PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN GETARAN PEGAS TEREDAM MENGGUNAKAN METODE GALERKIN

SKRIPSI

OLEH
SITI AINUROHMAH
NIM. 14610030

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN GETARAN PEGAS TEREDAM MENGGUNAKAN METODE GALERKIN

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Prasyarat dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

OLEH
SITI AINUROHMAH
NIM. 14610030

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2019

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN GETARAN PEGAS TEREDAM MENGGUNAKAN METODE GALERKIN

SKRIPSI

OLEH
SITI AINUROHMAH
NIM.14610030

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 7 Februari 2019

Pembimbing I	Pembimbing II
Mohammad Jamhuri, M.Si	Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIP.19810502 200501 1 004	NIP. 19900511 20160801 1 057

Mengetahi
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP.19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN GETARAN PEGAS TEREDAM MENGGUNAKAN METODE GALERKIN

SKRIPSI

Oleh
Siti Ainurohmah
NIM. 14610030

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 27 Februari 2019

Penguji Utama	:	Ari Kusumastuti, M.Pd.,M.Si	.....
Ketua Penguji	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si	.....
Sekretaris Penguji	:	Mohammad Jamhuri, M.Si	.....
Anggota Penguji	:	Muhammad Khudzaifah, M.Si	.....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	:	Siti Ainurohmah
NIM	:	14610030
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Penyelesaian Numerik Persamaan getaran Pegas Teredam Menggunakan Metode Galerkin

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pemikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 07 Februari 2019
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
21A7FAFF827164321
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Siti Ainurohmah
NIM.14610030

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTO

لا يكلف الله نفساً إلا وسعها

"*Allah tidak membebani seseorang diluar kemampuannya*"

(Al-Baqarah: 286)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua penulis yakni bapak yang saya hormati Kasran dan ibu yang saya sayangi Sri Utami, terimakasih yang tanpa lelah telah mendoakan, membimbing, menasehati dan merelakan banyak keringat demi kesuksesan penulis. Saudara Alm. Muhammad Wafiudin Faiz yang selalu mendoakan penulis dalam tempat yang berbeda dan kepada saudara Muhammad Iqbal Hafiz Wiratama yang selalu menghibur penulis.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam kepada Nabi Muhammad Saw yang telah membimbing umat manusia menuju jalan yang terang.

Proses penyusunan skripsi ini, penulis mendapat banyak bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis memberikan ucapan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, Selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan ide mengenai permasalahan skripsi ini, memberikan arahan, nasehat, motivasi serta meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dengan baik sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

5. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas ilmu dan bimbingannya.
7. Segenap keluarga terutama Ayah dan Ibu yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Sahabat-sahabat penulis yakni Farah Aunil Haq, Rufi Aulia dan Ulfa Ainurridha yang selalu memahami dan memberi semangat dan dukungan kepada penulis
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2014, KSR PMI unit UIN Malang angkatan 23, Santri Putri Darul Ulum Al-fadholi yang telah banyak memberikan semangat, motivasi, dan arahan untuk mengerjakan skripsi secara baik dan cepat.
10. Seluruh pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materil.

Penulis berharap agar skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca maupun bagi penulis.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 07 Februari 2019

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR vii

DAFTAR ISI ix

DAFTAR TABEL xi

DAFTAR GAMBAR xii

ABSTRAK xiii

ABSTRACT xiv

الملخص xv

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 4
1.3 Tujuan Penelitian 4
1.4 Manfaat Penelitian 5
1.5 Batasan Masalah 5
1.6 Metode Penelitian 6
1.7 Sistematika Penulisan 8

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Getaran Pegas Teredam 9
2.2 Penyelesaian Analitik Persamaan Getaran Pegas Teredam 12
2.3 Metode Galerkin 19
2.4 Galat 24
2.4.1 Sumber Utama Galat Numerik 24
2.4.2 Cara Menganalisis Galat 26
2.5 Konsep Berpikir dalam Pandangan Al-Qur'an 27

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Metode Galerkin dalam Menyelesaikan Getaran Pegas Teredam 31
3.1.1 Diskritisasi domain 31

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.1.2 Menentukan solusi aproksimasi 32
3.1.3 Perhitungan persamaan elemen 34
3.1.4 Pembentukan sistem persamaan elemen (penggabungan) 45
3.2 Analisis Galat dan Simulasi 57

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan 66
4.2 Saran 66

DAFTAR RUJUKAN 67

LAMPIRAN-LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Galat yang diperoleh dengan $\Delta t = 5$ 58

Tabel 3.2 Galat yang diperoleh dengan $\Delta t = 2.5$ 59

Tabel 3.3 Perbandingan galat dengan t yang sama pada Δt yang berbeda..... 65

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Pegas Vertikal 9

Gambar 2.2 Grafik Analitik Persamaan Getaran Pegas Teredam 18

Gambar 2.3 Diskrititasi Domain 1 Dimensi 20

Gambar 3.1 Diskritisasi domain..... 31

Gambar 3.2 Fungsi interpolasi 32

Gambar 3.3 Fungsi aproksimasi empat elemen dengan lima node 45

Gambar 3.4 Fungsi aproksimasi delapan elemen dengan sembilan node 50

Gambar 3.5 Plot solusi analitik dan numerik dengan $\Delta t = 5$ 58

Gambar 3.6 Plot solusi analitik dan numerik dengan $\Delta t = 2.5$ 59

Gambar 3.7 Plot solusi analitik dan numerik dengan $\Delta t = 0.5$ 60

Gambar 3.8 Plot galat pada $\Delta t = 0.5$ 61

Gambar 3.9 Plot solusi analitik dan numerik dengan $\Delta t = 0.25$ 61

Gambar 3.10 Plot galat pada $\Delta t = 0.25$ 62

Gambar 3.11 Plot solusi analitik dan numerik dengan $\Delta t = 0.05$ 63

Gambar 3.12 Plot galat pada $\Delta t = 0.05$ 63

Gambar 3.13 Plot solusi analitik dan numerik dengan $\Delta t = 0.025$ 64

Gambar 3.14 Plot galat pada $\Delta t = 0.025$ 65

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Ainurrohmah, Siti. 2018**. Penyelesaian Numerik Persamaan Getaran Pegas Teredam Menggunakan Metode Galerkin**. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si, (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Kata Kunci: Metode galerkin, Persamaan getaran pegas teredam

Penelitian ini difokuskan pada masalah getaran pegas teredam. Pegas teredam merupakan mekanisne getaran yang memicu faktor luar berupa gaya gesek udara dan faktor internal lainnya. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui solusi numerik persamaan getaran pegas teredam dengan menggunakan metode Galerkin dan galat dari solusi numerik tersebut.

Metode Galerkin memuat langkah-langkah: (1) diskrititasi domain, (2) menetukan solusi aproksimasi, (3) perhitungan persamaan elemen dan (4) membentuk sistem persamaan linier (penggabungan), sedangkan langkah dalam mengetahui galat adalah mencari selisih antara solusi analitik dan numerik, melakukan simulasi hasil solusi numerik persamaan getaran pegas teredam dengan bantuan program phyton.

Dalam penelitian ini dipilih kondisi batas $t \in [0,20]$ untuk $\Delta t = 5,\ 2.5,\ 0.5, 0.25, 0.05$ dan 0.025. Hasil perbandingan dari selisih solusi numerik dan analitik pada t yang sama yaitu $t = 15$ dengan Δt yang berbeda pada $\Delta t = 5$ sebesar 0.0277, pada $\Delta t = 2.5$ sebesar 0.0176, pada $\Delta t = 0.5$ sebesar 0.0137, pada $\Delta t = 0.25$ sebesar 0.0424, pada $\Delta t = 0.05$ sebesar 0.0056 dan pada $\Delta t = 0.025$ sebesar 0.0077. Saat melakukan simulasi dengan enam Δt yang berbeda, plot solusi yang terbaik adalah pada $\Delta t = 0.025$ karena plot solusi numerik dan analitik saling berhimpitan sehingga dapat dikatakan bahwa galatnya sangat kecil. Dari nilai galat dan simulasi tersebut menunjukkan bahwa besarnya galat mutlak maksimum tersebut dipengaruhi oleh pemilihan nilai Δt yang digunakan. Semakin kecil Δt yang dipilih, semakin kecil pula galat yang diperoleh dan sebaliknya semakin besar Δt yang dipilih semakin besar galat yang diperoleh.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Ainurrohmah, Siti. 2018. **Numerical Solutions of the Damped Spring Vibration Equations Using Galerkin Method**. Thesis. Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si, (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Keywords: Galerkin method, Equation of damped spring vibration

This study focused on the problem of damped spring vibrations. The damped spring is a vibration mechanism that triggers external factors in the form of air friction and other internal factors. The purpose of this study is to find out the numerical solution to the equation of damped spring vibrations using the Galerkin method and errors from these numerical solutions.

The Galerkin method contains steps: (1) domain discretion, (2) determining approximation solutions, (3) calculation of elemental equations and (4) forming a system of linear equations (merging), while the step in knowing errors is to find the difference between analytic solutions and numerically, simulating the results of numerical solutions for the equation of vibration of damped spring with the help of the python program.

In this study selected boundary conditions $t \in [0.20]$ for Δt = 5, 2.5, 0.5, 0.25, 0.05 and 0.025. The comparison results from the difference in numerical and analytical solutions at the same t are t = 15 with different berbedat at Δt = 5 at 0.0277, at Δt = 2.5 at 0.0176, at Δt = 0.5 at 0.0137, at Δt = 0.25 at 0.0424, at Δt = 0.05 at 0.0056 and at Δt = 0.025 at 0.0077. When simulating different six Δt, the best solution plot is 0.025 because the plot of numerical and analytical solutions coincides so that it can be said that the error is very small. The error and simulation values indicate that the maximum absolute error is affected by the selection of the Δt value used. The smaller the Δt chosen, the smaller the error obtained and vice versa the greater the Δt chosen the greater the error obtained.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

الملخص

عينور روحه، سيتي. 2018. الحل العددية لمعادلات اهتزازات الربيع المثبط باستخدام طريقة *Galerkin*. بحث خامي كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية في دولة مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشار: (ا) محمد جمهوري، ماجستير، (اا) محمد قدّازفة، ماجستير.

الكلمات المفتاحية: طريقة *Galerkin*، معادلة اهتزاز الربيع المثبط

ركزت هذه الدراسة على مشكلة الاهتزازات الربيعية المثبطة. الزنبرك الرطب هو آلية اهتزاز تؤدي إلى عوامل خارجية في شكل احتكاك هواء وعوامل داخلية أخرى. الغرض من هذه الدراسة هو اكتشاف الحل العددي لمعادلة الاهتزازات الربيعية المخففة باستخدام طريقة *Galerkin* والأخطاء الناتجة عن هذه الحلول العددية.

تحتوي طريقة *Galerkin* على خطوات: (1) تقدير المجال ، (2) تحديد حلول التقريب ، (3) حساب المعادلات الأولية و (4) تشكيل نظام المعادلات الخطية (الدمج) ، في حين أن الخطوة في معرفة الأخطاء هي إيجاد الفرق بين الحلول التحليلية و عدديًا ، محاكاة نتائج الحلول العددية لمعادلة اهتزاز الزنبرك المبلل بمساعدة برنامج *Python*.

في هذه الدراسة ، حددت الظروف الحدودية $\Delta t = 5$ لي $t \in [0.20]$، 2.5 ، 0.5، 0.25، 0.05 و 0.025. نتائج المقارنة بين الاختلافات في الحلول العددية والتحليلية في نفس الحالة هي $t = 15$ مع اختلاف att في $\Delta t = 5$ من 0.0277، عند $\Delta t = 2.5$ من 0.0176، عند $\Delta t = 0.5$ من 0.0137 ، عند $\Delta t = 0.25$ عند 0.0424 ، عند $\Delta t = 0.05$ عند 0.0056 و عند $t = 0.025$ عند 0.0077. عند محاكاة ستة مختلفة Δt فإن أفضل مخطط حل هو في 0.025 لأن مخطط الحلول العددية والتحليلية يتزامن بحيث يمكن القول أن الخطأ صغير جدًا. تشير قيم الخطأ والمحاكاة إلى أن الحد الأقصى للخطأ المطلق يتأثر باختيار القيمة Δt المستخدمة. كلما كان حجمها أصغر ، كان الخطأ الذي تم الحصول عليه أصغر ، وكلما زاد حجم الخطأ كلما زاد الخطأ الذي تم الحصول عليه.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Getaran dapat didefinisikan sebagai gerak bolak balik suatu benda yang terjadi secara periodik atau berkala, yaitu gerak benda tersebut bergerak berulang-ulang pada selang waktu yang tetap. Prinsip getaran banyak diterapkan pada alat-alat yang digunakan manusia. Salah satu getaran yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari adalah getaran pada pegas. Getaran pada pegas akan terjadi jika terdapat gaya yang bekerja pada pegas tersebut. Beberapa gaya yang mempengaruhi getaran pada pegas yaitu gaya gravitasi bumi, gaya tarik pegas, gaya gesek dan gaya luar (Dafik, 1999).

Getaran pada pegas dapat dibedakan menjadi gerak harmonik sederhana, dan gerak harmonik teredam. Gerak harmonik sederhana adalah getaran benda yang terjadi secara terus menerus dan tidak terdapat faktor hambatan atau redaman. Gerak harmonik sederhana juga dapat diartikan sebagai suatu sistem yang bergetar dimana gaya pemulih berbanding lurus dengan negatif simpangannya. Gaya pemulih merupakan gaya yang bekerja dalam arah mengembalikan massa ke posisi setimbangnya. Akan tetapi pada kenyataannya suatu getaran pada benda tidak akan terjadi secara terus menerus karena terdapat faktor hambatan berupa gaya gesek udara dan fakor internal yang menyebabkan getaran yang terjadi perlahan-lahan berkurang terhadap waktu dan akhirnya berhenti, getaran benda yang demikian biasanya disebut sebagai gerak harmonik teredam (Gioancoli, 2005).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Model matematika getaran pegas teredam berbentuk persamaan diferensial biasa orde dua linier homogen. Persamaan tersebut mengandung variabel bebas yaitu t yang menyatakan waktu dan variabel terikat yaitu x yang menyatakan panjang regangan serta turunan-turunannya. Variabel terikat dari turunan x adalah kecepatan pegas berisolasi $\frac{dx}{dt} = v$ dan percepatan pegas berisolasi $\frac{d^2x}{dt^2} = a$. Model matematika getaran pegas teredam juga memuat beberapa parameter yang terlibat antara lain: massa pegas m, konstanta redam b dan konstanta pegas k.

Dalam hal ini penelitian difokuskan pada analisis solusi numerik persamaan getaran pegas teredam. Salah satu metode yang digunakan adalah metode Galerkin yang langkah-langkahnya menggunkan metode elemen hingga. Metode Galerkin merupakan metode penyelesaian nilai batas dari persamaan diferensial biasa (PDB) yang didasarkan pada pendekatan solusi dengan fungsi komibnasi linier, misalnya polinomial, serta menentukan koefisien dalam fungsi tersebut sehingga dapat memenuhi nilai batas pada PDB secara optimum (Hoffman, 2001).

Model persamaan getaran pegas teredam dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial biasa. Persamaan diferensial biasa secara umum diperoleh dari solusi analitik dan solusi numerik. Metode analitik yaitu metode yang dapat memberikan hasil yang sebenarnya (eksak) sedangkan metode numerik yaitu metode penyelesaian masalah-masalah secara sistematis dengan cara hitungan atau aritmatika biasa. Hasil dari solusi numerik adalah nilai suatu hampiran, solusi hampiran jelas tidak sama dengan solusi eksaknya, sehingga terdapat selisih antara keduanya, selisih ini disebut dengan galat (*error*). Galat dalam metode numerik juga dapat diminimumkan sehingga mendekati nilai eksaknya. Selain cek

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

galat, dalam penilitian ini juga dilakukan simulasi. Simulasi adalah meniru proses riil yang disebut sistem dengan sebuah model untuk memahami bagaimana sistem tersebut bekerja. Tujuan dari simulasi ini adalah untuk mengetahui secara nyata perbandingan dari solusi numerik dan solusi analitik.

Adanya penelitian ini tentu didasari dengan ayat Al-Quran dan Hadits yang berkaitan dengan kekuasaaan Allah yang mampu menciptakan alam semesta seperti halnya fenomena alam yang terjadi pada getaran pegas teredam. Allah berfirman dalam Al-Quran surah Ali-Imran ayat 190 yang artinya:

"*Sesungguhnya dalam ciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal"*(Qs. Ali Imron:190).

Maksud dalam ayat tersebut adalah Allah menciptakan langit dan bumi dengan segala isinya yang berupa lautan, gunung-gunung, padang pasir, pepohonan, tumbuh-tunbuhan, tanaman dan buah-buahan serta menciptakan silih bergantinya malam dan siang yang mana itu berjalan berdasarkan pengaturan dari Tuhan yang maha perkasa lagi maka mengetahui. Semuanya itu diciptakan untuk orang-orang yang berakal yaitu mereka yang bisa mengetahui segala sesuatu dengan jelas sesuai pemikiran mereka (Ad-Dimasyqi, 2000).

Penelitian ini dilakukan bukan merupakan penelitian pertama namun terdapat bebrapa penelitian sebelumnya, diantaranya yaitu, Huzaimah (2016) telah mengkaji persamaan getaran pegas teredam secara analitik dan metode Runge-Kutta orde 4. Hasil simulasi grafik solusi numerik menggunakan matode Runge-Kutta orde 4 tidak jauh berbeda dengan grafik solusi analitiknya. Dapat ditarik kesimpulan bahwa metode Runge-Kutta merupakan pendekatan yang akurat untuk menyelesaikan persamaan getaran pegas teredam.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Faridah (2015) menganalisis model getaran pegas teredam dengan metode RKS dan Milne. Hasil penyelesaian numrrik yang diperoleh dengan menggunkan kedua metode tersebut selanjutnya dianalisis untuk mengetahui profil getaran pada pegas teredam. Simulasi program dilakukan dengan memvariasikan nilai redaman, massa beban, posisi awal dan kecepatan awal. Kesimpulan dari penelitian tersebut adalah galat yang dihasilkan oleh metode RKG lebih kecil dari metode Milne.

