$ (Robinson, 2004:17-18).

Teorema 2.1 Jika A adalah suatu matriks $n \times n$ dan λ adalah suatu bilangan real, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen.

- (a) λ adalah nilai-nilai Eigen dari matriks A .
- (b) Sistem persamaan $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ mempunyai selesaian tak trivial (non trivial).
- (c) Ada vektor \mathbf{x} yang tidak nol dalam R^n sedemikian sehingga $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.
- (d) λ adalah suatu selesaian real dari persamaan karakteristik $|\lambda I - A| = 0$.

Bukti: Akan diperlihatkan bahwa (a), (b), (c) dan (d) ekuivalen satu sama lainnya dengan membuktikan urutan implikasi (a) \rightarrow (b) \rightarrow (c) \rightarrow (d) \rightarrow (a).

(a) \rightarrow (b). Karena λ adalah nilai-nilai Eigen dari matriks A , maka menurut definisi nilai Eigen berlaku $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ dengan \mathbf{x} tak nol.

$$\lambda I\mathbf{x} - A\mathbf{x} = 0$$

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$$

Karena x tak nol maka sistem persamaan linier homogen $(\lambda I - A)x = 0$ harus mempunyai penyelesaian non trivial.

(b) \rightarrow (c). Karena $(\lambda I - A)x = 0$ maka

$$Ax = \lambda Ix$$

$$Ax = \lambda x$$

(c) \rightarrow (d). Karena $Ax = \lambda x$

$$Ax = \lambda Ix$$

$$(\lambda I - A)x = 0.$$

Karena ada x tidak nol, maka sistem persamaan linier homogen $(\lambda I - A)x = 0$ haruslah $\det(\lambda I - A) = 0$ dengan λ adalah suatu penyelesaian realnya.

(d) \rightarrow (a). Karena λ adalah penyelesaian real dari persamaan $\det(\lambda I - A) = 0$, maka λ adalah penyelesaian dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$ atau dengan kata lain λ adalah nilai Eigen dari matriks A (Karso, 2012:8-9).

Teorema 2.2 Misal matriks A merupakan matriks berukuran 2×2 dengan sebuah sistem yang mempunyai nilai-nilai Eigen yang berbeda, maka solusi umum sistem adalah:

$$x(t) = C_1 v e^{\lambda_1 t} + C_2 u e^{\lambda_2 t}$$

dengan v dan u adalah vektor-vektor Eigen yang bersesuaian dengan nilai Eigen λ_1 dan λ_2 (Boyce dan DiPrima, 2009:487).

Bukti: Dari persamaan diatas maka di peroleh:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = C_1\lambda_1\mathbf{v}e^{\lambda_1 t} + C_2\lambda_2\mathbf{u}e^{\lambda_2 t}$$

Diketahui bahwa $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$, maka

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = C_1A\mathbf{v}e^{\lambda_1 t} + C_2A\mathbf{u}e^{\lambda_2 t}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(C_1\mathbf{v}e^{\lambda_1 t} + C_2\mathbf{u}e^{\lambda_2 t})$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t).$$

Teorema 2.3 Misal matriks A dari sistem merupakan matriks berukuran 2×2 dan jika persamaan karakteristik dari sistem mempunyai akar kembar $\lambda_{1,2} = \lambda$, dan diperoleh:

(a) Dua vektor Eigen, maka solusinya adalah:

$$\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{v}e^{\lambda t} + C_2\mathbf{u}e^{\lambda t}$$

(b) Satu vektor Eigen, maka solusinya adalah:

$$\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{v}e^{\lambda t} + C_2(\mathbf{v}t - \mathbf{w})e^{\lambda t}$$

dengan $(A - I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$.

Bukti: (a) Bukti analog dengan teorema 2.2. (b) Pada situasi ini $(A - \lambda I)(\lambda I) = (\lambda I)(A - \lambda I)$, λI adalah perkalian skalar dengan identitas, sehingga

$$\begin{aligned} e^{At}\mathbf{w} &= e^{(\lambda I + (A - \lambda I))t}\mathbf{w} = e^{(\lambda I)t}e^{(A - \lambda I)t}\mathbf{w} \\ &= e^{(\lambda I)t}Ie^{(A - \lambda I)t}\mathbf{w} \\ &= e^{(\lambda I)t} \left(I\mathbf{w} + t(A - \lambda I)\mathbf{w} + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda I)^2\mathbf{w} + \dots \right). \end{aligned}$$

Misalkan $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$, dimana \mathbf{v} adalah vektor Eigen dari λ , maka

$$(A - \lambda I)^2\mathbf{w} = (A - \lambda I)\mathbf{v} \text{ jadi}$$

$$(A - \lambda I)^n \mathbf{w} = (A - \lambda I)^{n-1} \mathbf{v} \text{ untuk } n \geq 2$$

Sehingga diperoleh solusi kedua dari persamaan

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{w} + t\mathbf{v})$$

(Boyce dan DiPrima, 2009:488 dan Robinson, 2004:35).

Teorema 2.4 Misalkan A suatu matriks $n \times n$ dengan entri-entri bilangan real.

(a) Asumsikan bahwa $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + i\mathbf{y}(t)$ adalah solusi kompleks dari $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$, dimana $\mathbf{x}(t)$ dan $\mathbf{y}(t)$ adalah real. Maka $\mathbf{x}(t)$ dan $\mathbf{y}(t)$ adalah solusi real dari persamaan.

(b) Jika $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ adalah nilai Eigen kompleks dengan vektor Eigen kompleks $\mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{u} \pm i\mathbf{w}$, maka

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{at}(\cos(bt)\mathbf{u} - \sin(bt)\mathbf{w}) \text{ dan}$$

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{at}(\sin(bt)\mathbf{u} + \cos(bt)\mathbf{w})$$

adalah masing-masing solusi dari $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$.

Bukti: (a) Dengan menggunakan aturan turunan dan perkalian matriks maka diperoleh:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) + i\dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{\mathbf{z}}(t)$$

$$= A\mathbf{z}(t)$$

$$= A(\mathbf{x}(t) + i\mathbf{y}(t))$$

$$= A\mathbf{x}(t) + iA\mathbf{y}(t).$$

Dengan menghubungkan bagian real dan imajiner dari bilangan kompleks maka diperoleh $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ dan $\dot{\mathbf{y}}(t) = A\mathbf{y}(t)$.

(b) Untuk bagian kedua dari teorema mengikuti bagian pertama dan merupakan penjabaran dari $e^{a+ib}(\mathbf{u} + i\mathbf{w})$ (Robinson, 2004:28).

2.5 Titik Tetap

Titik tetap dari suatu pemetaan $T: M \rightarrow M$, dengan M merupakan suatu himpunan sebarang, dan $m \in M$ yang dipetakan pada dirinya sendiri oleh pemetaan tersebut. Dengan kata lain dibuat titik tetap oleh pemetaan tersebut T dan dinotasikan sebagai berikut : $T(m) = m$.

Misal diberikan sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y, z)$$

$$\frac{dz}{dt} = h(x, y, z)$$

Dengan f dan g merupakan fungsi kontinu dari x dan y , serta derivatif parsial pertamanya juga kontinu. Titik kritis persamaan 2.12 adalah titik (x^*, y^*, z^*) dari (x, y, z) sedemikian hingga $f(x^*, y^*, z^*) = g(x^*, y^*, z^*) = h(x^*, y^*, z^*) = 0$. Titik tetap x^* , y^* dan z^* diperoleh jika $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$ dan $\frac{dz}{dt} = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$ dan $\frac{dz}{dt} = 0$ disebut keadaan setimbang, sehingga titik kritis tersebut disebut titik tetap.

2.6 Linierisasi

Linearisasi adalah proses pendekatan persamaan diferensial nonlinear dengan persamaan diferensial linear untuk membantu memahami persamaan diferensial nonlinear. Suatu sistem dimana f dan g adalah nonlinear.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = g(x, y)$$

selanjutnya akan dicari pendekatan sistem linear disekitar titik tetap (x^*, y^*) dengan melakukan ekspansi menurut deret Taylor disekitar (x^*, y^*) dan menghilangkan suku nonlinearnya sebagai berikut (Boyce & DiPrima, 2001).

$$\frac{dx}{dt} = f(x^*, y^*) + \frac{df}{dx}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{df}{dy}(x^*, y^*)(y - y^*)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x^*, y^*) + \frac{dg}{dx}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{dg}{dy}(x^*, y^*)(y - y^*)$$

Pada keadaan setimbang $f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0$ sehingga diperoleh persamaan linear sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{df}{dx}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{df}{dy}(x^*, y^*)(y - y^*)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dg}{dx}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{dg}{dy}(x^*, y^*)(y - y^*)$$

Sistem tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ dimana } A_0 = \begin{bmatrix} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} \\ \frac{dg}{dx} & \frac{dg}{dy} \end{bmatrix}$$

Dimana A_0 pada $x = x^*, y = y^*$. Matriks tersebut disebut matriks Jacobian.

Setelah didapatkan matriks Jacobian maka langkah selanjutnya akan menganalisis mengenai kesetabilannya (Boyce dan DiPrima, 2001).

