KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL DENGAN MENGGUNAKAN KETAKSAMAAN TIPE-HEDBERG

SKRIPSI

OLEH
ABDULLAH AZZAM
NIM. 14610060

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL DENGAN MENGGUNAKAN KETAKSAMAAN TIPE-HEDBERG

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Abdullah Azzam
NIM. 14610060

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL DENGAN MENGGUNAKAN KETAKSAMAAN TIPE-HEDBERG

SKRIPSI

Oleh
Abdullah Azzam
NIM. 14610060

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 24 Agustus 2018

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si	Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19720604 199903 2 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL DENGAN MENGGUNAKAN KETAKSAMAAN TIPE-HEDBERG

SKRIPSI

Oleh
Abdullah Azzam
NIM. 14610060

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 15 Maret 2019

Penguji Utama	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Ketua Penguji	:	Dr. Sri Harini, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji	:	Evawati Alisah, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Abdullah Azzam
NIM	: 14610060
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Keterbatasan Operator Integral Fraksonal dengan Menggunakan Ketaksamaan Tipe-Hedberg

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan saya tersebut.

Malang, 24 Agustus 2018
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
77C32AFF707778320
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Abdullah Azzam
NIM. 14610060

MOTO

"خير الناس أنفعهم للناس"

"sebaik-baiknya manusia adalah yang paling bermanfaat bagi manusia lain"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tuaku Insan Kamil H.R. dan Nurdiyana yang telah merawatku dan membimbingku sejak kecil sehingga aku bisa menjalani kehidupanku saat ini. Dan kepada ketiga adikku Najih Akbar, Amiratul Adilah dan Safirotus Solihah yang selalu menjadi semangatku untuk terus berjuang.

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarokatuh.

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Keterbatasan Operator Integral Fraksional dengan Menggunakan Ketaksamaan Tipe-Hedberg". Shalawat serta salam selalu terlimpahkan kepada Nabi Muhammad Sallallahu Alaihi Wasallam yang telah menuntun manusia ke jalan keselamatan.

Dalam kesempatan ini, penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah mendukung dan membantu penyelesaian dalam penulisan skripsi ini, yakni kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah membimbing penulis dengan segala ilmu yang dimiliki serta senantiasa memberikan doa, arahan, nasihat, dan motivasi dalam menyelesaikan skripsi ini.

5. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan berbagai ilmunya kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Abdul Azis, M.Si, selaku dosen wali yang telah mendidik, memberikan motivasi, dan mengamalkan berbagai ilmunya kepada penulis dengan ikhlas.
7. Segenap dosen jurusan matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah menyampaikan pengajaran, mendidik, pembimbingan serta mengamalkan ilmunya dengan ikhlas. Semoga Allah SWT memberikan pahala-Nya yang sepadan kepada beliau semua.
8. Kedua orang tua penulis dan seluruh keluarga penulis yang selalu memberikan perhatian, dukungan, materi, doa, semangat, kasih sayang, serta motivasi kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Teman-teman jurusan matematika, yang telah banyak memberikan dukungan dan motivasi kepada penulis terkhusus matematika B angkatan 2014.
10. Teman-teman komunitas Serambi Matematika Aktif (SEMATA) yang telah memberikan banyak dukungan berupa informasi-informasi yang berguna bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini dengan lancar.
11. Semua pihak yang secara langsung dan tidak langsung telah ikut memberikan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis hanya bisa berdoa semoga semua bantuan, dukungan, semangat, dan motivasi dicatat sebagai amal ibadah di sisi Allah SWT. Penulis mengetahui bahwa skripsi ini jauh dari kata sempurna, sehingga, demi kesempurnaan skripsi ini, penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak yang bersifat membangun.

Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, Agustus 2018

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan riil
$\mathbb{R}^n$	Himpunan bilangan riil berdimensi-n
I_α	Operator integral fraksional potensial Riesz
I_α^n	Potensial Riesz pada ruang tak-homogen berdimensi-n
$\mu(A)$	Ukuran Borel dari himpunan A
$f(y)$	Fungsi sebarang dengan domain R^n dan kodomain $\mathbb{R}$
f	Fungsi sebarang dengan domain $\mathbb{R}^n$
$\hat{f}(\xi)$	Transformasi Fourier dari fungsi f
$I_\alpha^n f(x)$	Nilai dari hasil pemetaan fungsi f oleh operator I_α^n pada titik $x \in \mathbb{R}^n$
X	Himpunan sebarang
$\mathcal{A}$	Aljabar-σ pada X
$\mathfrak{B}$	Aljabar-σ Borel pada himpunan $\mathbb{R}^n$
λ	Ukuran Lebesgue pada $\mathfrak{B}$
$\mathfrak{f}$	Himpunan fungsi-fungsi terukur
$\mathfrak{f}_+$	Himpunan fungsi-fungsi terukur yang bernilai positif
$L^p(\mathbb{R}^n)$	Ruang Lebesgue pada himpunan $\mathbb{R}^n$
$L^p(\mu)$	Ruang Lebesgue non-homogen dengan ukuran μ pada himpunan $\mathbb{R}^n$
$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Ruang Morrey klasik pada himpunan $\mathbb{R}^n$
$L^{p,\lambda}(\mu)$	Ruang Morrey klasik non-homogen dengan ukuran μ pada himpunan $\mathbb{R}^n$
$\|f: L^p(R^n)\|$	Norma dari f di ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$
$B(x,r)$	Bola dengan jari-jari r dan pusat x
C	Konstanta universal yang nilainya dapat berubah-ubah dari baris-ke-baris
$\int_A f\, d\mu$	Integral dari fungsi $f: A \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ pada himpunan A terhadap ukuran Borel μ
$M^n f$	Nilai dari hasil pemetaan f oleh operator maksimal
I	Interval bilangan Riil

ABSTRAK

Azzam, Abdullah. 2018. **Keterbatasan Operator Integral Fraksional dengan Menggunakan Ketaksamaan Tipe-Hedberg**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Kata kunci: Operator Integral Fraksional, Ketaksamaan Tipe-Hedberg

Pada penelitian ini, diberikan teorema mengenai sifat keterbatasan operator integral fraksional yang disebut potensial Riesz pada ruang Lebesgue tak-homogen. Teorema ini dibuktikan dengan menggunakan metode ketakasamaan Tipe-Hedberg. Selain itu dibuktikan pula ketaksamaan tipe-lemah pada ruang Morrey tak-homogen yang merupakan akibat dari keterbatasan tersebut. Berdasarkan teorema tersebut, disimpulkan bahwa operator integral fraksional potensial Riesz adalah operator yang terbatas dari ruang $L^p(\mathbb{R}^d)$ ke ruang $L^q(\mathbb{R}^d)$, dan juga memenuhi ketaksamaan tipe lemah di ruang Lebesgue tak-homogen. Selain itu disimpulkan pula bahwa kondisi *growth* dapat digantikan oleh kondisi yang lebih lemah.

ABSTRACT

Azzam, Abdullah. 2018. **Boundedness of Fractional Integral Operator Using Hedberg-Type Inequality**. Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Supervisor: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Evawati Alisah, M.Pd.

Key words: Fractional Integral Operator, Hedberg-Type Inequality

In this research, the boundedness theorem of fractional integral operator, which is called Riesz potential, on the non-homogeneous Lebesgue Spaces is given. The proof of the theorem use Hedberg-Type inequality. Also the proof the weak-type inequality on the non-homogeneous Morrey spaces as the consequence of the main boundedness result is given. According to the main theorem, we conclude that the Riesz potential fractional integral operator is bounded from $L^p(\mathbb{R}^d)$ spaces to $L^q(\mathbb{R}^d)$ spaces, and that it satisfies the weak-inequality on non-homogeneous spaces. Apart from that, we conclude also that the growth condition can be replaced by weaker condition.

ملخص

عزام، عبدالله. 2018. **حدود *Fractional Integral Operator* باستخدام عدم المتباينة *Hedberg-Type***. بحث جامعي. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. الجامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (1) خير الرحمن الماجستير، (2) ايفاواتي الالسه الماجستير.

الكلمة المفتاحية: ***Fractional Integral Operator*, عدم المتباينة *Hedberg-Type***

في هذا البحث ، يتم إعطاء نظرية حدود المشغل المتكامل الكسري، والذي يسمى بـ *Riesz* المحتملة، على الفضاء *Lebesgue* غير المتجانسة. دليل على نظرية استخدام عدم المتباينة *Hedberg-Type*. كما يتم تقديم دليل على عدم المتباينة من النوع الضعيف على فضاء *Morrey* غير المتجانسة نتيجة لنتيجة التقييد الرئيسية. وفقًا للنظرية الرئيسية، نستنتج أن المشغل التكاملي المحتمل *Riesz* محصور من الفضاء $L^p(\mathbb{R}^d)$ إلى الفضاء $L^q(\mathbb{R}^d)$، وأنه يرضي عدم المتباينة الضعيفة في الفضاء غير المتجانسة. بصرف النظر عن ذلك، نخلص أيضًا إلى أن حالة النمو يمكن استبدالها بحالة أضعف.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori operator integral fraksional merupakan salah satu kajian dalam analisis harmonik. Di dalam penelitian ini, akan dipelajari salah satu operator integral fraksional yang disebut sebagai potensial Riesz. Beberapa sifat dari operator ini telah pertama kali dipelajari oleh Hardy, Littlewood dan Sobolev pada sekitar tahun 1930. Operator ini pada dasarnya adalah operator yang digunakan sebagai operator balikan dari operator Laplace yang dapat diperoleh melalui transformasi Fourier dari operator Laplace Fraksional.

Pada penelitian ini, ruang yang dijadikan subjek penelitian adalah ruang Lebesgue, yaitu ruang yang terdiri dari fungsi-fungsi dengan domain riil berdimensi-n yang konvergen terhadap norma Lebesgue.

Hardy, Littlewood dan Sobolev telah membuktikan bahwa operator integral fraksional terbatas dari ruang Lebesgue-p ke ruang Lebesgue-q untuk suatu syarat tertentu. Untuk menghormati jasa mereka, ketaksamaan keterbatasan tersebut diberi nama ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev. Dari ketaksamaan ini, dapat dilihat bahwa operator integral fraksional potensial Riesz memetakan suatu fungsi menjadi fungsi lain yang kekonvergenannya terhadap norma Lebesgue adalah bergantung pada kekonvergenannya pada ruang Lebesgue itu sendiri.

Sebagai perluasan dari ruang Lebesgue, pada tahun 1938, C. Morrey mendefinisikan suatu ruang fungsional yang saat ini disebut sebagai ruang Morrey (lihat Bastos dan Lebre, 2014). Pada domain bilangan riil berdimensi-n, ruang

Morrey adalah himpunan fungsi-fungsi dengan domain $\mathbb{R}^n$ yang konvergen terhadap norma Morrey. Selanjutnya, Nakai, pada tahun 1994, memperkenalkan ruang Morrey yang diperumum (*generalized Morrey space*) yang didefinisikan sebagai ruang fungsi-fungsi yang terintegralkan lokal yang memenuhi norma Morrey diperumum-(p, q) dan memenuhi kondisi penggandaan (*doubling condition*) dengan konstanta penggandaan C.

Pada beberapa referensi penelitian yang membahas tentang sifat keterbatasan operator integral fraksional, terdapat kondisi penggandaan untuk ukuran yang muncul dalam integral fraksional. Namun, beberapa penelitian dalam sepuluh tahun terakhir menunjukkan bahwa kondisi ini sewaktu-waktu dapat diganti dengan kondisi lainnya yang disebut sebagai kondisi *growth*. Hal ini-lah yang mendasari terciptanya istilah ruang tak-homogen. Ruang tak-homogen adalah ruang $\mathbb{R}^d$ yang dilengkapi dengan ukuran Borel tak-negatif μ yang memenuhi kondisi growth. Ini berbeda dengan ruang homogen yang dilengkapi oleh ukuran μ yang memenuhi kondisi penggandaan.

Dengan menggunakan pengertian ke-tak-homogenan tersebut, pada kelanjutannya, diperkenalkan ruang Morrey diperumum untuk domain tak-homogen yang merupakan ruang fungsi-fungsi terintegralkan lokal yang konvergen terhadap norma Morrey diperumum tak-homogen.

Selain itu, operator integral fraksional yang didefinisikan pada ruang fungsional dengan domain ruang metrik-ukur $(\mathbb{R}^d, \mu)$ tak-homogen juga mengalami perubahan. Untuk fungsi f yang didefinisikan pada ruang tak-homogen potensial Riesz menyatakan inversi laplacian fraksional dari fungsi f.

Keterbatasan operator integral fraksional potensial Riesz pada ruang Lebesgue dapat dibuktikan dengan berbagai cara, salah satunya adalah dengan menggunakan ketaksamaan Hedberg. Pembuktian teorema mengenai keterbatasan operator integral fraksional potensial Riesz tak-homogen pada ruang Lebesgue tak-homogen dengan menggunakan ketaksamaan Hedberg pernah dilakukan oleh Purbawanto Suryawan pada tahun 2008 dalam tesis magisternya (lihat Suryawan, 2008). Meskipun ketaksamaan dalam teorema tersebut merupakan ketaksamaan yang sangat berguna, namun ketaksamaan tersebut hanya berlaku untuk ruang Lebesgue sehingga tidak dapat digunakan untuk membuktikan keterbatasan operator integral fraksional pada ruang Morrey diperumum tak-homogen. Sehingga dibutuhkan suatu ketaksamaan tipe-Hedberg yang berlaku pada ruang Morrey tak-homogen. Sejalan dengan hal tersebut, pada tahun 2016, Hendra Gunawan dan Idha Sihwaningrum memperkenalkan suatu ketaksamaan tipe-Hedberg untuk ruang Morrey (Gunawan, Sihwaningrum, 2016).

Idha, Suryawan, dan Hendra Gunawan (Idha dkk, 2008) dan Utoyo (Utoyo 2012) telah membuktikan syarat cukup dari keterbatasan operator integral fraksional potensial Riesz tak-homogen pada ruang Morrey diperumum tak-homogen dengan syarat kondisi *growth*. Sebagai pengembangan dari hasil-hasil tersebut, pada penelitian ini, akan dibuktikan syarat cukup dari keterbatasan operator integral fraksional potensial Riesz tak-homogen dari ruang Lebesgue tak-homogen orde p ke ruang Lebesgue tak-homogen orde-q dengan syarat kondisi *growth* dengan menggunakan ketaksamaan tipe-Hedberg. Selain itu akan diberikan juga beberapa akibat dari teorema tersebut.

Pemahaman terkait keterbatasan operator integral fraksional pada ruang Morrey diperumum tak-homogen memiliki signifikansi untuk mengetahui keterbatasan dan regularitas dari solusi persamaan diferensial parsial Poisson yang pada akhirnya akan menjawab apakah masalah-masalah dalam mekanika elastisitas ataupun fluida yang berkaitan dengan persamaan Poisson.

Bagaimanapun, pada hakikatnya manusia sendiri adalah makhluk yang terbatas akalnya, karena seluruh ilmu itu adalah dari Allah dan manusia hanya mempelajari sebagian kecil dari ilmu Allah. Allah berfirman dalam surat Al-Isra ayat 85 yang artinya:

"Dan mereka bertanya kepadamu tentang ruh. Katakanlah: "Ruh itu termasuk perintah Rabb-ku, dan tidaklah kamu diberi pengetahuan melainkan sedikit". (QS' al-Isra':85)"

Ayat di atas jelas menunjukkan bagaimana akal manusia terbatas dan tidak dapat digunakan untuk mengetahui berbagai hal yang berada di luar nalarnya. Dengan demikian sudah sewajarnya kita untuk mengagumi kebesaran Allah atas ilmu-ilmuNya.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah: Bagaimana sifat keterbatasan dari operator fraksional I_α^n pada ruang Lebesgue tak-homogen $L^p(\mu)$ ke ruang $L^q(\mu)$ dengan menggunakan ketaksamaan tipe-Hedberg?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui sifat keterbatasan dari operator fraksional I_α^n pada ruang Lebesgue tak-homogen $L^p(\mu)$ ke ruang $L^q(\mu)$ dengan menggunakan ketaksamaan tipe-Hedberg.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, akan dibuktikan syarat perlu dari ketaksamaan tipe-lemah operator integral fraksional pada ruang Lebesgue tak-homogen $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu)$ dan bukan pada ruang lainnya serta, pembuktiannya akan menggunakan ketaksamaan tipe-Hedberg dan bukan metode lainnya.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut.