Berdasarkan paparan di atas, maka penelitian ini akan difokuskan pada penyelesaian numerik persamaan getaran pegas teredam menggunakan metode Galerkin. Kemudian akan dibandingkan apakah solusi numerik yang diperoleh mendekati atau menghampiri solusi analitiknya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana penyelesaian numerik dari persamaan getaran pegas teredam menggunakan metode Galerkin?
2. Bagaimana galat dari penyelesaian numerik persamaan getaran pegas teredam dengan metode Galerkin menggunakan perbandingan dengan solusi analitiknya?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, tujuan dari penelitian ini adalah

1. Mengetahui penyelesaian numerik dari persamaan getaran pegas teredam menggunakan metode Galerkin.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. Mengetahui galat dari penyelesaian numerik persamaan getaran pegas teredam dengan metode Galerkin menggunakan perbandingan dengan solusi analitiknya.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini sebagai berikut:

1. Menambah wawasan bagi peneliti dan bisa digunakan sebagai bahan rujukan dalam pengembangan penelitian-penelitian selanjutnya tentang solusi numerik pada getaran pegas teredam menggunakan metode Galerkin
2. Menambah wawasan bagi peneliti tentang bagaimanan galat metode Galerkin yang terjadi pada getaran pegas teredam menggunakan perbandingan solusi analitiknya.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Persamaan getaran yang digunakan merupakan persamaan getaran pegas dengan redaman (*damping*)
2. Persamaan getaran pegas teredam yang digunakan dikutip dari (Gioancoli, 1997) adalah

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (1.1)$$

dengan kondisi batas

$$x(0) = 1 \qquad x(T) = 0 \qquad (1.2)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dan $t \in [0,20]$ untuk $\Delta t = 5, 2.5, 0.5, 0.25, 0.05$ dan 0.025. Pada $\Delta t = 5$ dan 2.5 akan dijelaskan secara terperinci sedangkan $\Delta t = 0.5, 0.25, 0.05$ dan 0.025 akan dijelaskan dengan menggunakan program yang telah dilampirkan dalam penelitian ini.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang dilakukan dalam penyelesaian numerik persamaan getaran pegas teredam menggunakan metode Galerkin adalah studi literatur. Metode ini dilakukan dengan mempelajari dan menelaah beberapa literatur seperti buku, jurnal dan referensi lain yang berhubungan dengan penelitian ini. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Menyelesaikan persamaan getaran pegas teredam menggunakan metode Galerkin.
   a. Diskritisasi domain dari persamaan getaran pegas teredam

      Pada problem 1-dimensi seperti yang ada dalam penelitian ini, maka penelitian ini menggunakan elemen persegi, dimana peneliti mendiskritisasi menjadi lima elemen dan enam *node*.

   b. Mencari solusi aproksimasi getaran pegas teredam dengan kondisi batas yang diberikan

      Dalam mencari solusi aproksimasi penelitian ini menggunakan langkah-langkah berikut.

      1. Menentukan fungsi polinomial sebagai solusi hampiran $\bar{x}(t)$
      2. Mencari nilai a_0 dan a_1 untuk mendapatkan bentuk aproksimasi $\bar{x}(t)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3. Menentukan fungsi interpolasi N_1, N_2 yang diperolah dari solusi aproksimasi $\bar{x}(t)$sebagai fungsi pembobot

c. Perhitungan persamaan elemen

Langkah-langkah dalam perhitungan persamaan elemen adalah sebagai berikut:

1. Mensubtitusikan solusi aproksimasi $\bar{x}(t)$ ke persamaan getaran pegas teredam
2. Meminimumkan residu yakni $m\frac{d^2\bar{x}(t)}{dt^2} + b\frac{d\bar{x}(t)}{dt} + k\bar{x}(t)$ dengan mengintegralkan residu di daerah domain yang telah dikalikan dengan fungsi pembobot
3. Menetukan fungsional $I_{I,1}$ dan $I_{I,2}$ yang bergantung pada fungsi $\bar{x}(t)$ dari hasil meminimumkan residu

d. Pembentukan sistem persamaan elemen (penggabungan)

Setelah diperoleh persamaan elemen yang berupa sistem persamaan linier di setiap elemen, semua elemen tersebut akan digabungkan menjadi satu dan dimasukkan kondisi batasnya sehingga diperoleh bentuk umum dari solusi persamaan getaran pegas teredam.

2. Mencari galat pada persamaan getaran pegas teredam menggunakan metode Galerkin

a. Mencari selisih antara solusi analitik dengan solusi numerik
b. Melakukan simulasi hasil solusi numerik persamaan getaran pegas teredam dengan bantuan Phyton
c. Analisis galat

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam penelitian ini terbagi dalam empat bab dan masing-masing bab terdiri dari beberapa subbab. Berikut rincian dari sistematika penulisan agar mempermudah pembaca untuk memahaminya.

Bab I Pendahuluan

Bab ini menjelaskan tentang hal-hal yang melatarbelakangi penulisan, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan tentang teori-teori dari berbagai literatur seperti buku, jurnal ilmiah, dan penelitian terdahulu yang mendukung dalam pembahasan penelitian. Sehingga pada bab ini menjelaskan tentang persamaan getaran pegas teredam, penyelesaian analitik persaman getaran pegas teredam, metode galerkin, galat dan konsep berpikir dalam pandangan Al-Qur'an.

Bab III Pembahasan

Bab ini menjelaskan langkah-langkah dalam penyelesaian persamaan getaran pegas teredam menggunakan metode galerkin, dan mendapatkan solusi yang berupa Simulasi.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari penelitian dan saran-saran yang mendukung untuk penelitian selanjutnya.

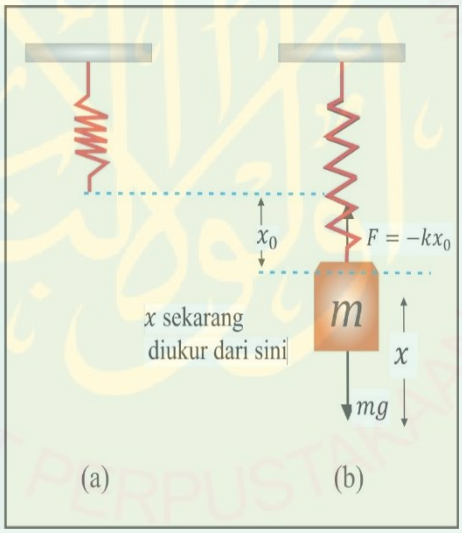
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Getaran Pegas Teredam

Getaran pada pegas merupakan salah satu contoh getaran harmonik teredam. Osilasi merupakan suatu sifat getaran yang sangat menarik untuk dikaji, osilasi terjadi ketika sistem keseimbangan suatu getaran diganggu sehingga menimbulkan getaran periodik. Suatu persamaan yang mendeskripsikan gaya pada pegas dengan peredam dan osilasi melibatkan massa beban m, konstanta redaman b dan k adalah modulus pegas (Wijayanto, 2009).



Gambar 2. 1 Pegas Vertikal

Pegas (a) adalah pegas tergantung secara vertikal dan tidak terdapat beban sehingga pegas tidak mengalami peregangan. Pegas (b) tergantung secara vertikal dan terdapat beban yang tergantung pada ujung pegas sehingga mengalami pertambahan panjang sebesar x_0 serta mencapai posisi kesetimbangan kemudian

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ditarik sejauh x. Gaya yang mempengaruhi gerak getaran pada pegas adalah gaya gravitasi, gaya gesek, gaya terik pegas, dan gaya luar.

Berdasarkan hukum Hooke, besarnya gaya pemulih yang bekerja pada benda dirumuskan sebagai berikut:

$$F = -kx \tag{2.1}$$

di mana

k = ketetapan gaya/konstanta pegas

x = simpangan (m)

F = gaya (N)

Persamaan (2.1) merupakan bentuk dari hukum Hooke dan tanda negative tersebut menunjukkan bahwa gaya yang bekerja pada benda selalu berlawanan arah dengan arah simpangannya dan posisi setimbang saat x sama dengan 0. Persamaan (2.1) menyatakan bahwa gaya yang dikerjakan oleh sebuah pegas pada sebuah benda berbanding lurus dengan pergeseran benda namun berlawanan arahnya. Jika gaya pegas asalah satu-satunya gaya luar yang bekerja pada benda maka pada benda tersebut berlaku Hukum Newton II. Hukum Newton II berbunyi "percepatan sebuah benda berbanding lurus dengan gaya total yang bekerja padanya dan berbanding terbalik dengan massanya. Arah percepatan dengan arah gaya total yang bekerja padanya". Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

$$F = ma \tag{2.2}$$

di mana,

m = massa benda (kg)

α = percepatan gravitasi (m/s^2)

Persamaan (2.2) disubtitusikan ke persamaan (2.1) sehingga menjadi

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$ma = -kx \tag{2.3}$$

dengan menggantikan $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ dalam persamaan (2.3), maka didapatkan:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

yaitu:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{2.4}$$

Persamaan (2.4) dikenal sebagai persamaan differensial gerak harmonik sederhana (Sutrisno, 1997).

Ketika suatu beban bermassa m digantungkan pada pegas vertikal, maka akan menyebabkan pegas akan teregang dan mengalami pertambahan panjang sebesar x_0 serta mencapai posisi kesetimbangan. Gaya yang bekerja pada benda adalah kx_0 sama dengan W. W adalah usaha dari beban bermassa m yang menyebabkan pegas teregang. Dengan demikian didapatkan

$$kx_0 = W = mg \tag{2.5}$$

Saat pegas telah mencapai posisi kesetimbangan, selanjutnya pegas ditarik kebawah sejauh x sehingga terdapat redaman b yang biasanya menyebabkan gerak getaran yang terjadi pada pegas perlahan berkurang terhadap waktu dan akhirnya berhenti. Dengan demikian, gaya yang bekerja pada beban bermassa m adalah $k(x_0 + x), bv$ dan W. Menurut hukum Newton kedua yaitu:

$$\sum F = ma$$

$$W - k(x_0 + x) - bv = ma$$

$$W - kx_0 - kx - bv = ma \tag{2.6}$$

Persamaan (2.6) disubtitusikan kedalam persamaan (2.5), sehingga didapatkan:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$W - W - kx - bv = ma$$

$$-kx - bv = ma \tag{2.7}$$

Dengan b adalah konstanta positif dan v adalah kecepatan benda. Jika $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ dan $v = \frac{dx}{dt}$ disubtitusikan ke dalam persamaan (2.7) maka didapatkan:

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Atau

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) merupakan bentuk persamaan getaran pegas teredam.

Berdasarkan persamaan kerakteristik dari persamaan (2.8) terdapat tiga kasus untuk persamaan gerak teredam karena b berada dalam selang interval sampai tak hingga, sehingga $b^2 - 4mk$ dapat bernilai positif, negatif dan nol. Tiga kasus untuk sistem dengan redaman adalah sebagai berikut (Halliday, 2010):

a. Redaman superkritis (*overdamping*, $b^2 > 4mk$), pada kasus ini peredam sedemikian besar sehingga sistem tidak akan berosilasi.
b. Redaman subkritis (*underdamped*, $b^2 < 4mk$), pada kasus ini sistem akan berosilasi dengan amplitudo yang semakin berkurang dengan bertambahnya waktu.
c. Redaman kritis (*critical damped*, $b^2 = 4mk$), pada kasus ini kesetimbangan dicapai dengan cepat.

2.2 Penyelesaian Analitik Persamaan Getaran Pegas Teredam

Pada persamaan (2.8) berhubung gerak m bersifat periodik, maka simpangan (x) setiap saat t dapat berbentuk eksponensial ke waktu

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$x = e^{at} \tag{2.9}$$

$$\frac{dx}{dt} = ae^{at} \tag{2.10}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a^2e^{at} \tag{2.11}$$

Pada kaitan x terhadap t, a merupakan tetapan yang sengaja dipilih. Makna dari kedua tetapan itu nantinya dapat diketahui, jika persamaan (2.9), (2.10), (2.11) disubtitusikan ke persamaan (2.1) maka diperoleh persamaan differensial berbentuk:

$$ma^2e^{at} + bae^{at} + ke^{at} = 0 \tag{2.12}$$

Persamaan (2.12) dapat ditulis menjadi

$$(ma^2 + ba + k)e^{at} = 0$$

Karena e^{at} tidak mungkin sama dengan 0, sehinga persamaan di atas sehingga diperoleh:

$$ma^2 + ba + k = 0 \tag{2.13}$$

Persamaan kuadrat ini memiliki akar:

$$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \tag{2.14}$$

Ada tiga kemungkinan nilai akar-akar a yaitu sebagai berikut:

1. Jika $b^2 - 4mk > 0$, maka kedua akar persamaan kuadrat (2.13) adalah seebagai berikut:

$$a_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan $a_1 \neq a_2$ dan $a_1, a_1 \in R$ yang berarti kedua akar teersebut merupakan bilangan real yang berbeda. Oleh karena itu, solusi umum dari persamaan (2.8) adalah sebagai berikut

$$x(t) = C_1 e^{a_1 t} + C_2 e^{a_2 t} \tag{2.15}$$

\

$$= C_1 e^{-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}t} + C_2 e^{-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}t} \tag{2.16}$$

2. Jika $b^2 - 4mk = 0$, maka diperoleh akar-akar persamaan (2.13) adalah sebagai berikut:

$$a_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{0}$$

yang berarti akar-akar persamaan tersebut merupakan bilangan real kembar. Oleh karena itu, solusi dari persamaan (2.13) adalah sebagai berikut:

$$x(t) = C_1 e^{a_1 t} + C_2 t e^{a_2 t} \tag{2.17}$$

$$= C_1 e^{-\frac{b}{2a}t} + C_2 t e^{-\frac{b}{2a}t} \tag{2.18}$$

3. Jika $b^2 - 4mk < 0$, maka akar-akar persamaan (2.13) berupa bilangan kompleks yang dinyatakan sebagai berikut:

$$a_{1,2} = p + qi$$

Dimana

$$p = -\frac{b}{2a} \text{ dan } q = \frac{\sqrt{|b^2-4ac|}}{2a} \tag{2.19}$$

Oleh karena itu, solusi umum dari persamaan (2.8) adalah sebagai berikut:

$$x(t) = C_1 e^{(p+q)t} + C_2 t e^{(p+q)t} \tag{2.20}$$

Berdasarkan rumus Euler yaitu $e^{it} = \cos t + i \sin t$, maka bentuk trigonometri persamaan (2.20) adalah sebagai berikut:

$$x(t) = e^{qt}(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt \tag{2.21}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= e^{-\frac{b}{2a}t}(C_1 \cos\frac{\sqrt{|b^2-4ac|}}{2a}t + C_2 \sin\frac{\sqrt{|b^2-4ac|}}{2a}t \quad (2.22)$$

Dengan m, b dan k adalah konstanta real. Digunakan parameter yang merujuk pada penelitian Faridah (2015) yaitu $m = 1.5, b = 0.9$ dan $k = 26.8$ sehingga persamaan (2.8) dituliskan sebagai berikut:

$$1.5\frac{d^2x}{dt^2} + 0.9\frac{dx}{dt} + 26.8x = 0 \quad (2.23)$$

Bentuk kerakteristik persamaan (2.23) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$1.5a^2 + 0.9a + 26.8 = 0 \quad (2.24)$$

Dengan $a \neq 0$. Diskriminan dari prsamaan kuadrat (2.24) adalah sebagai berikut:

$$0.9^2 - 4 \cdot 1.5 \cdot 26.8 = -159.99$$

Diperoleh diskriminan $b^2 - 4mk < 0$, maka akar-akar persamaan (2.23) berupa bilangan kompleks. Akar-akar dari persamaan karakteristik (2.24) diperolah sebagai berikut:

$$a_{1,2} = \frac{-0.9 \pm \sqrt{0.9^2 - 4 \cdot 1.5 \cdot 26.8}}{2 \cdot 1.5}$$

$$= \frac{-0.9 \pm \sqrt{-155.99}}{3} \quad (2.25)$$

Diperoleh dua akar kompleks yaitu:

$$a_1 = -0.3 + 4.2162i \text{ dan } a_2 = -0.3 - 4.2162i \quad (2.26)$$

Oleh karena itu, solusi umum dari peersamaan (2.23) adalah sebagai berikut:

$$x(t) = e^{-0.3t}(c_1 \cos 4.2162t + c_2 \sin 4.2162t) \quad (2.27)$$

Digunakan nilai awal $x(0) = 1$ dan $x(20) = 0$, maka dapat ditentukan nilai c_1 dan c_2 sebagai berikut:

$$x(0) = e^{-0.3 \cdot 0}(c_1 \cos 4.2162 \cdot 0 + c_2 \sin 4.2162 \cdot 0)$$

Sehingga nilai c_1 dapat dinyatakan sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$x_0 = c_1 \tag{2.28}$$

$$= 1$$

Untuk menentukan nilai c_2 adalah sebagai berikut:

$$x(20) = e^{-0.3\cdot 20}(1 \cdot \cos 4.2162 \cdot 20 + c_2 \cdot \sin 4.2162 \cdot 0)$$

$$= e^{-6}(\cos 84.324 + c_2 \cdot \sin 84.324)$$

$$= 0.0024(0.0989 + c_2 \cdot 0.9950)$$

$$= 0.0002 + c_2 \cdot 0.002$$

Sehingga nilai c_2 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$c_2 = -\frac{0.0002}{0.002}$$

$$c_2 = -0.1 \tag{2.29}$$

Dengan demikian, maka diperoleh solusi khusus persamaan (2.8) sebagai berikut:

$$x(t) = e^{-0.3t}(\cos 4.2162t - 0.1 \sin 4.2162t) \tag{2.30}$$

Cek solusi khusus persamaan (2.30)

Saat $t = 0$

$$x(0) = e^{-0.3t}(\cos 4.2162t - 0.1 \sin 4.2162t)$$

$$= e^{-0.3(0)}(\cos 4.2162(0) - 0.1 \sin 4.2162(0))$$

$$= 1(1 - 0)$$

$$= 1$$

Saat $t = 2.5$

$$x(2.5) = e^{-0.3t}(\cos 4.2162t - 0.1 \sin 4.2162t)$$

$$= e^{-0.3(2.5)}(\cos 4.2162(2.5) - 0.1 \sin 4.2162(2.5))$$

$$= 0.472366552(-0.439529042 + 0.089822837)$$

$$= -0.207618818 + 0.0424293038$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$x(2.5) = -0.165189514$$