2.7 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Jika A adalah matriks berordo $n \times n$. Vektor $x \in R^n$ dan $x \neq 0$ disebut vektor Eigen jika terdapat λ bilangan real, yang disebut nilai Eigen, sehingga memenuhi persamaan:

$$Ax = \lambda x$$

Dari definisi diatas dapat diketahui persyaratan-persyaratan untuk nilai Eigen maupun vektor Eigen. Nilai Eigen merupakan bilangan real, yang berarti dapat bernilai nol, negatif maupun positif, sedangkan vektor Eigen x merupakan bilangan anggota dari R^n untuk matriks A yang berukuran $n \times n$ dan x bukan vektor nol. maka tulis kembali $Ax = \lambda x$ sebagai $Ax = \lambda Ix$ atau secara ekuivalen $(A - \lambda I)x = 0$. Dengan mengingat vektor Eigen $x \neq 0$ maka persamaan di atas harus mempunyai penyelesaian tak-trivial, dan didapatkan

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

atau dengan kata lain,

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

Persamaan di atas disebut persamaan karakteristik atau biasa disebut persamaan penolong karena persamaan ini menolong menyederhanakan permasalahan pencarian nilai Eigen menjadi lebih sederhana. Matriks skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai Eigen dari A . Jika diperluas, maka $\det(A - \lambda I)$ adalah sebuah polinomial p dalam variabel A yang disebut polinomial karakteristik matriks A (Imrona, 2013).

Dapat ditunjukkan bahwa jika A adalah matriks $n \times n$, maka polinomial karakteristik A memiliki derajat n dan koefisien variabel λ^n adalah satu. Polinomial karakteristik $p(x)$ dari sebuah matriks $n \times n$ memiliki bentuk :

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n$$

Berdasarkan teorema dasar Aljabar bahwa persamaan karakteristik adalah

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

Memiliki sebanyak-banyaknya n solusi yang berbeda, sehingga matriks $n \times n$ memiliki sebanyak-banyaknya n nilai Eigen yang berbeda (Anton & Rorres, 2004).

Contoh : Tentukan nilai-nilai Eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian : Polinomial karakteristik A adalah

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -4 & 17 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4$$

Nilai-nilai Eigen dari A harus memenuhi persamaan

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 17\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

$$(\lambda - 4) = 0 \text{ atau } (\lambda^2 - 4\lambda + 1) = 0$$

Sehingga nilai-nilai Eigen dari A adalah (Anton & Rorres, 2004).

$$\lambda = 0, \lambda = 2 + \sqrt{3}, \text{ dan } \lambda = 2 - \sqrt{3}$$

2.8 Kriteria Routh-Hurwitz

Nilai-nilai Eigen suatu matriks dapat ditentukan melalui persamaan karakteristiknya. Permasalahan ketika menentukan nilai Eigen untuk persamaan orde tinggi sehingga di perlukan kriteria yang dapat menjamin bahwa akar-akar persamaan karakteristiknya bernilai negatif atau ada yang bernilai positif. Kriteria tersebut yaitu *Routh-Hurwitz*.

Misalkan diberikan persamaan karakteristik berderajat n dari sistem autonomus berikut:

$$\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \dots + A_{n-1}\lambda + A_n = 0$$

Dengan A_n merupakan koefisien bilangan riil $n = 1,2,3, \dots$ dan persamaan karakteristik nya merupakan polinomial pembuat nol yang mempunyai bagian riil negatif dengan $A_1 > 0, A_2 > 0, \dots, A_n > 0$. Berdasarkan persamaan diatas maka diperoleh n matriks *Routh-Hurwitz* (H_k) yang di definisikan sebagai berikut:

$$H_k = \begin{bmatrix} A_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 & 1 & \dots & 0 \\ A_5 & A_4 & A_3 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{2N-3} & A_{2N-4} & A_{2N-5} & A_{2N-6} & \dots & A_{n-2} \\ A_{2N-1} & A_{2N-2} & A_{2N-3} & A_{2N-4} & \dots & A_n \end{bmatrix}$$

2.9 Kestabilan Titik Tetap

Penentuan kestabilan titik kesetimbangan sistem autonomus dapat diperoleh dengan melihat nilai-nilai Eigennya, yaitu $\lambda_i, i = 1,2,3, \dots, n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik dari A yaitu $|A - \lambda I| = 0$. Secara umum kestabilan titik tetap mempunyai tiga perilaku dengan syarat sebagai berikut.

1. Stabil

Suatu titik tetap x^* dari suatu sistem dikatakan stabil jika:

- Setiap nilai Eigen real adalah negatif ($\lambda_i < 0, i = 1, 2, \dots, n$)
- Setiap komponen nilai Eigen kompleks, bagian realnya lebih kecil atau sama dengan nol, $Re(\lambda_i) \leq 0, i = 1, 2, \dots, n$.

2. Tidak Stabil

Suatu titik tetap x^* dari suatu sistem dikatakan tidak stabil jika:

- Setiap nilai Eigen real adalah positif ($\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$)
- Setiap komponen nilai Eigen kompleks, bagian realnya lebih besar dari nol, $Re(\lambda_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$.

3. Pelana (*Saddle*)

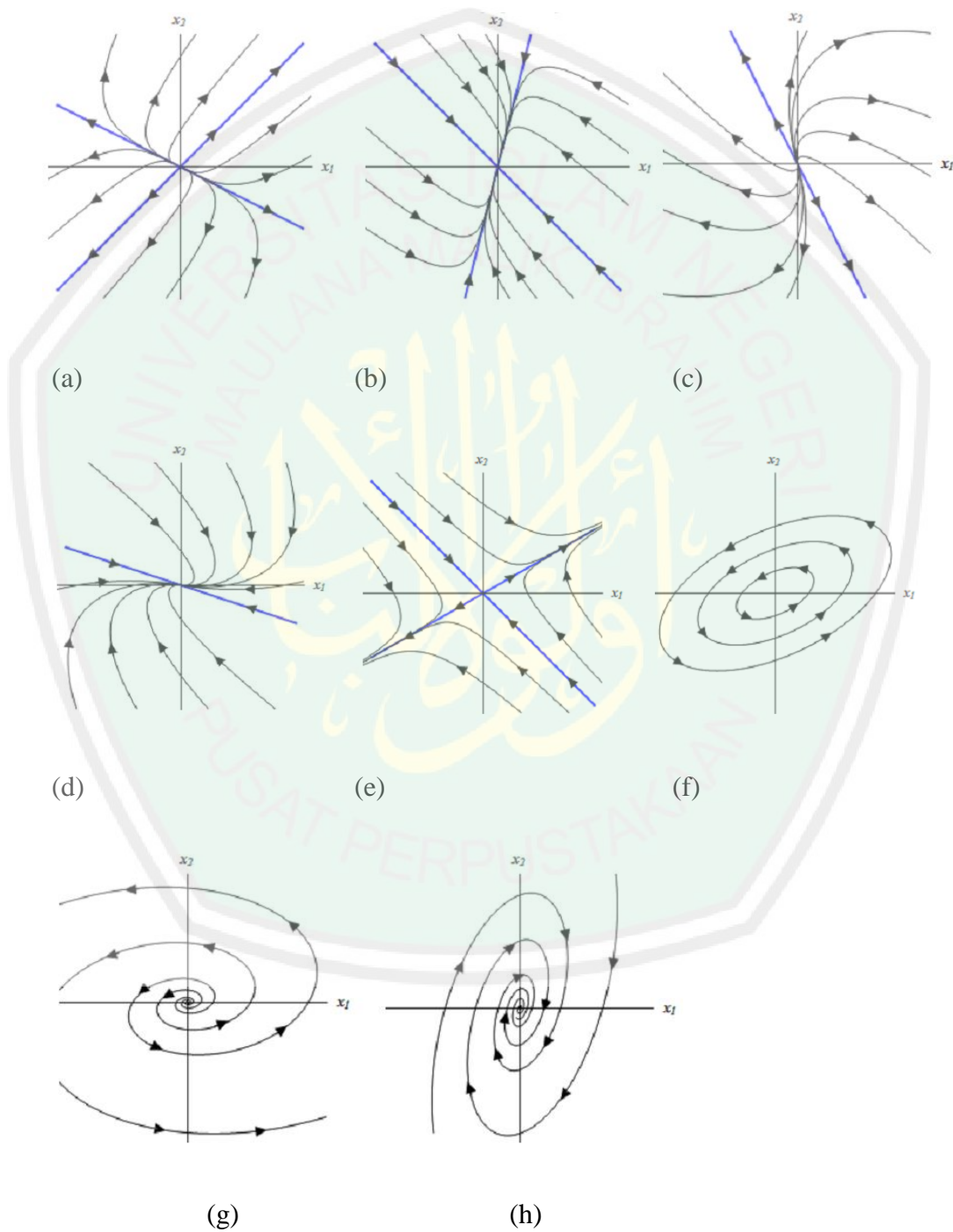
Suatu titik tetap x^* dari suatu sistem adalah pelana jika perkalian dua nilai Eigen *real* adalah negatif ($\lambda_i \cdot \lambda_j < 0$, untuk setiap i dan j sembarang) (Finizio, 1998).

Tabel 2 1 Kestabilan Titik Keseimbangan Dari Sistem Dinamik

| Akar persamaan karakteristik | Mendekati Sistem Linier | |
|--------------------------------|--|------------------|
| | Tipe titik tetap | Stabilitas |
| $r_1 > r_2 > 0$ | <i>Improper Node</i> | Tidak Stabil |
| $r_1 < r_2 < 0$ | <i>Improper Node</i> | Stabil Asimtotik |
| $r_2 < 0 < r_1$ | <i>Saddle Point</i> | Tidak Stabil |
| $r_1 = r_2 > 0$ | <i>Proper Node, Improper Node, or Spiral Point</i> | Tidak Stabil |
| $r_1 = r_2 < 0$ | <i>Proper Node, Improper Node, or Spiral Point</i> | Stabil Asimtotik |
| $r_1 = r_2 = \lambda \pm i\mu$ | | |
| $\lambda > 0$ | <i>Spiral Point</i> | Tidak Stabil |
| $\lambda < 0$ | <i>Spiral Point</i> | Stabil Asimtotik |

| | | |
|---------------------------|-------------------------------|-------------|
| $r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$ | <i>Center or Spiral Point</i> | Tidak Tetap |
|---------------------------|-------------------------------|-------------|

Sedangkan jenis kestabilan dari sistem yang disajikan dalam gambar adalah sebagai berikut:



Gambar 2.1 (a) Node Tidak Stabil, (b) Node Stabil asimtotik, (c) Node Tidak Stabil, (d) Node Stabil asimtotik, (e) Saddle Tidak Stabil, (f) Center Stabil, (g) Spiral Tidak Stabil, (h) Spiral Stabil asimtotik (Dawkins, 2007)

Perhatikan perbedaan antara stabil dan stabil asimtotik, Pada kestabilan jenis node stabil asimtotik atau spiral stabil asimtotik semua lintasan akan bergerak dalam menuju titik kesetimbangan seiring bertambahnya t , sedangkan center (selalu stabil) lintasan hanya akan bergerak di sekitar titik kesetimbangan tetapi tidak pernah benar-benar bergerak ke arahnya (Dawkins, 2007:278).