1. Memberikan informasi mengenai keterbatasan dari operator fraksional I_α^n pada ruang Lebesgue tak-homogen.
2. Memberikan informasi ketaksamaan tipe-lemah operator integral fraksional pada ruang Morrey diperumum tak-homogen $L^{p,\lambda}(\mu)$.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian pustaka (*library research*). Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku analisis harmonik dan teori ukuran. Kajian pada buku analisis harmonik dan jurnal terkait penelitian dikhususkan pada kajian mengenai operator integral fraksional Riesz. Kajian pada buku-buku teori ukuran berkaitan dengan topik ketak-homogenan, khususnya tentang teori keterbatasan operator integral fraksional pada ruang-ruang tak-homogen.

Penelitian ini menggunakan metode pembuktian secara induktif, yaitu dimulai pembuktian teorema yang umum menuju pada beberapa akibat khusus. Secara garis besar langkah penelitian ini sebagai berikut.

1. Membuktikan keterbatasan operator maksimal pada ruang Morrey tak-homogen;
2. Membuktikan ketaksamaan tipe-Hedberg pada ruang Morrey tak-homogen dengan menggunakan hasil dari langkah 1;
3. Membuktikan keterbatasan dari operator integral fraksional pada ruang Morrey tak-homogen dengan menggunakan ketaksamaan tipe-Hedberg;
4. Membuktikan beberapa akibat dari keterbatasan operator integral fraksional pada ruang Morrey tak-homogen; dan
5. Menulis laporan penelitian.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi lebih terarah dan mudah dipahami, digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi atas beberapa subbab dengan sistematika sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian Pustaka terdiri dari teori-teori yang digunakan untuk mendukung pembahasan dan menjawab rumusan masalah. Kajian Pustaka dalam penelitian ini meliputi: transformasi Fourier, operator integral fraksional. Ruang L^p, ruang Morrey dan ruang Morrey diperumum, fungsi maksimal Hardy-Littlewood, keterbatasan operator integral fraksional, ketaksamaan Tipe-Hedberg, dan keutamaan berbagai macam ilmu dalam Islam.

Bab III Pembahasan

Pembahasan terdiri dari hasil utama penelitian yang menjawab rumusan masalah. Pembahasan dalam penelitian ini meliputi: keterbatasan operator integral fraksional pada ruang Lebesgue, dan ketaksamaan tipe lemah, dan kajian Islam.

Bab IV Penutup

Penutup terdiri dari kesimpulan terkait hasil pembahasan dan juga saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Ukuran dan Integral

Ukuran adalah konsep yang digunakan untuk mendasari konsep tentang integral dalam analisis, termasuk integral fraksional. Oleh karena itu pemahaman mengenai konsep ukuran adalah sangat penting. Untuk memahami konsep dari ukuran, terlebih dahulu diberikan definisi formal dari aljabar sigma sebagai berikut.

Definisi 2.1:

Misalkan X adalah suatu himpunan. Suatu koleksi $\mathcal{A}$ dari subhimpunan dari X adalah aljabar-σ jika:

1. $X \in \mathcal{A}$,
2. Untuk setiap himpunan $A \in \mathcal{A}$, maka $A^c \in \mathcal{A}$,
3. Untuk setiap barisan himpunan tak-hingga $\{A_i\}$ di $\mathcal{A}$, maka $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ada di $\mathcal{A}$.
4. Untuk setiap barisan himpunan tak-hingga $\{A_i\}$ di $\mathcal{A}$, maka $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ ada di $\mathcal{A}$.

(Cohn, 2013).

Untuk memahami konsep di atas diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.2:

Misalkan $X \coloneqq \mathbb{R}$, maka $\mathcal{A} \coloneqq \{\bigcup_i (a_i, b_i]:\ a_i, b_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \mathbb{N}\}$ adalah aljabar-σ pada X. Apabila diambil $a_i = -i$, dan $b_i = i$, maka jelas bahwa

$$\bigcup_i (a_i, b_i] = \bigcup_i (-i, i] = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

Selanjutnya, sebagai ilustrasi, ambil $A = (1,6] \cup (8,9] \in \mathcal{A}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} A^c &= (-\infty, 1] \cup (6,8] \cup (9, +\infty) \\ &= \left(\bigcup_{r<1, r\in\mathbb{Z}} (r, 1] \right) \cup (6,8] \cup \left(\bigcup_{s>9, s\in\mathbb{Z}} (9, s] \right) \\ &= \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} (a_i, b_i] \in \mathfrak{B} \end{aligned}$$

di mana $a_i = i$, $b_i = 1$ untuk $i < 1$, $a_i = 6$, $b_i = 8$, untuk $i \in \{1, \dots, 9\}$, dan $a_i = 9$, $b_i = i$, untuk $i > 9$.

Perlu diperhatikan bahwa kita juga dapat menulis

$$A = (1,6] \cup (8,9] = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} (a_i, b_i]$$

dengan $a_i = 1$, $b_i = 6$, untuk $i < 0$, dan $a_i = 8$, $b_i = 9$, untuk $i \geq 0$. Karena $\mathbb{Z}$ adalah himpunan tercacah, maka jelas bahwa terdapat pemetaan dari $\mathbb{N}$ menuju $\mathbb{Z}$, sehingga ilustrasi di atas adalah sah. Selanjutnya, untuk mengilutrasikan sifat 3, maka dapat didefinisikan barisan himpunan

$$\{B_i\} = \left\{ \left(0, \frac{1}{2}\right], \left(0, \frac{3}{4}\right], \left(0, \frac{7}{8}\right], \left(0, \frac{15}{16}\right], \dots \right\},$$

Jelas bahwa $B_i \in \mathcal{A}$, untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. diperoleh

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left(0, 1 - \frac{1}{2^i}\right] = \lim_{i\to\infty} \left(0, 1 - \frac{1}{2^i}\right] = (0, 1] \in \mathfrak{B}$$

Sifat ini berlaku untuk setiap barisan himpunan $\{B_i\}$ di $\mathcal{A}$. Selanjutnya, untuk mengilustrasikan sifat 4, kita peroleh

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \left(0, 1 - \frac{1}{2^i}\right] = \left(0, \min_{i\in\mathbb{N}} \left\{1 - \frac{1}{2^i}\right\}\right] = \left(0, \frac{1}{2}\right] \in \mathfrak{B}$$

Jadi, sifat 1-4 berlaku untuk aljabar-σ $\mathcal{A}$.

Selanjutnya, pada konsep mengenai aljabar-σ terdapat suatu fungsi khusus yang disebut sebagai fungsi terjumlahkan-tercacah (*countably additive measure*). Definisi dari fungsi terjumlahkan-tercacah adalah sebagai berikut.

Definisi 2.3:

Misalkan X adalah suatu himpunan, dan $\mathcal{A}$ adalah suatu aljabar-σ pada X. Suatu fungsi μ yang di mana domainnya adalah aljabar-σ $\mathcal{A}$, dan nilainya ada di setengah garis bilangan riil diperluas (*extended half-line*) $[0, +\infty]$ disebut terjumlahkan tercacah apabila memenuhi:

$$\mu\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(A_i)$$

untuk $\{A_i\} \subset \mathcal{A}$, dan I adalah himpunan tercacah (Cohn, 2013).

Contoh untuk fungsi yang memenuhi kaidah terjumlahkan-tercacah adalah fungsi $\mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ yang didefinisikan sebagai berikut.

$$\mu(A) = |A|$$

di mana $A \in \mathcal{A}$, dan $|A|$ menyatakan kardinalitas dari A, yaitu bernilai n apabila A dapat dinyatakan sebagai himpunan dengan n elemen

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}$$

dan bernilai tak-hingga apabila A adalah himpunan tak-hingga atau tak-tercacah. Sebagai ilustrasi, untuk $A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ irasional}\}$, $\mu(A) = +\infty$ dan untuk $A = \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{N}, x < 10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, diperoleh $\mu(A) = 9$. Untuk mengilustrasikan bagaimana fungsi μ memenuhi aksioma fungsi terjumlahkan-tercacah, perhatikan perhitungan berikut. Misalkan $I = \{1,2,3,4,5\}$, dan diambil $A_i \coloneqq \left\{\frac{2^i}{2^i+1}, \frac{2^i+1}{2^i+2}, \dots, \frac{2^{i+1}-1}{2^{i+1}}\right\}, i \in I,$ maka diperoleh:

$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i\in I}\left\{\frac{2^i}{2^i+1}, \dots, \frac{2^{i+1}-1}{2^{i+1}}\right\}\right)$$

$$= \mu\left(\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \dots, \frac{63}{64}\right\}\right)$$

$$= 62$$

Pada sisi lain,

$$\sum_{i\in I} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{5} \left(\left(2^{i+1}-1\right) - \left(2^i - 1\right)\right)$$

$$= 2^6 - 1 - 2 + 1$$

$$= 62$$

Jadi μ memenuhi persyaratan untuk menjadi fungsi tercacah-terjumlahkan.

Dengan menggunakan definisi di atas, maka dapat didefinisikan ukuran sebagai berikut.

Definisi 2.4:

Ukuran pada aljabar-σ $\mathcal{A}$ adalah suatu fungsi $\mu: \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ yang memenuhi $\mu(\emptyset) = 0$, dan bersifat terjumlahkan tercacah (Cohn, 2013).

Untuk memahami ukuran secara mendalam, diberikan beberapa contoh sebagai berikut.

Contoh 2.5:

1. Misalkan X adalah himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ adalah koleksi dari himpunan-himpunan Borel pada X, dan $A \in \mathcal{A}$.

$$\mu(A) = \chi_A(0) \coloneqq \begin{cases} 1 & ; \text{jika } 0 \in A \\ 0 & ; \text{jika } 0 \notin A \end{cases}$$

Kita peroleh

$$\mu(\emptyset) = \chi_{\emptyset}(0) = 0$$

karena $0 \notin \emptyset$. Selanjutnya, misalkan $A_i = \{x \in \mathbb{R}: i - 1 \leq x < i\}$, $i \in \mathbb{N}$. Maka $\{A_i\}$ adalah barisan himpunan yang disjoin satu sama lain, sehingga kita peroleh

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \mu(\{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x < \infty\}) = 1$$

Pada sisi lain,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(\{x \in \mathbb{R}: i - 1 \leq x < i\})$$

$$= \mu\big([0,1)\big) + \mu\big([1,2)\big) + \mu\big([2,3)\big) + \cdots$$

$$= 1 + 0 + 0 + \cdots = 1 = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)$$

Jadi $\mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ adalah ukuran.

2. Tinjau himpunan $\mathbb{R}$. Dan misalkan λ adalah suatu fungsi yang mengaitkan setiap interval di $\mathbb{R}$ dengan panjangnya, yaitu

$$\lambda(A) = \lim \sup_{h \to 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h\chi_A(kh)$$

maka λ adalah suatu ukuran. Ukuran ini disebut ukuran Lebesgue pada $\mathbb{R}$. Sebagai ilustrasi, misalkan $A = [0,3] \coloneqq \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x < 3\}$, maka diperoleh

$$\lambda(A) = \lim\sup_{h\to 0} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h\chi_{[0,3]}(kh)$$

$$= \lim\sup_{h\to 0} h\left(\cdots + \chi_{[0,3]}(-h) + \chi_{[0,3]}(0) + \chi_{[0,3]}(h) + \chi_{[0,3]}(2h) + \cdots\right)$$

$$= \lim\sup_{h\to 0} h\left(\cdots + 0 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\lceil 3/h\rceil} + 0 + \cdots\right)$$

$$= \lim\sup_{h\to 0} h\left(\left\lceil\frac{3}{h}\right\rceil\right)$$

$$= h\left(\frac{3}{h}\right) = 3$$

Selanjutnya, dengan definisi aljabar-σ dan definisi ukuran di atas, maka dapat didefinisikan suatu ruang ukur dan ruang terukur sebagai berikut.

Definisi 2.6:

Apabila X adalah himpunan, $\mathcal{A}$ adalah aljabar-σ pada X, dan μ adalah ukuran pada $\mathcal{A}$, maka triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ disebut sebagai ruang ukur (*measure space*). Sejalan dengan itu, $(X, \mathcal{A})$ disebut sebagai ruang terukur (*measurable space*) (Cohn, 2013).

Contoh 2.7:

Misalkan $\mathfrak{B}$ adalah himpunan Borel yang didefinisikan sebagai

$$\mathfrak{B} := \left\{\bigcup_i (a_i, b_i]:\ a_i, b_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \mathbb{N}\right\}$$

Berdasarkan Contoh 2.2, $\mathfrak{B}$ adalah aljabar-σ. Sehingga $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ adalah ruang terukur (*measurable space*). Selanjutnya, dengan menggunakan ukuran pada Contoh 2.5-3, yaitu ukuran Lebesgue λ, maka diperoleh bahwa $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$ adalah ruang ukur. Kita akan menyebut ruang ukur $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$ sebagai ruang ukur Borel pada $\mathbb{R}$.

Dengan menggunakan konsep dari ukuran sebagaimana telah dijelaskan di atas, maka akan dapat didefinsikan konsep tentang integral yang merupakan konsep yang digunakan dalam membangun suatu operator integral fraksional. Sebelum diberikan definisi mengenai integral akan diberikan terlebih dahulu definisi dari fungsi terukur sebagai berikut.

Definisi 2.8:

Misalkan $(X, \mathcal{A})$ adalah suatu ruang terukur, dan A adalah subhimpunan dari X yang ada di $\mathcal{A}$. Fungsi $f: A \to [-\infty, +\infty]$ disebut fungsi terukur terhadap $\mathcal{A}$ apabila fungsi ini memenuhi salah satu dari kondisi-konsdisi:

(a). Untuk setiap bilangan riil t, himpunan $\{x \in A: f(x) \leq t\}$ ada di $\mathcal{A}$,

(b). Untuk setiap bilangan riil t, himpunan $\{x \in A: f(x) < t\}$ ada di $\mathcal{A}$,

(c). Untuk setiap bilangan riil t, himpunan $\{x \in A: f(x) \geq t\}$ ada di $\mathcal{A}$, dan

(d). Untuk setiap bilangan riil t, himpunan $\{x \in A: f(x) > t\}$ ada di $\mathcal{A}$.

(Cohm, 2013).

Contoh 2.9:

Pada ruang ukur Borel $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$, ambil $f: \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ sebagai

$$f(x) = e^x$$

Selanjutnya, ambil sebarang $t \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}: f(x) \leq t\} &= \{x \in \mathbb{R}: e^x \leq t\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}: x \leq \ln t\} \\ &= \bigcup_i (i, \ln t] \in \mathfrak{B} \end{aligned}$$

Sebagai ilustrasi, misalkan $A = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 3\}$, maka

$$\lambda\big(f(A)\big) = \limsup_{h\to 0} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h\chi_{f(A)}(kh) = \limsup_{h\to 0} \sum_{k\in\mathbb{Z}} h\chi_{[1,e^3]}(kh)$$

$$= \limsup_{h\to 0} h\left(\cdots + 0 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\lceil e^3 - 1\rceil} + 0 + \cdots\right)$$

$$= h\left(\frac{e^3 - 1}{h}\right) = e^3 - 1 \approx 19.0855$$

Dengan demikian disimpulkan bahwa f terukur terhadap $\mathfrak{B}$, yaitu f merupakan fungsi terukur pada ruang ukur $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$.