Saat $t = 7.5$

$$x(7.5) = e^{-0.3t}(\cos 4.2162t - 0.1 \sin 4.2162t)$$
$$= e^{-0.3(7.5)}(\cos 4.2162(7.5) - 0.1 \sin 4.2162(7.5))$$
$$= 0.105399224(0.978944085 - 0.020412858)$$
$$= 0.105399224 - 0.002151499$$
$$= 0.101028448$$

Saat $t = 10$

$$x(10) = e^{-0.3t}(\cos 4.2162t - 0.1 \sin 4.2162t)$$
$$= e^{-0.3(10)}(\cos 4.2162(10) - 0.1 \sin 4.2162(10))$$
$$= 0.04978706837(-0.24692027010 + 0.0960357992)$$
$$= -0.0122934364 + 0.00482454516$$
$$= -0.00748891221$$

Saat $t = 12.5$

$$x(12.5) = e^{-0.3t}(\cos 4.2162t - 0.1 \sin 4.2162t)$$
$$= e^{-0.3(12.5)}(\cos 4.2162(12.5) - 0.1 \sin 4.2162(12.5))$$
$$= 0.0235177458(-0.7618868254 - 0.0647710170)$$
$$= -0.0179178607 - 0.00152326831$$
$$= -0.0194411290$$

Saat $t = 15$

$$x(15) = e^{-0.3t}(\cos 4.2162t - 0.1 \sin 4.2162t)$$
$$= e^{-0.3(15)}(\cos 4.2162(15) - 0.1 \sin 4.2162(15))$$
$$= 0.01110899653(0.91666304342 - 0.03996609373)$$
$$= 0.0101832066 - 0.000443983197$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$x(15) = 0.00973922338$$

Saat $t = 17.5$

$$x(17.5) = e^{-0.3t}(\cos 4.2162t - 0.1 \sin 4.2162t)$$

$$= e^{-0.3(17.5)}(\cos 4.2162(17.5) - 0.1 \sin 4.2162(17.5))$$

$$= 0.0052475183991(-0.0439132335898 + 0.0999035348681)$$

$$= -0.000230435501 + 0.000524245637$$

$$= 0.0002293810136$$

Saat $t = 20$

$$x(20) = e^{-0.3t}(\cos 4.2162t - 0.1 \sin 4.2162t)$$

$$= e^{-0.3(20)}(\cos 4.2162(20) - 0.1 \sin 4.2162(20))$$

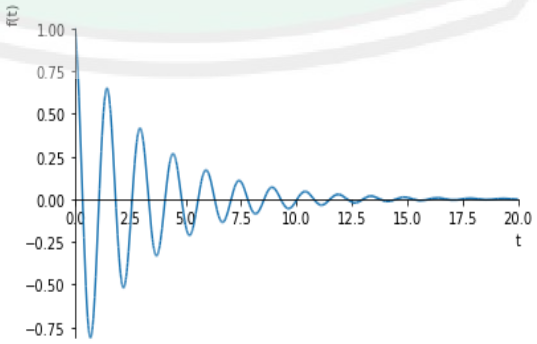
$$= 0.0024(0.0989 - 0.0995)$$

$$= 0.00023 - 0.00023$$

$$= 0$$

Dari cek solusi diatas dapat disimpulkan bahwa solusi khusus tersebut valid karena sesuai dengan persamaan (2.8)

Solusi analitik pada persamaan (2.30) dapat digambarkan grafiknya sebagai berikut:



Gambar 2.2 Grafik analitik persamaan getaran pegas teredam

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Berdasarkan gambar 2.2 dapat terlihat bahwa pegas berosilasi dan mencapai keadaan titik setimbang pada persekitaran waktu $t = 15$.

2.3 Metode Galerkin

Metode galerkin terdapat di dalam metode elemen hingga. Metode elemen hingga adalah adalah teknik numerik untuk menemukan solusi perkiraan persamaan diferensial parsial (PDE) serta persamaan integral (Brandenburg dan Clemmons, 2012). Selain persamaan diferensial parsial metode numerik juga dapat memecahkan masalah persamaan diferensial biasa. Metode elemen hingga adalah membagi wilayah yang subregional atau elemen, yang mengandung titik nodal, dan menentukan jenis atau bentuk di setiap ujung elemen (Pepper, 2006). Setiap elemen itu berbeda-beda misal, untuk dua dimensi bisa digunakan segiempat sebagai bentuk dari setiap elemen, dan untuk tiga dimensi bisa digunakan tetrahedra atau hexahedra (Kosasih, 2012).

Dalam penelitian ini digunakan satu dimensi atau persegi sebagai bentuk dari setiap elemen. Interpolasi dari setiap elemen diintegralkan pada domain dari masing-masing elemen dan selanjutnya hasil integral dari elemen dijumlahkan. Selanjutnya diperoleh sistem persamaan linier dan dicari solusinya dengan menggunakan teknik aljabar linier.

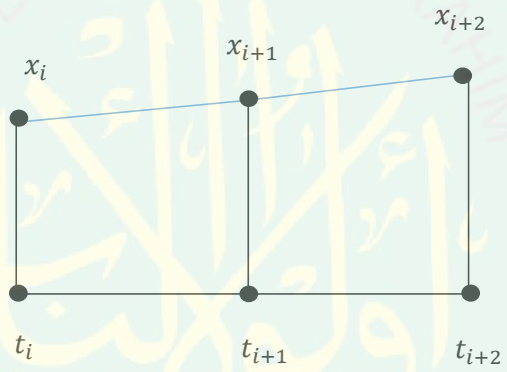
Solusi yang diperoleh dari metode elemen hingga adalah fungsi interpolasi dari setiap elemen. Setelah fungsi interpolasi setiap elemen dihitung, solusi keseluruhan dapat diperoleh. Fungsi-fungsi interpolasi setiap elemen ditentukan oleh nilai pada titik-titik mesh (Kosasih, 2012).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Berikut langkah-langkah dalam metode Galerkin (Chapra dan Canale, 2010).

1. Diskritisasi Domain

Langkah pertama adalah membagi daerah domain menjadi subdomain atau beberapa elemen. Sebelum membagi daerah domain menjadi beberapa elemen, ditentukan terlebih dahulu jenis elemen yang akan digunakan. Untuk masalah satu dimensi digunakan elemen garis dengan dua titik nodal untuk persamaan linier dan tiga titik nodal untuk persamaan nonlinier seperti gambar berikut.



Gambar 2.3 Diskrititasi domain 1 dimensi

dengan x adalah variabel yang bergantung dan t adalah variabel bebas atau domain.

2. Menentukan solusi aproksimasi

Fungsi aproksimasi dari setiap elemen dicari terlebih dahulu untuk mendapatkan solusi dari setiap titik nodal. Fungsi aproksimasi dapat dicari dengan menggunakan interpolasi dari titik-titik nodal di setiap elemen. Interpolasi yang digunakan adalah fungsi polinomial. Order dari polinomial bergantung pada jumlah titik nodal pada setiap elemen dan syarat kontinuitas yang diperlukan pada

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sepanjang batas elemen. Oleh karena itu, pada tahap ini ditentukan terlebih dahulu banyaknya titik nodal yang digunakan untuk setiap elemen, kemudian dipilih interpolasi yang sesuai. Jika titik nodal yang dipilih adalah dua titik seperti Gambar 2.2 maka interpolasi yang digunakan fungsi linier. mengingat fungsi yang akan dicari adalah fungsi aproksimasi, maka solusi yang diperoleh adalah solusi hampiran sehingga untuk solusi hampiran $x(t)$ disimbolkan dengan $\bar{x}(t)$.

Interpolasi persamaan getaran pegas teredam yang digunakan untuk masalah satu dimensi adalah fungsi polinomial order 1 atau fungsi linier karena mudah dihitung dan bersifat kontinu. Bentuk umum fungsi linier sebagai berikut;

$$\bar{x}(t) = a_0 + a_1 t \tag{2.31}$$

Dengan $\bar{x}(t)$ variabel bergantung, t variabel bebas, dan a_0, a_1 konstanta. Persamaan (2.31) masih dalam bentuk umum dengan konstanta belum diketahui. Maka akan dihitung terlebih dahulu nilai dari konstanta a_0 dan a_1 (Chapra dan Canale, 2010). Misal saat $t = t_i$ dan $t = t_{i+1}$ maka persamaan (2.31) menjadi

$$\bar{x}(t_i) = a_0 + a_1 t_i \tag{2.12}$$

$$\bar{x}(t_{i+1}) = a_0 + a_1 t_{i+1} \tag{2.33}$$

Untuk mencari nilai a_0 maka $\bar{x}(t_i)$ dikurangkan dengan $\bar{x}(t_{i+1})$, sebelumnya dimisalkan bahwa $\bar{x}(t_i) = x_i$ dan $\bar{x}(t_{i+1}) = x_{i+1}$, sehingga

$$a_1 = \frac{x_i - x_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} \tag{2.34}$$

Untuk mencari a_1 maka $\bar{x}(t_i)$ dikalikan dengan t_{i+1} dan $\bar{x}(t_{i+1})$ dikalikan dengan t_i

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$a_0 = \frac{x_i t_{i+1} - x_{i+1} t_i}{t_{i+1} - t_i} \tag{2.35}$$

Substitusi persamaan (2.34) dan (2.35) ke persamaan (2.31) maka diperoleh

$$\bar{x}(t) = \frac{x_i t_{i+1} - x_{i+1} t_i}{t_{i+1} - t_i} + \frac{x_i - x_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} t$$

$$\bar{x}(t) = \left(\frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}\right) x_i + \left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) x_{i+1}$$

Dimisalkan

$$N_{i,1}(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} \tag{2.36}$$

$$N_{i,2}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \tag{2.37}$$

sehingga dapat diperoleh

$$\bar{x}(t) = N_{i,1}(t) x_i + N_{i,2}(t) x_{i+1} \tag{2.38}$$

Persamaan (2.38) adalah bentuk aproksimasi, sedangkan persamaan (2.37) dan persamaan (2.36) adalah fungsi interpolasi.

3. Perhitungan Persamaan elemen

Penentuan ketepatan suatu fungsi aproksimasi persamaan (2.38) sebagai solusi numerik dari persamaan diferensial diharuskan memenuhi syarat batas, oleh karena itu persamaan (2.38) disubstitusikan ke persamaan getaran pegas teredam. Karena persamaan (2.38) bukanlah solusi eksak, maka sisi kanan dari persamaan getaran pegas teredam tidak sama dengan nol akan tetapi sama dengan residu yang menunjukkan terdapat *error* dari hasil perhitungan. Residu tersebut diperoleh dari mensubtitusikan bentuk umum fungsi linier ke persamaan pegas teredam, dimana residu tersebut adalah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$m\frac{d^2\bar{x}(t)}{dt^2} + b\frac{d\bar{x}(t)}{dt} + k\bar{x}(t) = R$$

Dalam pengerjaan metode numerik, diharapkan nilai *error* yang diperoleh adalah nilai *error* yang sekecil-kecilnya sehingga mengakibatkan solusi yang diperoleh mendekati solusi yang sebenarnya. Metode elemen hingga memiliki cara untuk meminimukan residu yaitu dengan mengintegralkan hasil kali residu dengan pembobot pada keseluruhan domain yang disebut sebagai metode residu berbobot. Pemilihan pembobot bisa menggunakan metode Galerkin sehingga bobot yang digunakan sama dengan fungsi interpolasi pada persamaan (2.15) (Chapra,dkk., 2010). Secara umum metode residu berbobot dapat dituliskan sebagai

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} RN_i(x)\ dx = 0 \qquad (2.39)$$

dimana $R =$ residu dan $N_i(x) =$ pembobot atau fungsi interpolasi.

di antara yang paling penting adalah penyederhanaan dengan menggunakan integrasi. Ingat daridalam kalkulus operasi ini dapat dinyatakan secara umum sebagai berikut

$$\int_a^b u\ dv = uv]_a^b - \int_a^b v\ du \qquad (2.40)$$

Jika persamaan yang digunakan adalah masalah satu dimensi maka setelah dilakukan perhitungan dengan metode residu berbobot dilanjutkan ke langkah selanjutnya (ke-empat).

4. Pembentukan Sistem Persamaan Linier (Penggabungan)

Persamaan dari setiap elemen yang diperoleh pasti terhubung satu sama lain karena memiliki titik nodal yang sama walaupun dalam elemen yang berbeda.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Oleh karena itu dilakukan proses penggabungan pada persamaan tersebut. Hasil penggabungan dapat diekspresikan menggunakan matriks-matriks. Penggabungan matriks-matriks elemen yang telah terbentuk tersebut mengekspresikan perilaku dari seluruh sistem yang disebut sebagai matriks global. Matriks persamaan untuk sistem memiliki bentuk yang sama seperti persamaan untuk masing-masing elemen. Inilah hal yang unik dari metode elemen hingga, yaitu persamaan dari sistem diperoleh dari penggabungan persamaan setiap elemen. Kemudian mencari solusi dari sistem persamaan diharuskan memodifikasi persamaan tersebut untuk menjelaskan kondisi batas dari permasalahan. Hal ini dikenal sebagai nilai nodal dari variabel bergantung.

2.4 Galat

2.4.1 Sumber Utama Galat Numerik

Galat atau biasa disebut error dalam metode numerik adalah selisih antara yang ditimbulkan antara nilai sebenarnya dengan nilai yang dihasilkan dengan metode numerik (Ermawati, 2017). Secara umum terdapat dua sumber utama penyebab galat dalam perhitungan numerik yaitu:

1. Galat pemotongan (*truncation error*)

Galat pemotongan adalah galat yang timbul akibat penggunaan hampiran sebagai pengganti formula eksak. Maksudnya ekspresi matematik yang lebih kompleks diganti yang lebih sederhana. Istilah “pemotongan” muncul karena banyak metode numerik yang diperoleh dengan menghampirkan fungsi menggunakan deret Taylor. Kerena deret Taylor menggunakan deret yang berhingga. Maka untuk penghampiran tersebut deret Taylor dihentikan atau

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dipotong sampai suku orde tertentu. Penghentian suatu deret atau runtutan langkah-langkah komputasi yang tidak berhingga menjadi runtutan langkah-langkah yang berhingga itulah yang menimbulkan galat pemotongan.

Contoh, hampiran fungsi $\cos(x)$ dengan bantuan deret Taylor disekitar $x = 0$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \left|\frac{x^6}{6!}\right| + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

2. Galat pembulatan (*round-off error*)

Perhitungan dengan metode numerik hampir selalu menggunakan bilangan rill Masalah timbul bila komputasi numerik dikerjakan oleh mesin (dalam hal ini komputer) karena semua bilangan real tidak dapat disajikan secara tepat di dalam komputer. Keterbatasan komputer dalam menyajikan bilangan real menghasilkan galat yang disebut Galat Pembulatan.

Contoh, misalkan sebuah komputer hanya dapat mempresentasikan bilangan real dalam 6 digit angka berarti, maka representasi bilangan $\frac{1}{6} = 0.166666666$ ... di dalam komputer 6-digit tersebut adalah 0.1666667 (Munir, 2010)

Galat dibedakan menjadi tiga yaitu:

1. Alat mutlak kesalahan mutlak dari suatu angka, pengukuran, atau perhitungan adalah perbedaan numerik nilai sesungguhnya terhadap nilai pendekatan yang diberikan, atau yang diperoleh dari hasil perhitungan atau pengukuran. Kesalahan adalah selisih nilai eksak terhadap nilai perkiraan Jika a^* adalah hampiran dari nilai eksak a maka galat mutlak dari a adalah $E = |a - a^*|$ yang berarti hampiran adalah selisih nilai eksak terhadap nilai galatnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. Galat relatif

$$e = \frac{E}{A} = \frac{|a - a^*|}{a} = \frac{Galat}{Nilai\ Eksak}$$

3. Presentase Galat

Persentase galat adalah 100 kali galat relatif

$$a = e.100\%$$

(Ermawati, 2017).

2.4.2 Cara Menganalisis Galat

Menganalisis galat sangat penting dalam perhitungan menggunakan metode numerik. Galat berasosiasi dengan seberapa dekat solusi hampiran terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galatnya, maka semakin teliti solusi numerik yang didapatkan, sebaliknya semakin besar galatnya maka solusi numerik yang didapatkan semakin tidak teliti.

Misalkan, a^* adalah nilai hampiran terhadap nilai ssejatinya a maka diperoleh

$$E = |a - a^*|$$

E disebut galat. Contoh, jika a^*=10.5 adalah nilai hampiran dari a=10.45, maka galatnya adalah $E = -0.01$ apabila tanda galat positif atau negatif tidak dipertimbangkan (Munir, 2010).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.5 Konsep Berpikir dalam Pandangan Al-Qur'an

Getaran Pegas Teredam merupakah salah satu fenomena alam yang terjadi di dunia, Getaran Pegas Teredam terjadi dipengaruhi oleh beberapa gaya yaitu gaya berat dan gaya gesek. Semuaitu bisa diketahui jika, seorang mau mempelajari tentang fenomena tersebut dengan menggunakan akalnya. Seperti halnya Allah Berfirman dalam QS. Ali Imran ayat 190-191:

" Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal. Yaitu orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri dan duduk atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang ciptaan langit dan bumi (seraya berkata) "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia. Maha suci Engkau maka peliharalah kami dari siksa neraka"(QS. Ali Imran 190-191).