2.10 Host-parasitoid

Parasitoid serangga adalah serangga yang stadia pradewasanya menjadi parasit pada atau didalam tubuh serangga lain, sementara imago hidup bebas mencari nektar dan embun madu sebagai makanannya. (Purnomo, 2010:26). Parasitoid adalah serangga yang memparasiti serangga lain, dan bersifat parasit pada fase pradewasa, sedangkan dewasanya hidup bebas dan tidak terikat pada inangnya. Parasitoid ada yang hidup diluar tubuh inang dan seluruh siklus hidupnya berada di luar tubuh inang yaitu dengan menempel pada tubuh inang (ektoparasitoid), selain itu juga ada parasit yang hidup di dalam tubuh inang (endoparasitoid).

2.11 Kajian Al-Qur'an tentang keseimbangan

Analisis kestabilan matematika yang akan dibahas pada penelitian ini, terdapat beberapa sifat yang terdapat dalam persamaan yaitu sistem bersifat stabil asimtotik, sistem bersifat stabil, dan sistem bersifat tidak stabil. Sistem akan bersifat stabil apabila syarat yang telah diberikan telah dipenuhi, jika tidak terpenuhi, maka sistem akan memenuhi persyaratan yang lainnya atau bisa jadi memenuhi persyaratan untuk bersifat tidak stabil.

Al-Qur'an telah menjelaskan bahwa alam ini diciptakan Allah dalam keadaan seimbang, yakni dalam Q.S. Al-Mulk ayat 3 yang artinya berbunyi:

“Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, Adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?” (Q.S. Al-Mulk: 3).

Selain sebagai tempat tinggal, bumi juga menyediakan semua kebutuhan makhluk di dalamnya. Oleh karena itu sudah sepatutnya manusia sebagai *khalifah fil Ardh* menyukuri nikmat tersebut. Alam raya ini telah diciptakan oleh Allah Swt dalam suatu sistem yang sangat serasi dan sesuai dengan kehidupan manusia (Shihab, 2005).

Sebagaimana dalam Al-Qur'an Surat Al-Anfal ayat 53 yang artinya berbunyi:

“(Siksaan) yang demikian itu adalah karena sesungguhnya Allah sekali-kali tidak akan mengubah sesuatu nikmat yang telah dianugerahkan-Nya kepada suatu kaum, hingga kaum itu mengubah apa-apa yang ada pada diri mereka sendiri, dan sesungguhnya Allah Maha Mendengar lagi Maha Mengetahui” (Q.S. Al-Anfal/8:53).

Dalam ayat ini dijelaskan bahwa Allah tidak akan mengubah suatu kaum apabila ia tidak berusaha untuk mengubah apa yang ada pada diri mereka sendiri. Seperti pada analisis model matematika yaitu apabila sistem bernilai stabil, maka populasi *host* juga akan bernilai stabil, begitu pula pada populasi *Parasitoid*, karena sistem produksi tersebut saling berhubungan. Maka hendaknya kestabilan itu harus dipertahankan, agar tidak mencapai suatu ketidak stabilan dan menyebabkan hal yang tidak di inginkan.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Model Persamaan Diferensial Biasa *Host – Parasitoid*

Model yang digunakan dalam skripsi ini adalah model empat variable yang merupakan bentuk persamaan diferensial biasa nonlinier dari *Host-Parasitoid*.

Adapun persamaan tersebut adalah sebagai berikut :

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)(1 - N(t)) - s_1P(t)(1 - e^{-\rho_1N(t)}) \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM(t)}{dt} = & \gamma M(t)(1 - M(t)) - s_2P(t)(1 - e^{-\rho_2M(t)}) \\ & - s_3Q(t)(1 - e^{-\rho_3M(t)}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = c_1P(t)(1 - e^{-\rho_1N(t)}) + c_2P(t)(1 - e^{-\rho_2M(t)}) - \mu_1P(t) \quad (3.3)$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = c_3Q(t)(1 - e^{-\rho_3M(t)}) - \mu_2Q(t) \quad (3.4)$$

3.1.1 Identifikasi Model *Host-Parasitoid*

Model *Host-Parasitoid* ini terdiri dari empat spesies, yaitu spesies *host pieris brassicae*, *host pieris rapae*, *Parasitoid cotesia glomerata*, dan *Parasitoid cotesia rubecula*. Dalam hal ini peneliti melakukan identifikasi terhadap model *Host-Parasitoid* tersebut. Berikut merupakan hasil identifikasi model *Host-Parasitoid*:

$N(t)$: banyaknya populasi *host pieris brassicae* terhadap t

$M(t)$: banyaknya populasi *host pieris rapae* terhadap t

- $P(t)$: banyaknya populasi parasitoid *cotesia glomerata* terhadap t
- $Q(t)$: banyaknya populasi parasitoid *cotesia rubecula* terhadap t
- ρ_1 : daya angkut parasitoid *cotesia glomerata* pada host *pieris brassicae*
- ρ_2 : efisiensi daya angkut parasitoid *cotesia glomerata* pada host *pieris rapae*
- ρ_3 : efisiensi daya angkut parasitoid *cotesia rubecula* pada host *pieris rapae*
- γ : pertumbuhan instrinsik dari kedua host
- s_1 : pengaruh parasitoid *cotesia glomerata* pada host *pieris brassicae* berbanding terbalik dengan pertumbuhan instrinsik dari host
- s_2 : pengaruh parasitoid *cotesia glomerata* pada host *pieris rapae* terhadap daya angkut host *pieris brassicae* berbanding terbalik dengan daya angkut host *pieris rapae* yang berpengaruh pada parasitoid *cotesia glomerata* pada host *pieris brassicae*
- s_3 : pengaruh parasitoid *cotesia rubecula* pada host *pieris rapae* berbanding terbalik dengan pertumbuhan instrinsik dari host
- c_1 : pengaruh konversi efisiensi dari parasitoid *cotesia glomerata* pada host *pieris brassicae* terhadap pertumbuhan instrinsik host
- c_2 : pengaruh konversi efisiensi dari parasitoid *cotesia glomerata* pada host *pieris rapae* terhadap pertumbuhan instrinsik host
- c_3 : pengaruh konversi efisiensi dari parasitoid *cotesia rubecula* pada host *piris rapae* terhadap pertumbuhan instrinsik host
- μ_1 : pengaruh kematian parasitoid *cotesia glomerata* pada pertumbuhan host
- μ_2 : pengaruh kematian parasitoid *cotesia rubecula* pada pertumbuhan host

3.1.2 Analisis Model *Host-Parasitoid*

a. Populasi host *pieris brassicae*

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)(1 - N(t)) - s_1P(t)(1 - e^{-\rho_1N(t)})$$

Persamaan di atas menjelaskan bahwa kejadian banyaknya populasi ($N(t)$) pada spesies *p.brassicae* terhadap waktu t yaitu mengalami pertumbuhan logistik pada ($N(t)$) yang berkurang dari populasi awalnya sebesar ($N^2(t)$) yang kemudian berkurang akibat adanya pengaruh dari parasitoid *c.glomerata* pada *p.brassicae* (s_1) dan mengalami kematian akibat dari parasitisme ($1 - e^{-\rho_1N(t)}$).

b. Populasi host *pieris rapae*

$$\frac{dM(t)}{dt} = \gamma M(t)(1 - M(t)) - s_2P(t)(1 - e^{-\rho_2M(t)}) - s_3Q(t)(1 - e^{-\rho_3M(t)})$$

Persamaan diatas menjelaskan bahwa laju pertumbuhan populasi ($M(t)$) pada spesies *p.rapae* terhadap suatu waktu t mengalami pertumbuhan logistik ($M(t)$) yang berkurang dari populasi awalnya sebesar ($M^2(t)$) yang kemudian mengalami kematian akibat pengaruh dari parasitoid *c.glomerata* ($s_2P(t)(1 - e^{-\rho_1N(t)})$) dan kemudian mengalami kematian kembali akibat dari parasitoid *c.rubecula* ($s_3Q(t)(1 - e^{-\rho_3M(t)})$).

c. Populasi parasitoid *cotesia glomerata*

$$\frac{dP(t)}{dt} = c_1P(t)(1 - e^{-\rho_1N(t)}) + c_2P(t)(1 - e^{-\rho_2M(t)}) - \mu_1P(t)$$

Persamaan tersebut menunjukkan tentang laju pertumbuhan populasi ($p(t)$) spesies parasitoid *cotesia glomerata* pada suatu waktu t yang mengalami pertumbuhan logistik akibat dari konversi efisiensi host *p.brassicae* dari

parasitoid sebesar $(c_1P(t)(1 - e^{-\rho_2 M(t)})$ dan bertumbuh kembali karena adanya konversi efisiensi host *p.rapae* dari parasitoid sebesar $(c_2P(t)(1 - e^{-\rho_2 M(t)})$ yang kemudian mengalami kematian secara alami sebesar (μ_1) .

d. Populasi parasitoid *cotesia rubecula*

$$\frac{dQ(t)}{dt} = c_3Q(t)(1 - e^{-\rho_3 M(t)}) - \mu_2Q(t)$$

Persamaan diatas menunjukkan tentang laju pertumbuhan pada populasi $(Q(t))$ yaitu spesies parasitoid *cotesia rubecula* pada suatu waktu t yang mengalami pertumbuhan logistik karena adanya konversi efisiensi host *p.rapae* dari parasitoid *c.rubecula* sebesar $(c_1Q(t)(1 - e^{-\rho_3 M(t)})$ dan kemudian mengalami kematian secara alami sebesar (μ_2) .