Untuk ruang terukur $(X, \mathcal{A})$, kita akan notasikan $\mathcal{f}$ untuk himpunan fungsi-fungsi yang terukur-$\mathcal{A}$ (terukur terhadap $\mathcal{A}$), dan akan dinotasikan $\mathcal{f}_+$ untuk himpunan fungsi-fungsi bernilai tak-negatif di $\mathcal{f}$. Dengan menggunakan definisi fungsi terukur di atas, maka dapat didefinisikan integral sebagai berikut.

Definisi 2.10:

Misalkan μ adalah ukuran pada ruang terukur $(X, \mathcal{A})$. Apabila f adalah fungsi di $\mathcal{f}_+$ dan diberikan oleh $f = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$, di mana $a_1, \dots, a_m$ adalah bilangan-bilangan riil tak-negatif dan $A_1, \dots, A_m$ adalah subhimpunan-subhimpunan dari X yang saling lepas dan termasuk ke dalam $\mathcal{A}$, maka $\int f\, d\mu$, integral dari f terhadap ukuran μ, didefinisikan sebagai $\sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i)$ (Cohn, 2013).

Dengan menggunakan definisi dari integral di atas, maka selanjutnya akan dapat didefinisikan konsep-konsep mengenai operator integral dan operator maksimal. Untuk membahas mengenai ruang tak-homogen $(\mathbb{R}^d, \mu)$, maka ruang yang dimaksud adalah ruang ukur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}, \mu)$, di mana $\mathcal{A}$ adalah aljabar-σ yang dibangkitkan oleh himpunan Borel $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$. Himpunan Borel $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ itu sendiri adalah suatu aljabar-σ yang dibangkitkan oleh koleksi himpunan-himpunan terbuka pada $\mathbb{R}^d$.

2.2 Supremum dan Infimum dari Fungsi

Jelas bahwa pendefinisian dari ruang Morrey diperumum dan norma dari ruang tersebut tidak lepas dari notasi supremum dan infimum. Sebelumnya, diberikan definisi mengenai keterbatasan dari suatu fungsi sebagai berikut.

Definisi 2.11:

Misalkan diberikan fungsi $f: D \to \mathbb{R}$, maka dikatakan bahwa f terbatas di atas jika himpunan $f(D) = \{f(x): x \in D\}$ terbatas di atas, yaitu terdapat $B \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $f(x) \leq B$ untuk semua x di D (Bilangan riil B ini disebut sebagai batas atas dari fungsi f). Dengan cara yang sama, dikatakan bahwa f terbatas di bawah jika himpunan $f(D) = \{f(x): x \in D\}$ terbatas di bawah. Kita katakan bahwa fungsi f terbatas apabila fungsi f terbatas di atas dan terbatas di bawah (Bartle, 2000).

Untuk mengilustrasikan definisi di atas, diberikan contoh mengenai fungsi terbatas sebagai berikut.

Contoh 2.12:

Misalkan fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan oleh

$$f(x) = e^{-(x+1)^2} - e^{-(x-1)^2}$$

Maka, dapat diambil $B_u = 1$, dan $B_l = -1$. Dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa

$$-1 \leq e^{-(x+1)^2} - e^{-(x-1)^2} \leq 1$$

untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Dengan demikian, kita katakan bahwa B_u adalah batas atas dari f, dan B_l adalah batas bawah dari f. Pada sisi lain, fungsi $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$g(x) = e^x$$

bukan fungsi terbatas, karena untuk setiap B_u yang kita tetapkan sebagai batas atas, kita dapat mengambil $x = \ln B_u + 1$ yang menyebabkan $g(x) = g(\ln B_u + 1) = e^{\ln B_u + 1} = eB_u > B_u$.

Dengan menggunakan Definisi 2.11, maka supremum dan infimum dari fungsi bernilai riil dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.13:

Apabila $f: D \to \mathbb{R}$ adalah fungsi yang terbatas, maka u disebut sebagai supremum dari f, ditulis $u = \sup_{x \in D} f(x)$, apabila f memenuhi dua kondisi berikut:

1. u adalah batas atas dari f,
2. Jika x adalah sebarang batas atas dari f, maka $x \leq u$.

Serupa dengan itu, f adalah fungsi yang terbatas, maka v disebut sebagai infimum dari f, ditulis ditulis $v = \inf_{x \in D} f(x)$, apabila f memenuhi dua kondisi berikut:

1. v adalah batas bawah dari f,
2. Jika v adalah sebarang batas bawah dari f, maka $x \geq v$.

Untuk mengilustrasikan definisi di atas, diberikan contoh untuk supremum dari fungsi berikut.

Contoh 2.14:

Misalkan fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan seperti pada contoh 2.12, maka,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left\{e^{-(x+1)^2} - e^{-(x-1)^2}\right\} = 1$$

dan

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \inf_{x\in\mathbb{R}}\left\{e^{-(x+1)^2} - e^{-(x-1)^2}\right\} = -1$$

Pada definisi mengenai norma yang akan dibahas pada subbab selanjutnya definisi supremum dan infimum dari fungsi akan digunakan untuk menghitung supremum dan infimum dari suatu integral tentu.

2.3 Transformasi Fourier

Dalam analisis harmonik, salah satu konsep yang sangat penting sebagai dasar dari teori operator integral fraksional adalah apa yang disebut sebagai transformasi Fourier. Transformasi Fourier didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.15:

Apabila $\phi(s)$ adalah fungsi yang terintegralkan mutlak pada $(-\infty, \infty)$, maka transformasi Fourier langsung (direct Fourier transform) dari $\phi(s)$, $\mathcal{F}[\phi]$, dan inversi trasformasi Fourier dari $\phi(s)$, $\mathcal{F}^{-1}[\phi]$, adalah fungsi-fungsi yang diberikan oleh

$$\mathcal{F}[\phi]|_x = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s)e^{-jxs}ds \qquad (2.1)$$

dan

$$\mathcal{F}^{-1}[\phi]|_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)e^{jxs}dx \qquad (2.2)$$

(Poularikas, 2010:2-2)

Selanjutnya, untuk fungsi-fungsi n-peubah dengan domain $\mathbb{R}^n$ dapat didefinisikan transformasi Fourier berdimensi-n sebagai berikut.

Definisi 2.16:

Jika $f \in L^1$, transformasi Fourier-nya adalah fungsi terbatas dan kontinu

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\xi}dx \tag{2.3}$$

Jika $\hat{f}$ juga bersifat integrable, maka rumus inversi Fourier memberikan

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi \ , \tag{2.4}$$

dengan kata lain, $\mathcal{F}^2 f(x) = (2\pi)^n f(-x)$ (Adams, 1996:5).

Transformasi Fourier akan sangat sering digunakan dalam penelitian ini, terutama sebagai jalan untuk menurunkan operator integral fraksional I_α. Untuk kasus $n = 1$ dan $n = 2$, berikut diberikan contoh perhitungan transformasi Fourier untuk fungsi-fungsi dengan domain himpunan $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}^2$. Transformasi Fourier untuk fungsi dengan domain himpunan $\mathbb{R}$ pada umumnya adalah transformasi fungsi $f(t)$ yang memiliki domain waktu menuju fungsi $\hat{f}(\xi)$ dengan domain frekwensi. Untuk mengilustrasikan transformasi Fourier pada himpunan $\mathbb{R}$, perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.17:

Diketahui fungsi domain waktu $f(t)$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(t) \coloneqq \begin{cases} 1 & ; -1 \le t \le 1 \\ 0 & ; \quad t \text{ lainnya} \end{cases}$$

Transformasi fourier dari $f(t)$ di atas adalah:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^1} f(t)e^{-it\xi}dt = \int_{-1}^{1}(1)e^{-it\xi}dt = \left[\frac{e^{-it\xi}}{-i\xi}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{-i\xi}}{-i\xi}$$

Fungsi hasil transformasi Fourier di atas adalah fungsi peubah kompleks yang menunjukkan bahwa transformasi Fourier dari suatu fungsi dengan domain $\mathbb{R}$ dipetakan menuju suatu fungsi lain dengan domain $\mathbb{C}$. Namun pada beberapa kasus aplikasi riil, transformasi Fourier dari suatu fungsi hanya diambil bagian riilnya saja, yaitu transformasi Fourier untuk fungsi pada contoh di atas dapat juga ditulis sebagai

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(\xi)}{\xi}$$

Selanjutnya, berdasarkan Definisi 2.16, transformasi Fourier kontinu 2 dimensi dari suatu fungsi spasial $f(x_1, x_2)$ dapat ditulis sebagai berikut.

$$\hat{f}(\xi_1, \xi_2) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-ix\xi} dx = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x_2, x_2)\, e^{-i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2)} dx_1 dx_2$$

Dimana $\hat{f}(\xi_1, \xi_2)$ adalah fungsi dalam domain frekwensi, dan $f(x_1, x_2)$ adalah fungsi dalam domain spasial atau citra. Transformasi fourier yang digunakan dalam pengolahan citra digital adalah transformasi fourier 2 dimensi, contohnya adalah transformasi Fourier dalam contoh berikut.

Contoh 2.18:

Diketahui fungsi spasial $f(x, y)$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$f(x,y) \coloneqq \begin{cases} 1 & ;\ -1 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & ;\quad x, y \text{ lainnya} \end{cases}$$

Transformasi fourier dari $f(x, y)$ di atas adalah:

$$\hat{f}(\xi_1,\xi_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, e^{-i(x\xi_1+y\xi_2)} dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (1)\, e^{-i(x\xi_1+y\xi_2)} dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\sin(\xi_2)}{\xi_2} e^{-i\xi_2 y}\, dx$$

$$= \frac{\sin(\xi_2)\sin(\xi_1)}{\xi_2\xi_1}$$

Perlu diperhatikan bahwa pada kedua contoh di atas, masing-masing fungsi f ada dalam ruang $L^1(\mathbb{R})$ dan ruang $L^1(\mathbb{R}^2)$. Pada dasarnya transformasi Fourier adalah transformasi yang hanya valid untuk fungsi yang berada dalam ruang $L^1(X)$ di mana X adalah suatu himpunan tertentu. Transformasi Fourier berjalan dari satu ruang fungsi ke ruang fungsi yang berbeda (fungsi yang memiliki domain definisi yang berbeda). Transformasi Fourier dapat dipahami sebagai transformasi yang memetakan fungsi-fungsi pada ruang $L^1(X)$ menuju ruang $L^1(X)^* = L^\infty(X)$ yang merupakan dual Pontriagin dari ruang $L^1(X)$. Definisi ini dapat diperluas untuk ruang fungsi lain seperti $L^2(X)$. Untuk ruang L^2, transformasi Fourier mengambil bentuk

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} f(x)e^{-2\pi i x\xi} dx \tag{2.5}$$

di mana limit pada notasi di atas adalah limit yang disesuaikan dengan limit pada ruang L^2.

Transformasi Fourier memiliki beberapa sifat penting yang dirangkum dalam lemma berikut.

Lemma 2.19:

Misalkan $f \in L^1$, maka berlaku:

1. Kontinuitas: $\xi \to \hat{f}(\xi)$ adalah fungsi yang kontinu seragam (*uniformly continuous function*).
2. Kontraksi: Pemetaan $f \to \hat{f}$ bersifat menurun secara norma (*norm decreasing*) dari L^1 menuju L^∞, dalam artian bahwa

$$|\mathcal{F}f(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx := \|f\|_{L^1}$$

3. Linearitas: Jika F_1 adalah transformasi Fourier dari f_1 dan F_2 adalah transformasi Fourier dari f_2, maka $a_1F_1 + a_2F_2$ adalah transformasi Fourier dari $a_1f_1 + a_2f_2$ untuk setiap konstanta kompleks a_1, a_2.
4. Translasi dan Faktor Fase: Jika F adalah transformasi Fourier dari f, maka $e^{-2\pi i a\xi}F(\xi)$ adalah transformasi Fourier dari $f(x-a)$, dan $F(\xi + b)$ adalah transformasi Fourier dari $e^{-2\pi i bx}f(x)$.
5. Perkalian dan Konvolusi: Jika F_1 adalah transformasi Fourier dari f_1, dan F_2 adalah transformasi Fourier dari f_2, maka F_1F_2 adalah transformasi Fourier dari $(f_1 * f_2)(x)$, di mana konvolusi dari dua buah fungsi didefinsikan oleh:

$$(f_1 * f_2)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f_1(y) f_2(x-y)\ dy$$

6. Turunan dan Perkalian: Jika turunan $(\partial f/\partial x_j)$ ada dan berada dalam $L^1(\mathbb{R}^n)$, maka $2\pi i\xi_j\hat{f}(\xi)$ adalah tranformasi Fourier dari $(\partial f/\partial x_j)$. Selanjutnya, jika $x_i f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, maka $(\partial\hat{f}/\partial\xi_j)(\xi)$ ada dan merupakan transformasi Fourier dari $-2\pi i x_j f(x)$.

7. Transformasi Fourier dari Fungsi Radial: Apabila $f(x) = \varphi(|x|)$ untuk suatu $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^+; r^{n-1}dr)$, maka $\hat{f}(\xi) = \psi(|\xi|)$ untuk suatu $\psi \in C(\mathbb{R}^+)$. Dengan kata lain, transformasi Fourier dari fungsi radial adalah juga fungsi radial.

Lemma di atas akan digunakan dalam penurunan operator integral fraksional potensial Riesz I_α menggunakan definisi operator Laplacian. Dalam beberapa referensi lanjutan tentang teori integral hipersingular, transformasi Fourier sering didefinisikan dengan cara yang berbeda, yaitu dengan menggunakan konsep hasil kali dalam. Pada ruang hasil kali dalam (*ineer product space*) $(X, \langle.,.\rangle)$ yang bertumpu pada lapangan $\mathbb{R}^n$, atau pada umumnya dinotasikan sebagai $X(\mathbb{R}^n)$ pemetaan yang memetakan $f \in X$ menuju suatu nilai di lapangan $\mathbb{R}^n$ disebut sebagai fungsional linear. Ruang untuk sekumpulan fungsional linear disebut sebagai dual dari X, dan dinotasikan X^*. Menurut (Samko, 2001), kita dapat mendefinisikan transformasi Fourier dengan menggunakan konsep hasil kali dalam sebagai berikut.

Definisi 2.20:

Misalkan $\Psi = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : (D^j\varphi)(0) = 0,\ |j| = 0,1,2,\dots\}$, dan $\Phi = \mathcal{F}(\Psi)$. Transformasi Fourier untuk fungsi distribusi $f \in \Phi$ didefinisikan sebagai fungsional linear $\hat{f} = \mathcal{F}f$ sedemikian sehingga, untuk setiap $\varphi \in \Psi$,

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle \qquad (2.6)$$

Dalam definisi di atas, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ adalah ruang Schwartz yang didefinisikan oleh

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta f \right| < \infty, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \right\}$$

di mana $D^{\beta} = D^{(\beta_1,\dots,\beta_n)}$ adalah operator diferensial multivariabel yang didefinisikan oleh

$$D^{(\beta_1,\dots,\beta_n)}f = \frac{\partial^{\beta_1+\dots+\beta_2}}{\partial x_1^{\beta_1}\dots\partial x_n^{\beta_n}}f(x_1,\dots,x_n)$$

dengan $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ adalah multi-indeks, dan notasi $|j|$ adalah norma Euclid yang didefinisikan sebagai

$$|j| = \sqrt{j_1^2 + \dots + j_n^2}$$

Contoh paling umum dari fungsi $\varphi \in \Psi$ adalam definisi di atas adalah $\varphi(x) = \exp(-|x|^2 - |x|^{-2})$. Konsep dalam definisi ini diperlukan untuk menurunkan rumus integral fraksional pada lemma selanjutnya pada subbab selanjutnya.