Makna Q.S Ali Imran ayat 190 adalah dalam ketinggiannya dan keluasannya dan yang ada dalam hamparannya, kepadatannya serta tata letaknya, dan semua yang ada pada keduanya berupa tanda-tanda yang dapat disaksiakn seperti binatang-binatang, lautan, gunung-gunung, padang pasir, pepohonan, tumbuh-tumbuhan, tanaman, buah-buahan dan berbagai macam ciptaan Allah yang ada di langit dan bumi. Serta Saling bergiliran dan saling mengurangi panjang dan pendeknya; adakalanya yang ini panjang sedangkan yang lainnya pendek, kemudian keduanya menjadi sama. Setelah itu yang ini mengambil sebagian waktu dari yang lain hingga ia menjadi panjang waktunya, dan sebelum itu pendek, dan menjadi pendeklah yang dirinya panjang. Semua itu berjalan berdasarkan peraturan dari Tuhan yang maha perkasa lagi maha mengetahui untuk mereka yang memiliki akal-akal yang sempurna lagi yang memiliki kecerdasan, karena hanya yang demikianlah mereka dapat mengetahui segala sesuatu dengan hakikatnya masing-masing secara jelas dan gamblang.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sedangkan makna Q.S Ali Imran ayat 191 adalah Allah menjelaskan cirri khas orang-orang yang berakal, melalui firman berikutnya. Seperti yang disebutkan didalam kitab *Sahihain* dengan melalui ImranIbnu Husain bahwa Rosuluallah SAW pernah bersabda:

صلِّ قائمًا فإن لم تستطِع فقاعِدًا فإن لم تستطِعْ فعلى جَنبٍ

Shalatlah sambil berdiri, jika kamu tidak mampu berdiri, maka shalattlah sambil duduk; dan jika kamu tidak mampu sambil duduk, maka salatlah sambil berbaring pada lambungmu.(HR. Bukhari :1117)

Mereka tidak pernah terputus dari berdzikir mengingat-Nya dalam semua keadaan mereka. Lisan, hati dan jiwa mereka semuanya selalu mengungat Allah SWT.nMereka memahami semua hikmah yang terkandung didalamnya yang menunjukkan kepada kebesaran penciptaan-Nya, kekuasaan-Nya, pengetahuan-Nya, hikmah-Nya, pilihan-Nya, dan rahmat-Nya. Lalu mereka berkata, tidak sekali-kali Engkau ciptakan semuanya sia-sia melainkan dengan sebenarnya, agar orang-orang yang berbuat buruk dalam perbuatannya Engkau berikan balasan yang setimpal kepada mereka, dan Engkau berikan pahala yang baik kepada orang-orang yang berbuat baik. Kemudian orang-orang mukmin menyucikan Allah dari perbuatan yang sia-sia dan penciptaan yang batil. Mereka juga berkata, periharalah kami, wahai Tuhan yang menciptakan semua makhluk dengan sebenarnya dan adil. Wahai Tuhan yang maha suci dari segala kekurangan, cela dan perbuatan yang sia-sia, peliharalah kami dari azab mereka dengan upaya dan kekuatan-Mu. Berilah kami taufik (bimbingan) untuk mengerjakan amal-amal yang menyebabkan Engkau ridho kepada kami. Berilah kami taufik kepada amal saleh yang dapat menuntun kami ke dalam surga yang penuh kenikamatan. Lindungilah kami dari azab-Mu yang sangat pedih (Al-Albani, 2007).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selain dalam QS. Ali Imran ayat 190-191 dijelaskan juga dalam Hadits *Shahih* : Al Bukhari dan Muslim

Ibnu Wardawaih berkata, Isma'il bin Ali bin Isma'il menceritakan kepada kami, Ahmad bin Ali Al Harrani menceritakan kepada kami, Syuja' bin Asyrasy menceritakan kepada kami, Hasyraj bin Nubatah Al Wasithi Abu Makram menceritakan kepadaku dari Al Kali Abu Jannab, dari Atha, ia berkat "Wahai Ubaid, mengapa engkau tidak mengunjungai kami?" Ia menjawab, ucapan seorang penyair "*jarang-jaramglah berkunjung, kau akan bertambah kecintaan*." Ibnu Umar berkata "mari kita tinggalkan hari ini (sekarang) beritahulah kami hal yangpaling menakjubkan yang pernah engkau lihat dari Rasuluallah SAW?" Aisyah RA menangis dan berkata "semua hal dengan beliau sangat menyenangkan, hanya saja pada malam giliranku beliau mendatangiku, beliau masuk ke tempat tidurku dan mendatangiku hingga beliau melekatkan kulitnya ke kulitku, Beliau SAW berkata, Wahai Aisyah, Apakah kau mengijinkanku untuk beribadah kepada Tuhanku? Aku menjawab Demi Allah, aku suka kedekatanmu denganku dan aku pun suka engkau beribadah kepada Tuhanmu."Rasuluallah pun bangkit, menuju tempat air dan berwudhu darinya, kemudian melaksanakn shalat malam dan menangis, Beliau terus melaksanakan shalat malam hingga air matanya membasahi dadanya. Kemudian Beliau berbaring pada sisi kanannya dan meletakkan tangan kanannya dibawah pipi kanannya, Beliau tetap menangis hingga air mata membasahi tanah.Kemudian Bilal mendatangai Beliau setelah mengumandangkan Adzan Subuh. Bilal berkata, "mengapa engkau menangis wahai Rosuluallah, padahal Allah telah mengampuni dosamu yang telah lalu dan yang akan datang?" Rosuluallah SAW menjawab, "Wahai Bilal, tidaklah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sebaiknya aku menjadi hamba yang senantiasa bersyukur, bagaimana aku tidak menangis, malam ini telah turun Kepadaku ayat, *Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, hingga Firman-Nya maka peliharalah kami dari siksa neraka."*Kemudian Rosuluallah SAW bersabda, *"celakalah bagi orang yang membacanya namun tidak memikirkannya."*

Dalam tafsir Quraish Shihab menjelaskan bahwa sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi dan keajaiban-keajaiban yang terdapat pada keduanya serta bergantinya malam dan siang dengan datang dan pergi serta bertambah dan berkurang mejadi tanda- tanda atau bukti-bukti atas kekuasan Allah SWT bagi orang orang yang berakal artinya yang mempergunakan pemikiran mereka.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Metode Galerkin dalam Menyelesaikan Getaran Pegas Teredam

3.1.1 Diskritisasi domain

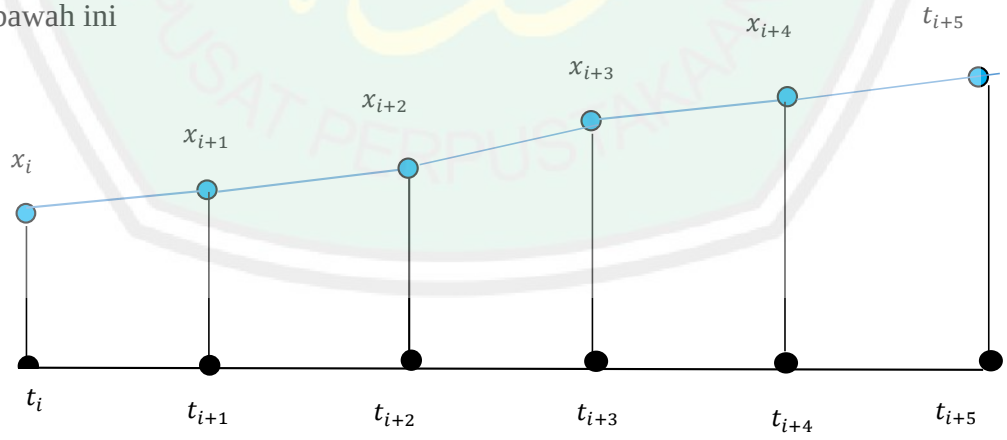
Persamaan diferensial yang akan diselesaikan dalam penelitian ini adalah:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{3.1}$$

dengan kondisi batas

$$x(0) = 1, \qquad x(T) = 0 \tag{3.2}$$

Langkah pertama untuk menyelesaikan persamaaan diferensial ini yaitu diskrititasi domain, domain di diskritisasikan menjadi lima elemen sehingga terdapat enam node. Elemen yang pertama yaitu t_i sampai t_{i+1}, elemen kedua t_{i+1} sampai t_{i+2}, elemen ketiga t_{i+2} sampai t_{i+3}, elemen keempat t_{i+3} sampai t_{i+4}, dan elemen kelima t_{i+4} sampai t_{i+5}, seperti yang terlihat dalam gambar dibawah ini



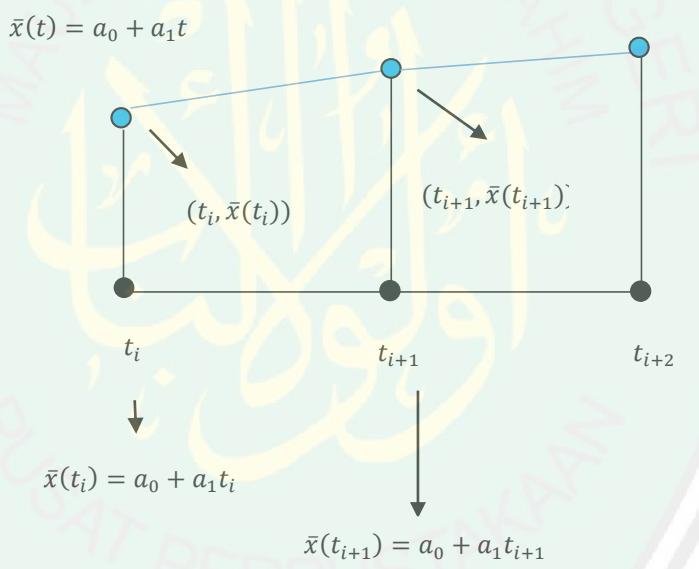
Gambar 3.1 Diskritisasi domain

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.1.2 Menentukan solusi aproksimasi

Persamaan diferensial tersebut merupakan fungsi linier homogen yang bentuknya kurva, untuk menyederhanakan bentuknya diperlukan solusi hampiran dengan menggunakan fungsi interpolasi, solusi aproksimasi disini dimisalkan dengan $\bar{x}(t)$, fungsi interpolasi yang digunakan adalah fungsi linier atau polinom berderajat 1 karena mudah dihitung dan bersifat kontinu. Bentuk umum fungsi linier yaitu

$$\bar{x}(t) = a_0 + a_1 t \tag{3.3}$$



Gambar 3.2 Fungsi interpolasi

Seperti yang terlihat dalam gambar 3.2 diatas garis berwarna biru adalah fungsi interpolasi, nilai fungsi interpolasi dari titik t_i sampai t_{i+1} nilainya berbeda dengan titik t_{i+1} sampai t_{i+2} untuk mencari nilai dari titik t_i sampai t_{i+1} bisa dilihat dari tingginya t_i yaitu $\bar{x}(t_i) = a_0 + a_1 t_i$ dan untuk mencari nilai dari titik t_i sampai t_{i+1} bisa dilihat dari tingginya t_{i+1} yaitu $\bar{x}(t_{i+1}) = a_0 + a_1 t_{i+1}$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selanjutnya jika bentuk umum fungsi linier di subtitusikan ke persamaan diferensial maka akan ada sebuah sisa atau galat. Dimana galat tersebut adalah

$$m\frac{d^2\bar{x}(t)}{dt^2} + b\frac{d\bar{x}(t)}{dt} + k\bar{x}(t) = R \tag{3.4}$$

Untuk mendapatkan galat paling kecil agar mndekati nilai sebenarnya. Galat inii dimiminumkan dengan mengintegralkan galat di daerah domain yang telah dikalikan dengan fungsi pembobot, dimana fungsi pembobot itu adalah fungsi interpolasi yang dicari dengan menggunakan metode metode galerkin. Seperti yang telah diketahui bahwa nilai dari fungsi interpolasi masih mengandung konstanta a_0 dan a_1, sehingga akan dicari terlebih dahulu nilai dari a_0 dan a_1. Untuk mencari nilai a_0 maka $\bar{x}(t_i)$ dikurangkan dengan $\bar{x}(t_{i+1})$, sebelumnya dimisalkan bahwa $\bar{x}(t_i) = x_i$ dan $\bar{x}(t_{i+1}) = x_{i+1}$, sehingga

$$x_i - x_{i+1} = a_1 t_i - a_1 t_{i+1} x_i - x_{i+1}$$

$$x_i - x_{i+1} = a_1(t_i - t_{i+1})$$

$$a_1 = \frac{x_i - x_{i+1}}{t_i - t_{i+1}}$$

Untuk mencari a_1 maka $\bar{x}(t_i)$ dikalikan dengan t_{i+1} dan $\bar{x}(t_{i+1})$ dikalikan dengan t_i

$$x_i t_{i+1} - x_{i+1} t_i = a_0 t_{i+1} - a_0 t_i$$

$$x_i t_{i+1} - x_{i+1} t_i = a_0(t_{i+1} - t_i)$$

$$a_0 = \frac{x_i t_{i+1} - x_{i+1} t_i}{t_{i+1} - t_i}$$

Kemudian nilai dari a_1 dan a_0 disubtitusikan ke bentuk umum fungsi linier sehingga menjadi,

$$\bar{x}(t) = a_0 + a_1 t$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\bar{x}(t) = \frac{x_i t_{i+1} - x_{i+1} t_i}{t_{i+1} - t_i} + \frac{x_i - x_{i+1}}{t_i - t_{i+1}} t$$

$$\bar{x}(t) = \left(\frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}\right) x_i + \left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right) x_{i+1}$$

Dimisalkan

$$N_{i,1}(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} \tag{3.5}$$

$$N_{i,2}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \tag{3.6}$$

sehingga dapat diperoleh

$$\bar{x}(t) = N_{i,1}(t) x_i + N_{i,2}(t) x_{i+1} \tag{3.7}$$

Keterangan

$N_{i,1}$ = Fungsi interpolasi yang pertama dengan i adalah konstanta t yang berjalan dari 0 sampai 20

$N_{i,2}$ = Fungsi interpolasi yang kedua dengan i adalah konstanta t yang berjalan dari 0 sampai 20

Persamaan (3.7) adalah bentuk aproksimasi, sedangkan persamaan (3.5) dan persamaan (3.6) adalah fungsi interpolasi.

3.1.3 Perhitungan persamaan elemen

Galat atau residu yang telah diperoleh akan diminimumkan dengan menggunakan metode galerkin, metode galerkin ini digunakan untuk memilih pembobot, dimana pembobot itu diperoleh dari fungsi interpolasi. Untuk pembobot yang pertama yaitu

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} RN_{i,1}(t)\,dt = 0$$

Pilih $N_{i,1}(t) = \left(\frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i}\right)$

Misalkan

$I_{i,1} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} R\,N_{i,1}(t)\,dt$ sehingga $I_{i,1}$ dapat ditulis

$$I_{i,1} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(m\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + b\frac{d\bar{x}}{dt} + k\bar{x}\right) N_{i,1}(t)\,dt$$

$$= m\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} N_{i,1}(t)dt + b\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d\bar{x}}{dt} N_{i,1}(t)dt + k\int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{x}N_{i,1}(t)dt$$

Misalkan,

$$A = m\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} N_{i,1}(t)dt$$

$$B = b\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d\bar{x}}{dt} N_{i,1}(t)dt$$

$$C = k\int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{x}N_{i,1}(t)dt$$

Sehingga $I_{i,1} = A + B + C$

Pengintegralan persamaan A, B dan C diselesaikan dengan pengintegralan parsial integral tentu seperti pada persamaan (2.40).

Persamaan A

Karena $m\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} N_{i,1}(t)dt$ bersifat komutatif maka dapat ditulis

$$m\int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,1}(t)\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}dt$$

Misal $u = N_{i,1}(t)$, maka $\frac{du}{dt} = \frac{d\left(N_{i,1}(t)\right)}{dt} = du = \frac{d\left(N_{i,1}(t)\right)}{dt}\,dt$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Misal $dv = \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}\, dt$ maka $v = \frac{d\bar{x}}{dt}$

Selanjutnya dapat diselesaikan dengan menggunakan pengintegralan parsial seperti pada persamaan (2.40)

$$m\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu \; m\int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,1}(t)\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}dt$$

$$= \left[N_{i,1}(t)\frac{d\bar{x}(t)}{dt}\right]_{t_i}^{t_{i+1}} - \frac{d\left(N_{i,1}(t)\right)}{dt}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{d\bar{x}}{dt}dt$$

$$= \left(N_{i,1}(t_{i+1})\frac{d\bar{x}(t_{i+1})}{dt} - N_{i,1}(t_i)\frac{d\bar{x}(t_i)}{dt}\right) - \frac{d}{dt}N_{i,1}(t)[\bar{x}(t)]_{t_i}^{t_{i+1}}$$

$$= -\frac{d\bar{x}(t_i)}{dt} - \frac{(-1)}{t_{i+1}-t_i}(x_{i+1}-x_i)$$

$$= -\frac{d\bar{x}(t_i)}{dt} + \frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}$$

$$m\int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,1}(t)\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}dt = m\left(-\frac{d\bar{x}(t_i)}{dt} + \frac{(x_{i+1}-x_i)}{t_{i+1}-t_i}\right)$$

Persamaan B

Karena $b\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{d\bar{x}}{dt}N_{i,1}(t)dt$ bersifat komutatif maka dapat ditulis

$$b\int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,1}(t)\frac{d\bar{x}}{dt}dt$$

Misal $u = N_{i,1}(t)$, maka $\frac{du}{dt} = \frac{d\left(N_{i,1}(t)\right)}{dt}, du = \frac{d\left(N_{i,1}(t)\right)}{dt}\, dt$

Misal $dv = \frac{d\bar{x}}{dt}\, dt$, maka $v = \bar{x}$

Selanjutnya dapat diselesaikan dengan menggunakan pengintegralan parsial seperti pada persamaan (2.40)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

$$b\int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,1}(t)\frac{d\bar{x}}{dt}dt = \left[N_{i,1}(t)(\bar{x})\right]_{t_i}^{t_{i+1}} - \frac{d\left(N_{i,1}(t)\right)}{dt}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{x}\, dt\left(N_{i,1}(t_{i+1})\bar{x}(t_{i+1}) - N_{i,1}(t_i)\bar{x}(t_i)\right)$$

$$-\frac{d}{dt}N_{i,1}(t)\left[\left(\frac{t_{i+1}t - \frac{1}{2}t^2}{t_{i+1}-t_i}\right)x_i + \left(\frac{\frac{1}{2}t^2 - t_i t}{t_{i+1}-t_i}\right)x_{i+1}\right]_{t_i}^{t_{i+1}}$$

$$= \left(-N_{i,1}(t_i)\bar{x}(t_i)\right) + \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\left(\left[\left(\frac{t_{i+1}t_{i+1} - \frac{1}{2}t_{i+1}^2}{t_{i+1}-t_i}\right)x_i\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\frac{1}{2}t_{i+1}^2 - t_i t_{i+1}}{t_{i+1}-t_i}\right)x_{i+1}\right] - \left[\left(\frac{t_{i+1}t_i - \frac{1}{2}t_i^2}{t_{i+1}-t_i}\right)x_i + \left(\frac{\frac{1}{2}t_i^2 - t_i t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)x_{i+1}\right]\right)$$

$$= (-x_i) + \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\left(\left[\left(\frac{t_{i+1}^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right)x_i + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}t_{i+1} - t_i\right)t_{i+1}}{t_{i+1}-t_i}\right)x_{i+1}\right]\right.$$

$$\left. - \left[\left(\frac{\left(t_{i+1} - \frac{1}{2}t_i\right)t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)x_i + \left(\frac{-t_i^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right)\right]x_{i+1}\right)$$