3.1.3 Analisis Perilaku *Host-Parasitoid*

Model *Host-Parasitoid* ini dipengaruhi oleh beberapa faktor baik itu internal maupun eksternal. Sehingga dalam hal ini perlu diberikan asumsi-asumsi yang dapat membatasi pemodelan tersebut. Berikut merupakan beberapa asumsi yang digunakan dalam model *Host-Parasitoid* tersebut:

1. Model yang digunakan merupakan model *Host-Parasitoid* yang merupakan salah satu model dari rantai makanan dan menggunakan empat spesies, yakni spesies *host pieris brassicae*, spesies *host pieris rapae*, spesies *Parasitoid cotesia glomerata*, dan spesies *Parasitoid cotesia rubecula*.
2. *Parasitoid cotesia glomerata* merupakan parasitisme utama yang menumpang pada kedua inang, yaitu pada *host pieris brassicae* dan *host pieris rapae*, sehingga parasitoid tersebut merupakan penyebab kematian pada kedua host. Kemudian *Parasitoid cotesia rubecula* merupakan parasitisme yang

menumpang pada tubuh *host pieris rapae* dan menyebabkan kematian pada tubuh host. Pertumbuhan pada parasitoid berbanding terbalik dengan kematian host. Kedua parasitoid tersebut juga mengalami kematian secara alami.

3.1.4 Parameter

Nilai parameter yang digunakan dalam sistem persamaan diferensial biasa nonlinier model *Host-Parasitoid* berdasarkan pada jurnal pearce (2006) adalah sebagai berikut:

Tabel 3. 1 Nilai parameter persamaan diferensial biasa host – parasitoid

| Parameter | Nilai | Parameter | Nilai |
|-----------|-------|-----------|-------|
| ρ_1 | 2.5 | s_3 | 0.8 |
| ρ_2 | 0.25 | c_1 | 0.3 |
| ρ_3 | 2.5 | c_2 | 0.004 |
| γ | 0.8 | c_3 | 0.2 |
| s_1 | 0.8 | μ_1 | 0.2 |
| s_2 | 0.2 | μ_2 | 0.1 |

Tabel 3. 2 nilai awal persamaan *host – Parasitoid*

| Variabel | Nilai awal |
|----------|--------------------|
| N | 0.75 |
| M | 0.75 |
| P | $0.075e^{-125x^2}$ |
| Q | $0.075e^{-125x^2}$ |

3.2 Analisis Dinamik Model *Host-Parasitoid*

3.2.1 Titik Tetap

Titik tetap dari keempat persamaan *Host-Parasitoid* dapat ditentukan dengan perhitungan secara manual. Nilai dari titik tetap tersebut dapat diperoleh

$\frac{dN}{dt} = 0$, $\frac{dM}{dt} = 0$, $\frac{dP}{dt} = 0$, dan $\frac{dQ}{dt} = 0$. Sehingga diperoleh persamaan sebagai

berikut:

$$N(t)(1 - N(t)) - s_1P(t)(1 - e^{-\rho_1N(t)}) = 0 \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \gamma M(t)(1 - M(t)) - s_2P(t)(1 - e^{-\rho_2M(t)}) - s_3Q(t)(1 - e^{-\rho_3M(t)}) \\ = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$c_1P(t)(1 - e^{-\rho_1N(t)}) + c_2P(t)(1 - e^{-\rho_2M(t)}) - \mu_1P(t) = 0 \quad (3.7)$$

$$c_3Q(t)(1 - e^{-\rho_3M(t)}) - \mu_2Q(t) = 0 \quad (3.8)$$

Kemudian yang pertama untuk mendapatkan nilai $M(t)$ dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan 3.8, yaitu :

$$c_3Q(t)(1 - e^{-\rho_3M(t)}) - \mu_2Q(t) = 0$$

$$c_3Q(t)(1 - e^{-\rho_3M(t)}) = \mu_2Q(t)$$

$$1 - e^{-\rho_3M(t)} = \frac{\mu_2Q(t)}{c_3Q(t)}$$

$$1 - e^{-\rho_3M(t)} = \frac{\mu_2}{c_3}$$

$$e^{-\rho_3M(t)} = 1 - \frac{\mu_2}{c_3}$$

$$-\rho_3M(t) = \ln\left(1 - \frac{\mu_2}{c_3}\right)$$

$$M(t) = \left(\frac{\ln\left(\frac{c_3}{c_3 - \mu_2}\right)}{\rho_3}\right) \quad (3.9)$$

Ketika sudah mendapatkan nilai dari $M(t)$ kita dapat menggunakannya untuk menentukan nilai $N(t)$ yang bisa diperoleh dengan menggunakan persamaan 3.7, sehingga :

$$c_1P(t)(1 - e^{-\rho_1N(t)}) + c_2P(t)(1 - e^{-\rho_2M(t)}) - \mu_1P(t) = 0$$

$$c_1P(t)(1 - e^{-\rho_1N(t)}) + c_2P(t)(1 - e^{-\rho_2M(t)}) = \mu_1P(t)$$

$$P(t)(c_1(1 - e^{-\rho_1N(t)}) + c_2(1 - e^{-\rho_2M(t)})) = \mu_1P(t)$$

$$c_1(1 - e^{-\rho_1N(t)}) + c_2(1 - e^{-\rho_2M(t)}) = \frac{\mu_1P(t)}{P(t)}$$

$$c_1 - c_1e^{-\rho_1N(t)} + c_2 - c_2e^{-\rho_2M(t)} = \mu_1$$

$$c_1e^{-\rho_1N(t)} + c_2e^{-\rho_2M(t)} = c_1 + c_2 - \mu_1$$

$$-c_1\rho_1N(t) = \ln \frac{\mu_1}{c_1c_2} + c_2\rho_2M(t)$$

$$N(t) = \frac{\ln \frac{\mu_1}{c_1c_2} - c_2\rho_2 \left(\frac{\ln \left(1 - \frac{\mu_2}{c_3} \right)}{\rho_3} \right)}{c_1\rho_1} \quad (3.10)$$

Setelah memiliki nilai dari $M(t)$ dan $N(t)$ kemudian kita dapat menentukan nilai dari $P(t)$ dengan menggunakan persamaan 3.5.

$$N(t)(1 - N(t)) - s_1P(t)(1 - e^{-\rho_1N(t)}) = 0$$

$$s_1P(t)(1 - e^{-\rho_1N(t)}) = N(t)(1 - N(t))$$

$$P(t) = \frac{N(t)(1 - N(t))}{s_1(1 - e^{-\rho_1N(t)})} \quad (3.11)$$

$$P(t) = \frac{\frac{\ln \frac{\mu_1}{c_1 c_2} - c_2 \rho_2 \left(\frac{\ln \left(1 - \frac{\mu_2}{c_3} \right)}{\rho_3} \right)}{c_1 \rho_1} \left(1 - \frac{\ln \frac{\mu_1}{c_1 c_2} - c_2 \rho_2 \left(\frac{\ln \left(1 - \frac{\mu_2}{c_3} \right)}{\rho_3} \right)}{c_1 \rho_1} \right)}{s_1 \left(1 - e^{-\rho_1} \frac{\ln \frac{\mu_1}{c_1 c_2} - c_2 \rho_2 \left(\frac{\ln \left(1 - \frac{\mu_2}{c_3} \right)}{\rho_3} \right)}{c_1 \rho_1} \right)}$$

Kemudian yang keempat adalah menentukan nilai dari $Q(t)$ dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan 3.6

$$\begin{aligned} \gamma M(t)(1 - M(t)) - s_2 P(t)(1 - e^{-\rho_2 M(t)}) - s_3 Q(t)(1 - e^{-\rho_3 M(t)}) \\ = 0 \end{aligned}$$

$$s_3 Q(t) = \gamma M(t)(1 - M(t)) - s_2 P(t)(1 - e^{-\rho_2 M(t)})$$

$$Q(t) = \frac{\gamma M(t)(1 - M(t)) - s_2 P(t)(1 - e^{-\rho_2 M(t)})}{s_3 (1 - e^{-\rho_3 M(t)})}$$

$$Q(t) = \frac{\gamma \left(\frac{\ln \left(\frac{c_3}{c_3 - \mu_2} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{\ln \left(\frac{c_3}{c_3 - \mu_2} \right) \right)}{\rho_3} \right) - s_2 P(t) \left(1 - e^{-\rho_2 \left(\frac{\ln \left(\frac{c_3}{c_3 - \mu_2} \right) \right)} \right)}{s_3 \left(1 - e^{-\rho_3 \left(\frac{\ln \left(\frac{c_3}{c_3 - \mu_2} \right) \right)} \right)} \quad (3.12)$$