2.4 Operator Integral Fraksional

Operator integral fraksional adalah salah satu kelas dari operator konvolusi. Prilaku dari operator ini dalam ruang-ruang L^p adalah kajian penelitian tersendiri (Wheeden, 2015). Operator integral fraksional yang dipelajari dalam penelitian ini adalah potensial Riesz yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.21:

Misalkan f adalah fungsi terukur bernilai riil pada $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, dan misalkan $0 < \alpha < n$. Integral fraksional atau potensial Riesz dalam orde-α adalah didefinisikan sebagai

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.7}$$

asalkan integral ini ada (Wheeden, 2015).

Dengan membiarkan f untuk bervariasi, pemetaan yang didefinisikan sebagai $I_\alpha: f \to I_\alpha f$, yaitu, operator konvolusi dengan kernel $|x|^{\alpha-n}$, adalah disebut sebagai operator integral fraksional dalam orde-α (Wheeden, 2015).

Untuk mendapatkan rumus operator integral fraksional I_α seperti pada persamaan (2.7) di atas, maka terlebih dahulu kita harus mengenal operator Laplacian fraksional $(-\Delta)^{-\alpha/2}$. Operator Laplacian fraksional $(-\Delta)^{-\alpha/2}$ merupakan perluasan dari operator Laplacian biasa Δ^p $(p \in \mathbb{N})$ yang didefinisikan secara rekursif oleh

$$\Delta^p f \coloneqq \Delta(\Delta^{p-1} f)$$

dengan Δ didefinisikan pada ruang $\mathbb{R}^n$ sebagai

$$\Delta f(x_1, \dots, x_k) = \nabla^2 f(x_1, \dots, x_k) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Dengan menggunakan transformasi Fourier, kita peroleh sifat penting berikut.

Lemma 2.22:

Operator Laplacian $(-\Delta)^p$ $(p \in \mathbb{N})$ adalah operator pengali Fourier (*Fourier multiplier operator*) dengan pengali $|\xi|^{2p}$, yaitu

$$(-\Delta)^p f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{2p} \hat{f}(\xi)\right)(x)$$

di mana $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, dan $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$.

Bukti:

Dengan menggunakan definisi transformasi Fourier, kita peroleh

$$\mathcal{F}\big(\Delta f(x)\big)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} e^{-i(x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n)} dx + \cdots + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} e^{-i(x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n)} dx$$

Untuk peubah ke-j, berdasarkan aturan Leibniz mengenai turunan parsial

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(uv) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}v + 2\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}$$

yang dapat juga ditulis sebagai

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}v = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(uv) - 2\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j} - u\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}$$

maka, dengan memisalkan $u = f$, dan $v = e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}$, diperoleh

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(f e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}\right)dx - 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}\right)dx$$

$$- \int_{\mathbb{R}^n} f\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}\right)dx$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\int_{\mathbb{R}^n} f e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}dx - 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(-i\xi_j)e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}dx$$

$$- \int_{\mathbb{R}^n} (-\xi_j^2) f e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}dx$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\hat{f}(\xi) + 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j} i\xi_j e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}dx + \xi_j^2\hat{f}(\xi)$$

Karena $\hat{f}(\xi)$ tidak bergantung pada x_j, maka $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\hat{f}(\xi) = 0$, sehingga hasil di atas menjadi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}dx$$
$$= 2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j} i\xi_j e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}dx + \xi_j^2\hat{f}(\xi) \tag{2.8}$$

Pada sisi lain, dengan menggunakan aturan Leibniz untuk turunan parsial orde-1, yaitu

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_j}v + u\frac{\partial v}{\partial x_j}$$

yang dapat ditulis ulang sebagai

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}v = \frac{\partial}{\partial x_j}(uv) - u\frac{\partial v}{\partial x_j}$$

maka, dengan memisalkan $u = f$, dan $v = \xi_j e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}$, diperoleh

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j} i\xi_j e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(f i\xi_j e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}\right) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial}{\partial x_j}\left(i\xi_j e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}\right) dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\int_{\mathbb{R}^n}\left(f i\xi_j e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)}\right) dx - \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\xi_j^2\right) e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)} dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}\hat{f}(\xi) - \xi_j^2\hat{f}(\xi)$$

Karena $\hat{f}(\xi)$ tidak bergantung terhadap x_j, maka $\frac{\partial}{\partial x_j}\hat{f}(\xi) = 0$, sehingga hasil diatas menjadi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \xi_j e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)} dx = -\xi_j^2\hat{f}(\xi)$$

Dengan mensubstitusikan hasil terakhir ini pada persamaan (2.8), diperoleh

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)} dx = 2\left[-\xi_j^2\hat{f}(\xi)\right] + \xi_j^2\hat{f}(\xi) = -\xi_j^2\hat{f}(\xi)$$

Dengan menjumlahkan hasil-hasil ini untuk seluruh $j = 1,2,\dots,n$, maka diperoleh

$$\mathcal{F}\big(\Delta f(x)\big)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)} dx + \cdots + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} e^{-i(x_1\xi_1+\cdots+x_n\xi_n)} dx$$

$$= -\xi_1^2 \hat{f}(\xi) - \cdots - \xi_n^2 \hat{f}(\xi)$$

$$= -(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)\hat{f}(\xi)$$

$$= -|\xi|^2 \hat{f}(\xi)$$

di mana $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}$ adalah norma Euclid dari ξ. Kita dapat menulis ulang hasil di atas sebagai

$$(-\Delta)f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^2 \hat{f}(\xi)\right)(x)$$

Dengan menggunakan definisi rekursif dari operator Laplacian Δ^p $(p \in \mathbb{N})$, maka kita dapatkan hasil berikut.

$$\mathcal{F}\big((-\Delta)^p f(x)\big)(\xi) = \mathcal{F}\left((-\Delta)^{p-1}\big((-\Delta)f(x)\big)\right)(\xi)$$

$$= \mathcal{F}\left((-\Delta)^{p-1}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^2 \hat{f}(\xi)\right)(x)\right)\right)(\xi)$$

$$= \mathcal{F}\left((-\Delta)^{p-1}\big(\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^2) * f(x)\big)\right)(\xi)$$

$$= \mathcal{F}\left(\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^2) * (-\Delta)^{p-1}\big(f(x)\big)\right)(\xi)$$

$$= |\xi|^2 \mathcal{F}\big((-\Delta)^{p-1} f(x)\big)(\xi)$$

Dengan menggunakan hubungan rekursif ini, diperoleh

$$\mathcal{F}\big((-\Delta)^p f(x)\big)(\xi) = |\xi|^2 \mathcal{F}\big((-\Delta)^{p-1} f(x)\big)$$

$$= |\xi|^4 \mathcal{F}\big((-\Delta)^{p-2} f(x)\big)$$

$$\vdots$$

$$= |\xi|^{2p} \mathcal{F}\big(f(x)\big)$$

$$= |\xi|^{2p} \hat{f}(\xi)$$

Dengan demikian pembuktian untuk Lemma 2.21 telah lengkap.

Dengan menggunakan Lemma 2.22 di atas, dengan substitusi $p = \alpha/2$, kita peroleh operator Laplacian fraksional berikut.

$$(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{\alpha} \hat{f}(\xi)\right), \quad \alpha > 0, \; f \in \mathcal{S} \tag{2.9}$$

di mana $\mathcal{S}$ adalah ruang fungsi Schwartz yang telah didefinisikan sebelumnya dan $(-\Delta)^{\alpha/2}$ adalah operator laplacian fraksional.

Ruang fungsi Schwartz yang telah diterangkan pada definisi sebelumnya dapat dipahami sebagai ruang yang memuat fungsi-fungsi pada C^{∞} yang menurun secara drastis (rapidly decreasing). Selanjutnya, menurut (Adam, Hedberg, 2000), potensial Riesz sendiri, untuk $0 < \alpha < n$, dapat didefinisikan sebagai

$$I_{\alpha} f = (-\Delta)^{-\alpha/2} f$$

sehingga, dengan menggunakan persamaan (2.9) dan dengan mengganti α dengan $-\alpha$, diperoleh

$$I_{\alpha} f(x) = (-\Delta)^{-\alpha/2} f = \mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{-\alpha} \hat{f}(\xi)\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\alpha})} \hat{f}(\xi)\right)$$

Untuk mengevaluasi ruas paling kanan pada persamaan di atas, kita perlu mengetahui hasil inversi Fourier dari fungsi $|\xi|^{-\alpha}$. Berikut diberikan Lemma yang menyatakan inversi transformasi Fourier dari fungsi $|\xi|^{-\alpha}$.

Lemma 2.23:

Transformasi Fourier dari fungsi $|x|^{-\alpha}$ diberikan oleh

$$\mathcal{F}\left(|x|^{-\alpha}\right) = \frac{(2\pi)^n}{\gamma_n(\alpha)} \begin{cases} |x|^{\alpha-n} & ; \quad \alpha \neq n + 2k, \alpha \neq -2k \\ |x|^{\alpha-n} \ln \dfrac{1}{|x|} & ; \quad \alpha = n + 2k \\ (-\Delta)^{-\alpha/2} \delta & ; \quad \alpha = -2k \end{cases} \tag{2.10}$$

di mana $\delta = \delta(x)$ adalah fungsi delta Dirac, $k \in \mathbb{N}_0$, dan konstanta $\gamma_n(\alpha)$ adalah diberikan oleh

$$\gamma_n(\alpha) = \begin{cases} 2^{\alpha}\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right) & ; \alpha \neq n+2k, \alpha \neq -2k \\ 1 & ; \qquad \alpha = -2k \\ (-1)^{\frac{n-\alpha}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}2^{\alpha-1}\left(\frac{\alpha-n}{2}\right)!\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) & ; \qquad \alpha = n+2k \end{cases} \quad (2.11)$$

di mana n adalah suatu bilangan bulat positif (Samko, 2001).

Bukti:

Misalkan $\frac{n+1}{2} < Re\{\alpha\} < n$. Karena $\frac{1}{|x|^{\alpha}}$ adalah fungsi yang terintegralkan secara lokal untuk kasus $\alpha < n$, maka dapat digunakan rumus Bochner

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot y}\varphi(|y|)\,dy = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{|x|^{\frac{n}{2}-1}}\int_0^{\infty}\varphi(\rho)\rho^{n/2}J_{n/2-1}\rho(|x|)\,d\rho \quad (2.12)$$

untuk $\varphi(r) = r^{-\alpha}$. Dengan menggunakan rumus di atas, di mana $\rho(x) = r|x|$, maka ruas kiri adalah transformasi Fourier, sehingga diperoleh

$$\mathcal{F}\left(|x|^{-\alpha}\right) = |x|^{\alpha-n}(2\pi)^{\frac{n}{2}}\int_0^{\infty} r^{-\alpha+\frac{n}{2}}J_{n/2-1}\,dr$$

$$= |x|^{\alpha-n}\gamma_n(\alpha)$$

di mana hasil untuk $\gamma_n(\alpha)$ diberikan oleh rumus Weber. Untuk kasus nilai lainnya dari α, maka dapat digunakan representasi transformasi Fourier pada Definisi 2.20 pada persamaan (2.6), yaitu dengan menunjukkan bahwa

$$\frac{(2\pi)^n}{\gamma_n(\alpha)}\langle\frac{1}{|x|^{n-\alpha}},\varphi\rangle = \langle\frac{1}{|x|^{\alpha}},\hat{\varphi}\rangle \quad (2.13)$$

di mana notasi $\langle .,.\rangle$ menyatakan hasil kali dalam pada ruang $\Psi = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n): (D^j\varphi)(0) = 0,\ |j| = 0,1,2,\dots\}$, yaitu

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx$$

Ketaksamaan di atas benar untuk setiap α dalam strip $\frac{n+1}{2} < Re\{\alpha\} < n$. Untuk memeriksa kesamaan di atas untuk daerah yang berada di luar strip, maka hanya cukup dibuktikan bahwa ruas kiri dan ruas kanan adalah keduanya analitik terhadap α. Untuk $Re\{\alpha\} < 0$, maka ruas kanan persamaan di atas diberikan oleh

$$\langle\frac{1}{|x|^{\alpha}}, \widehat{\varphi}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x) - \sum_{|j|\leq[Re\{\alpha\}]-n} \frac{x^j}{j!}(D^j\varphi)(0)}{|x|^{\alpha}} dx \tag{2.14}$$

Hasil ini analitik untuk seluruh $\alpha \in \mathbb{C}$ terkecuali pada $\alpha = -2k$ dan $\alpha = n + 2k$. Jelas bahwa ruas kiri adalah analitik untuk setiap $\alpha \in \mathbb{C}$ sehingga kesamaan di atas terbukti.

Selanjutnya, hanya perlu membuktikan untuk kasus $\alpha = -2k$ dan $\alpha = n + 2k$. Pada kasus $\alpha = -2k$ kesamaan telah jelas dengan menggunakan relasi

$$-\Delta\varphi = \mathcal{F}^{-1}\,|x|^2\mathcal{F}\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

Selanjutnya, untuk kasus $\alpha = n + 2k$, kita dapat menulis $\alpha_k = n + 2k$, sehingga persamaan (2.13) dapat ditulis ulang sebagai

$$(\alpha - \alpha_k)\langle|x|^{-\alpha}, \widehat{\varphi}\rangle = (2\pi)^n\mu(\alpha)\langle|x|^{\alpha-n}, \varphi\rangle$$

di mana $\mu(\alpha) = (\alpha - \alpha_k)/\gamma_n(\alpha)$. Dengan demikian, diperoleh:

$$\frac{d}{d\alpha}\langle\frac{\alpha-\alpha_k}{|x|^{\alpha}}, \hat{\varphi}\rangle = (2\pi)^n\,\langle\frac{\mu'(\alpha) + \mu(\alpha) + \ln|x|}{|x|^{n-\alpha}}, \varphi\rangle$$

Dengan menggunakan rumus

$$\langle\frac{1}{|x|^{\alpha}}, \varphi\rangle = \langle g_{\alpha}, \varphi\rangle + \frac{c_k}{\alpha - \alpha_k}(\Delta^k\varphi)(0)$$

dan sifat

$$\lim_{\alpha\to\alpha_k}\langle g_{\alpha}, \varphi\rangle = \langle\frac{1}{|x|^{\alpha_k}}, \varphi\rangle$$

maka diperoleh

$$\frac{d}{d\alpha}\langle\frac{\alpha-\alpha_k}{|x|^{\alpha}}, \hat{\varphi}\rangle = \langle g_{\alpha}, \varphi\rangle + (\alpha - \alpha_k)\frac{d}{d\alpha}\langle g_{\alpha}, \varphi\rangle \to \langle\frac{1}{|x|^{\alpha}}, \varphi\rangle$$

untuk $\alpha \to \alpha_k$. Dengan demikian, maka diperoleh

$$\langle \frac{1}{|x|^{\alpha_k}}, \varphi \rangle = (2\pi)^n \mu(\alpha_k) \langle \frac{\ln|x|}{|x|^{n-\alpha_k}}, \varphi \rangle$$

Dan karena $\frac{1}{|x|^{\alpha_k}}$ fungsi yang ortogonal terhadap φ, maka $\langle \frac{1}{|x|^{\alpha_k}}, \varphi \rangle = 0$, sehingga diperoleh baris ke-tiga dari persamaan (2.10). Nilai dari konstanta $\mu(\alpha_k) = [-\gamma_n(\alpha_k)]^{-1}$ dapat diperoleh dengan perhitungan yang mudah (Samko, 2001).

Dengan berdasarkan pada Lemma 2.23 di atas dan dengan menggunakan sifat konvolusi dari Lemma 2.19 pada transformasi Fourier, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\alpha})}\hat{f}(\xi)\right) &= [\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\alpha}) * f](x) \\ &= \left(\frac{|x-y|^{-(n-\alpha)}}{\gamma_{\alpha,n}} * f(y)\right) \\ &= \frac{1}{\gamma_{\alpha,n}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \end{aligned}$$

di mana $*$ adalah notasi untuk operasi konvolusi yang didefinisikan oleh

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \tag{2.15}$$

dan

$$\gamma_{\alpha,n} = \gamma_n(\alpha) = \pi^{n/2} 2^{\alpha} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)} \tag{2.16}$$

yang didapat dari Lemma 2.23, persamaan (2.11).