Selanjutnya persamaan tersebut dikelompokkan yang mengandung unsur x_i dan yang mengandung unsur x_{i+1} sehingga diperoleh

$$b\int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,1}(t)\frac{d\bar{x}}{dt}dt = (-x_i) + \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\left(\left[\left(\frac{t_{i+1}^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right) - \left(\frac{\left(t_{i+1} - \frac{1}{2}t_i\right)t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)\right]x_i\right.$$

$$\left. - \left[\left(\frac{\left(\frac{1}{2}t_{i+1} - t_i\right)t_{i+1}}{t_{i+1}-t_i}\right) + \left(\frac{t_i^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right)\right]x_{i+1}\right)$$

$$= (-x_i) + \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\left(\left[\frac{t_{i+1}^2 - 2t_{i+1}t_i + t_i^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right]x_i + \left[\frac{t_{i+1}^2 - 2t_i t_{i+1} + t_i^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right]x_{i+1}\right)$$

$$= (-x_i) + \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\left(\left[\frac{(t_{i+1}-t_i)(t_{i+1}-t_i)}{2(t_{i+1}-t_i)}\right]x_i\right.$$

$$\left. + \left[\frac{(t_{i+1}-t_i)(t_{i+1}-t_i)}{2(t_{i+1}-t_i)}\right]x_{i+1}\right)$$

$$= (-x_i) + \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\left(\left[\frac{t_{i+1}-t_i}{2}\right]x_i + \left[\frac{t_{i+1}-t_i}{2}\right]x_{i+1}\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$b\int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,1}(t)\frac{d\bar{x}}{dt}dt = (-x_i) + \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\left(\frac{t_{i+1}-t_i}{2}(x_i + x_{i+1})\right)$$

$$= (-x_i) + \left(\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\left(\frac{t_{i+1}-t_i}{2}(x_i + x_{i+1})\right)\right)$$

$$= -x_i + \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$$

$$= -x_i + \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}x_{i+1}$$

$$= -\frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}x_{i+1}$$

$$= b\left(-\frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}x_{i+1}\right)$$

Persamaan C

Karena $k\int_{t_i}^{t_{i+1}}(\bar{x})N_{i,1}(t)dt$ bersifat komutatif maka dapat ditulis

$$k\int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,1}(t)\big((\bar{x})(t)\big)dt$$

$$k\int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,1}(t)(\bar{x})dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\frac{t_{i+1}-t}{\mathrm{t_{i+1}-t_i}}\right)\left(x_i\frac{t_{i+1}-t}{\mathrm{t_{i+1}-t_i}} + x_{i+1}\frac{t-t_i}{\mathrm{t_{i+1}-t_i}}\right)dt$$

$$= \frac{1}{(\mathrm{t_{i+1}-t_i})^2}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\Big(x_i(t_{i+1}^2 - 2t_{i+1}t + t^2)$$

$$+ x_{i+1}(tt_{i+1} - t_it_{i+1} - t^2 + tt_i)\Big)dt$$

$$= \frac{1}{(\mathrm{t_{i+1}-t_i})^2}\left(x_i\left(t_{i+1}^2t - t_{i+1}t^2 + \frac{1}{3}t^3\right)\right.$$

$$\left. + x_{i+1}\left(\frac{t^2t_{i+1}}{2} - tt_it_{i+1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2t_i}{2}\right)\right)\Bigg|_{t_i}^{t_{i+1}}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$k\int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,1}(t)(\bar{x})dt = \frac{1}{(\mathrm{t_{i+1}}-\mathrm{t_i})^2}\left(x_i\left(t_{i+1}^2(t_{i+1}-t_i)-t_{i+1}(t_{i+1}^2-t_i^2)+\frac{1}{3}(t_{i+1}^3-t_i^3)\right)\right.$$

$$+x_{i+1}\left(\frac{(t_{i+1}^2-t_i^2)t_{i+1}}{2}-(t_{i+1}-t_i)t_it_{i+1}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(t_{i+1}^3-t_i^3)}{3}+\frac{(t_{i+1}^2-t_i^2)xt_i}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{(\mathrm{t_{i+1}}-\mathrm{t_i})^2}\left(x_i\left(t_{i+1}^3-t_{i+1}^2t_i-t_{i+1}^3+t_i^2t_{i+1}+\frac{1}{3}t_{i+1}^3-\frac{1}{3}t_i^3\right)\right.$$

$$+x_{i+1}\left(\frac{t_{i+1}^3-t_{i+1}t_i^2}{2}-t_it_{i+1}^2+t_{i+1}t_i^2-\frac{t_{i+1}^3}{3}+\frac{t_i^3}{3}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}t_{i+1}^2t_i-\frac{t_i^3}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{(\mathrm{t_{i+1}}-\mathrm{t_i})^2}\left(x_i\left(\frac{1}{3}\right)(t_{i+1}^3-3t_{i+1}^2t_i+3t_i^2t_{i+1}-t_i^3)\right.$$

$$\left.+x_{i+1}\frac{1}{6}(t_{i+1}^3-3t_{i+1}^2t_i+3t_{i+1}t_i^2-t_i^3)\right)$$

$$=\frac{1}{6(\mathrm{t_{i+1}}-\mathrm{t_i})^2}(x_i2(t_{i+1}-t_i)^3+x_{i+1}(t_{i+1}-t_i)^3)$$

$$=\frac{\mathrm{t_{i+1}}-\mathrm{t_i}}{6}(2x_i+x_{i+1})$$

$$=\frac{1}{6}(2x_i+x_{i+1})(\mathrm{t_{i+1}}-\mathrm{t_i})k\int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,1}(t)(\bar{x})dt$$

$$=k\left(\frac{1}{6}(2x_i+x_{i+1})(\mathrm{t_{i+1}}-\mathrm{t_i})\right)$$

Selanjutnya diperoleh

$I_{i,1} = A + B + C$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$I_{i,1} = m\left(-\frac{d\bar{x}(t_i)}{dt} + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{t_{i+1} - t_i}\right) + b\left(-\frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}x_{i+1}\right)$$

$$+ k\left(\frac{1}{6}(2x_i + x_{i+1})(\mathrm{t_{i+1}} - \mathrm{t_i})\right)$$

$$= \frac{-md\bar{x}(t_i)}{dt} + \left(\frac{m}{\Delta t} + \frac{b}{2} + \frac{k\Delta t}{6}\right)x_{i+1} + \left(\frac{-m}{\Delta t} - \frac{b}{2} + \frac{2k\Delta t}{6}\right)x_i$$

$$\left(\frac{m}{\Delta t} + \frac{b}{2} + \frac{k\Delta t}{6}\right)x_{i+1} + \left(\frac{-m}{\Delta t} - \frac{b}{2} + \frac{2k\Delta t}{6}\right)x_i = \frac{md\bar{x}(t_i)}{dt} \quad (3.8)$$

Selanjutnya untuk pembobot yang kedua yaitu

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} RN_{i,2}(t)\, dt = 0$$

Pilih $N_{i,2}(t) = \left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right)$ sehingga dapat ditulis

$$I_{i,2} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(m\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + b\frac{d\bar{x}}{dt} + k\bar{x}\right)N_{i,1}(t)\, dt = 0$$

$$= m\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}N_{i,1}(t)dt$$

$$+ b\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d\bar{x}}{dt}N_{i,1}(t)dt + k\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\bar{x}\,)N_{i,1}(t)dt$$

$I_{i,2} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} R\, N_{i,2}\, dt = 0$ sehingga

$$I_{i,2} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + \frac{d\bar{x}}{dt} + k\bar{x}\right)N_{i,2}\, dt = 0$$

Misalkan

$$A = m\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}N_{i,2}(t)dt$$

$$B = b\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d\bar{x}}{dt}N_{i,2}(t)dt$$

$$C = k\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\bar{x}\,)N_{i,1}(t)dt$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga $I_{i,2} = A + B + C$

Persamaan A

Karena $m \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} N_{i,2}(t)dt$ bersifat komutatif maka dapat ditulis

$$m \int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,2}(t) \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} dt$$

Misal $u = N_{i,2}(t)$, maka $\frac{du}{dt} = \frac{d\left(N_{i,2}(t)\right)}{dt}$, $du = \frac{d\left(N_{i,2}(t)\right)}{dt}\ dt$

Misal $dv = \frac{d^2\bar{x}}{dt^2}\ dt$ maka $v = \frac{d\bar{x}}{dt}$

Selanjutnya dapat diselesaikan dengan menggunakan pengintegralan parsial seperti pada persamaan (2.40)

$$m \int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu\ m \int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,2}(t) \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} dt$$

$$= \left[N_{i,2}(t) \frac{d\bar{x}(t)}{dt} \right]_{t_i}^{t_{i+1}} - \frac{d\left(N_{i,2}(t)\right)}{dt} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d\bar{x}}{dt} dt$$

$$= \left(N_{i,2}(t_{i+1}) \frac{d\bar{x}(t_{i+1})}{dt} - N_{i,2}(t_i) \frac{d\bar{x}(t_i)}{dt} \right) - \frac{d}{dt} N_{i,2}(t) [\bar{x}(t)]_{t_i}^{t_{i+1}}$$

$$= \frac{d\bar{x}(t_{i+1})}{dt} - \frac{1}{t_{i+1} t_i} (x_{i+1} - x_i)$$

$$= \frac{d\bar{x}(t_{i+1})}{dt} - \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} m \int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,2}(t) \frac{d^2\bar{x}}{dt^2} dt$$

$$= m \left(\frac{d\bar{x}(t_{i+1})}{dt} - \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} \right)$$

Persamaan B

Karena $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d\bar{x}}{dt} N_{i,2}(t)dt$ bersifat komutatif maka dapat ditulis

$$b \int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,2}(t) \frac{d\bar{x}}{dt} dt$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Misal $u = N_{i,2}(t)$, maka $du = \frac{d\left(N_{i,2}(t)\right)}{dt}\, dt$

Misal $dv = \frac{d\bar{x}}{dt}\, dt$, maka $v = \bar{x}$

Selanjutnya dapat diselesaikan dengan menggunakan pengintegralan parsial seperti pada persamaan (2.40)

$$b\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu \; b\int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,2}(t)\frac{d\bar{x}}{dt}dt = \left[N_{i,2}(t)(\bar{x})\right]_{t_i}^{t_{i+1}} - \frac{d\left(N_{i,2}(t)\right)}{dt}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \bar{x}\, dt$$

$$= \left(N_{i,2}(t_{i+1})\bar{x}(t_{i+1}) - N_{i,2}(t_i)\bar{x}(t_i)\right)$$

$$-\frac{d}{dt}N_{i,2}(t)\left[\left(\frac{t_{i+1}t - \frac{1}{2}t^2}{t_{i+1}-t_i}\right)x_i + \left(\frac{\frac{1}{2}t^2 - t_i t}{t_{i+1}-t_i}\right)x_{i+1}\right]_{t_i}^{t_{i+1}}$$

$$= \left(-N_{i,2}(t_{i+1})\bar{x}(t_{i+1})\right)$$

$$-\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\left(\left[\left(\frac{t_{i+1}t_{i+1} - \frac{1}{2}t_{i+1}^2}{t_{i+1}-t_i}\right)x_i + \left(\frac{\frac{1}{2}t_{i+1}^2 - t_i t_{i+1}}{t_{i+1}-t_i}\right)x_{i+1}\right]\right.$$

$$\left.-\left[\left(\frac{t_{i+1}t_i - \frac{1}{2}t_i^2}{t_{i+1}-t_i}\right)x_i + \left(\frac{\frac{1}{2}t_i^2 - t_i t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)x_{i+1}\right]\right)$$

$$= (x_{i+1})$$

$$-\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\left(\left[\left(\frac{t_{i+1}^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right)x_i + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}t_{i+1} - t_i\right)t_{i+1}}{t_{i+1}-t_i}\right)x_{i+1}\right]\right.$$

$$\left.-\left[\left(\frac{\left(t_{i+1} - \frac{1}{2}t_i\right)t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)x_i + \left(\frac{-t_i^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right)\right]\right)$$

Selanjutnya persamaan tersebut dikelompokkan yang mengandung unsur x_i dan yang mengandung unsur x_{i+1} sehingga diperoleh

$$b\int_a^b udv = [uv]_a^b = (x_{i+1}) - \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\left(\left[\left(\frac{t_{i+1}^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right) - \left(\frac{\left(t_{i+1} - \frac{1}{2}t_i\right)t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)\right]x_i\right.$$

$$\left.-\left[\left(\frac{\left(\frac{1}{2}t_{i+1} - t_i\right)t_{i+1}}{t_{i+1}-t_i}\right) + \left(\frac{t_i^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right)\right]x_{i+1}\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$b\int_a^b udv = [uv]_a^b = (x_{i+1}) - \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\left(\left[\frac{t_{i+1}^2 - 2t_{i+1}t_i + t_i^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right]x_i + \left[\frac{t_{i+1}^2 - 2t_i t_{i+1} + t_i^2}{2(t_{i+1}-t_i)}\right]x_{i+1}\right)$$

$$= (x_{i+1}) - \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\left(\left[\frac{(t_{i+1}-t_i)(t_{i+1}-t_i)}{2(t_{i+1}-t_i)}\right]x_i + \left[\frac{(t_{i+1}-t_i)(t_{i+1}-t_i)}{2(t_{i+1}-t_i)}\right]x_{i+1}\right)$$

$$= (x_{i+1}) - \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\left(\left[\frac{t_{i+1}-t_i}{2}\right]x_i + \left[\frac{t_{i+1}-t_i}{2}\right]x_{i+1}\right)$$

$$= (x_{i+1}) - \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\left(\frac{t_{i+1}-t_i}{2}(x_i + x_{i+1})\right)$$

$$= (x_{i+1}) - \left(\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\left(\frac{t_{i+1}-t_i}{2}(x_i + x_{i+1})\right)\right)$$

$$= x_{i+1} - \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$$

$$= x_{i+1} - \frac{1}{2}x_i - \frac{1}{2}x_{i+1}$$

$$= -\frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}x_{i+1}$$

$$= b\left(-\frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}x_{i+1}\right)$$

Persamaan C

Karena $k\int_{t_i}^{t_{i+1}}(\bar{x})N_{i,2}(t)dt$ bersifat komutatif maka dapat ditulis

$k\int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,2}(t)\big((\bar{x})(t)\big)dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,2}(t)(\bar{x})dt$

$$= \int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)\left(x_i\frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} + x_{i+1}\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}\right)dt$$

$$= \frac{1}{(t_{i+1}-t_i)^2}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\Big(x_i(tt_{i+1} - t_i t_{i+1} - t^2 + tt_i) + x_{i+1}(t_i^2 - 2t_i t + t^2)\Big)dt$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$k\int_{t_i}^{t_{i+1}} N_{i,2}(t)\big((\bar{x})(t)\big)dt = \frac{1}{(\mathrm{t_{i+1}}-\mathrm{t_i})^2}\left(x_i\left(\frac{t^2t_{i+1}}{2}-tt_it_{i+1}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2t_i}{2}\right)\right.$$

$$\left.+x_{i+1}\left(t_i^2t-t_it^2+\frac{1}{3}t^3\right)\right)\Bigg|_{t_i}^{t_{i+1}}$$

$$=\frac{1}{(\mathrm{t_{i+1}}-\mathrm{t_i})^2}\left(x_i\left(\frac{(t_{i+1}^2-t_i^2)t_{i+1}}{2}-(t_{i+1}-t_i)t_it_{i+1}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{(t_{i+1}^3-t_i^3)}{3}+\frac{(t_{i+1}^2-t_i^2)x_i}{2}\right)+x_{i+}\left(t_i^2(t_{i+1}-t_i)\right.$$

$$\left.\left.-t_i(t_{i+1}^2-t_i^2)+\frac{1}{3}(t_{i+1}^3-t_i^3)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{(\mathrm{t_{i+1}}-\mathrm{t_i})^2}\left(x_i\left(\frac{t_{i+1}^3-t_{i+1}t_i^2}{2}-t_it_{i+1}^2+t_{i+1}t_i^2-\frac{t_{i+1}^3}{3}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{t_i^3}{3}+\frac{1}{2}t_{i+1}^2t_i-\frac{t_i^3}{3}\right)+x_{i+1}\left(-t_i^3+t_i^2t_{i+1}\right.$$

$$\left.\left.+t_i^3-t_{i+1}^2t_i+\frac{1}{3}t_{i+1}^3-\frac{1}{3}t_i^3\right)\right)$$

$$=\frac{1}{(\mathrm{t_{i+1}}-\mathrm{t_i})^2}\left(x_i\frac{1}{6}(t_{i+1}^3-3t_{i+1}^2t_i+3t_{i+1}t_i^2-t_i^3)\right.$$

$$\left.+x_{i+1}\frac{1}{3}(t_{i+1}^3-3t_{i+1}^2t_i+3t_{i+1}t_i^2-t_i^3)\right)$$

$$=\frac{1}{(\mathrm{t_{i+1}}-\mathrm{t_i})^2}(x_i(t_{i+1}-t_i)^3+2x_{i+1}(t_{i+1}-t_i)^3)$$

$$=\frac{\mathrm{t_{i+1}}-\mathrm{t_i}}{6}(x_i+2x_{i+1})$$

$$=\tfrac{1}{6}(x_i+2x_{i+1})(\mathrm{t_{i+1}}-\mathrm{t_i})$$

$$=k\left(\frac{1}{6}(x_i+2x_{i+1})(\mathrm{t_{i+1}}-\mathrm{t_i})\right)$$

sehingga $I_{i,2}=A+B+C$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

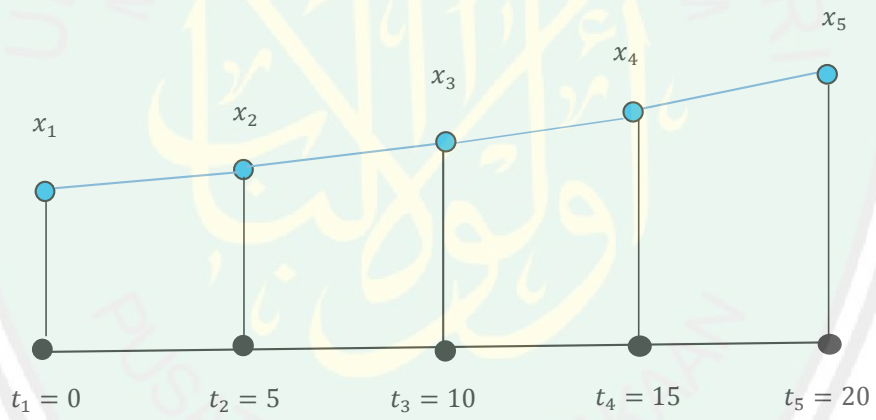
$$I_{i,2} = m\left(\frac{d\bar{x}(t_{i+1})}{dt} - \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}\right) + b\left(-\frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}x_{i+1}\right) + k\left(\frac{1}{6}(x_i + 2x_{i+1})(\mathrm{t_{i+1}} - \mathrm{t_i})\right)$$

$$= \frac{md\bar{x}(t_{i+1})}{dt} + \left(\frac{-m}{\Delta t} + \frac{b}{2} + \frac{2k\Delta t}{6}\right)x_{i+1} + \left(\frac{m}{\Delta t} - \frac{b}{2} + \frac{k\Delta t}{6}\right)x_i$$

$$\left(\frac{-m}{\Delta t} + \frac{b}{2} + \frac{2k\Delta t}{6}\right)x_{i+1} + \left(\frac{m}{\Delta t} - \frac{b}{2} + \frac{k\Delta t}{6}\right)x_i = \frac{-md\bar{x}(t_{i+1})}{dt} \quad (3.9)$$