Sehingga berdasarkan persamaan 3.9 hingga 3.12 dapat diketahui titik tetap dari persamaan *Host-Parasitoid* yaitu (M^*, N^*, P^*, Q^*) dengan nilai sebagai berikut:

$$M^* = \left(\frac{\ln \left(\frac{c_3}{c_3 - \mu_2} \right)}{\rho_3} \right)$$

$$N^* = \frac{\ln \frac{\mu_1}{c_1 c_2} - c_2 \rho_2 \left(\frac{\ln \left(1 - \frac{\mu_2}{c_3} \right)}{\rho_3} \right)}{c_1 \rho_1}$$

$$P^* = \frac{\frac{\ln \frac{\mu_1}{c_1 c_2} - c_2 \rho_2 \left(\frac{\ln \left(1 - \frac{\mu_2}{c_3} \right)}{\rho_3} \right)}{c_1 \rho_1} \left(1 - \frac{\ln \frac{\mu_1}{c_1 c_2} - c_2 \rho_2 \left(\frac{\ln \left(1 - \frac{\mu_2}{c_3} \right)}{\rho_3} \right)}{c_1 \rho_1} \right)}{s_1 \left(1 - e^{-\rho_1 \frac{\ln \frac{\mu_1}{c_1 c_2} - c_2 \rho_2 \left(\frac{\ln \left(1 - \frac{\mu_2}{c_3} \right)}{\rho_3} \right)}{c_1 \rho_1}} \right)}$$

$$Q^* = \frac{\gamma \left(\frac{\ln \left(\frac{c_3}{c_3 - \mu_2} \right)}{\rho_3} \right) \left(1 - \left(\frac{\ln \left(\frac{c_3}{c_3 - \mu_2} \right)}{\rho_3} \right) \right) - s_2 P(t) \left(1 - e^{-\rho_2 \left(\frac{\ln \left(\frac{c_3}{c_3 - \mu_2} \right)}{\rho_3} \right)} \right)}{s_3 \left(1 - e^{-\rho_3 \left(\frac{\ln \left(\frac{c_3}{c_3 - \mu_2} \right)}{\rho_3} \right)} \right)}$$

Setelah di dapatkan titik tetap (N^*, M^*, P^*, Q^*) kemudian substitusikan parameter pada Tabel 3.1. sehingga didapatkan nilai dari keempat titik tetap yaitu sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} N^* = 0.43152386454, & M^* = 0.27725887222, \\ P^* = 0.46460420240, & Q^* = 0.3852162032 \end{pmatrix}$$

3.2.2 Linierisasi

Sistem peramaan diferensial yang digunakan dalam model *Host-Parasitoid* ini merupakan sistem persamaan diferensial biasa nonlinier, sehingga perlu untuk melinierkan persamaan tersebut agar dapat dilakukan analisis kestabilan disekitar titik tetap yang telah didapatkan. Linearisasi merupakan proses pendekatan persamaan diferensial nonlinier dengan persamaan diferensial linier untuk membantu memahami persamaan diferensial nonlinier.

Berdasarkan persamaan 3.1 hingga 3.4 sehingga dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = f_1(N, P) = N(1 - N) - s_1P(1 - e^{-\rho_1N})$$

$$\frac{dM}{dt} = f_2(M, P, Q) = \gamma M(1 - M) - s_2P(1 - e^{-\rho_2M}) - s_3Q(1 - e^{-\rho_3M})$$

$$\frac{dP}{dt} = f_3(N, M, P) = c_1P(1 - e^{-\rho_1N}) + c_2P(1 - e^{-\rho_2M}) - \mu_1P$$

$$\frac{dQ}{dt} = f_4(M, Q) = c_3Q(1 - e^{-\rho_3M}) - \mu_2Q$$

Kemudian dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = f_1(N, P) \quad (3.13)$$

$$\frac{dM}{dt} = f_2(M, P, Q) \quad (3.14)$$

$$\frac{dP}{dt} = f_3(N, M, P) \quad (3.15)$$

$$\frac{dQ}{dt} = f_4(M, Q) \quad (3.16)$$

Deret Taylor dari fungsi diatas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_1(N, P) \approx f(N^*, P^*) + f_N(N^*, P^*)(N - N^*) + f_P(N^*, P^*)(P - P^*)$$

$$f_2(M, P, Q) \approx f(M^*, P^*, Q^*) + f_M(M^*, P^*, Q^*)(M - M^*) + f_P(M^*, P^*, Q^*)(P - P^*) + f_Q(M^*, P^*, Q^*)(Q - Q^*)$$

$$f_3(N, M, P) \approx f(N^*, M^*, P^*) + f_N(N^*, M^*, P^*)(N - N^*) + f_M(N^*, M^*, P^*)(M - M^*) + f_P(N^*, M^*, P^*)(P - P^*)$$

$$f_4(M, Q) \approx f(M^*, Q^*) + f_M(M^*, Q^*)(M - M^*) + f_Q(M^*, Q^*)(Q - Q^*)$$

Kemudian dengan melakukan substitusi dari nilai titik tetap beserta parameter yang dimiliki dan dengan bantuan Maple maka diperoleh persamaan linier sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = -0.7922561338N - 0.8630477290P \quad (3.17)$$

$$\frac{dM}{dt} = -0.6463487013M - 0.1386294361P - 0.5545177444Q \quad (3.18)$$

$$\frac{dP}{dt} = 0.3484531518N + 0.0004646042024M + 0.1239201573P \quad (3.19)$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0.1926081012M + 0.0386294361Q \quad (3.20)$$

Apabila dituliskan dalam bentuk Matriks Jacobian, persamaan linier tersebut menjadi:

$$A = \begin{pmatrix} -0.7922561338 & 0 & -0.8630477290 & 0 \\ 0 & -0.6463487013 & -0.1386294361 & -0.5545177444 \\ 0.3484531518 & 0.0004646042024 & 0.1239201573 & 0 \\ 0 & 0.1926081012 & 0 & 0.0386294361 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

3.2.3 Analisis Kestabilan

Berdasarkan permisalan pada persamaan 3.13 hingga 3.16, kemudian dapat dilakukan analisis kestabilan dengan membuat matriks Jacobian sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial N} & \frac{\partial f_1}{\partial M} & \frac{\partial f_1}{\partial P} & \frac{\partial f_1}{\partial Q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial N} & \frac{\partial f_2}{\partial M} & \frac{\partial f_2}{\partial P} & \frac{\partial f_2}{\partial Q} \\ \frac{\partial f_3}{\partial N} & \frac{\partial f_3}{\partial M} & \frac{\partial f_3}{\partial P} & \frac{\partial f_3}{\partial Q} \\ \frac{\partial f_4}{\partial N} & \frac{\partial f_4}{\partial M} & \frac{\partial f_4}{\partial P} & \frac{\partial f_4}{\partial Q} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Kemudian dengan melakukan perhitungan secara manual seperti yang terlampir, lalu di formulasikan ke dalam bentuk matriks Jacobian dengan hasil sebagai berikut:

$$A(E^*) = \begin{bmatrix} 1 - 2N - S_1\rho_1P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma - \gamma M - s_2\rho_2P - s_3\rho_3Q & 0 & 0 \\ -c_1\rho_1P & c_2\rho_2P & 0 & 0 \\ 0 & c_3\rho_3Q & 0 & 0 \\ -s_1\rho_1N & 0 & 0 & 0 \\ -s_2\rho_2M & -s_3\rho_3M & 0 & 0 \\ c_1\rho_1N + c_2\rho_2M - \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3\rho_3M - \mu_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Jika titik kesetimbangan E_0^* di substitusikan pada $A(E_0^*)$, maka di peroleh matriks jacobian sebagai berikut:

$$A(E^*) = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & E_6 & 0 \\ 0 & E_3 & E_7 & E_9 \\ E_2 & E_4 & E_8 & 0 \\ 0 & E_5 & 0 & E_{10} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Dengan

$$E_1 = 1 - 2N - S_1\rho_1P$$

$$E_2 = -c_1\rho_1P$$

$$E_3 = \gamma - \gamma M - s_2 \rho_2 P - s_3 \rho_3 Q$$

$$E_4 = -c_2 \rho_2 P$$

$$E_5 = -c_3 \rho_3 Q$$

$$E_6 = -s_1(1 + \rho_1 N)$$

$$E_7 = -s_2(1 - \rho_2 M)$$

$$E_8 = c_1 - c_1 \rho_1 N + c_2 - c_2 \rho_2 M - \mu_1$$

$$E_9 = -s_3 - \rho_3 M$$

$$E_{10} = c_3 - c_3 \rho_3 M - \mu_2$$

Persamaan karakteristik yang diperoleh dari $|A(E_0^* - \lambda I)| = 0$ yaitu

$$|A(E_0^* - \lambda I)| = \begin{vmatrix} E_1 - \lambda & 0 & E_6 & 0 \\ 0 & E_3 - \lambda & E_7 & E_9 \\ E_2 & E_4 & E_8 - \lambda & 0 \\ 0 & E_5 & 0 & E_{10} - \lambda \end{vmatrix} \quad (3.25)$$

Berdasarkan nilai $|A(E_0^* - \lambda I)|$, maka diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^4 + A_1 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + A_3 \lambda^1 + A_4 = 0$$

Nilai akar-akar persamaan karakteristik $\det(A(E_0^* - \lambda I)) = 0$ dapat di selesaikan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz jika memenuhi beberapa kriteria berikut:

- a. $A_4 > 0$
- b. $A_3(A_1 A_2 - A_3) - A_1^2 A_4 > 0$

Jadi dapat disimpulkan bahwa E_0^* stabil apabila memenuhi syarat-syarat kriteria tersebut.