Dengan menggunakan semua hasil di atas maka diperoleh

$$\begin{aligned} I_\alpha f &= (-\Delta)^{-\alpha/2} f \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\alpha})}\hat{f}(\xi)\right) \\ &= \frac{1}{\gamma_{\alpha,n}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \end{aligned}$$

Dengan mengganti $\gamma_{\alpha,n}$ dengan 1 pada ekpresi integral di atas, maka ekspresi integral di atas menjadi

$$I_\alpha f = \frac{1}{\gamma_{\alpha,n}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

yang merupakan ekspresi untuk operator integral fraksional Riesz pada persamaan (2.7) pada Definisi 2.21.

Untuk domain ruang tak-homogen $(\mathbb{R}^d, \mu)$, maka definisi dari operator integral fraksional di atas berubah menjadi sebagai berikut.

Definisi 2.24:

Pada konteks (ruang) tak-homogen, didefinisikan operator integral fraksional I_α^n (untuk $0 < \alpha < n \leq d$) oleh

$$I_\alpha^n f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y), \quad x \in \mathbb{R}^d \qquad (2.17)$$

(Idha Sihwaningrum, 2010)

Untuk mengilustrasikan penggunakan dari operator integral fraksional Riesz dari persamaan (2.17), berikut diberikan contoh pengaplikasian operator integral fraksional pada fungsi yang sederhana.

Contoh 2.25:

Misalkan, untuk kasus $d = 1, n = 2,\ \alpha = 1$, dan dengan menggunakan ukuran Borel $\mu(y) = \lambda(y)$ (ukuran Lebesgue), diberikan fungsi $f(x) = \delta(x)$ yang merupakan fungsi delta Dirac yang didefinisikan sebagai

$$\delta(x) := \lim_{\varepsilon - 0} \frac{1}{|\varepsilon|\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2} \qquad (2.18)$$

di mana limit pada (2.18) adalah limit dalam konteks teori distribusi. Dengan domain himpunan $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}$, maka operator integral fraksional I_α^n dapat diaplikasikan sebagai berikut.

$$I_\alpha^n f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\delta(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(y)}{|x-y|} dy$$

Selanjutnya, berdasarkan sifat pencuplikan fungsi dari fungsi delta Dirac, yaitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(y-x)dy = f(x)$$

maka, dengan substitusi variabel $y = x - \tilde{y}$, dan dengan fakta bahwa fungsi delta Dirac adalah fungsi genap, diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(y)}{|x-y|} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x-\tilde{y})}{|\tilde{y}|} d\tilde{y} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(\tilde{y}-x)}{|\tilde{y}|} d\tilde{y} = \frac{1}{|x|}$$

Pada contoh ini, $h(x)$ adalah fungsi tangga satuan Heaviside yang didefinisikan sebagai

$$h(x) := \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

Pada penelitian ini, syarat perlu dari keterbatasan dari operator integral fraksional (2.17) pada ruang Morrey tak-homogen akan dibuktikan.

2.5 Ruang L^p

Ruang L^p atau disebut juga sebagai ruang Lebesgue orde-p adalah salah satu ruang fungsional terpenting dalam analisis fungsional, khususnya analisis harmonik. Ruang L^p sendiri merupakan generalisasi dari ruang fungsi-fungsi yang terintegralkan L^1. Dengan demikian, ruang L^p dapat disebut sebagai ruang fungsi-

fungsi yang terintegralkan p-kali (p-*integrable*). Untuk $p = 1$, ruang $L^1(\mathbb{R}^d)$ dapat juga disebut sebagai ruang fungsi-fungsi terintegralkan (*integrable functions space*) dengan domain $\mathbb{R}^d$, dan untuk $p = 2$, ruang $L^2(\mathbb{R}^d)$ dapat juga disebut sebagai ruang fungsi-fungsi terintegralkan-kuadrat (*square-integrable functions space*).

Ruang L^p, yang diperkenalkan oleh Henry Lebesgue (1875-1941), merupakan ruang lengkap terhadap norma L^p. Definisi dari ruang L^p dan norma L^p diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.26:

Untuk $0 < p < \infty$, $L^p(\mathbb{R}^d)$ adalah ruang fungsi Lebesgue dengan norma (quasinorma untuk $p < 1$)

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty$$

Untuk $p = \infty$, $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$ adalah norma supremum esensial yang biasa (*essential supremum norm*). Kita tulis L^p untuk $L^p(\mathbb{R}^d)$ (Adam, 1996:2).

Pada penelitian ini, notasi $\|f : L^p(\mathbb{R}^d)\|$ akan sering (tetapi tidak selalu) digunakan untuk menggantikan notasi $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$.

Ruang Lebesgue yang paling sederhana adalah ruang Lebesgue orde-1, yaitu $L^1(\mathbb{R}^d)$. Seperti yang telah kita bahas yang pada subbab sebelumnya, ruang $L^1(\mathbb{R}^d)$ adalah ruang domain untuk transformasi Fourier, sehingga ruang ini akan memainkan pernanan sangat penting dalam kajian teori ini. Untuk memahami ruang Lebesgue, berikut diberikan contoh paling sederhana mengenai fungsi yang termasuk ke dalam ruang Lebesgue $L^1(\mathbb{R})$.

Contoh 2.27:

Ambil fungsi Gaussian $f(x) = e^{-x^2}$, maka jelas bahwa nilai dari norma $\|f: L^1(\mathbb{R})\|$ adalah

$$\|f: L^1(\mathbb{R})\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-x^2}\right|\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}$$

Karena $\sqrt{\pi} < +\infty$, maka dikatakan bahwa fungsi Gaussian $f(x) = e^{-x^2} \in L^1(\mathbb{R})$.

Selanjutnya, sebagai ilustrasi lanjutan untuk memahami ruang Lebesgue orde-1, berikut diberikan contoh fungsi yang termasuk ke dalam ruang Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Contoh 2.28:

Misalkan $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $f(x) = e^{-2\pi|x|^2}$, di mana $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, dan $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$ adalah norma Euclid dari x, maka nilai dari norma $L^1(\mathbb{R}^d)$ dari fungsi f adalah

$$\begin{aligned}
\|f\ :\ L^1(\mathbb{R}^d)\| &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left|e^{-2\pi|x|^2}\right| dx \\
&= \int_{\infty}^{\infty} \dots \int_{\infty}^{\infty} \left|e^{-2\pi(x_1^2+\dots+x_d^2)}\right| dx_1 \dots dx_d \\
&= \int_{\infty}^{\infty} \left|e^{-2\pi x_1^2}\right| dx_1 \dots \int_{\infty}^{\infty} \left|e^{-2\pi x_d^2}\right| dx_d \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi x_1^2} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi x_d^2}\, dx_d \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^d \left(\sqrt{\pi}\right)^d \\
&= 2^{-d/2}
\end{aligned}$$

Karena $\|f : L^1(\mathbb{R}^d)\| = 2^{-d/2} < +\infty$ untuk setiap $d \in \mathbb{N}$, maka berarti $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Selanjutnya, untuk mengilustrasikan contoh dari ruang Lebesgue orde-2, tinjau contoh berikut.

Contoh 2.29:

Misal diberikan $f: \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$f(x_1, \dots, x_{10}) = \chi_{[1,\infty)^{10}}(x) \prod_{k=1}^{d} \frac{1}{x_k} = \chi_{[1,\infty)^{10}}(x) \left(\frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_{10}}\right)$$

di mana $x \in [1, \infty)^{10}$ hanya jika $x_k \in [1, \infty)$ untuk setiap $k \in \{1, \dots, 10\}$. Untuk fungsi ini, norma ruang Lebesgue $L^2(\mathbb{R}^{10})$ dari fungsi f adalah

$$\begin{aligned}
\|f : L^2(\mathbb{R}^{10})\| &= \left(\int_{\mathbb{R}^{10}} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^{10}} \left|\chi_{[1,\infty)^d}(x) \left(\frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_{10}}\right)\right|^2 dx\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_1^\infty \dots \int_1^\infty \frac{1}{x_1^2} \dots \frac{1}{x_{10}^2} dx_1 \dots dx_{10}\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_1^\infty \frac{1}{x_1^2} dx_1 \dots \int_1^\infty \frac{1}{x_{10}^2} dx_{10}\right)^{1/2} \\
&= (1 \dots 1)^{1/2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Jadi $\|f : L^2(\mathbb{R}^{10})\| = 1 < +\infty$. Dengan demikian, $f(x) = \chi_{[1,\infty)^{10}}(x) \prod_{k=1}^{10} \frac{1}{x_k} \in L^2(\mathbb{R}^{10})$.

Perhatikan bahwa fungsi $f(x)$ pada Contoh 2.29 adalah anggota dari ruang $L^2(\mathbb{R}^{10})$, tetapi bukan anggota dari ruang $L^1(\mathbb{R}^{10})$. Perhatikan perhitungan berikut.

$$\|f\ :\ L^1(\mathbb{R}^{10})\| = \int_{\mathbb{R}^{10}} |f(x)|dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left|\chi_{[1,\infty)^{10}}(x)\left(\frac{1}{x_1} \dots \frac{1}{x_{10}}\right)\right| dx$$

$$= \int_1^\infty \frac{1}{x_1} dx_1 \dots \int_1^\infty \frac{1}{x_{10}} dx_{10}$$

$$= +\infty$$

Dari perhitungan di atas jelas bahwa $\|f\ :\ L^1(\mathbb{R}^{10})\|$ bernilai tak-hingga sehingga fungsi $f(x) = \chi_{[1,\infty)^{10}}(x)\prod_{k=1}^{d}\frac{1}{x_k} \notin L^1(\mathbb{R}^{10})$.

Selanjutnya, sebagai perumuman pada konteks tak-homogen, notasi $L^p(\mu) = L^p(\mathbb{R}^d, \mu\ )$ digunakan untuk menotasikan ruang Lebesgue tak-homogen yang didefinisikan oleh norma

$$\|f: L^p(\mu)\|\ = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p\ d\mu(y)\right)^{1/p} < \infty$$

(Utoyo, *et all*, 2012).

Penggunakan ukuran $d\mu(y)$ menggantikan dy adalah sebagai salah satu langkah perumuman bahwa ukuran yang digunakan kali ini adalah ukuran Borel sebarang μ dan bukan ukuran Lebesgue pada integral pada umumnya. Ruang dual dari ruang lebesgue $L^p(\mathbb{R}^d)$ adalah $L^q(\mathbb{R}^d)$ di mana q memenuhi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < \infty$ (Adam, 1996).

Definisi 2.30:

Untuk bilangan riil $p \geq 1$, ruang fungsi L^p terdiri dari semua fungsi terukur-Lebesgue dengan nilai norma-L^p berhingga (Johnston, 2015).

Sebagai contoh, L^1 terdiri dari fungsi-fungsi terukur yang memiliki norma berhingga, yang memetakan $\|f: L^1\|\ \to \int|f| < \infty$. Karena fungsi-fungsi terukur memiliki integral Lebesgue yang berhingga tepat saat $|f|$ memiliki sifat tersebut, maka ruang L^1 yang didefinisikan dengan cara ini adalah termuat dalam ruang fungsi-fungsi yang terintegralkan (Johnston, 2015).

2.6 Ruang Morrey dan Ruang Morrey Diperumum

Sebagai perluasan dari ruang Lebesgue, pada tahun 1938, C. Morrey mendefinisikan suatu ruang fungsional yang saat ini disebut sebagai ruang Morrey. Ruang Morrey yang kita pakai sampai saat ini didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.31:

Ruang Morrey yang dinotasikan sebagai $L^{p,\lambda}(\mu)$ adalah himpunan fungsi-fungsi di $L^p_{loc}(\mu)$ yang konvergen terhadap norma $\|f: L^{p,\lambda}(\mu)\|$ yang didefinisikan sebagai

$$\|f: L^{p,\lambda}(\mu)\| := \sup_{\mathrm{B}:=\mathrm{B}(x,r)} \left(\frac{1}{\mu\big(B(x,2r)\big)^{\lambda}} \int_B |f(y)|^p \, d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}$$

di mana $B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^d$ adalah bola pada ruang $\mathbb{R}^d$ dengan jari-jari r dan berpusat di $x \in \mathbb{R}^d$ (Sihwaningrum, *et all*, 2016).

Pada penelitian ini, himpunan acuan untuk Ruang Morrey adalah himpunan $\mathbb{R}^d$, dan aljabar-σ adalah $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$, yaitu aljabar-$\sigma$ yang dibangkitkan oleh himpunan-himpunan terbuka pada $\mathbb{R}^d$. Dengan demikian, notasi ruang Morrey $L^{p,\lambda}(\mu)$ mengacu pada ruang Morrey $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^d, \mu)$, yaitu ruang Morrey dengan parameter-parameter $p \in \mathbb{N}$, dan $\lambda \in \mathbb{R}$, dengan domain definisi fungsi $\mathbb{R}^d$, dan ukuran yang digunakan adalah ukuran Borel μ pada aljabar-σ $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$. Pada beberapa sumber lain, seperti (Utoyo, *et all*, 2012) ruang yang didefinisikan dengan norma di atas disebut sebagai ruang Morrey Klasik. Sedangkan ruang Morrey merujuk pada ruang Morrey yang diperumum (*generalized Morrey space*).

Untuk memahami ruang Morrey, berikut diberikan contoh mengenai fungsi pada ruang Morrey.

Contoh 2.32:

Untuk kasus $d = 1$, bola $B(x, 2r)$ adalah suatu interval terbuka $(x - 2r, x + 2r)$. Misal diberikan kasus $p = 1$, $\lambda = 1$, dan ukuran yang digunakan adalah ukuran Lebesgue $d\lambda(y) = dy$. Apabila diberikan fungsi $f(x) = e^{-x^2}$, maka norma Morrey dari f adalah bernilai

$$\begin{aligned}
\|f: L^{1,1}(\mathbb{R},\mu)\| &= \sup_{x\in\mathbb{R}, r>0} \left(\frac{1}{\mu((x-2r, x+2r))} \int_{x-2r}^{x+2r} \left|e^{-y^2}\right| dy \right) \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}, r>0} \left(\frac{1}{4r} \int_{x-2r}^{x+2r} e^{-y^2}\, dy \right) \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}, r>0} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{8r} [\operatorname{erf}(x+2r) - \operatorname{erf}(x-2r)] \right) \\
&= \sup_{r>0} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{8r} [\operatorname{erf}(2r) - \operatorname{erf}(-2r)] \right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{8} \lim_{r\to 0} \left[\frac{\operatorname{erf}(2r) - \operatorname{erf}(-2r)}{r} \right] \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{8}{\sqrt{\pi}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Karena $\|f: L^{1,1}(\mu)\| = 1 < +\infty$, maka berarti $f(x) = e^{-x^2} \in L^{1,1}(\mathbb{R},\mu)$.

Sebagai ilustrasi lanjutan untuk memahami ruang Morrey $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^d,\mu)$ di mana $d > 1$, berikut diberikan contoh fungsi yang termasuk ke dalam ruang Morrey $L^{1,1}(\mathbb{R}^2,\mu)$.