3.1.4 Pembentukan sistem persamaan elemen (penggabungan)

Prinsip kerja metode elemen hingga adalah pembagian domain, untuk yang pertama domain dibagi menjadi eempat elemen dengan lima node seperti yang diasumsikan dengan panjang $t = 20$ maka dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 3.3 Fungsi aproksimasi empat elemen dengan lima node

Sebelum melakukan penggabungan, dalam hal ini akan dilakukan pengelompokan untuk hasil persamaan linier pada $i = 1,2,3,4,5$ dengan $m = 1.5$, $b = 0.9,$ dan $k = 26.8$ adalah konstanta real. Digunakan parameter yang merujuk pada penelitian Faridah (2015). Sehingga persamaan (3.8) dapat ditulis sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Misal $p_1 = \left(\frac{m}{\Delta t} + \frac{b}{2} + \frac{k\Delta t}{6}\right) x_{i+1}$, dengan Δt = 5, maka

$$\begin{aligned} p_1 &= \left(\frac{m}{\Delta t} + \frac{b}{2} + \frac{k\Delta t}{6}\right) x_{i+1} \\ &= \left(\frac{1.5}{5} + \frac{0.9}{2} + \frac{26.8(5)}{6}\right) x_{i+1} \\ &= (0.3 + 0.45 + 22.3333333) x_{i+1} \\ p_1 &= 23.0833333 x_{i+1} \end{aligned}$$

Misal $p_2 = \left(\frac{-m}{\Delta t} - \frac{b}{2} + \frac{2k\Delta t}{6}\right) x_i$, dengan Δt = 5, maka

$$\begin{aligned} p_2 &= \left(\frac{-m}{\Delta t} - \frac{b}{2} + \frac{2k\Delta t}{6}\right) x_i \\ &= \left(-\frac{1.5}{5} - \frac{0.9}{2} + \frac{2(26.8)(5)}{6}\right) x_i \\ &= (-0.3 - 0.45 + 44.6666667) x_i \\ p_2 &= 43.91666667 x_i \end{aligned}$$

Sehingga dapat ditulis

$$23.0833333 x_{i+1} + 43.91666667 x_i = \frac{1.5 d\bar{x}(t_i)}{dt} \qquad (3.10)$$

Selanjutnya untuk persamaan (3.9) dapat ditulis sebagai berikut:

Misal $q_1 = \left(\frac{-m}{\Delta t} + \frac{b}{2} + \frac{2k\Delta t}{6}\right) x_{i+1}$, dengan Δt = 5, maka

$$\begin{aligned} q_1 &= \left(\frac{-m}{\Delta t} + \frac{b}{2} + \frac{2k\Delta t}{6}\right) x_{i+1} \\ &= \left(-\frac{1.5}{5} + \frac{0.9}{2} + \frac{2(26.8)(5)}{6}\right) x_{i+1} \\ &= (-0.3 + 0.45 + 44.6666667) x_{i+1} \\ q_1 &= 44.8166667 x_{i+1} \end{aligned}$$

Misal $q_2 = \left(\frac{m}{\Delta t} - \frac{b}{2} + \frac{k\Delta t}{6}\right) x_i$, dengan Δt = 5, maka

$$\begin{aligned} q_2 &= \left(\frac{m}{\Delta t} - \frac{b}{2} + \frac{k\Delta t}{6}\right) x_i \\ &= \left(\frac{1.5}{5} - \frac{0.9}{2} + \frac{(26.8)(5)}{6}\right) x_i \\ &= (0.3 - 0.45 + 22.3333333) x_i \\ q_2 &= 22.1833333 x_i \end{aligned}$$

Sehingga dapat ditulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$44.8166667x_{i+1} + 22.1833333x_i = \frac{-1.5d\bar{x}(t_{i+1})}{dt} \quad (3.11)$$

Pada persamaan (3.10) dan persamaan (3.11)

- Untuk $i = 1$ maka

$$23.0833333x_2 + 43.9166667x_1 = \frac{1.5d\bar{x}(t_1)}{dt}$$

$$44.8166667x_2 + 22.1833333x_1 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_2)}{dt}$$

- Untuk $i = 2$ maka

$$23.0833333x_3 + 43.9166667x_2 = \frac{1.5d\bar{x}(t_2)}{dt}$$

$$44.8166667x_3 + 22.1833333x_2 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_3)}{dt}$$

- Untuk $i = 3$ maka

$$23.0833333x_4 + 43.9166667x_3 = \frac{1.5d\bar{x}(t_3)}{dt}$$

$$44.8166667x_4 + 22.1833333x_3 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_4)}{dt}$$

- Untuk $i = 4$ maka

$$23.0833333x_5 + 43.9166667x_4 = \frac{1.5d\bar{x}(t_4)}{dt}$$

$$44.8166667x_5 + 22.1833333x_4 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_5)}{dt}$$

Setelah dilakukan pengelompokan diatas, kemudian akan dilakukan penggabungan untuk mendapatkan persamaan node pertama sampai keenam. Berikut adalah persamaan nodenya

Persamaan node pertama adalah persamaan (3.10) untuk $i = 1$

$$23.0833333x_2 + 43.9166667x_1 = \frac{1.5d\bar{x}(t_1)}{dt} \quad (3.12)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Persamaan node kedua adalah penjumlahan dari persamaan (3.11) untuk $i = 1$ dan (3.10) untuk $i = 2$

$$44.8166667x_2 + 22.1833333x_1 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_2)}{dt}$$

$$23.0833333x_3 + 43.9166667x_2 = \frac{1.5d\bar{x}(t_2)}{dt}$$

Hasil penjumlahannya adalah

$$22.1833333x_1 + 88.7333334x_2 + 23.0833333x_3 = 0 \qquad (3.13)$$

Persamaan node kedua adalah penjumlahan dari persamaan (3.11) untuk $i = 2$ dan (3.10) untuk $i = 3$

$$44.8166667x_3 + 22.1833333x_2 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_3)}{dt}$$

$$23.0833333x_4 + 43.9166667x_3 = \frac{1.5d\bar{x}(t_3)}{dt}$$

Hasil penjumlahannya adalah

$$22.1833333x_2 + 88.7333334x_3 + 23.0833333x_4 = 0 \qquad (3.14)$$

Persamaan node kedua adalah penjumlahan dari persamaan (3.11) untuk $i = 3$ dan (3.10) untuk $i = 4$

$$44.8166667x_4 + 22.1833333x_3 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_4)}{dt}$$

$$23.0833333x_5 + 43.9166667x_4 = \frac{1.5d\bar{x}(t_4)}{dt}$$

Hasil penjumlahannya adalah

$$22.1833333x_3 + 88.7333334x_4 + 23.0833333x_5 = 0 \qquad (3.15)$$

Persamaan node 5 adalah persamaan (3.11) untuk $i = 4$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$44.8166667x_5 + 22.1833333x_4 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_5)}{dt} \quad (3.16)$$

Sehingga diperoleh persamaan matriks untuk node pertama sampai kelima yakni persamaan (3.12), (3.13), (3.14), (3.15) dan (3.16)

$$\begin{aligned}
223.0833333x_2 + 43.9166667x_1 &= \frac{1.5d\bar{x}(t_1)}{dt} \\
22.1833333x_1 + 88.7333334x_2 + 23.0833333x_3 &= 0 \\
22.1833333x_2 + 88.7333334x_3 + 23.0833333x_4 &= 0 \\
22.1833333x_3 + 88.7333334x_4 + 23.0833333x_5 &= 0 \\
44.8166667x_5 + 22.1833333x_4 &= \frac{-1.5d\bar{x}(t_5)}{dt}
\end{aligned}$$

Selanjutnya memasukkan kondisi batas $x(0) = 1$ dan $x(20) = 0$.

$$-\frac{1.5d\bar{x}(t_1)}{dt} + 23.0833333x_2 = -43.9166667(1)$$

$$88.7333334x_2 + 23.0833333x_3 = -22.1833333(1)$$

$$22.1833333x_2 + 88.7333334x_3 + 23.0833333x_4 = 0$$

$$22.1833333x_3 + 88.7333334x_4 += -23.0833333(0)$$

$$\frac{1.5d\bar{x}(t_5)}{dt} + 22.1833333x_4 = -44.8166667(0)$$

Jika ditulis dalam bentuk matriks sehingga menjadi

$$\begin{bmatrix} -1.5 & 23.0833333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 88.7333334 & 23.0833333 & 0 & 0 \\ 0 & 22.1833333 & 88.7333334 & 23.0833333 & 0 \\ 0 & 0 & 22.1833333 & 88.7333334 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22.1833333 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\bar{x}(0)}{dt} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \frac{d\bar{x}(20)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -43.9166667 \\ -22.1833333 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

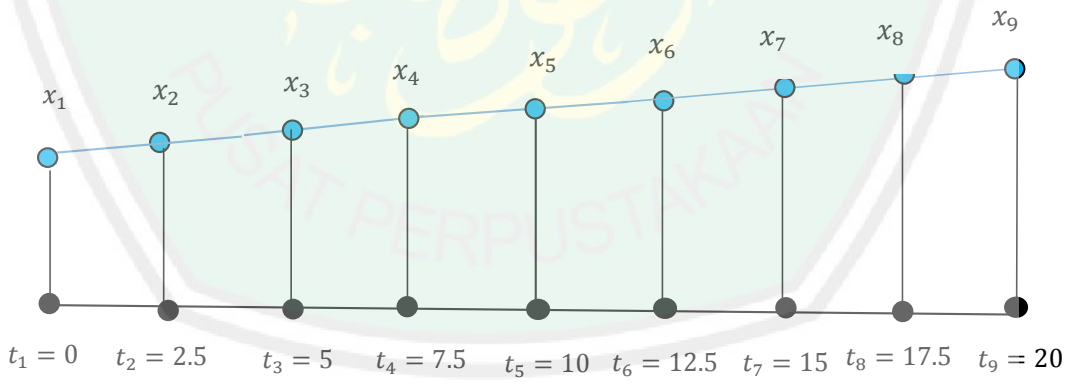
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk mencari nilai dari x_2, x_3, x_4 dan x_5 maka matiks diatas harus di inverskan sehingga hasilnya diperoleh sebagai berikut;

$$\begin{bmatrix} \frac{d\bar{x}(0)}{dt} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \frac{d\bar{x}(20)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25.14293824 \\ -0.26868995 \\ 0.07184497 \\ -0.01796124 \\ 0.26562683 \end{bmatrix}$$

Dari matriks diatas dapat diketahui bahwa $x_2 = -0.26868995, x_3 = 0.07184497$ dan $x_4 = -0.01796124$ dalam hal ini untuk $\frac{d\bar{x}(0)}{dt} = 25.14293824$ dan $\frac{d\bar{x}(20)}{dt} = 0.26562683$ tidak diperlukan.

Untuk yang kedua domain dibagi menjadi delapan elemen dengan sembilam node seperti yang diasumsikan dengan panjang $t = 20$ maka dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 3.4 Fungsi aproksimasi delapan elemen dengan sembilan node

Sebelum melakukan penggabungan, dalam hal ini akan dilakukan pengelompokan untuk hasil persamaan linier pada $i = 1,2,3,4,5$ dengan $m = 1.5$, $b = 0.9,$ dan $k = 26.8$ adalah konstanta real. Digunakan parameter yang merujuk

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

pada penelitian Faridah (2015). Sehingga persamaan (3.8) dapat ditulis sebagai berikut:

Misal $\alpha_1 = \left(\frac{m}{\Delta t} + \frac{b}{2} + \frac{k\Delta t}{6}\right) x_{i+1}$, dengan Δt = 2.5, maka

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \left(\frac{m}{\Delta t} + \frac{b}{2} + \frac{k\Delta t}{6}\right) x_{i+1} \\ &= \left(\frac{1.5}{2.5} + \frac{0.9}{2} + \frac{26.8(2.5)}{6}\right) x_{i+1} \\ &= (0.6 + 0.45 + 11.1666667) x_{i+1} \\ \alpha_1 &= 12.2166667 x_{i+1}\end{aligned}$$

Misal $\alpha_2 = \left(\frac{-m}{\Delta t} - \frac{b}{2} + \frac{2k\Delta t}{6}\right) x_i$, dengan Δt = 2.5, maka

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \left(\frac{-m}{\Delta t} - \frac{b}{2} + \frac{2k\Delta t}{6}\right) x_i \\ &= \left(-\frac{1.5}{2.5} - \frac{0.9}{2} + \frac{2(26.8)(2.5)}{6}\right) x_i \\ &= (-0.6 - 0.45 + 22.3333333) x_i \\ \alpha_2 &= 21.2833333 x_i\end{aligned}$$

Sehingga dapat ditulis

$$12.2166667 x_{i+1} + 21.2833333 x_i = \frac{1.5 d\bar{x}(t_i)}{dt} \qquad (3.17)$$

Selanjutnya untuk persamaan (3.9) dapat ditulis sebagai berikut:

Misal $\beta_1 = \left(\frac{-m}{\Delta t} + \frac{b}{2} + \frac{2k\Delta t}{6}\right) x_{i+1}$, dengan Δt = 2.5, maka

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \left(\frac{-m}{\Delta t} + \frac{b}{2} + \frac{2k\Delta t}{6}\right) x_{i+1} \\ &= \left(-\frac{1.5}{2.5} + \frac{0.9}{2} + \frac{2(26.8)(2.5)}{6}\right) x_{i+1} \\ &= (-0.6 + 0.45 + 22.3333333) x_{i+1} \\ \beta_1 &= 22.1833333 x_{i+1}\end{aligned}$$

Misal $\beta_2 = \left(\frac{m}{\Delta t} - \frac{b}{2} + \frac{k\Delta t}{6}\right) x_i$, dengan Δt = 2.5, maka

$$\beta_2 = \left(\frac{m}{\Delta t} - \frac{b}{2} + \frac{k\Delta t}{6}\right) x_i$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\beta_2 = \left(\frac{1.5}{2.5} - \frac{0.9}{2} + \frac{(26.8)(2.5)}{6}\right)x_i$$
$$= (0.6 - 0.45 + 11.1666667)x_i$$
$$= 11.3166667x_i$$

Sehingga dapat ditulis

$$22.183333x_{i+1} + 11.3166667x_i = \frac{-1.5d\bar{x}(t_{i+1})}{dt} \quad (3.18)$$

Pada persamaan (3.17) dan persamaan (3.18)

- Untuk $i = 1$ adalah

$$12.2166667x_2 + 21.2833333x_1 = \frac{1.5d\bar{x}(t_1)}{dt}$$

$$22.1833333x_2 + 11.3166667x_1 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_2)}{dt}$$

- Untuk $i = 2$ adalah

$$12.2166667x_3 + 21.2833333x_2 = \frac{1.5d\bar{x}(t_2)}{dt}$$

$$22.1833333x_3 + 11.3166667x_2 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_3)}{dt}$$

- Untuk $i = 3$ adalah

$$12.2166667x_4 + 21.2833333x_3 = \frac{1.5d\bar{x}(t_3)}{dt}$$

$$22.1833333x_4 + 11.3166667x_3 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_4)}{dt}$$

- Untuk $i = 4$ adalah

$$12.2166667x_5 + 21.2833333x_4 = \frac{1.5d\bar{x}(t_4)}{dt}$$

$$22.1833333x_5 + 11.3166667x_4 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_5)}{dt}$$

- Untuk $i = 5$;

$$12.2166667x_6 + 21.2833333x_5 = \frac{1.5d\bar{x}(t_5)}{dt}$$

$$22.1833333x_6 + 11.3166667x_5 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_6)}{dt}$$

- Untuk $i = 6$;

$$12.2166667x_7 + 21.2833333x_6 = \frac{1.5d\bar{x}(t_6)}{dt}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$22.1833333x_7 + 11.3166667x_6 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_7)}{dt}$$

- Untuk $i = 7$;

$$12.2166667x_8 + 21.2833333x_7 = \frac{1.5d\bar{x}(t_7)}{dt}$$

$$22.1833333x_8 + 11.3166667x_7 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_8)}{dt}$$

- Untuk $i = 8$;

$$12.2166667x_9 + 21.2833333x_8 = \frac{1.5d\bar{x}(t_8)}{dt}$$

$$22.1833333x_9 + 11.3166667x_8 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_9)}{dt}$$

Setelah dilakukan pengelompokan diatas, kemudian akan dilakukan penggabungan untuk mendapatkan persamaan node pertama sampai keenam. Berikut adalah persamaan nodenya