Kemudian di berikan suatu parameter dan titik tetap yang telah di dapatkan sebelumnya, sehingga di dapatkan persamaan karasteristik sebagai berikut:

$$|A(E_0^* - \lambda I)| = \begin{bmatrix} 0.7922561338 - \lambda & 0 \\ 0 & 0.6463487013 - \lambda \\ 0.3484531518 & 0.000464042024 \\ 0 & 0.1926081012 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.8630477290 & 0 \\ -0.1386294361 & -0.5545177444 \\ 0.1239201573 - \lambda & 0 \\ 0 & 0.03866294361 - \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Determinan dari matriks diatas berbentuk persamaan karakteristik, yang kemudian dalam pengerjaannya penulis menggunakan bantuan program Maple, sehingga diperoleh nilai Eigen

$$\lambda_1 = -0.334135186143499 + 0.301480342774008I$$

$$\lambda_2 = -0.334135186143499 - 0.301480342774008I$$

$$\lambda_3 = -0.1993564900056501 + 0.224002394045623I$$

$$\lambda_4 = -0.1993564900056501 - 0.224002394045623I$$

Berdasarkan nilai Eigen tersebut dapat diketahui bahwa $\lambda_1 = k \pm bI$ dengan $k < 0$ maka sifat kestabilan titik tetapnya yaitu stabil asimtotik, $\lambda_2 = k \pm bI$ dengan $k > 0$ maka sifat kestabilan titik tetapnya adalah yaitu tidak stabil, $\lambda_3 = k \pm bI$ dengan $k < 0$ maka sifat kestabilan titik tetapnya adalah stabil asimtotik, dan yang terakhir adalah $\lambda_4 = k \pm bI$ dengan $k > 0$ maka sifat kestabilan titik tetapnya yaitu tidak stabil. Namun jika dilihat secara keseluruhan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0$ maka sifat kestabilannya yaitu stabil asimtotik.

Vektor Eigen dapat diperoleh dengan mensubstitusikan nilai Eigen (λ) pada persamaan 3.26, yaitu semua nilai Eigen yang didapatkan dari titik tetap yang dimiliki dengan perhitungan sebagai berikut:

a. Nilai Eigen $\lambda_1 = -0.334135186143499 + 0.301480342774008I$

Jika nilai dari λ_1 di masukkan pada persamaan karakteristik $\det(A(E_0^* - \lambda I)) = 0$ menjadi sebagai berikut:

$$A(E_0^* - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1.126391320 - 0.301480342774008I & 0 & 0.9804838874 - 0.301480342774008I & 0 \\ 0 & 0.3484531518 & 0.000464042024 & 0.1926081012 \\ -0.8630477290 & 0 & -0.5545177444 & 0 \\ 0.4580553434 - 0.301480342774008I & 0 & 0 & 0.3727981297 - 0.301480342774008I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh vektor Eigen pertama, yaitu:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00695212530 - 0.00098618921I \\ -0.8723896244 + 1.191974363I \\ -0.0045200324 + 0.00248190665I \\ -0.1070898630 - 0.8638978642I \end{pmatrix}$$

b. Nilai Eigen $\lambda_2 = -0.334135186143499 - 0.301480342774008I$

Jika nilai dari λ_2 di masukkan pada persamaan karakteristik $\det(A(E_0^* - \lambda I)) = 0$ menjadi sebagai berikut:

$$A(E_0^* - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1.126391320 + 0.301480342774008I & 0 & 0.9804838874 + 0.301480342774008I & 0 \\ 0 & 0.3484531518 & 0.000464042024 & 0.1926081012 \\ -0.8630477290 & 0 & -0.5545177444 & 0 \\ 0.4580553434 + 0.301480342774008I & 0 & 0 & 0.3727981297 + 0.301480342774008I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh vektor Eigen pertama, yaitu:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00695212530 + 0.00098618921I \\ -0.8723896244 - 1.191974363I \\ -0.0045200324 - 0.00248190665I \\ -0.1070898630 + 0.8638978642I \end{pmatrix}$$

c. Nilai Eigen $\lambda_3 = -0.1993564900056501 + 0.224002394045623I$

Jika nilai dari λ_2 di masukkan pada persamaan karakteristik $\det(A(E_0^* - \lambda I)) = 0$ menjadi sebagai berikut:

$$A(E_0^* - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0.9916126238 - 0.2240023940I & 0 & 0.8457051913 - 0.2240023940I \\ 0 & 0.3484531518 & 0.000464042024 \\ 0 & 0 & 0.1926081012 \\ -0.8630477290 & 0 & 0 \\ -0.1386294361 & -0.5545177444 & 0 \\ 0.3232766473 - 0.2240023940I & 0 & 0 \\ 0 & 0.2380194336 - 0.2240023940I & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh vektor Eigen pertama, yaitu:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.440001100 + 1.172412453I \\ -0.07878591317 - 0.1102853842I \\ 0.8856477829 - 1.474679820I \\ 0.05247315848 + 0.01454599607I \end{pmatrix}$$

d. Nilai Eigen $\lambda_4 = -0.1993564900056501 - 0.224002394045623I$

Jika nilai dari λ_2 di masukkan pada persamaan karakteristik $\det(A(E_0^* - \lambda I)) = 0$ menjadi sebagai berikut:

$$A(E_0^* - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0.9916126239 + 0.2240023940I & 0 & 0.8457051914 + 0.2240023940I \\ 0 & 0.3484531518 & 0.000464042024 \\ 0 & 0 & 0.1926081012 \\ -0.8630477290 & 0 & 0 \\ -0.1386294361 & -0.5545177444 & 0 \\ 0.3232766473 + 0.2240023940I & 0 & 0 \\ 0 & 0.2380194336 + 0.2240023940I & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

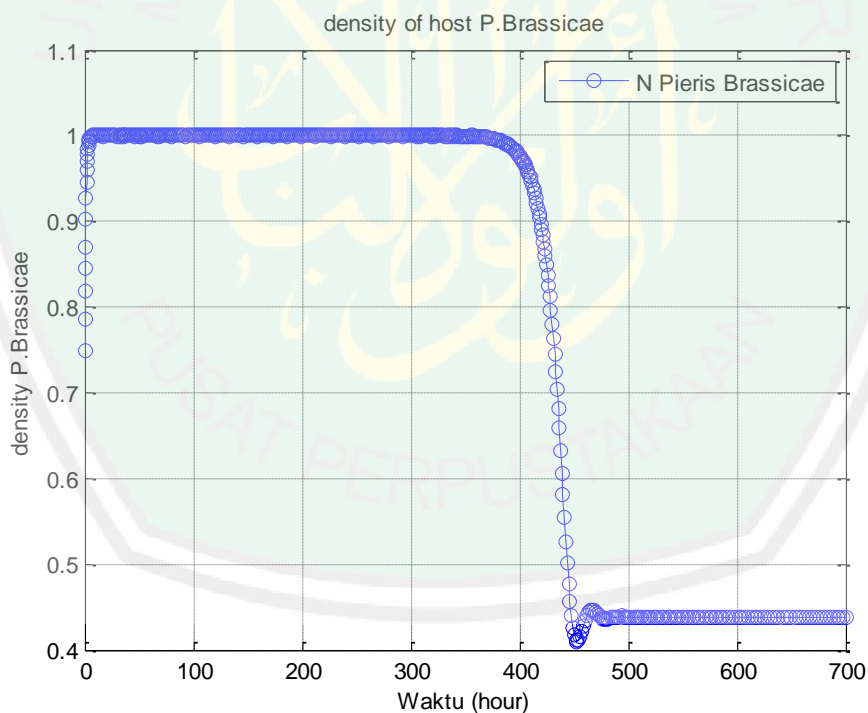
$$\begin{bmatrix} -0.8630477290 & 0 \\ -0.1386294361 & -0.5545177444 \\ 0.3232766474 + 0.2240023940I & 0 \\ 0 & 0.2380194337 + 0.2240023940I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh vektor Eigen nya, yaitu:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.440001100 - 1.172412453I \\ -0.07878591317 + 0.1102853842I \\ 0.8856477829 + 1.474679820I \\ 0.05247315848 - 0.01454599607I \end{pmatrix}$$

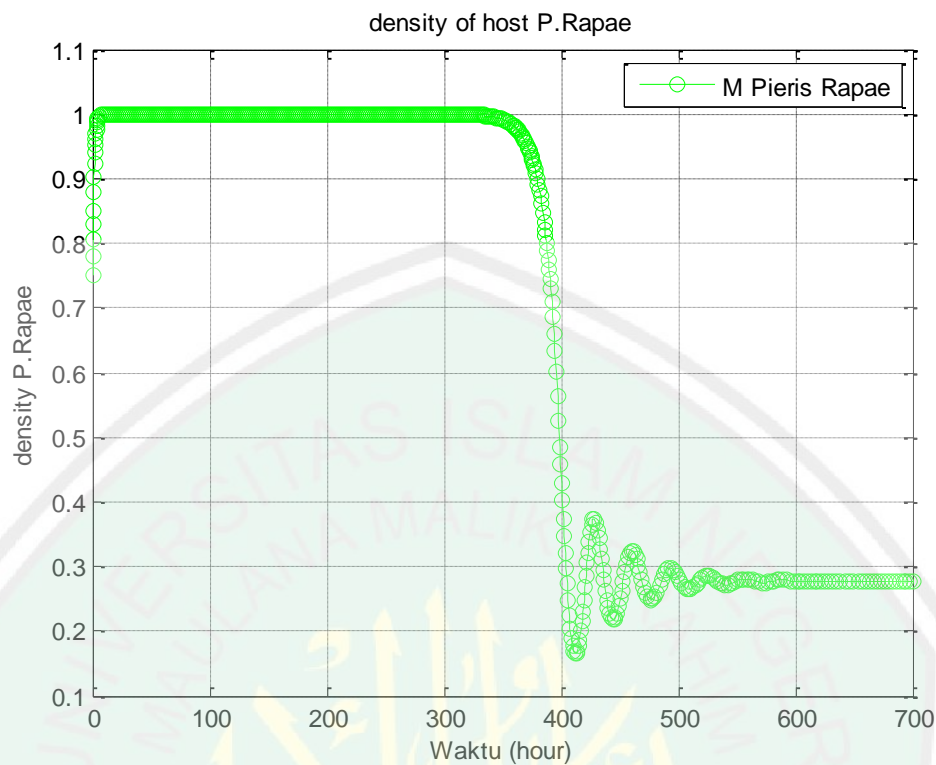
3.3 Simulai Model Matematika *Host – Parasitoid*

Simulasi model matematika *Host – Parasitoid* yang didapatkan dari mensubstitusikan paramater pada Tabel 3.1 dan nilai awal pada Tabel 3.2 pada persamaan (3.1) hingga (3.4) dengan nilai $t = 700$ adalah sebagai berikut:



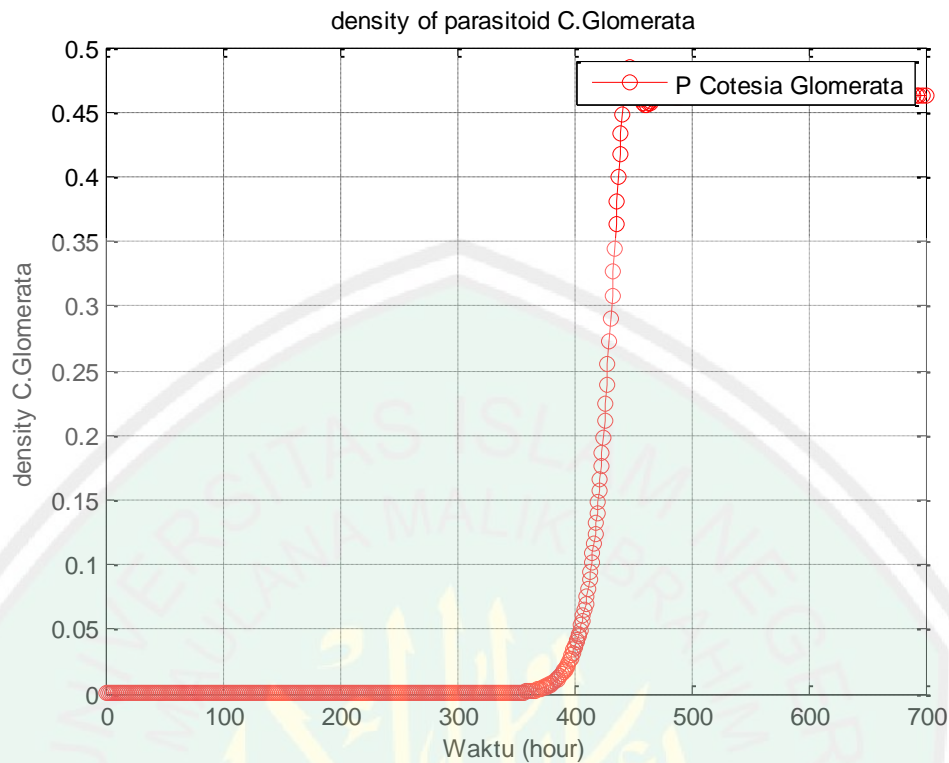
Gambar 3. 1 Grafik simulasi host pieris brassicae, persamaan 3.1 dengan nilai awal $N(0) = 0.75$ dan $t(0) = 700$

Gambar diatas menunjukkan bahwa populasi *host* mengalami penurunan pada saat waktu ke-n. Hal ini terjadi karena adanya kematian pada host *pieris brassicae* yang disebabkan oleh parasitoid yang menumpang pada dirinya.



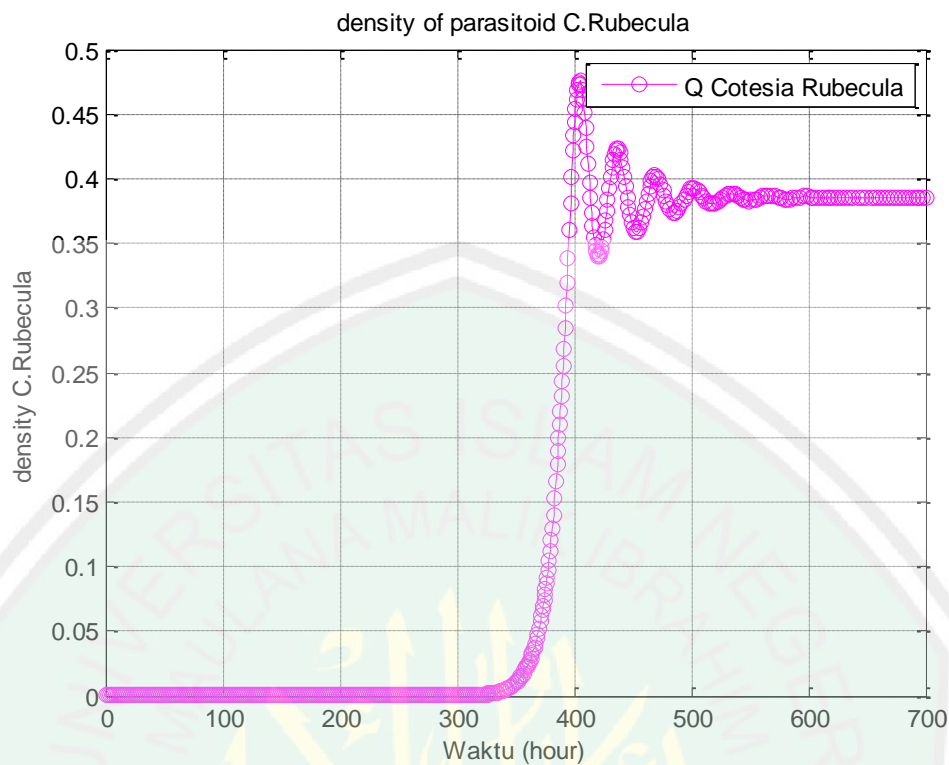
Gambar 3. 2 Grafik simulasi *host pieris rapae* persamaan 3.2 dengan nilai awal $M(0) = 0.75$ dan nilai $t = 700$

Gambar diatas menunjukkan tentang populasi *host pieris rapae* setelah mengalami peningkatan atau pertumbuhan logistik dalam beberapa jam pertama, kemudian mengalami penurunan kepadatan atau mengalami kematian akibat adanya pengaruh dari parasitoid yang menumpang pada tubuh host.



Gambar 3. 3 Grafik simulasi *parasitoid cotesia glomerata*, persamaan 3.3 dengan nilai awal $P(0) = 0.075e^{-125x^2}$ dan $t = 700$.

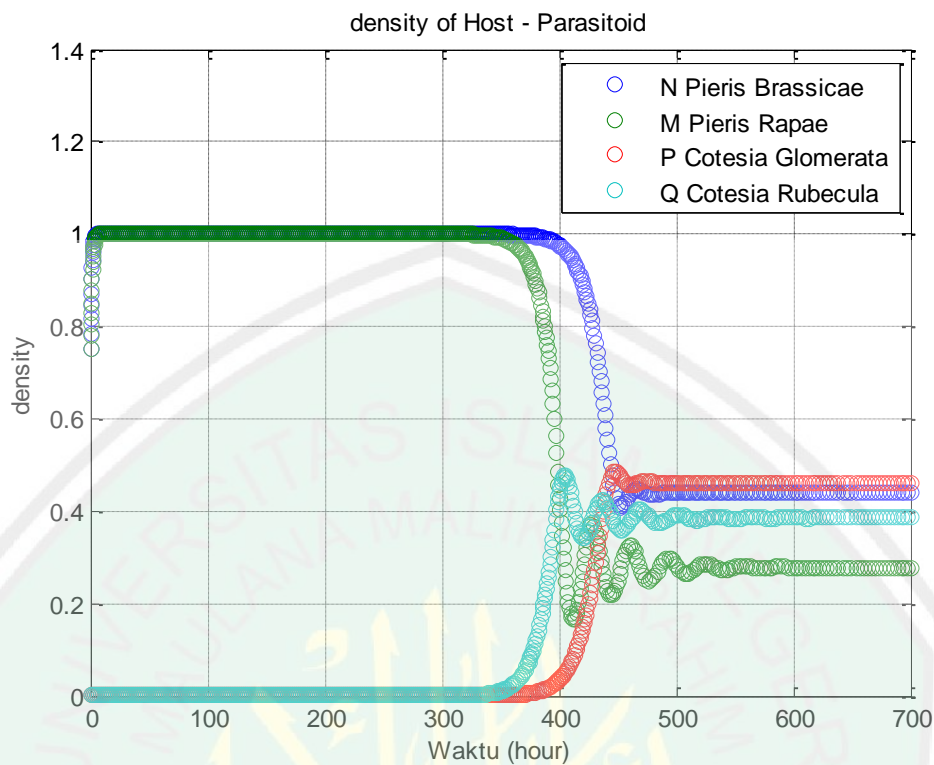
Berdasarkan gambar 3.3 maka dapat diketahui bahwa kepadatan populasi dari *parasitoid cotesia glomerata* mengalami peningkatan seiring dengan berjalannya waktu. Hal ini dapat dilihat dari titik awal grafik diatas, pertumbuhan logistik dari parasitoid ini bergantung pada kematian yang dialami host sebagai tubuh yang ditumpanginya.



Gambar 3. 4 Grafik simulasi *parasitoid cotesia rubecula*, persamaan 3.4 dengan nilai awal $Q(0) = 0.075e^{-125x^2}$ dan nilai $t = 700$.

Berdasarkan gambar 3.4 terlihat bahwa kepadatan populasi dari *parasitoid* tumbuh berkembang pada waktu ke-n. Hal ini menunjukkan bahwa populasi parasitoid semakin mengalami pertumbuhan dan populasi parasitoid semakin bertambah banyak dibanding pada waktu awal.

kemudian dengan menggabungkan keempat gambar tersebut, berdasarkan dari empat persamaan *host-parasitoid*, maka didapatkan grafik simulasi sebagai berikut:



Gambar 3.5 Grafik simulasi interaksi *host-parasitoid* 4 persamaan dengan $t = 700$.

Berdasarkan gambar 3.5 diatas, dapat dilihat bahwa terjadi interaksi antara parasitoid *cotesia glomerata* dengan kedua host yang mengakibatkan kepadatan dari populasi host berkurang, dan untuk parasitoid *cotesia rubecula* mengalami interaksi dengan host *pieris rapae*, dimana hala tersebut juga mempengaruhi penurunan kepadatan atau menyebabkan kematian pada tubuh host.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diatas, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Hasil dari analisis model interaksi *Host-Parasitoid* adalah terjadinya keterkaitan dan saling mempengaruhi antara kehidupan *Parasitoid* dengan *host* sebagai tubuh inangnya.
2. Hasil analisis dinamik dari sistem persamaan diferensial *Host-Parasitoid* adalah di dapatkannya nilai Eigen yang kemudian dilakukan analisis kestabilan titik tetap dan menunjukkan bahwa titik tetap tersebut bersifat stabil, karena dari kesulurahn niali Eigen bersifat negatif.
3. Kemudian pada gambar simulasi telah menunjukkan bahwa gambar model tepat pada titik tetap dan menunjukkan bahwa titik tetap bersifat stabil.

4.2. Saran

Peneliti berharap pada penelitian selanjutnya dapat di lakukan analisis dinamik model matematika *Host-Parasitoid* dalam bentuk sistem persamaan diferensial parsial dan juga dapat dilakukan dengan menggunakan metode yang lain.

DAFTAR RUJUKAN

- Aliyah, Ijazatul. 2007. *AnAlisis Model MAtemAtika PAdA PengAruh Sistem Imun TerhAdAp Infeksi BAKteri Tuberkulosis*. Skripsi S1 Tidak Dipublikasikan Jurusan MAtematika Fakultas Sains dan Teknologi. Malang:UIN Maliki Malang.
- Anton, H, dan Rorres, C.. 2004. *AljAbAr LineAr Elementer versi Aplikasi Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Boyce, W. E., dan DiPrima, R. (2001). *ElementArY DifferentiAl EquAtion And BoundArY VAlue Problem*. New York: John Wiley dan Sons, Inc.
- Dawkins, P. 2007. *differentiAl EquAtions*, (Online), (<http://tutorial.math.lamar.edu/getfile.aspx?file=B,1,N>), diakses 10 Oktober 2018.
- Finizio, N. dan Ladas. 1988. *PersAmAAn DiferensiAl BiAsA dengAn PenerApAn Modern Edisi Kedua* . Jakarta: Erlangga.
- Hadjosoemantri, Koesnadi. 1993. *Hukum TAtA LingkungAn*, Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.
- Hedrick, J. K., dan Girard, A. 2010. *Control of NonlineAr DynAmic Systems: Theory And ApplicAtions*. (Online), (<http://www.me.berkeley.edu/ME237/ControlOfNonlinearDynamicSystems.pdf>), diakses 5 Mei 2015.
- Imrona, M. (2013). *AljAbAr LineAr DAsAr*. Jakarta: Erlangga.
- Izhikevich, E. M. 2007. *DynAmicAl Systems in Neuroscience*. London:The MIT Press Cambridge.
- Karso. 2012. *Nilai Eigen, Vektor Eigen Dan Diagonalisasi Metriks*. (Online). (http://file.upi.edu/direktori/fpmipa/jur.pend.matematika/195509091980021-karso/modul_11_aljabar_linear_2006.pdf), diakses 14 Agustus 2014.
- Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Pearce, Ian G., Chaplain, Mark A.J., Schofield, Peter G., Anderson, Alexander R.A., dan Hubard, Stephen F. (2006). Modelling the Spatio-Temporal Dynamics of Multi-Species *Host-Parasitoid* Interactions: Heterogeneous Patterns and Ecological Implications. *JournAl of TheoreticAl Biology* 241, 876-886.
- Perko, L. 2000. *DifferentiAl EquAtions And DynAmicAl Systems*. Arizona: Springer.
- Purnomo, Hari. (2010). *PengAntAr PengendAliAn HAYAti*. Yogyakarta: ANDI
- Firmansyah, Amanda Patappari. (2017). *PengAntAr PerlindungAn TAnAmAn*. Makassar: CV. Inti Mediatama
- Roat, M. 2012. *Bifurkasi Hopf Pada Sistem Predator Prey Dengan Fungsi Respon Tipe II*. Skripsi tidak diterbitkan Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.

- Robinson, R. C.. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems Continuous and Discrete*. New Jersey: Pearson Education, In.
- Ross, L. Shepley. 1984. *differentiAl EquAtion* 3th. New York: University of New Hampshire.
- Shihab, M. Quraish. 2005. *TAFsir Al-MisbAh: PesAn, KesAn dAn KeserAsiAn Al-Qur'An*. Jakarta: Lentera Hati.
- Tohaneanu, M. 2014. *MATh 421 DynAmicAl Systems*. (Online), (www.math.jhu.edu/~mtohanea/M421L1.pdf), diakses pada 05 Maret 2015.
- Waluya, Budi. 2006. *Buku Ajar Persamaan Diferensial*. Semarang: Universitas Negeri Semarang.



LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran 1

Menghitung Nilai Eigen dan Vektor Eigen

```
> restart;
> rho1 := 2.5 :
> rho2 := 0.25 :
> rho3 := 2.5 :
> gama := 0.8 :
> s1 := 0.8 :
> s2 := 0.2 :
> s3 := 0.8 :
> c1 := 0.3 :
> c2 := 0.004 :
> c3 := 0.2 :
> mu1 := 0.2 :
> mu2 := 0.1 :
> p1 := diff(N(t), t) = N(t)·(1 - N(t)) - s1·P(t)·(rho1·N(t)) :
>
p2 := diff(M(t), t) = gama·M(t)·(1 - M(t)) - s2·P(t)·(rho2·M(t)) - s3·Q(t)·(rho3
·M(t)) :
>
p3 := diff(P(t), t) = c1·P(t)·(rho1·N(t)) + c2·P(t)·(rho2·M(t)) - mu1·P(t) :
>
p4 := diff(Q(t), t) = c3·Q(t)·(rho3·M(t)) - mu2·Q(t) :
>
titik1 := (N = 0.43152386454, M = 0.27725887222, P = 0.46460420240, Q = 0.3852162032) :
>
> with(plots) :
> with(linalg) :
> jac := jacobian([pers1, pers2, pers3, pers4], [N, M, P, Q]) :
> a_titik1 := subs(titik1, evalm(jac)) :
> nilaieigen1 := eigenvals(a_titik1) :
> vektoreigen := eigenvectors(a_titik1) :
```

Lampiran 2

Perhitungan pada Matriks Jacobian

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial N} & \frac{\partial f_1}{\partial M} & \frac{\partial f_1}{\partial P} & \frac{\partial f_1}{\partial Q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial N} & \frac{\partial f_2}{\partial M} & \frac{\partial f_2}{\partial P} & \frac{\partial f_2}{\partial Q} \\ \frac{\partial f_3}{\partial N} & \frac{\partial f_3}{\partial M} & \frac{\partial f_3}{\partial P} & \frac{\partial f_3}{\partial Q} \\ \frac{\partial f_4}{\partial N} & \frac{\partial f_4}{\partial M} & \frac{\partial f_4}{\partial P} & \frac{\partial f_4}{\partial Q} \end{bmatrix}$$

Maka dapat dihitung

$$\frac{\partial f_1}{\partial N} = 1-2N-2P$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial M} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial P} = -2N \quad \frac{\partial f_1}{\partial Q} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial N} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial M} = 0.8-1.6M-0.5P-2Q$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial P} = -0.050M$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial Q} = -2M$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial N} = 0.75P$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial M} = 0.001P$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial P} = 0.75N + 0.001M-0.2$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial Q} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial N} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial M} = 0.5Q$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial P} = 0$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial Q} = 0.50M-0.1$$



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Mahdiatul Maknun
NIM : 14610055
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Matematika Interaksi
Host-Parasitoid
Pembimbing I : Dr. Usman Pagalay, M.Si
Pembimbing II : Mohammad Jamhuri, M.Si

| No | Tanggal | Hal | Tanda Tangan |
|-----|-------------------|-----------------------------|--------------|
| 1. | 13 September 2018 | Konsultasi BAB I dan II | 1. |
| 2. | 27 September 2018 | Konsultasi BAB I dan II | 2. |
| 3. | 4 Oktober 2018 | Konsultasi BAB I dan II | 3. |
| 4. | 10 September 2018 | Konsultasi Kajian Keagamaan | 4. |
| 5. | 27 September 2018 | Konsultasi Kajian Keagamaan | 5. |
| 6. | 17 Oktober 2018 | ACC Kajian keagamaan | 6. |
| 7. | 15 Oktober 2018 | ACC Seminar Proposal | 7. |
| 8. | 22 Oktober 2018 | Konsultasi BAB III | 8. |
| 9. | 25 Oktober 2018 | Konsultasi BAB III | 9. |
| 10. | 5 November 2018 | Konsultasi BAB III | 10. |
| 11. | 6 November 2018 | Konsultasi BAB III | 11. |
| 12. | 5 November 2018 | Konsultasi kajian keagamaan | 12. |
| 13. | 12 November 2018 | ACC Keseluruhan | 13. |
| 14. | 12 November 2018 | ACC Kajian Keagamaan | 14. |

Malang, 12 Januari 2019

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si

NIP. 19650414 200312 1 001