Contoh 2.33:

Untuk kasus $d = 2$, bola $B(x, 2r)$ adalah suatu daerah di dalam lingkaran $x^2 + y^2 = 4r^2$. Misal diberikan kasus $p = 1$, $\lambda = 1$, dan ukuran yang digunakan adalah ukuran Lebesgue $d\lambda(y) = dy_1 dy_2$. Apabila diberikan fungsi delta Dirac $f(x) = x\delta(x)$ yang telah dijelaskan pada contoh sebelumnya, maka norma Morrey dari f adalah bernilai

$$\begin{aligned}
\|f : L^{1,1}(\mathbb{R}^2, \mu)\| &= \sup_{x\in\mathbb{R}, r>0} \left(\frac{1}{\mu\big((x-2r, x+2r)\big)} \int_{x-2r}^{x+2r} |\delta(x)|\, dy \right) \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}, r>0} \left(\frac{1}{4r} \int_{x-2r}^{x+2r} x\delta(x)\, dy \right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{8} \left[\lim_{r\to\infty} \frac{2r}{r} \right] \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{4}
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa semua fungsi yang kita evaluasi sejauh ini sebagai contoh-contoh tipikal fungsi pada ruang Morrey dan ruang Lebesgue adalah fungsi-fungsi tipe-distribusi (*distribution-type functions*). Fungsi-fungsi tipe distribusi ini adalah fungsi-fungsi yang menurun drastis saat $x \in \mathbb{R}^d$ menjauhi titik pusat $0 \in \mathbb{R}^d$. Pada dasarnya, fakta ini menunjukkan bahwa ruang Morrey dan ruang Lebesgue merupakan ruang yang sejenis. Ruang fungsi distribusi memiliki berbagai tingkatan utuk mendeskripsikan tingkat kehalusan (*smoothness*) dari fungsi-fungsi yang dimuatnya. Semakin tinggi tingkat kehalusan yang disyaratkan oleh ruang fungsi tersebu maka semakin sedikit fungsi yang dapat termuat dalam ruang fungsi tersebut. Ruang-ruang ini adalah superset dari suatu ruang fungsi distribusi yang ideal yang memuat hanya fungsi-fungsi distribusi yang berkelakuan baik.

Contohnya adalah ruang Schwartz $\mathcal{S}$ yang telah didefinisikan pada subbab sebelumnya.

Ruang Morrey sendiri mengalami begitu banyak generalisasi, salah satunya adalah pada ruang Morrey diperumum berikut yang mengganti fungsi r^{λ} pada normanya menjadi fungsi sebarang $\phi(r)$ yang lebih umum. Ruang Morrey diperumum didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.34:

Ruang Morrey diperumum $\mathcal{M}^{p,\phi}(\mathbb{R}^d,\mu) = \mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)$ adalah ruang fungsi-fungsi $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ sedemikian sehingga norma

$$\|f : \mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)\| = \sup_{\mathrm{B=B}(a,r)} \frac{1}{\phi(\mu(B))} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty$$

(Sihwaningrum, *et all*, 2015).

Pada penelitian ini, Ruang Morrey diperumum tak-homogen dimaksudkan sebagai sebagai ruang Morrey diperumum di atas ruang metrik ukur non-homogen. Yaitu ruang Morrey diperumum tak-homogen adalah ruang $\mathcal{M}^{p,\phi}(\mathbb{R}^d)$ pada definisi 2.8 di mana $\mathbb{R}^d$ di pasangkan dengan ukuran Borel tak-negatif μ yang memenuhi kondisi Growth orde-s, yaitu $\mu(B(x,r)) \leq Cr^s$ untuk setiap bola $B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^d$. Dapat ditulis $\mathcal{M}^{p,\phi}(\mathbb{R}^d,\mu) = \mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)$.

2.7 Fungsi Maksimal Hardy-Littlewood

Untuk membuktikan keterbatasan operator integral dalam ruang Lebesgue maupun ruang lainnya, diperlukan konsep mengenai fungsi maksimal. Keterbatasan dari fungsi maksimal akan mengimplikasikan keterbatasan dari operator integral fraksional. Fungsi maksimal Hardy-Littlewood didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.35:

Operator maksimal Hardy-Littlewood pada ruang tak-homogen didefinisikan sebagai

$$M^n f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, d\mu(y) \tag{2.19}$$

di mana $f \in L^p_{loc}(\mu)$ adalah himpunan semua fungsi-fungsi terukur f sedemikian sehingga untuk setiap subhimpunan kompak $K \subset \mathbb{R}^d$ berlaku

$$\int_K |f(x)|^p \, dx < \infty$$

(Utoyo, *et all*, 2012).

Dari definisi ini dapat disadari bahwa "ketaksamaan dasar" mengimplikasikan apa yang kita kenal sebagai fungsi maksimal Hardy-Littlewood tipe lemah (Christ, dkk, 2001). Untuk membuktikan syarat perlu dari keterbatasan operator integral fraksional I^n_α pada ruang Morrey diperumum tak-homogen, maka harus dibuktikan terlebih dahulu syarat perlu dari keterbatasan dari operator fungsi maksimal Hardy-Littlewood.

Lemma 2.36:

Operator maksimal M^n terbatas di ruang $L^p(\mu)$ (Utoyo, *et all*, 2012).

Fungsi maksimal ini akan diperluas menjadi fungsi maksimal untuk ruang tak-homogen seperti yang telah diuraikan pada latar belakang. Perlu diperhatikan bahwa fungsi maksimal biasa seperti pada Definisi 2.23 di atas tidak terbatas pada ruang lebesgue tak-homogen $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$, sehingga juga tidak terbatas pada ruang Morrey tak-homogen. Dengan demikian, terdapat definisi alternatif untuk mendefinisikan fungsi maksimal Hardy-Littlewood untuk ruang Morrey tak-homogen, yaitu sebagai berikut.

2.8 Keterbatasan Operator Integral Fraksional

Keterbatasan dari operator integral fraksional I_α pada ruang Lebesgue pertama kali dibuktikan oleh Hardy, Littlewood dan Sobolev. Teorema keterbatasan operator integral fraksional I_α pada ruang Lebesgue homogen disebut juga sebagai ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev. Berikut adalah teorema Hardy-Littlewood-Sobolev.

Teorema 2.37:

Misalkan bahwa $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ dan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$.

(i) Jika $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < \frac{n}{\alpha})$, maka $\|I_\alpha f : L^q\| \leq C\|f : L^p\|$;

(ii) Jika $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, maka untuk setiap $\lambda > 0$, $|\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f : L^1\|\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$.

(Lu, Shanzen, dkk, 2007).

Bukti:

(i) Misalkan ditetapkan $x \in \mathbb{R}^n$, untuk suatu $r > 0$,

$$|I_\alpha f(x)| \leq \int_{|x-y|\leq r} \frac{f(x)}{|x-y|^{n-\alpha}} dx + \int_{|x-y|\leq r} \frac{|f(x)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dx := J_1 + J_2$$

Untuk J_1, diperoleh

$$J_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j-1}r<|x-y|\leq 2^{-j}r} \frac{f(x)}{|x-y|^{n-\alpha}} dx$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{-j-1}r)^{n-\alpha}} \int_{2^{-j-1}r<|x-y|\leq 2^{-j}r} |f(x)| dx$$

$$\leq Cr^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(2^{-j}\right)^{\alpha}}{(2^{-j}r)^{n-\alpha}} \int_{|x-y|\leq 2^{-j}r} |f(x)| dx$$

$$\leq Cr^{\alpha} Mf(x)$$

Untuk J_2, apabila $p = 1$, maka

$$J_2 \leq r^{\alpha-n} \|f: L^1\|$$

Jika $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, maka ketaksamaaan Holder mengimplikasikan bahwa

$$J_2 \leq \left(\int_{|x-y|>r} |x-y|^{(\alpha-n)q} dy \right)^{1/q} \|f: L^p\|$$

$$\leq Cr^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f: L^p\|$$

Dengan demikian, untuk $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, diperoleh bahwa, untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|I_\alpha f(x)| \leq C \left(r^{\alpha} Mf(x) + r^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f: L^p\| \right)$$

Dengan mengambil $r = \left(\frac{\|f:L^p\|}{Mf(x)} \right)^{p/n}$, diperoleh

$$r^{\alpha} Mf(x) = r^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f: L^p\| = \|f: L^p\|^{\frac{\alpha p}{n}} Mf(x)^{1-\frac{\alpha p}{n}}$$

Sehingga, karena $\left(1 - \frac{\alpha p}{n}\right) q = p$, maka, berdasarkan keterbatasan dari fungsi maksimal Hardy-Littlewood, diperoleh

$$\|I_\alpha f(x)\| \leq C \|f: L^p\|^{\frac{\alpha p}{n}} \|Mf(x): L^p\|^{1-\frac{\alpha p}{n}} \leq C \|f: L^p\|$$

(ii) Selanjutnya dengan menggunakan keterbatasan lemah (1,1) dari operator fungsi maksimal Hardy-Littlewood diperoleh

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}| = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \left(\frac{\lambda}{C\|f : L^1\|^{\frac{\alpha}{n}}}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}\right\}\right|$$

$$\leq C_1 \left(\frac{C\|f : L^1\|^{\frac{\alpha}{n}}}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} \|f : L^1\|$$

$$\leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f : L^1\|\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$$

(Lu, Shanzen, dkk, 2007).

Teorema ini telah diperumum dalam ruang Morrey diperumum tak-homogen oleh Idha Sihwaningrum, H.P. Suryawan, dan Hendra Gunawan (Sihwaningrum, dkk, 2010) dengan syarat kondisi growth $\mu(B) \leq Cr^n$. Teorema keterbatasan operator integral fraksional pada ruang Morrey diperumum tak-homogen adalah sebagai berikut.

Teorema 2.38:

Misalkan $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ memenuhi $r^\alpha \phi(r) \leq C\psi(r)$ di mana C tidak bergantung pada r, dan $\mu(B) \leq Cr^n$ untuk setiap bola $B(x, r) \subset \mathbb{R}^d$, dan ϕ memenuhi kondisi doubling berikut:

1. Terdapat $C_1 > 1$ sedemikian sehingga, $\frac{1}{C_1} \leq \frac{\phi(s)}{\phi(t)} \leq C_1$ di mana $1 < \frac{s}{t} < 2$;
2. Terdapat $C_2 > 0$ sedemikian sehingga, $\int_r^\infty t^{\alpha-1}\phi(t)dt \leq C_2 r^\alpha \phi(r)$ untuk $r > 0$;

maka

$$\left\|I_\alpha^n f : \mathcal{M}^{q,\psi}(\mu)\right\| \leq C\left\|f : \mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)\right\|,$$

di mana $f \in \mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)$ (Sihwaningrum, dkk, 2010).

Bukti:

Untuk $a \in \mathbb{R}^d$ dan $r > 0$, misalkan $B = B(a,r)$ dan $\tilde{B} = B(a, 2r)$. Selanjutnya, didekomposisikan $f \in \mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)$ menjadi $f = f_1 + f_2 \coloneqq f\chi_{\tilde{B}} + f\chi_{\tilde{B}^c}$. Sehingga dapat diamati bahwa $f_1 \in L^p(\mu)$, dengan norma

$$\begin{aligned}
\|f_1 : L^p(\mu)\| &= \left(\int_{\tilde{B}} |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \\
&= r^{\frac{n}{p}}\phi(r)\left\{\sup_{\tilde{B}} \frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{r^n}\int_{\tilde{B}} |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}\right\} \\
&\leq C r^{\frac{n}{p}}\phi(r)\left\|f : \mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)\right\|
\end{aligned}$$

keterbatasan I_α^n pada $L^p(\mu)$-$L^q(\mu)$ menghasilkan

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{r^n}\int_B |I_\alpha^n f_1(x)|^q \, d\mu(x)\right)^{1/q} &\leq \frac{1}{r^{n/q}} \|I_\alpha^n f_1 : L^q(\mu)\| \\
&\leq \frac{C}{r^{n/q}} \|f_1 : L^q(\mu)\| \\
&\leq C r^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}}\phi(r)\left\|f : \mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)\right\| \\
&= C r^{\alpha}\phi(r)\left\|f : \mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)\right\| \\
&\leq C\psi(r)\left\|f : \mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)\right\|
\end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk $x \in B$, estimasi untuk $I_\alpha^n f_2$ adalah sebagai berikut.

$$|I_\alpha^n f_2(x)| \le \int_{\tilde{B}^c} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\le \int_{|x-y|\ge r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k r \le |x-y| \le 2^{k+1} r} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k r)^{n-\alpha}} \int_{B(x,2^{k+1}r)} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\le C\|f : \mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)\| \sum_{k=0}^{\infty} (2^k r)^\alpha \phi(2^k r)$$

Karena $\phi(t)$ dan t^α memenuhi kondisi *doubling*, maka diperoleh

$$(2^k r)^\alpha \phi(2^k r) \le C \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} t^{\alpha-1} \phi(t) dt$$

untuk $k = 0,1,2, \ldots$, sehingga diperoleh estimasi titik-per-titik sebagai berikut.

$$|I_\alpha^n f_2(x)| \le C\|f : \mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)\| \int_r^\infty t^{\alpha-1} \phi(t) dt$$

$$\le C r^\alpha \phi(r) \|f : \mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)\|$$

$$\le C\psi(r) \|f : \mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)\|$$

Dengan mengambil pangkat ke-q dan mengintegralkan untuk B diperoleh

$$\left(\frac{1}{r^n} \int_B |I_\alpha^n f_2(x)|^q d\mu(x)\right)^{1/q} \le C r^{-n/q} \psi(r) \|f : \mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)\| \left(\int_B d\mu(x)\right)^{1/q}$$

$$= C r^{-n/q} \psi(r) \|f : \mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)\| \mu(B)^{1/q}$$

$$\le C\psi(r) \|f : \mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)\|$$

dengan hasil ini dan hasil sebelumnya, maka keterbatasan operator integral fraksional I_α^n dari ruang Morrey diperumum tak-homogen $\mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)$ ke $\mathcal{M}^{q,\psi}(\mu)$ terbukti.

2.9 Ketaksamaan Tipe-Hedberg

Ketaksamaan lainnya yang secara eksplisit membahas tentang keterbatasan operator integral fraksional I_α adalah ketaksamaan Hedberg. Teorema mengenai ketaksamaan Hedberg adalah sebagai berikut.

Teorema 2.39:

Apabila $1 \leq p < q < \infty$, dan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, maka

$$|I_\alpha u(x)| \leq A_{p,q}[Mu(x)]^{p/q}\|u\|_p^{1-p/q}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

untuk setiap $u \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, di mana $A_{p,q}$ adalah konstanta universal yang tidak bergantung pada u (Ryan, Sprobig, 2000:96).

Sebagai perluasan dari hasil tersebut, Sihwaningrum dan H. Gunawan telah membuktikan ketaksamaan Tipe Hedberg pada ruang Morrey dalam teorema berikut.

Teorema 2.40:

Untuk $0 < \alpha < n$, dan $1 \leq p \leq q < \infty$, maka berlaku

$$|I_\alpha f(x)| \leq C\left(M^p f(x)\right)^{1-\frac{\alpha p}{n(\lambda-1)}}\|f\|_{L^{p,\lambda}(\mu)}^{\frac{\alpha p}{n(\lambda-1)}} \qquad (2.20)$$

di mana $0 \leq \lambda < 1 - \frac{\alpha p}{n}$ dan M^p adalah suatu operator maksimal yang didefinisikan sebagai

$$M^p f(x) := \left(M|f|^p(x)\right)^{1/p} = \sup_{r>0}\left(\frac{\int_{B(x,r)}|f(y)|^p\, d\mu(y)}{\mu\left(B(x,2r)\right)}\right)$$

di mana μ adalah ukuran Borel pada $\mathbb{R}^n$(Gunawan, Sihwaningrum, 2016).

Pada penelitian ini, akan dibuktikan suatu ketaksamaan tipe-Hedberg yang merupakan perluasan dari ketaksamaan (2.3) pada ruang Morrey diperumum tak-homogen. Selanjutnya, akan dibuktikan syarat cukup dari keterbatasan operator integral fraksional I_{α}^{n} dengan menggunakan ketaksamaan tersebut. Serta akan dibuktikan juga syarat perlu dari keterbatasan operator integral fraksional I_{α}^{n} pada ruang Morrey diperumum tak-homogen $\mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)$ ke $\mathcal{M}^{q,\psi}(\mu)$ dengan syarat kondisi tipe-growth $\mu\big(B(x,r)\big) \leq Cr^{s}$ di mana $s = \frac{pq(n-\alpha)}{pq+p-q}$.

2.10 Keterbatasan dalam Perspektif Agama

Berdasarkan kamus besar bahasa indonesia, kata "keterbatasan" dapat dimaknai sebagai keadaan terbatas, yaitu suatu keadaan yang masih berada dalam batasan. Keterbatasan adalah sifat yang selalu ditemukan di setiap ciptaan Allah SWT, bahkan akal manusia adalah sesuatu yang terbatas.

Sebagaimana difirmankan dalam Alqur'an surat Al-Isra ayat 85 yang artinya:

"Dan mereka bertanya kepadamu tentang ruh. Katakanlah: "Ruh itu termasuk perintah Rabb-ku, dan tidaklah kamu diberi pengetahuan melainkan sedikit". (QS' al-Isra':85)"

Ayat di atas menunjukkan bahwa roh termasuk ilmu Allah SWT, dan kita tidak mengetahuinya (Mahalli, 2008). Menurut Ibn As-Suyuti, ayat ini diturunkan sebagai jawaban atas pertanyaan orang-orang yahudi tentang ruh. Imam Turmudzi telah mengetengahkan sebuah hadits melalui Ibn Abbas r.a. yang telah menceritakan bahwa orang-orang Quraish telah berkata kepada orang-orang yahudi: "Ajarkanlah kepada kami sesuatu yang akan kami tanyakan kepada lelaki ini (Nabi Muhammad Sallallahu Aalaihi Wasallam)", maka orang-orang yahudi itu berkata kepada mereka: "Tanyakanlah keadanya tentang ruh", lalu orang-orang

Quraish itu menanyakannya kepada Nabi Sallallahu Alaihi Wasallam, maka Allah menurunkan firmannya dalam surat tersebut (Mahalli, 2008).

Dalam ayat di atas jelas disiratkan bahwa ilmu manusia itu terbatas. Kita sebagai manusia hanya mempelajari beberapa saja. Bahkan dengan segala daya dan upaya manusia tidak dapat mengetahuai apa-apa yang tidak diizinkan oleh Allah SWT untuk diketahui oleh manusia. Sama halnya dengan mata yang hanya dapat melihat segala sesuatu yang disinari oleh cahaya, akal menusia tidak dapat menampung ilmu-ilmu yang berada diluar jangkauannya seperti ilmu tentang segala sesuatu yang gaib.

Namun seiring kemajuan zaman yang terjadi, dengan dikembangkannya berbagai disiplin ilmu yang ada didunia, manusia sekarang justru merasa bahwa melalui kemampuan pola fikirnya, seluruh hal yang ada didunia ini dapat dirasionalisasikan dengan kaedah-kaedah teoritis yang dihasilkan oleh akalnya. Bahkan hal yang paling naif adalah bagaimana seorang manusia dengan berbekal kecerdasan yang ia miliki ingin mencoba menembus batas pengetahuan yang selama ini tidak mungkin untuk terpecahkan oleh daya nalar manusia.

Pada dasarnya, tidak semua ciptaan Allah dapat dirasionalisasikan secara utuh dengan pola fikir manusia yang sangat terbatas. Ada hal-hal tertentu yang sebenarnya manusia tidak dapat mengkajinya dengan akal budi yang mereka miliki karena kita telah sama-sama memahami bahwa ada batasan bagaimana seorang manusia dapat mengoptimalkan segala kemampuannya untuk menggunakan daya nalarnya.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Keterbatasan Operator Integral Fraksional pada Ruang Lebesgue

Berikut akan dibuktikan ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev pada ruang Lebesgue tak-homogen. Teorema yang dibuktikan pada subbab ini adalah teorema mengenai syarat cukup dan syarat perlu dari keterbatasan operator integral I_α^n pada ruang Lebesgue dengan syarat kondisi $\mu(B) \leq Cr^s$. Hasil ini memberikan perumuman dari teorema-teorema sebelumnya dalam (Sihwaningrum, 2010). Berikut adalah teorema mengenai ketaksamaan Hardy-Littlewood Sobolev pada ruang Lebesgue tak-homogen dengan syarat $\mu(B) \leq Cr^s$.

Teorema 3.1: (Ketaksamaan HLS)

Misalkan $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < n$, maka operator I_α^n terbatas dari $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu)$ jika $\mu \in GC(s)$, $s = \frac{pq(n-\alpha)}{pq+p-q}$.

Bukti:

Misalkan bahwa $\mu(B) \leq Cr^s$ suatu konstanta $C > 0$, maka berlaku juga untuk $1 < r < \infty$, sehingga dapat diestimasi $I_\alpha f(x)$ sebagai berikut.

$$|I_\alpha^n f(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{B(x,r)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(x,r)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

$$= I_\alpha^n f_1(x) + I_\alpha^n f_2(x)$$

di mana $f_1(y) = f(y)\chi_{B(x,r)}(y)$, dan $f_2(y) = f(y)\chi_{\mathbb{R}^d \backslash B(x,r)}(y)$. Selanjutnya, diperoleh

$$
\begin{aligned}
I_\alpha^n f_1(x) &= \int_{B(x,r)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{B(x,2^{j+1}r)\backslash B(x,2^j r)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{B(x,2^{j+1}r)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) \\
&\leq C \sum_{j=-\infty}^{-1} \left(2^j r\right)^\alpha \sup_{2^{j+1}r>0} \frac{1}{(2^{j+1}r)^n} \int_{B(x,2^{j+1}r)} |f(y)|\, d\mu(y) \\
&= C \sum_{j=-\infty}^{-1} \left(2^j r\right)^\alpha M^n f(x) \\
&\leq C r^\alpha M^n f(x)
\end{aligned}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
I_\alpha^n f_2(x) &= \int_{\mathbb{R}^d \backslash B(x,r)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{j+1}r)\backslash B(x,2^j r)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^j r)^{n-\alpha}} \int_{B(x,2^{j+1}r)} |f(y)| d\mu(y)
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan ketaksamaan Holder, kita peroleh

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2^j r)^{n-\alpha}}\int_{B(x,2^{j+1}r)}|f(y)|d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty}(2^{j+1}r)^{\alpha-n}\left(\int_{B(x,2^{j+1}r)}|f(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B(x,2^{j+1}r)}d\mu(y)\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty}(2^{j+1}r)^{\alpha-n}\|f\ : L^p(\mu)\|\mu\left(B(x,2^{j+1}r)\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$= C\|f\ : L^p(\mu)\|\sum_{j=0}^{\infty}(2^{j+1}r)^{\alpha-n}C(2^{j+1}r)^{s\left(1-\frac{1}{p}\right)}$$

$$\leq C\|f\ : L^p(\mu)\|\sum_{j=0}^{\infty}(2^{j+1}r)^{\alpha-n+s\left(1-\frac{1}{p}\right)}$$

$$\leq C\|f\ : L^p(\mu)\|\sum_{j=0}^{\infty}(2^{j+1}r)^{\alpha-n+\frac{pq(n-\alpha)}{pq+p-q}\left(1-\frac{1}{p}\right)}$$

$$= C\|f\ : L^p(\mu)\|\sum_{j=0}^{\infty}(2^{j+1}r)^{\alpha-n+\frac{(n-\alpha)}{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(1-\frac{1}{p}\right)}$$

$$= C\|f\ : L^p(\mu)\|\sum_{j=0}^{\infty}(2^{j+1}r)^{\alpha-n+(n-\alpha)\left(1-\frac{1}{\left(q+1-\frac{q}{p}\right)}\right)}$$

$$= C\|f\ : L^p(\mu)\|\sum_{j=0}^{\infty}(2^{j+1}r)^{-\frac{p(n-\alpha)}{pq+p-q}}$$

$$= C\|f\ : L^p(\mu)\|\sum_{j=0}^{\infty}(2^{j+1}r)^{-\frac{s}{q}}$$

$$= Cr^{-\frac{s}{q}}\|f\ : L^p(\mu)\|\sum_{j=0}^{\infty}(2^{j+1})^{-\frac{s}{q}}$$

Jelas bahwa $-\frac{s}{q} < 0$, sehingga $\sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{j+1}\right)^{-\frac{s}{q}}$ konvergen, dan dengan demikian, diperoleh

$$Cr^{-\frac{s}{q}}\|f\ :L^p(\mu)\|\sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{j+1}\right)^{-\frac{s}{q}} = Cr^{-\frac{s}{q}}\|f\ :L^p(\mu)\|$$

Dengan mengkombinasikan kedua estimasi di atas, maka diperoleh

$$|I_\alpha^n f(x)| \leq Cr^\alpha\left(M^n f(x) + r^{-\alpha-\frac{s}{q}}\|f\ :L^p(\mu)\|\right)$$

dengan memilih $r = \left(\frac{M^n f(x)}{\|f\ :L^p(\mu)\|}\right)^{\frac{-q}{\alpha q+s}}$, diperoleh

$$\begin{aligned}|I_\alpha^n f(x)| &\leq C\left(\frac{M^n f(x)}{\|f\ :L^p(\mu)\|}\right)^{\frac{-\alpha q}{\alpha q+s}}\left(M^n f(x) + \left(\frac{M^n f(x)}{\|f\ :L^p(\mu)\|}\right)\|f\ :L^p(\mu)\|\right)\\ &\leq C\left(M^n f(x)\right)^{1-\frac{\alpha q}{\alpha q+s}}\|f\ :L^p(\mu)\|^{\frac{\alpha q}{\alpha q+s}}\\ &\leq C\|f(x)\ :L^p(\mu)\|^{1-\frac{\alpha q}{\alpha q+s}}\|f\ :L^p(\mu)\|^{\frac{\alpha q}{\alpha q+s}}\\ &\leq C\|f(x)\ :L^p(\mu)\|\end{aligned}$$

Dengan demikian, Teorema 3.1 telah terbukti.

Untuk mengilustrasikan teorema di atas, maka diberikan contoh berikut.

Contoh 3.2:

Ambil fungsi $f(x) = (-\Delta)^{\alpha/2}\left(e^{-x^2/p}\right)$. Maka diperoleh

$$\begin{aligned}I_\alpha^n f(x) &= I_\alpha^n\left[(-\Delta)^{\alpha/2}\left(e^{-x^2/p}\right)\right]\\ &= (-\Delta)^{-\alpha/2}\left[(-\Delta)^{\alpha/2}\left(e^{-x^2/p}\right)\right]\\ &= e^{-x^2/p}\end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\|I_\alpha^n f(x)\ : L^p(\mu)\| = \left\|e^{-x^2/p}\ : L^p(\mu)\right\|$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} \left|e^{-x^2/p}\right|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, d\mu(x)\right)^{1/p}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{1/p}$$

Di mana C_1 adalah suatu kosntanta. Pada sisi lain, jelas bahwa $(-\Delta)^{\alpha/2}\left(e^{-x^2/p}\right) \approx x^{\alpha/2}e^{-x^2/p} \in L^p(\mu)$, sehingga

$$\|f(x)\ : L^p(\mu)\| < \infty$$

Dengan demikian, maka jelas bahwa, apabila diambil $C = \frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}}{\|f(x)\ : L^p(\mu)\|}$, maka diperoleh

$$\|I_\alpha^n f(x)\ : L^p(\mu)\| \leq C\|f(x)\ : L^p(\mu)\|$$

3.2 Ketaksamaan Tipe Lemah

Teorema mengenai ketaksamaan tipe-lemah operator integral fraksional I_α^n pada ruang Morrey klasik tak-homogen $L^{p,\lambda}(\mu)$ diberikan sebagai berikut berikut.

Teorema 3.3:

Misalkan $0 < \alpha < n$, $1 \leq p \leq q < \infty$, $0 < \lambda < \frac{p}{q}$, dan $\frac{1-\lambda}{p} - 1 = \frac{1}{s}\left(\frac{n}{q} + \alpha\right)$.

Maka

$$\mu(\{x \in B(a,r) : |I_\alpha^n f(x)| > \gamma\}) \leq C r^{s\lambda}\left(\frac{\left\|f : L^{p,\lambda}(\mu)\right\|}{\gamma}\right)^q$$

Jika $\mu\big(B(a,r)\big) \leq Cr^s$, di mana $s = \frac{pq(\alpha-n)}{pq+p-q}$ dan untuk setiap $\gamma > 0$.

Bukti:

Untuk setiap $x \in B(a,r)$ diperoleh

$$|I_\alpha^n f(x)| \leq \int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(x,R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

$$= A_1 + A_2$$

Estimasi untuk A_2 adalah sebagai berikut:

$$A_2 \leq \int_{|x-y|\geq R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{j+1}R)\setminus B(x,2^j R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^j R)^{n-\alpha}} \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^j R)^{n-\alpha}} \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)| d\mu(y)$$

Dengan menggunakan kondisi tipe Growth $\mu(B) \leq Cr^s$ maka, dengan menotasikan $B \coloneqq B(x, 2^{j+1}R)$, diperoleh:

$$A_2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^j R)^{n-\alpha}} \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^j R)^{n-\alpha}} \left(\int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)|^p \, d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,2^{j+1}R)} \, d\mu(y) \right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu\left(B(x,2^j R)\right)^{\frac{\lambda}{p}}}{(2^j R)^{n-\alpha}} \left(\frac{1}{\mu\left(B(x,2^j R)\right)^{\lambda}} \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)|^p \, d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \mu(B)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu\left(B(x,2^j R)\right)^{\frac{\lambda}{p}+1-\frac{1}{p}}}{(2^j R)^{n-\alpha}} \left(\frac{1}{\mu\left(B(x,2^j R)\right)^{\lambda}} \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)|^p \, d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C \| f \colon L^{p,\lambda}(\mu) \| \sum_{j=0}^{\infty} (2^j R)^{\alpha-n} \mu\left(B(x,2^j r)\right)^{\frac{\lambda}{p}+1-\frac{1}{p}}$$

$$\leq C \| f \colon \ L^{p,\lambda}(\mu) \| \sum_{j=0}^{\infty} (2^j R)^{\alpha-n} (2^j R)^{s\left(\frac{\lambda}{p}+1-\frac{1}{p}\right)}$$

$$\leq C \| f \colon \ L^{p,\lambda}(\mu) \| R^{\alpha-n+s\left(\frac{\lambda}{p}+1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{j=0}^{\infty} (2^j)^{\alpha-n+s\left(\frac{\lambda}{p}+1-\frac{1}{p}\right)}$$

Selanjutnya, Karena $\lambda < \frac{p}{q}$, maka

$$s\left(\frac{\lambda}{p}+1-\frac{1}{p}\right) = \frac{n-\alpha}{\left(1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\frac{\lambda}{p}+1-\frac{1}{p}\right)$$

$$< \frac{n-\alpha}{\left(1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\frac{1}{q}+1-\frac{1}{p}\right)$$

$$= n-\alpha$$

Sehingga $\alpha - n - s\left(\frac{\lambda}{p} + 1 - \frac{1}{p}\right) < \alpha - n + n - \alpha = 0.$ Dengan demikian $\sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{j}\right)^{\alpha-n+s\left(\frac{\lambda}{p}+1-\frac{1}{p}\right)}$ kovergen. Sehingga diperoleh

$$A_2 \leq C\left\|f:\ L^{p,\lambda}(\mu)\right\| R^{\alpha-n+s\left(\frac{\lambda}{p}+1-\frac{1}{p}\right)} \sum_{j=0}^{\infty} (2^{j})^{\alpha-n+s\left(\frac{\lambda}{p}+1-\frac{1}{p}\right)}$$

$$\leq CR^{\alpha-n+s\left(\frac{\lambda}{p}+1-\frac{1}{p}\right)}\left\|f:\ L^{p,\lambda}(\mu)\right\|$$

Selanjutnya, estimasi untuk A_1 adalah:

$$A_1 \leq \left(\int_{|x-y|<R} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{n-\alpha}}\, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{|x-y|<R} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{n-\alpha}}\, d\mu(y)\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\left(\int_{|x-y|<R} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{n-\alpha}}\, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\mu\big(B(x,R)\big)}{R^{n-\alpha}}\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\left(\int_{|x-y|<R} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{n-\alpha}}\, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{CR^{s}}{R^{n-\alpha}}\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\leq CR^{\alpha-n+s\left(\frac{\lambda}{p}+1-\frac{1}{p}\right)}\left\|f:\ L^{p,\lambda}(\mu)\right\|$$