Persamaan node pertama adalah persamaan (3.17) untuk $i = 1$

$$12.2166667x_2 + 21.2833333x_1 = \frac{1.5d\bar{x}(t_1)}{dt} \quad (3.19)$$

Persamaan node kedua adalah penjumlahan dari persamaan (3.18) untuk $i = 1$ dan (3.17) untuk $i = 2$

$$22.1833333x_2 + 11.3166667x_1 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_2)}{dt}$$

$$12.2166667x_3 + 21.2833333x_2 = \frac{1.5d\bar{x}(t_2)}{dt}$$

Hasil penjumlahannya adalah

$$11.3166667x_1 + 43.4666666x_2 + 12.2166667x_3 = 0 \quad (3.20)$$

Persamaan node ketiga adalah penjumlahan dari persamaan (3.18) untuk $i = 2$ dan (3.17) untuk $i = 3$

$$22.1833333x_3 + 11.3166667x_2 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_3)}{dt}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$12.2166667x_4 + 21.2833333x_3 = \frac{1.5d\bar{x}(t_3)}{dt}$$

Hasil penjumlahannya adalah

$$11.3166667x_2 + 43.4666666x_3 + 12.2166667x_4 = 0 \quad (3.21)$$

Persamaan node keempat adalah penjumlahan dari persamaan (3.18) untuk $i = 3$ dan (3.17) untuk $i = 4$

$$22.1833333x_4 + 11.3166667x_3 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_4)}{dt}$$
$$12.2166667x_5 + 21.2833333x_4 = \frac{1.5d\bar{x}(t_4)}{dt}$$

Hasil penjumlahannya adalah

$$11.3166667x_3 + 43.4666666x_4 + 12.2166667x_5 = 0 \quad (3.22)$$

Persamaan node kelima adalah penjumlahan (3.18) untuk $i = 4$ dan persamaan (3.17) untuk $i = 5$

$$22.1833333x_5 + 11.3166667x_4 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_5)}{dt}$$
$$12.2166667x_6 + 21.2833333x_5 = \frac{1.5d\bar{x}(t_5)}{dt}$$

Hasil penjumlahannya adalah

$$11.3166667x_4 + 43.4666666x_5 + 12.2166667x_6 = 0 \quad (3.23)$$

Persamaan node keenam adalah penjumlahan (3.18) untuk $i = 5$ dan persamaan (3.17) untuk $i = 6$

$$22.1833333x_6 + 11.3166667x_5 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_6)}{dt}$$
$$12.2166667x_7 + 21.2833333x_6 = \frac{1.5d\bar{x}(t_6)}{dt}$$

Hasil penjumlahannya adalah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$11.3166667x_5 + 43.4666666x_6 + 12.2166667x_7 = 0 \quad (3.24)$$

Persamaan node ketujuh adalah penjumlahan (3.18) untuk $i = 6$ dan persamaan (3.17) untuk $i = 7$

$$22.1833333x_7 + 11.3166667x_6 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_7)}{dt}$$
$$12.2166667x_8 + 21.2833333x_7 = \frac{1.5d\bar{x}(t_7)}{dt}$$

Hasil penjumlahannya adalah

$$11.3166667x_6 + 43.4666666x_7 + 12.2166667x_8 = 0 \quad (3.25)$$

Persamaan node kedelapan adalah penjumlahan (3.18) untuk $i = 7$ dan persamaan (3.17) untuk $i = 8$

$$22.1833333x_8 + 11.3166667x_7 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_8)}{dt}$$
$$12.2166667x_9 + 21.2833333x_8 = \frac{1.5d\bar{x}(t_8)}{dt}$$

Hasil penjumlahannya adalah

$$11.3166667x_7 + 43.4666666x_8 + 12.2166667x_9 = 0 \quad (3.26)$$

Persamaan node keesembilan adalah persamaan (3.18) untuk $i = 8$

$$22.1833333x_9 + 11.3166667x_8 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_9)}{dt} \quad (3.27)$$

Sehingga diperoleh persamaan matriks untuk node pertama sampai kenam yakni persamaan (3.19), (3.20), (3.21), (3.22), (3.23),(3.24),(3.25), (3.26) dan (3.7)

$$12.2166667x_2 + 21.2833333x_1 = \frac{1.5d\bar{x}(t_1)}{dt}$$

$$11.3166667x_1 + 43.4666666x_2 + 12.2166667x_3 = 0$$

$$11.3166667x_2 + 43.4666666x_3 + 12.2166667x_4 = 0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$11.3166667x_3 + 43.4666666x_4 + 12.2166667 = 0$$

$$11.3166667 + 43.4666666x_5 + 12.2166667x_6 = 0$$

$$11.3166667x_5 + 43.4666666x_6 + 12.2166667 = 0$$

$$11.3166667x_6 + 43.4666666x_7 + 12.2166667x_8 = 0$$

$$11.3166667x_7 + 43.4666666x_8 + 12.2166667x_9 = 0$$

$$22.1833333x_9 + 11.3166667x_8 = \frac{-1.5d\bar{x}(t_9)}{dt}$$

Selanjutnya memasukkan kondisi batas $x(0) = 1$ dan $x(20) = 0$.

$$-\frac{1.5d\bar{x}(t_1)}{dt} + 12.2166667x_2 = -21.2833333(1)$$

$$43.4666666x_2 + 12.2166667x_3 = -11.3166667x_1$$

$$11.3166667x_2 + 43.4666666x_3 + 12.2166667x_4 = 0$$

$$11.3166667x_3 + 43.4666666x_4 + 12.2166667 = 0$$

$$11.3166667x_4 + 43.4666666x_5 + 12.2166667x_6 = 0$$

$$11.3166667x_5 + 43.4666666x_6 + 12.2166667 = 0$$

$$11.3166667x_6 + 43.4666666x_7 + 12.2166667x_8 = 0$$

$$11.3166667x_7 + 43.4666666x_8 = -12.216666(0)$$

$$\frac{1.5d\bar{x}(t_9)}{dt} + 11.3166667x_8 = -22.1833333(0)$$

Jika ditulis dalam bentuk matriks sehingga menjadi

$$\begin{bmatrix} -1.5000000 & 12.2166667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 43.4666666 & 12.2166667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11.3166667 & 43.4666666 & 12.2166667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11.3166667 & 43.4666666 & 12.2166667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11.3166667 & 43.4666666 & 12.2166667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11.3166667 & 43.4666666 & 12.2166667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.3166667 & 43.4666666 & 12.2166667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.3166667 & 43.4666666 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.3166667 & 1.5000000 \end{bmatrix}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\begin{bmatrix} \frac{d\bar{x}(0)}{dt} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ \frac{d\bar{x}(20)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21.2833333 \\ -11.3166667 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai dari $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ dan x_8 maka matik diatas harus di inverskan sehingga hasilnya diperoleh sebagai berikut;

$$\begin{bmatrix} \frac{d\bar{x}(0)}{dt} \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ \frac{d\bar{x}(20)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.88534338 \\ -0.282836414 \\ 0.0799964095 \\ -0.0226257991 \\ 0.00639907489 \\ -0.00180882641 \\ 0.00050811382 \\ -0.000132288837 \\ 0.00100005464702 \end{bmatrix}$$

Dari matriks diatas dapat diketahui bahwa $x_2 = -0.282836414, x_3 = 0.0799964095$, $x_4 = -0.0226257991, x_5 = 0.00639907991, x_6 = -0.00180882641, x_7 = 0.00050811382$ dan $x_8 = -0.000132288837$ dalam hal ini untuk $\frac{d\bar{x}(0)}{dt} = 11.88534338$ dan $\frac{d\bar{x}(20)}{dt} = 0.00100005464702$ tidak diperlukan dalam penelitian.

3.2 Analisis Galat dan Simulasi

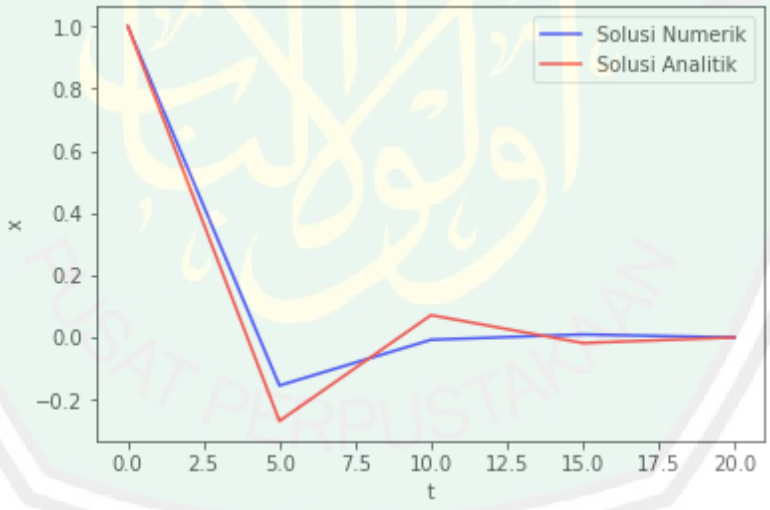
Pada penyelesaian analitik persamaan getaran pegas teredam yang telah dipaparkan dalam metode penelitian maka diperoleh solusi pada persamaan (3.8) dan (3.9), selanjutnya akan dilakukan analisis galat dan simulasi. Rumus galat multak yaitu selisih antara solusi analitik dan solusi numerik. Pada domain $t = [0, 20]$ dan $\Delta t = 5$ diperoleh galat sebagai berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Tabel 3.1 Galat yang diperoleh dengan $\Delta t = 5$

t	Solusi Analitik	Solusi Numerik	Galat
0	1	1	0
5	-0.15453726	-0.26868995	0.11415269
10	-0.00746889	0.07184497	-0.07931387
15	0.00973922	-0.01796124	0.02770047
20	0	0	0

Dari Tabel 3.1 dapat dilihat bahwa pada $t = 5$ galatnya 0.11415269 kemudian mengalami penurunan hingga galatnya sangat kecil mendekati nol pada $t = 15$ sebesar 0.02770047. Selanjutnya akan dilakukan simulasi dengan kondisi batas yang sudah diketahui pada $t = [0,20]$ dengan $\Delta t = 5$ berdasarkan solusi analitik dan numerik yang telah diperoleh maka plot solusinya adalah sebagai berikut



Gambar 3.5 Plot solusi analitik dan numerik dengan $\Delta t = 5$

Gambar 3.5 menunjukkan solusi numerik jauh dari solusi analitik pada $t = 5$, meskipun dititik-titik selanjutnya solusi numerik mendekati solusi analitiknya, dimana garis biru merupakan solusi numerik dan garis merah adalah solusi analitik.

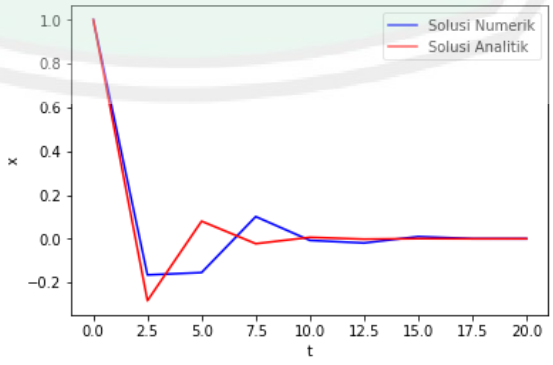
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk galat selanjutnya dilakukan pada persamaan (3.1) yang telah diketahui kondisi batasnya dengan $t = [0, 20]$ dengan $\Delta t = 2.5$ pada solusi numerik dan analitik yang telah diperoleh, sehingga perbandingan solusi numerik dan solusi analitik dilihat pada gambar 3.2 sebagai berikut:

Tabel 3.2 Galat yang diperoleh dengan $\Delta t = 2.5$

t	Solusi Analitik	Solusi Numerik	Galat
0	1	1	0
2.5	-0.165189514	-0.282836414	0.1176469
5	-0.154537257	0.07799964095	-0.23453367
7.5	0.101028448	-0.0226257991	0.12365425
10	-0.00748891221	0.00639907489	-0.01386797
12.5	-0.0194411290	-0.00180882641	-0.0176323
15	0.00973922338	0.000508113823	0.00923111
17.5	0.000293810136	-0.000132288837	0.0004261
20	0	0	0

Dari Tabel 3.2 dapat dilihat bahwa pada $t = 2.$ galatnya 0.1176469 kemudian mengalami penurunan hingga galatnya sangat kecil mendekati nol pada $t = 17.5$ sebesar 0.0004261. Selanjutnya akan dilakukan simulasi dengan kondisi batas yang sudah diketahui pada $t = [0,20]$ dengan $\Delta t = 2.5$ berdasarkan solusi analitik dan numerik yang telah diperoleh maka plot solusinya adalah sebagai berikut

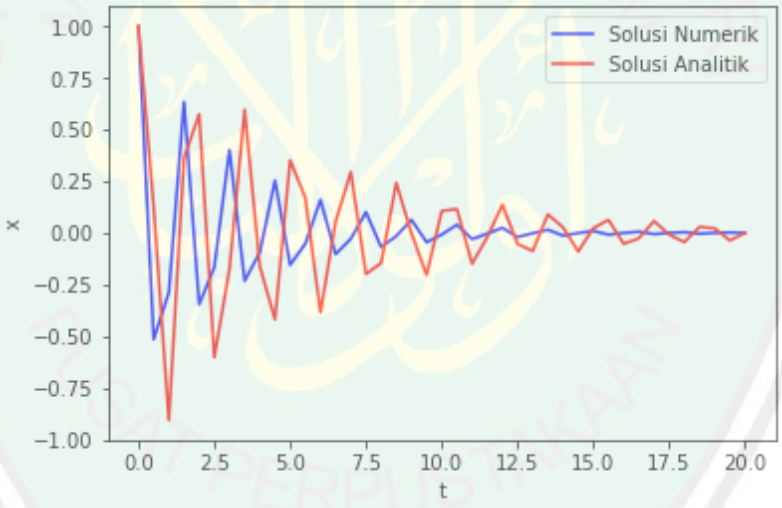


Gambar 3.6 Plot solusi analitik dan numerik dengan $\Delta t = 2.5$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Gambar 3.6 menunjukkan solusi numerik jauh dari solusi analitik pada $t = 2.5$, meskipun dititik-titik selanjutnya solusi numerik mendekati solusi analitiknya, dimana garis biru merupakan solusi numerik dan garis merah adalah solusi analitik.

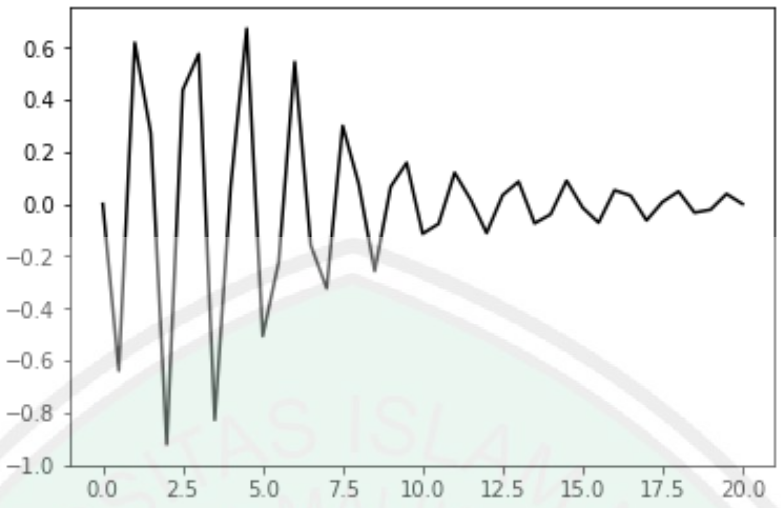
Selanjutnya akan dipilih Δt yang lebih kecil dari 5 dan 2.5 yaitu 0.5, yang mana akan dilakukan simulasi dengan kondisi batas yang sudah diketahui pada $t = [0,20]$ dengan $\Delta t = 0.5$. Berdasarkan solusi analitik dan numerik yang telah diperoleh maka plot solusinya adalah sebagai berikut.



Gambar 3.7 Plot solusi analitik dan numerik dengan $\Delta t = 0.5$

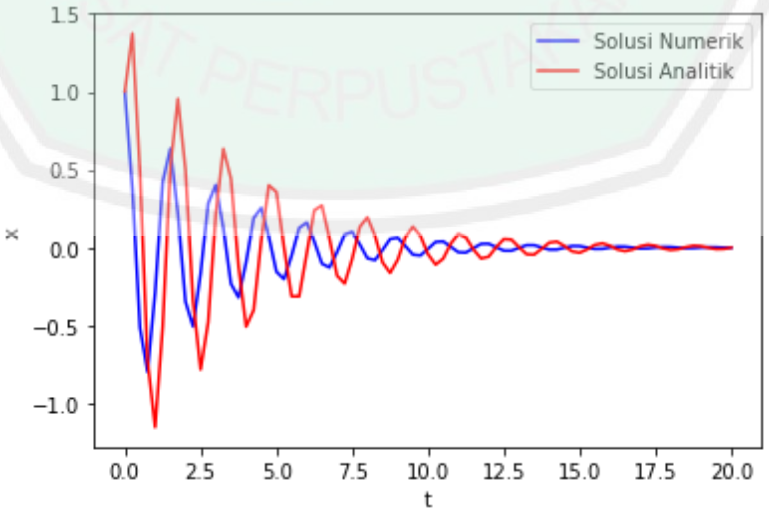
Gambar 3.7 menunjukkan bahwa solusi numerik mendekati nilai solusi analitik dan semakin mendekati nilai batas kanannya yaitu menuju ke 0, karena pada $\Delta t = 0.5$ terdapat 41 node maka untuk mencari galatnya bisa menggunkan bantuan program Pyton, sehingga dapat diperoleh galatnya sebagai berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.8 Plot galat pada $\Delta t = 0.5$

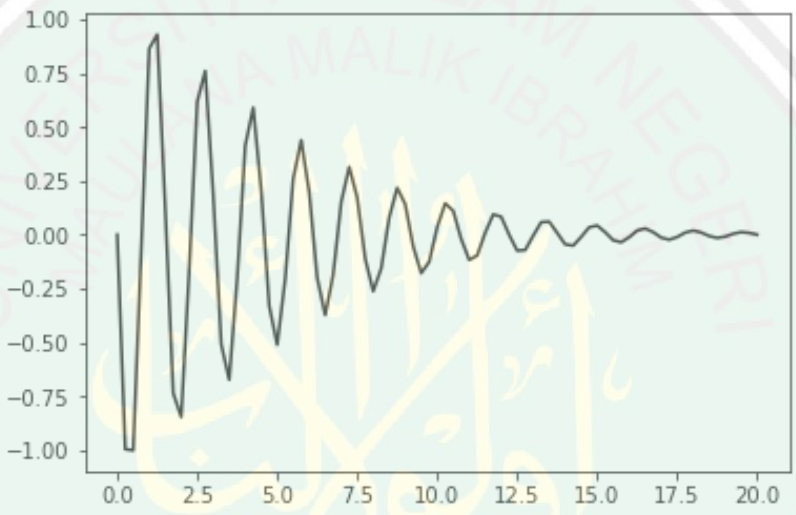
Gambar 3.8 menunjukkan bahwa galat pada $\Delta t = 0.5$ semakin kecil bila dibandingkan dengan $\Delta t = 5$ dan $\Delta t = 2.5$. Selanjutnya akan dipilih $\Delta t = 0.25$, yang mana akan dilakukan simulasi dengan kondisi batas yang sudah diketahui pada $t = [0,20]$ dengan $\Delta t = 0.25$. Berdasarkan solusi analitik dan numerik yang telah diperoleh maka plot solusinya adalah sebagai berikut.