Misalkan bahwa $CR^{\alpha-n+s\left(\frac{\lambda}{p}+1-\frac{1}{p}\right)}\left\|f:\ L^{p,\lambda}(\mu)\right\| := \frac{\gamma}{2}$. Maka karena $A_2 \leq \frac{\gamma}{2}$. Kita peroleh $\left\{x \in B(a,r) : A_2 > \frac{\gamma}{2}\right\} = \emptyset$ yang berarti bahwa $\mu(\left\{x \in B(a,r) : A_1 > \frac{\gamma}{2}\right\} = 0$. Selanjutnya, kita gunakan fakta bahwa

$$\{x \in B(a,r) : |I_\alpha^n f(x)| > \gamma\} \subset \left\{x \in B(a,r) : A_1 > \frac{\gamma}{2}\right\} \cup \left\{x \in B(a,r) : A_2 > \frac{\gamma}{2}\right\}$$

Sehingga dapat diestimasi sebagai berikut:

$$\mu(\{x \in B(a,r): |I_\alpha^n f(x)| > \gamma\}) \le \mu\left(\left\{x \in B(a,r): A_1 > \frac{\gamma}{2}\right\}\right)$$

$$\le \mu\left(\left\{\in B(a,r): \int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) > \frac{\gamma}{2}\right\}\right)$$

$$\le \frac{2}{\gamma}\int_{B(a,r)}\int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)\, d\mu(x)$$

$$= \frac{2}{\gamma}\int_X\int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)\chi_{B(a,r)}(x)\, d\mu(x)$$

$$\le \frac{2}{\gamma}\int_X |f(y)|\left(\int_{B(y,R)} \frac{\chi_{B(a,r)}(x)}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(x)\right) d\mu(y)$$

$$\le \frac{2}{\gamma}\int_X |f(y)|\left(\sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^{j+1}R)^{n-\alpha}}\int_{B(x,2^{j+1}R)\setminus B(x,2^jR)} \chi_{B(a,r)}(x)\, d\mu(y)\right) d\mu(y)$$

$$\le \frac{C}{\gamma}\int_X |f(y)|\left(\sum_{j=-\infty}^{-1} (2^{j+1}R)^{\alpha}\left(\frac{1}{(2^{j+1}R)^n}\int_{B(x,2^{j+1}R)} \chi_{B(a,r)}(x)\, d\mu(y)\right)\right) d\mu(y)$$

$$\le \frac{C}{\gamma}\int_X |f(y)|\, R^\alpha M^n \chi_{B(a,r)}(y) d\mu(y)$$

$$\le \frac{C}{\gamma} R^{\alpha+\frac{s\lambda}{p}}\left(\frac{1}{\mu\left(B(x,2^jR)\right)^\lambda}\int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)|^p\, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{B(a,r)} d\mu(y)\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{C}{\gamma} R^{\alpha+\frac{s\lambda}{p}}\left(\frac{1}{\mu\left(B(x,2^jR)\right)^\lambda}\int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)|^p\, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \mu(B)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{C}{\gamma} R^{\alpha+s\left(\frac{\lambda}{p}+1-\frac{1}{p}\right)}\|f : L^{p,\lambda}(\mu)\|$$

Karena $CR^{\alpha+s\left(\frac{\lambda}{p}+1-\frac{1}{p}\right)}\|f\colon L^{p,\lambda}(\mu)\| := \frac{\gamma}{2}$, dan dengan syarat $\frac{1-\lambda}{p} - 1 = \frac{1}{s}\left(\frac{n}{q} + \alpha\right)$, yang setara dengan $\alpha + s\left(\frac{\lambda}{p} + 1 - \frac{1}{p}\right) = -\frac{n}{q}$, maka diperoleh $CR^{-\frac{n}{q}}\|f\colon \mathcal{M}^{p,\phi}(\mu)\| = \frac{\gamma}{2}$, atau $CR^n = \left(\frac{\|f\colon L^{p,\lambda}(\mu)\|}{\gamma}\right)^q$ Sehingga

$$\left(\frac{R^\alpha}{\gamma}\|f\colon L^{p,\lambda}(\mu)\|\right)^p = CR^n = r^s\phi(r^s)\left(\frac{\|f\colon L^{p,\lambda}(\mu)\|}{\gamma}\right)^q$$

Terbukti.

3.3 Keterbatasan Akal Manusia Menurut Alqur'an

Manusia adalah makhluk ciptaan Allah dengan akal yang terbatas. Oleh karena itu manusia tidak dapat mengetahui hal-hal yang ada diluar jangkauan akalnya. Sekalipun manusia telah membangun ilmu pengetahuan dengan sangat tekun, ilmu pengetahuan tersebut masih belum mampu untuk mengungkap seluruh misteri yang ada di alam semesta.

Sebagaimana difirmankan dalam Alqur'an surat Al-Isra ayat 85 yang artinya:

"Dan mereka bertanya kepadamu tentang ruh. Katakanlah: "Ruh itu termasuk perintah Rabb-ku, dan tidaklah kamu diberi pengetahuan melainkan sedikit". (QS' al-Isra':85)"

Menurut Tafsir yang disusun oleh Ibn As-Suyuti, ayat di atas menunjukkan bahwa roh termasuk ilmu Allah SWT, dan kita tidak mengetahuinya. Menahan diri untuk tidak mendefinisikannya adalah hal yang utama. Oleh karena itu Syekh Tajuddin As-Subukiy di dalam kitab Jam'ul Jawami mengatakan: "masalah roh tidak pernah dibicarakan oleh Nabi Sallallahu Alaihi Wasallam, maka kami menahan diri" (Mahalli, 2008).

Inilah salah satu bukti akal manusia terbatas. Sesuatu yang gaib yang ada dalam tubuhnya saja tidak ada yang mengetahui, kecuali Allah *subhanahu wa ta'ala* saja. Lalu bagaimana halnya dengan perkara gaib selainnya? Sehingga manusia sangat butuh kepada petunjuk dari Allah *'azza wa jalla* dalam menjalani kehidupan yang fana ini agar menjadi bekal kelak di hari kiamat. Apabila tidak mendapatkan petunjuk, maka nasibnya akan seperti mata di dalam kegelapan.

Demikian pula halnya dengan akal, ketika tidak mendapatkan cahaya dan rahmat dari Allah *azza jalla*, maka akal akan berjalan dengan serampangan dan tidak terarah. Terlebih ketika si pemilik akal bukan orang yang memiliki kehati-hatian, sifat wara', tidak takut kepada Allah Yang Maha Perkasa, tidak memiliki perhatian kepada dirinya. Maka yang muncul dari orang seperti ini hanyalah pendapat, perkataan, atau pikiran-pikiran "nyeleneh" yang hanya akan membuat dirinya sengsara dan rusak sebelum membuat orang lain sengsara dan rusak.

Berkata al-Imam asy-Syafii rahimahullah: "Sebagaimana mata memiliki keterbatasan yang ia pasti berhenti padanya, maka akal juga memiliki keterbatasan yang ia harus berhenti padanya"

Sangat benar apa yang dinyatakan oleh al-Imam asy-Syafii di atas. Masing-masing dari kita telah merasakan keterbatasan mata kita. Bagaimana ketika di malam hari ketika tiba-tiba listrik padam? Itulah keterbatasan mata kita. Seketika itu pula kita tidak bisa melihat apapun. Demikianlah ketika mata tidak mendapatkan cahaya, maka kita tidak dapat melihat apapun. Ketika ada setitik cahaya ia bisa melihat dengan remang-remang. Sebagaimana tubuh manusia yang serba terbatas, akal juga memiliki keterbatasan yang ia harus berhenti ketika mendapati hal-hal yang berada di luar jangkauannya.

Karena indra dan akal manusia terbatas, maka manusia membangun ilmu pengetahuan dan teknologi untuk menjangkau segala hal yang berada diluar jangkauan indranya. Selain itu manusia juga membangun kerangka berfikir matematika untuk membantu memahami berbagai hal yang berada di luar akal dan nalarnya. Tetapi, sama halnya seperti manusia, seluruh benda dan makhluk yang ada di alam semesta juga memiliki keterbatasan, termasuk ilmu pengetahuan dan teknologi yang digunakan oleh manusia untuk memperpanjang jangkauan indranya. Sehingga seluruh usaha manusia untuk mengetahui segala yang ada di alam semesta sesungguhnya tidak pernah dapat melingkupi seluruh ciptaan Allah SWT. Berdasarkan fakta hal tersebut, Sudah seharusnya bagi kita untuk menjauhkan diri dari sifat sombong karena sesungguhnya kebesaran dan kekuatan itu hanyalah milik Allah SWT.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya, maka diperoleh beberapa simpulan sebagai berikut:

1. Apabila konstanta-konstanta p, q adalah positif dan berhingga, serta konstanta $\alpha < n$, maka berlaku implikasi: jika ukuran μ memenuhi kondisi tipe-growth $\mu(B) < Cr^s$ dengan $s = \frac{pq(n-\alpha)}{pq+p-q}$, maka I_α^n terbatas dari ruang Lebesgue tak-homogen $L^p(\mu)$ ke ruang $L^q(\mu)$.
2. Kondisi tipe-growth $\mu(B) < Cr^s$ yang lebih lemah dari pada kondisi growth biasa $\mu(B) < Cr^n$ masih tetap mengakibatkan keterbatasan operator integral fraksional Riesz I_α^n pada ruang Lebesgue tah-homogen $L^p(\mu)$ ke ruang $L^q(\mu)$, dengan demikian, maka berarti kita telah menemukan syarat yang lebih lemah untuk keterbatasan operator integral fraksional Riesz I_α^n pada ruang Lebesgue tak-homogen.
3. Keterbatasan operator integral fraksional I_α^n pada ruang Lebesgue tak-homogen dengan syarat kondisi tipe-growth $\mu(B) < Cr^s$ mengakibatkan ketaksamaan tipe-lemah dari operator intersebut pada ruang Morrey klasik.

4.2 Saran

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya, maka diperoleh beberapa saran sebagai berikut:

1. Karena telah dibuktikan bahwa kondisi yang cukup lemah bahwa tipe-growth $\mu(B) < Cr^s$ masih dapat mengakibatkan keterbatasan operator integral fraksional I_α^n dari ruang Lebesgue tak-homogen $L^p(\mu)$ ke ruang $L^q(\mu)$, maka peneliti selanjutnya dapat mencari syarat yang lebih lemah dari pada kondisi tipe-growth tersebut yang masih dapat mengakibatkan keterbatasan operator integral fraksional I_α^n pada ruang Lebesgue tak-homogen.
2. Peneliti selanjutnya dapat mencari akibat-akibat lain dari keterbatasan operator integral fraksional I_α^n pada ruang Lebesgue tak-homogen dengan syarat kondisi tipe-growth $\mu(B) < Cr^s$ maupun syarat yang lebih lemah.

DAFTAR PUSTAKA

Adams, D.R., Hedberg, L.I. 1996. *Function Spaces and Potential Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Banuelos, R., Moore, C. 1991. *Probabilistic Behaviour of Harmonic Function*. Springer Basel AG.

Bartle, R. B,. 2000. *Introduction to Real Analysis: 3th Edition*. John Wiley & Sons, Inc.

Cohn, D, L,. 2013. *Measure Theory: Second Edition*. Springer Science+Bussiness Media, LLC.

Garling, D.J.H. 2007. *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*. Cabridge University Press.

Gunawan, H. 2003. *A Note on the Generalized Fractional Integral Operators*. Jurnal Analisis, Vol 09.

Gunawan, H., Sihwaningrum, I. 2016. A Weak-(p,q) Inequality for Fractional Integral Operator on Morrey Spaces Via Hedberg Type Inequality. *JMP*, vol. 8, no. 2 (2016). p. 103-108.

Gunawan, H,. Sihwaningrum, I. (2007). Fractional Integral Operator and Their Boundedness on Various Spaces. *Jurnal Matematika dan Sains* , p. 119-126.

Guliyev, V. 2009. Boundedness of the Maximal,Potential and Singular Operators in the Generalized Morrey Spaces. *Journal of Inequalities and Application*. vol. 2009, doi: 10.1155/2009/503948.

Idha Sihwaningrum, *et all*. 2010. Fractional Integral Operators and Olsen Inequalities on Non-homogeneous Spaces. *Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, p. 1-6.

Johnston, W. 2015. *The Lebesgue Integral for Undegraduates.*The Mathematical Association of America.

Kerchkove, M. 2001. *Scale-Space and Morphology in Computer Vision: Third International Conference, Scale-Space 2001, Vancouver, Canada, July 7-8, 2001*, *Procedings*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Lu, Shanzen, dkk. 2007. *Singular Integrals and Related Topics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Mahalli, I. J. 2008. *Tafsir Jalalain: Berikut Azbabun-Nuzul surat Alfatihah s.d. Al Isra*, Jilid 1. Sinar Baru Algesindo.

Poularikas, A.D. 2010. *Transforms and Applications Handbook, Third Edition*. Taylor & Francis Group, LLC.

Ryan, S., Spröβig, W. 2000. *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics, Volume 2: Clifford Analysis*. Springer Sciences+Business Media New York.

Rynne, B., Youngson, M.A. 2008. *Linear Functional Analysis*. Springer-Verlag London.

Utoyo, M. I., Nusantara, T., Widodo, B., Suhariningsih. 2012. Fractional Integral Operator and Olsen Inequality in The Non-homogeneous Classic Morreyv Space. *Int. Journal of Math. Analysis*. Vol. 6, no. 31, hal. 1501-1511.

RIWAYAT HIDUP

Abdullah Azzam, lahir di kota Singaraja, Bali pada tanggal 12 September 1994, biasa dipanggil Azzam, anak pertama dari empat bersaudara, pasangan Bapak Insan Kamil H.R. dan Ibu Nurdiyana.

Pendidikan dasarnya ditempuh di Madrasah Ibtidaiyah Terpadu (MIT) Mardlatilah Singaraja dan lulus pada tahun 2007. Setelah itu, melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP Muhammadiyah Singaraja dan lulus pada tahun 2010. Kemudian dia melanjutkan pendidikan menengah atas di SMA Muhammadiyah 2 Singaraja dan lulus pada tahun 2013. Pada tahun 2014 dia menempuh pendidikan selanjutnya di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim melalui jalur SBMPTN mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

Selama menjadi mahasiswa, dia berperan aktif di bidang akademik dan non akademik diantaranya sebagai asisten laboratorium beberapa mata kuliah dan mengikuti penelitian bersama dosen yaitu Penelitian Penguatan Program Studi (P3S), serta menjadi anggota komunitas SEMATA (Serambi Matematika Aktif). Email yang bisa dihubungi adalah abdullahazzamt11@gmail.com.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Abdullah Azzam
NIM : 14610060
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Keterbatasan Operator Integral Fraksional dengan Menggunakan Ketaksamaan Tipe-Hedberg
Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Evawati Alisah, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	30 April 2018	Konsultasi Bab I dan II	1.	
2	3 Mei 2018	Konsultasi Bab I dan II		2.
3	20 Juli 2018	Konsultasi Bab III	3.	
4	25 Juli 2018	Konsultasi Bab III		4.
5	28 Juli 2018	Konsultasi Agama Bab I dan II	5.	
6	31 Juli 2018	Konsultasi Agama Bab III		6.
7	1 Agustus 2018	Konsultasi Bab III	7.	
8	2 Agustus 2018	Konsultasi Agama Bab III		8.
9	3 Agustus 2018	Konsultasi Agama Bab III	9.	
10	23 Agustus 2018	Konsultasi Bab III		10.
11	24 Agustus 2018	Konsultasi Keseluruhan	11.	
12	24 Agustus 2018	Konsultasi Agama Keseluruhan		12.

Malang, 24 Agustus 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

KEMENTERIAN AGAMA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
JURUSAN MATEMATIKA
REPUBLIK INDONESIA

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 2003 12 1 001