Gambar 3.9 Plot solusi analitik dan numerik dengan $\Delta t = 0.25$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

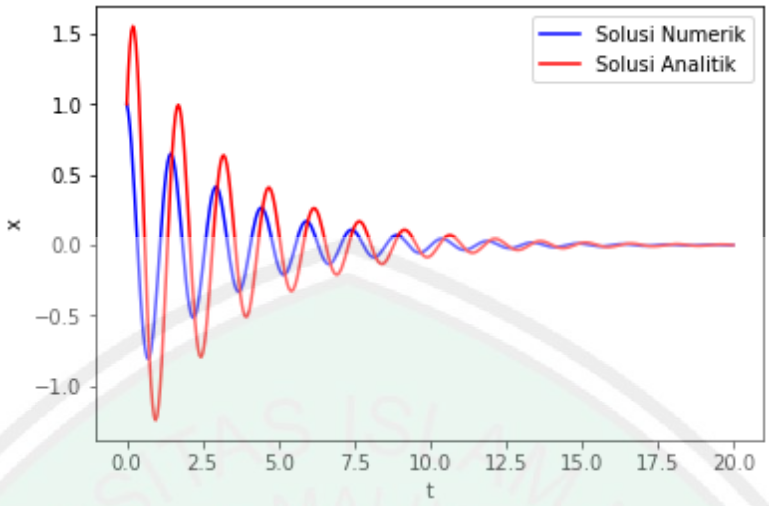
Gambar 3.9 menunjukkan bahwa solusi numerik dan analitik nilainya hampir sama terlihat dari plot diatas bahwa plot solusi numerik dan analitik saling berhimpitan, sehingga dapat dikatakan bahwa galatnya sangat kecil. Pada $\Delta t = 0.25$ terdapat 81 node maka untuk mengetahui galatnya bisa menggunkan bantuan program Pyton, sehingga dapat diperoleh galatnya sebagai berikut



Gambar 3.10 Plot galat pada $\Delta t = 0.25$

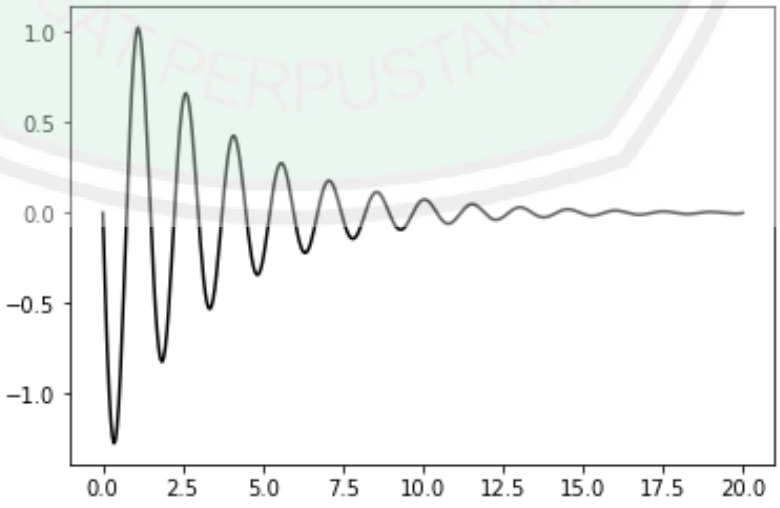
Gambar 3.10 menunjukkan bahwa galat pada $\Delta t = 0.25$ sangat kecil bila dibandingkan dengan Δt sebelum-sebelumnya. Selanjutnya akan dipilih $\Delta t = 0.05$, yang mana akan dilakukan simulasi dengan kondisi batas yang sudah diketahui pada $t = [0,20]$ dengan $\Delta t = 0.05$. Berdasarkan solusi analitik dan numerik yang telah diperoleh maka plot solusinya adalah sebagai berikut.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.11 Plot solusi analitik dan numerik dengan $\Delta t = 0.05$

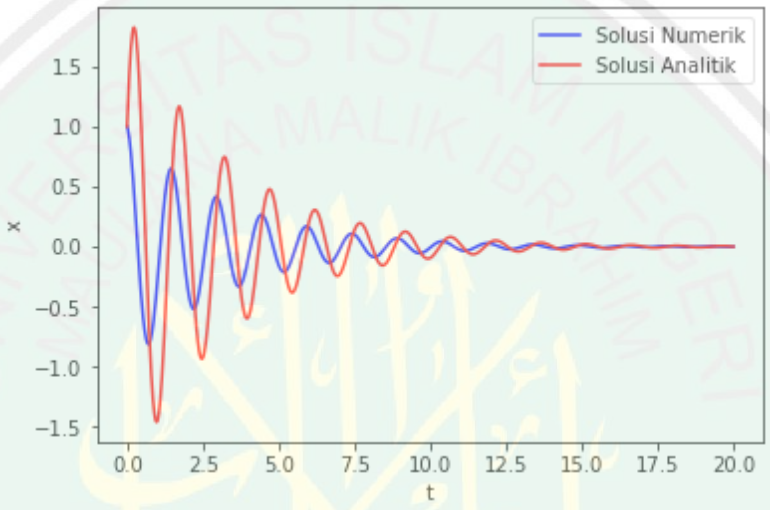
Gambar 3.11 menunjukkan bahwa solusi numerik dan analitik nilainya hampir sama terlihat dari plot diatas bahwa plot solusi numerik dan analitik saling berhimpitan, sehingga dapat dikatakan bahwa galatnya sangat kecil. Pada $\Delta t = 0.05$ terdapat 401 node maka untuk mengetahui galatnya bisa menggunkan bantuan program Pyton, sehingga dapat diperoleh galatnya sebagai berikut



Gambar 3.12 Plot galat pada $\Delta t = 0.05$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

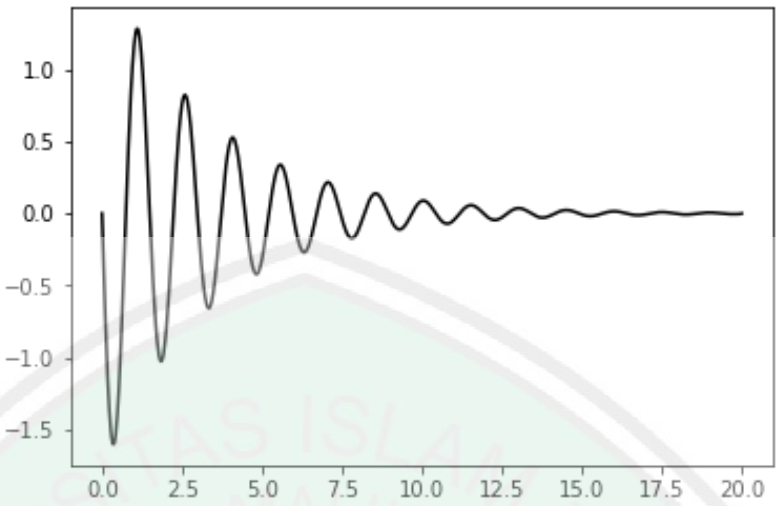
Selanjutnya akan dipilih $\Delta t = 0.025$, yang mana akan dilakukan simulasi dengan kondisi batas yang sudah diketahui pada $t = [0,20]$ dengan $\Delta t = 0.025$. Berdasarkan solusi analitik dan numerik yang telah diperoleh maka plot solusinya adalah sebagai berikut.



Gambar 3.13 Plot solusi analitik dan numerik dengan $\Delta t = 0.025$

Gambar 3.13 menunjukkan bahwa solusi numerik dan analitik nilainya hampir sama terlihat dari plot diatas bahwa plot solusi numerik dan analitik saling berhimpitan, sehingga dapat dikatakan bahwa galatnya sangat kecil. Pada $\Delta t = 0.025$ terdapat 801 node maka untuk mengetahui galatnya bisa menggunkan bantuan program Pyton, sehingga dapat diperoleh galatnya sebagai berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.14 Plot galat pada $\Delta t = 0.025$

Untuk mempermudah perbandingan dari galat $\Delta t = 5, 2.5, 0.5, 0.25, 0.05, 0.025$ akan ditunjukkan pada tabel dengan dibawah ini.

Tabel 3.3 Perbandingan galat dengan t yang sama pada Δt yang berbeda

t	$\Delta t = 5$	$\Delta t = 2.5$	$\Delta t = 0.5$	$\Delta t = 0.25$	$\Delta t = 0.05$	$\Delta t = 0.025$
0	0	0	0	0	0	0
5	0.1141	0.1176	0.5066	0.5112	0.2643	0.3184
10	0.0793	0.1236	0.1140	0.0351	0.0723	0.0870
15	0.0277	0.0176	0.0137	0.0424	0.0056	0.0077
20	0	0	0	0	0	0

Dengan melakukan enam plot galat diatas yaitu pada $\Delta t = 5$, $\Delta t = 2.5$, $\Delta t = 0.5$, $\Delta t = 0.25, \Delta t = 0.05$dan $\Delta t = 0.025$ dapat disimpulkan bahwa semakin besar Δt yang dipilih maka akan semakin besar pula galat yang diperoleh. Sebaliknya, jika Δt yang dipilih semakin kecil maka galat yang diperoleh akan semakin kecil pula.

.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang dikerjakan diatas, maka kesimpulan penelitian adalah

1. Penyelesaian numerik persamaan getaran pegas teredam menggunakan metode galerkin yaitu dengan cara mendiskritisasi domain, mencari solusi aproksimasi, mencari fungsi pembobot menggunakan fungsi interpolasi, mensustitusikan solusi aproksimasi ke persamaan getaran pegas teredam, meminimumkan residu, menggabungkan hasil integral residu dan terakhir memasukkan kondisi batasnya.
2. Galat yang diperoleh dalam penelitian ini dengan domain $t = [0,20]$ saat $t = 15$ pada $\Delta t = 5$ sebesar 0.0277, $\Delta t = 2.5$ sebesar 0.0176, $\Delta t = 0.5$ sebesar 0.0137, $\Delta t = 0.25$ sebesar 0.0424, $\Delta t = 0.05$ sebesar 0.0056 dan $\Delta t = 0.025$ sebesar 0.0077. Hal ini menunjukkan bahwa besarnya galat mutlak maksimum tersebut dipengaruhi oleh pemilihan nilai Δt yang digunakan. Semakin kecil Δt yang dipilih, semakin kecil pula galat yang diperoleh dan sebaliknya semakin besar Δt yang dilipih semakin besar galat yang diperoleh.

4.2 Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya adalah meneliti tentang persamaan getaran pegas yang sama dengan menggunakan metode yang berbeda, pemilihan domain yang berbeda dan Δt yang berubah-ubah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR RUJUKAN

Al-Imam Abdul Isma'il Ibnu Ad-Dimasyqi. 2000. *Tafsir Ibnu Kasir Juz 4*.Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Brandenburg, Jenna dan Clemmons, Lashau. 2012. *Analysis of Numerical Differential Equation and Finite Element Method*. Delhi: College Publishing House

Dafik. 1999. *Persamaan Differensial Biasa (PDB): Masalah Nilai Awal dan Batas*. Jember: FIKP Universitas Jember.

Ermawati dkk. 2017. Perbandingan Solusi Numerik Integral Lipat Dua Pada Fungsi Fuzzy dengan Metode Rombreg dan Simulai Monte Carlo. *Jurnal MSA Vol.5 No. 2.*

Faridah, R. 2015. *Analisis Model Getaran Pegas Teredam dengan Metode Runge-Kutta Gill dan Milne. Jember*: FIKP Universitas Jember.

Gioancoli, D, Resnick, R, dan Walker, J. 2005. *Fisika Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Halliday, D, Resnick, R, dan Walker, J. 2005. *Fisika Dasar, Edisi Ketujuh Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Hoffman, Joe D. 2001. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. New York: Marcel Dekker, Inc.

Kosasih, P.B. 2012. *Teori dan Aplikasi Metode Elemen Hingga*. Yogyakarta: C.V Andi Offet.

Munir, R. 2010. *Metode Numerik. Bandung*: Informatika Bandung.

Pepper, Darrel.W dan Heinrich, Juan C. 2006. *The Finite Element Method Basic Concepts and Application Second Edition.* New York: CRC Press.

Pucell, Edwin J dan Dale Varber. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Surtrisno. 1997. *Seri Fisika Dasar Mekanika*. Bandung: ITB Bandung.

Syaikh Muhammad Nashiruddin Al-Albani.2007.*Derajat Hadits-Hadits dalam Tafsir Ibnu Katsir*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Wijayanto,P Dan Susatio, H. 2009. *Analisa Kestabilan Crane Jenis Gantry Berbasis Amplitudo Respon Getaran*. Jakarta: Erlangga.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

LAMPIRAN-LAMPIRAN

Script Program Metode Elemen Hingga Dengan Bantuan Program Python

```
from sympy import exp,cos,sin, lambdify, symbols
import sympy as sym
from sympy.plotting import plot

t = sym.symbols('t')
x = (exp(-0.3*t))*(cos(4.2162*t)-0.1*sin(4.2162*t))
plot(x,(t,0,20))

from numpy import*
import numpy.linalg as la
from matplotlib.pyplot import *

F = sym.lambdify(t,x,'numpy')

dt = 2.5
ta = 0
tb = 20
N  = int( (tb-ta)/dt )

t  = linspace(ta,tb,N+1)
xx  = zeros(N+1)

for i in range(N):
    xx[i] = F(t[i])

# plot(t,Y)

a = 1.5
b = 0.9
c = 26.8

T = tb

xl = 1
xr = 0

N = int( (T-0)/dt )

t = np.linspace(0,T,N+1)
x    = np.zeros(N+1)

x[0] = xl
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
x[N] = xr

A    = np.zeros((N+1,N+1))
B    = np.zeros((N+1,1))

r1 = -a
r2 = -a/dt - b/2 + 2*c*dt/6
r3 = a/dt + b/2 + c*dt/6

s1 = a
s2 = a/dt - b/2 + c*dt/6
s3 = -a/dt + b/2 + 2*c*dt/6

i = 0

A[i,i]   = r1
A[i,i+1] = r3
B[i,0]   = -r2*x[i]

i = 1

A[i,i]   = s3+r2
A[i,i+1] = r3
B[i,0]   = -s2*x[i-1]

for i in range(2,N-1):
    A[i,i-1] = s2
    A[i,i]   = s3+r2
    A[i,i+1] = r3

i = N-1

A[i,i-1] = s2
A[i,i]   = s3+r2
B[i,0]   = -r3*x[i+1]

i = N

A[i,i-1] = s2
A[i,i]   = s1
B[i,0]   = -s3*x[i]

#A = A[1:-1,1:-1]
#B = B[1:-1]

A.shape
B.shape

#X = dot(inv(A),B)
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
X = la.solve(A,B)

x[1:-1] = X[1:-1,0]

plot(t,xx,'b',t,x,'r')
xlabel("t")
ylabel("x")
legend(["Solusi Numerik","Solusi Analitik"])

plot(t,xx,'b')
show()

P=xx-x

plot(t,P,'k')
show()
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

RIWAYAT HIDUP

Siti Ainurohmah yang kerap dipanggil rohmah, dilahirkan di Tuban, 18 Januari 1996 oleh pasangan suami istri yaitu Bapak Kasran dan Ibu Sri Utami. Anak pertama dari dua bersaudara, kakak dari Muhammad Iqbal Hafidz Wiratama. Bertempat tinggal di Ds. Pandanwangi RT 05 /RW 01 Kec. Soko Kab.Tuban Jawa Timur.

Pendidikan dasar ditempuh di SDN Pandanwangi 01 dan lulus pada tahun 2008, kemudian melanjutkan pendidikan menengah pertama di Mts. Tarbiyatul Islam Soko Tuban dan lulus pada tahun 2011, kemudian melanjutkan pendidikan menengah atas di MAN 2 Rengel Tuban dan lulus pada tahun 2014. Selanjutnya menempuh pendidikan tinggi pada tahun 2014 di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Penulis dapat dihubungi melalui email: ainurrohmah902@gmail.com

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Siti Ainurohmah
NIM : 14610030
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Numerik Persamaan Getaran Pegas Teredam Menggunakan Metode Galerkin
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	27 Maret 2018	Konsultasi BAB I, II, & III	1.
2.	08 April 2018	Konsultasi Keagamaan BAB I	2.
3.	10 April 2018	Konsultasi BAB III & IV	3.
4.	15 Juli 2018	Konsultasi & Revisi BAB IV	4.
5.	25 Juli2018	Konsultasi Keagamaan BAB II	5.
6.	15 Agustus 2018	ACC Keagamaan	6.
7.	29 Agustus 2018	ACC BAB I, II, III, & IV	7.
8.	05 Oktober 2018	Revisi Keagamaan BAB I	8.
9.	26 Oktober 2018	Konsultasi & Revisi BAB IV	9.
10.	08 November 2018	Konsultasi Keagamaan BAB IV	10.
11.	21 November 2018	Revisi Keagamaan BAB IV	11.
12.	17 Januari 2019	Konsultasi BAB IV & V	12.
13.	24 Januari 2019	Konsultasi dan Revisi BAB V	13.
14.	04 Februari 2019	ACC Keagamaan	14.
15.	04 Februari 2019	ACC Keseluruhan	15.

Malang, 04 Februari 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG