MINIMAL LABEL TERBESAR DARI PELABELAN TITIK $L(3,2,1)$ PADA GRAF *SUPER CYCLE*

SKRIPSI

OLEH
LUSIANA IKA PUTRI
NIM. 14610029

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MINIMAL LABEL TERBESAR DARI PELABELAN TITIK $L(3,2,1)$ PADA GRAF *SUPER CYCLE*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Lusiana Ika Putri
NIM. 14610029

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MINIMAL LABEL TERBESAR DARI PELABELAN TITIK $L(3,2,1)$ PADA GRAF *SUPER CYCLE*

SKRIPSI

Oleh
Lusiana Ika Putri
NIM. 14610029

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 09 November 2018

Pembimbing I,	Pembimbing II,
H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19710420 200003 1 003	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MINIMAL LABEL TERBESAR DARI PELABELAN TITIK $L(3,2,1)$ PADA GRAF *SUPER CYCLE*

SKRIPSI

Oleh
Lusiana Ika Putri
NIM. 14610029

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 09 Januari 2019

Penguji Utama	: Dr. Abdussakir, M.Pd	.....
Ketua Penguji	: Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	.....
Sekretaris Penguji	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	.....
Anggota Penguji	: Ach. Nashichuddin, M.A	.....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Lusiana Ika Putri

NIM : 14610029

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Minimal Label Terbesar dari Pelabelan Titik $L(3, 2, 1)$ pada Graf *Super Cycle*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan sendiri.

Malang, 09 November 2018

Yang membuat pernyataan,

Lusiana Ika Putri

NIM. 14610029

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTO

إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"(QS. Ash-Sharh:6).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Bapak Surono dan ibu Sringatin yang telah memberikan restu, doa, kasih sayang, dukungan, serta biaya pendidikan bagi penulis. Adik tersayang Moch. Dyo Saputra yang selalu menjadi penyemangat. Teman, sahabat, sekaligus saudara terbaik penulis yang telah memberikan motivasi, dukungan, dan bantuan untuk menyelesaikan skripsi ini.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. yang telah memberikan rahmat, taufik, serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam penulisan skripsi ini, penulis tidak terlepas dari bantuan, saran, bimbingan, arahan, dan doa dari berbagai pihak. Untuk itu penulis ucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, saran, dan nasihat kepada penulis.
5. Achmad Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan saran dan batuan kepada penulis dalam penyelesaian skripsi ini.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama dosen,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

terimakasih atas segala ilmu dan bimbingannya mulai dari semester awal sampai semester akhir.

7. Bapak dan Ibu tercinta yang telah mencurahkan kasih sayang, doa, bimbingan, dan arahan hingga selesainya skripsi ini.
8. Saudara-saudara tersayang yang telah memberikan dukungan kepada penulis.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2014 yang telah berjuang bersama untuk mewujudkan segala mimpi dan terimakasih atas segala kenangan yang telah terukir selama ini.
10. Keluarga besar Pondok Pesantren Tahfidz Al-Quran Oemah Al-Quran Abu Hanifah terutama kamar 15, Asrama Al Yasini, dan teman-teman Mabna Ummu Salamah khususnya kamar 31 yang telah memberikan dukungan, motivasi, dan kenangan yang tak terlupakan.
11. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaiaan skripsi ini yang penulis tidak dapat sebutkan satu per satu.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan wawasan yang luas bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Maret 2019

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR viii

DAFTAR ISI x

DAFTAR GAMBAR xii

DAFTAR SIMBOL xv

ABSTRAK xvi

ABSTRACT xvii

ملخص xviii

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Tujuan Penelitian 3
1.4 Manfaat Penelitian 3
1.5 Batasan Masalah 4
1.6 Metode Penelitian 4
1.7 Sistematika Penulisan 5

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf 7
2.2 Graf Terhubung 8
2.3 Derajat Titik 11
2.4 Jarak 13
2.5 Pelabelan Graf 13
2.6 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ 15
2.7 Beberapa Hasil Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Beberapa Graf 16
2.7.1 Graf *Path* P_n 16

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.7.2 Graf *Cycle* C_n 17
2.8 Graf Hanoi 20
2.9 Graf *Super Cycle* $Sc(n,r)$ 21
2.10 Hubungan Manusia dengan Manusia dalam Al-Quran 22

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf *Super Cycle* $Sc(n,r)$ untuk $r = 1$ 25
3.1.1 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(n,1)$ dengan n Genap 26
3.1.2 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(n,1)$ dengan n Ganjil 31
3.2 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf *Super Cycle* $Sc(n,r)$ untuk $r = 2$ 49
3.3 Memahami Silaturrahim dengan Pendalaman Teori Graf 54

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan 57
4.2 Saran 57

DAFTAR RUJUKAN 58

RIWAYAT HIDUP

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf $G(5,6)$... ……...……7

Gambar 2.2 Graf $G(5,8)$..... 9

Gambar 2.3 Graf $G(6,9)$..... 10

Gambar 2.4 Graf $G(4,5)$..... 12

Gambar 2.5 Pelabelan Titik pada Graf..... 14

Gambar 2.6 Pelabelan Sisi pada Graf 14

Gambar 2.7 Pelabelan Total pada Graf 15

Gambar 2.8 Contoh Pelabelan Titik $L(3,2,1)$..... 15

Gambar 2.9 (a) Graf Hn_1, (b) Graf Hn_2, (c) Graf Hn_3 21

Gambar 2.10 (a) Graf $Sc(2,2)$, (b) Graf $Sc(6,2)$ 22

Gambar 3.1 Graf $Sc(2,1)$ 26

Gambar 3.2 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(2,1)$ 26

Gambar 3.3 Graf $Sc(4,1)$ 27

Gambar 3.4 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(4,1)$ 27

Gambar 3.5 Graf $Sc(6,1)$ 28

Gambar 3.6 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(6,1)$ 29

Gambar 3.7 Graf $Sc(n,1)$ untuk n Genap 30

Gambar 3.8 Subgraf dari Graf $Sc(n,1)$ dengan Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ 30

Gambar 3.9 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(n,1)$ untuk n Genap 31

Gambar 3.10 Graf $Sc(3,1)$ 32

Gambar 3.11 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(3,1)$ 33

Gambar 3.12 Graf $Sc(9,1)$ 33

Gambar 3.13 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(9,1)$ 34

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Gambar 3.14 Graf $Sc(15,1)$ 35

Gambar 3.15 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(15,1)$ 35

Gambar 3.16 Graf $Sc(n,1)$ saat n Ganjil untuk $n \equiv 0(mod\ 3)$ 36

Gambar 3.17 Subgraf dari Graf $Sc(n,1)$ saat n Ganjil untuk $n \equiv 0(\ mod\ 3)$ dengan Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ 37

Gambar 3.18 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(n,1)$ saat n Ganjil untuk $n \equiv 0(mod\ 3)$ 38

Gambar 3.19 Graf $Sc(1,1)$ 38

Gambar 3.20 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(1,1)$ 39

Gambar 3.21 Graf $Sc(7,1)$ 39

Gambar 3.22 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(7,1)$ 40

Gambar 3.23 Graf $Sc(13,1)$ 41

Gambar 3.24 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(13,1)$ 41

Gambar 3.25 Graf $Sc(n,1)$ saat n Ganjil untuk $n \equiv 1(mod\ 3)$ 43

Gambar 3.26 Subgraf dari Graf $Sc(n,1)$ saat n Ganjil untuk $n \equiv 1(mod\ 3)$ dengan Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ 43

Gambar 3.27 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(n,1)$ saat n Ganjil untuk $n \equiv 1(mod\ 3)$ 44

Gambar 3.28 Graf $Sc(5,1)$ 44

Gambar 3.29 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(5,1)$ 45

Gambar 3.30 Graf $Sc(11,1)$ 45

Gambar 3.31 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(11,1)$ 46

Gambar 3.32 Graf $Sc(n,1)$ saat n Ganjil untuk $n \equiv 2(mod\ 3)$ 47

Gambar 3.33 Subgraf dari Graf $Sc(n,1)$ saat n Ganjil untuk $n \equiv 2(mod3\ )$ dengan Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ 48

Gambar 3.34 Pelabelan Titik $L(3,2\ 1)$ pada Graf $Sc(n,1)$ saat n Ganjil untuk $n \equiv 2(mod\ 3)$ 49

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Gambar 3.35 Graf $Sc(1,2)$ 49
Gambar 3.36 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(1,2)$ 50
Gambar 3.37 Graf $Sc(2,2)$ 50
Gambar 3.38 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(2,2)$ 51
Gambar 3.39 Graf $Sc(3,2)$ 51
Gambar 3.40 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(3,2)$ 52
Gambar 3.41 Subgraf dari Graf $Sc(n,2)$ 53
Gambar 3.42 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Subgraf 54
Gambar 3.43 (a) Representasi Manusia yang Menjalin Silaturrahim 55
(b) Representasi Manusia yang Tidak Menjalin Silaturrahim 55

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna yaitu sebagai berikut:

$E(G)$: Himpunan sisi dari graf G

$V(G)$: Himpunan titik dari graf G

$p(G)$: (*Order*) banyaknya titik di $V(G)$

$q(G)$: (Ukuran) banyaknya sisi di $E(G)$

$N_G(v)$: Lingkungan dari v

$\deg_G(v)$: Derajat dari titik v

$\Delta(G)$: Derajat maksimum titik di G

$\delta(G)$: Derajat minimum

$d(u,v)$: Jarak antara titik u dan v di graf G

P_n : Graf *path*

C_n : Graf *cycle* dengan n titik

Hn_r : Graf hanoi dengan r cakram

$Sc(n,r)$: Graf *super cycle* dengan n *cycle* dan r hanoi

$\lambda_{3,2,1}$: Nilai minimal label terbesar pada pelabelan titik $L(3,2,1)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Putri, Lusiana Ika. 2018. **Minimal Label Terbesar dari Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf *Super Cycle*.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Pelabelan $L(3,2,1)$, Graf, Graf *super cycle* $Sc(n,r)$.

Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$, untuk $n \in \mathbb{N}$ dan $r = 1$ dan $r = 2$. Nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik disimbolkan dengan $\lambda_{3,2,1}$. Langkah yang digunakan adalah melabeli setiap titik pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ dengan aturan pelabelan titik $L(3,2,1)$, kemudian dari beberapa pola yang ditemukan, dibuat suatu konjektur yang dirumuskan menjadi suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti.

Hasil penelitian ini yaitu, untuk $r = 1$, nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ adalah:

$$\lambda_{3,2,1}(Sc(n,r)) = \begin{cases} 10, \text{jika } n \text{ genap} \\ 7, \text{jika } n = 1 \\ 11, \text{jika } n \equiv 2(mod\ 3), n \text{ ganjil} \\ 13, \text{jika } n \equiv 1(mod\ 3), n \text{ ganjil (n} \neq 1) \\ 11, \text{jika } n \equiv 0(mod\ 3), n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Untuk $r = 2$, nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ adalah:

$$\lambda_{3,2,1}(Sc(n,r)) = \begin{cases} 11, \text{jika } n = 1 \\ 12, \text{jika } n > 1 \end{cases}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Putri, Lusiana Ika. 2018. **The Biggest Minimum Label of Vertex Labeling $L(3,2,1)$ on Super Cycle Graph**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd. (II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Keywords: $L(3,2,1)$ Labeling, Graph, super cycle $Sc(n,r)$ Graph.

The purpose of this research is to determine the largest minimum label value from vertex labeling $L(3,2,1)$ on super cycle graph $Sc(n,r)$, for $n \in \mathbb{N}$ and $r = 1$ and $r = 2$. The largest minimum label value from vertex labeling is symbolized by $\lambda_{3,2,1}$. The steps are labeling each vertex on super cycle $Sc(n,r)$ graph with ruling $L(3,2,1)$ labeling then from some of the found patterns, a conjecture is formulated into a theorem which is supported by sufficient proof.

The results this research are, for $r = 1$, the largest minimum label value of vertex labeling $L(3,2,1)$ on super cycle $Sc(n,r)$ graph is:

$$\lambda_{3,2,1}\big(Sc(n,r)\big) = \begin{cases} 10, \text{if } n \text{ is even} \\ 7, \text{if } n = 1 \\ 11, \text{if } n \equiv 2(mod\ 3), n \text{ is odd} \\ 13, \text{if } n \equiv 1(mod\ 3), n \text{ is odd (n} \neq 1) \\ 11, \text{if } n \equiv 0(mod\ 3), n \text{ is odd} \end{cases}$$

For $r = 2$, the largest minimum label value of vertex labeling $L(3,2,1)$ on super cycle $Sc(n,r)$ graph is:

$$\lambda_{3,2,1}\big(Sc(n,r)\big) = \begin{cases} 11, \text{if } n = 1 \\ 12, \text{if } n > 1 \end{cases}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ملخص

فوطري، لوسيانا إيكا. ٢٠١٨. **اكبر علامة الحد الأدنى من التلوين رؤوس $L(3,2,1)$ في المخططات *Super Cycle* $Sc(n,r)$**. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات كلية العلوم و التكنولوجية الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) وحيو هنكي إيراوان الماجستير (٢) أحمد نصيح الدين الماجستير.

الكلمات الرئيسية : التلوي $L(3,2,1)$، مخططات، *super cycle* $Sc(n,r)$

يهدف هذا البحث على تعيين أقلّ بطاقة $(\lambda_{3,2,1})$ على المخططات *super cycle* $Sc(n,r)$ لـ $n \in \mathbb{N}, and\ r = 1\ and\ r = 2$. الخطوة المستخدمة هي لتسمية كل رؤوس على مخططات *super cycle* $Sc(n,r)$ لـ $n \in \mathbb{N}, and\ r = 1\ and\ 2$ بقواعد التلوين $L(3,2,1)$. ثم من تم العثور على بعض الأنماط و قدم التخمين و ضعت فينظرية الذي تدعمه أدلة كافية.

و الحاصل من هذا البحث هو لـ $r = 1$ أقلّ بطاقة من التلوين رؤوس$L(3,2,1)$ على المخططات *super cycle* $Sc(n,r)$ هي كما يلي

$$\lambda_{3,2,1}(Sc(n,r)) = \begin{cases} 10, \text{if } n \text{ is even} \\ 7, \text{if } n = 1 \\ 11, \text{if } n \equiv 2(mod\ 3), n \text{ is odd} \\ 13, \text{if } n \equiv 1(mod\ 3), n \text{ is odd (n} \neq 1) \\ 11, \text{if } n \equiv 0(mod\ 3), n \text{ is odd} \end{cases}$$

لـ $r = 2$ أقلّ بطاقة من التلوين رؤوس$L(3,2,1)$ على المخططات *super cycle* $Sc(n,r)$ هي كما يل

$$\lambda_{3,2,1}(Sc(n,r)) = \begin{cases} 11, \text{if } n = 1 \\ 12, \text{if } n > 1 \end{cases}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang mana di dalamnya tidak hanya terdapat satu keilmuan. Akan tetapi terdapat ilmu-ilmu lain yang menjadi sarana keilmuan bagi disiplin ilmu lain. Seorang pelajar berkewajiban untuk mempelajari berbagai ilmu sedalam-dalamnya. Dalam Islam setiap muslim diwajibkan untuk menuntut ilmu, sebab Allah akan meninggikan derajat orang-orang yang berilmu.

Allah Swt. berfirman di dalam al-Quran surat Mujadalah/58 ayat 11, yaitu:

يَرْفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمْ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلْعِلْمَ دَرَجَٰتٍ ﴿١١﴾

Artinya: "Niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat" (QS. Mujadalah/58:11).

Salah satu cabang dari ilmu matematika adalah teori graf. Munculnya konsep dasar teori graf diawali dari penyelesaian teka-teki jembatan Konigsberg oleh Leonhard Euler, seorang matematikawan Swiss pada tahun 1736. Pada abad 17 terdapat sebuah kota di Prusia, yaitu Kota Konigsberg yang dilalui oleh Sungai Pregel. Keberadaan sungai tersebut menyebabkan Kota Konigsberg terpecah menjadi beberapa bagian. Masing-masing bagian kota dihubungkan dengan tujuh jembatan. Kemudian masalah ini dimodelkan ke dalam graf. Daratan dinyatakan sebagai titik dan jembatan dinyatakan sebagai sisi (Wahyuningrum dan Usada, 2016:111). Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $\mathrm{V(G)}$ adalah himpunan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi (Abdussakir, dkk, 2009:4).

Menurut Gallian (2018) pelabelan graf adalah suatu pemberian nilai pada titik atau sisi dari graf atau keduanya sehingga memenuhi kondisi tertentu. Jika domain dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik. Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi, dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total.

Menurut Fatimah, dkk (2016:74) pelabelan pada graf memiliki banyak jenis. Jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan, di antaranya adalah pelabelan *gracefull*, pelabelan harmoni, pelabelan *super mean*, pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib, pelabelan *prime cordial*, pelabelan *triangular*, pelabelan $L(2,1)$, dan pelabelan $L(3,2,1)$. Pelabelan $L(3,2,1)$ adalah pelabelan yang dalam suatu graf jika terdapat dua titik dengan jarak satu maka harus memiliki label dengan selisih minimal 3. Apabila terdapat dua titik dengan jarak dua maka harus memiliki label dengan selisih minimal 2. Jika terdapat dua titik dengan jarak tiga, pelabelan harus memiliki label dengan selisih minimal 1 (Lingscheit, dkk, 2009:2).

Kajian tentang pelabelan $L(3,2,1)$ telah banyak dikembangkan, di antaranya adalah penelitian yang dilakukan oleh Setyaningsih (2010) membahas tentang penentuan bilangan pelabelan $L(3,2,1)$ untuk graf lengkap, graf bipartit lengkap, graf bintang, graf *path*, graf *cycle*, graf ulat, dan graf *n-ary tree*. Anggraeni (2013) membahas tentang pelabelan $L(3,2,1)$ dan menentukan graf *middle* pada graf *path* P_n, graf *cycle* C_n, dan graf bintang S_n. Karimah (2016)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

melakukan penelitian tentang nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$. Berdasarkan uraian di atas penulis tertarik untuk menentukan nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ untuk $n \in \mathbb{N}$ dan $r = 1$ dan $r = 2$. Perbedaan penelitian ini dengan penelitian sebelumnya yaitu terletak pada jenis pelabelan yang digunakan. Jenis pelabelan yang digunakan pada penelitian ini adalah pelabelan titik $L(3,2,1)$. Pada penelitian sebelumnya menggunakan pelabelan titik $L(2,1)$.

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis mengambil judul penelitian "Minimal Label Terbesar dari Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf *Super Cycle* ".

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah "berapa nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ untuk $n \in \mathbb{N}$ dan $r = 1$ dan $r = 2$?"

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ untuk $n \in \mathbb{N}$ dan $r = 1$ dan $r = 2$.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dalam penelitian ini yaitu dapat mengetahui nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ untuk $n \in \mathbb{N}$ dan $r = 1$ dan $r = 2$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya membahas tentang nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$. Graf *super cycle* adalah graf yang diperoleh dari C_n dengan mengganti semua titiknya menjadi Hn_r, kemudian salah satu titik ujung Hn_r yang berderajat 2 dihubungkan dengan salah satu titik Hn_r lain yang juga berderajat 2. Penulis akan membatasi penelitian ini dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $r = 1$ dan $r = 2$.

1.6 Metode Penelitian

a. Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian studi pustaka. Studi pustaka merupakan suatu pengumpulan informasi atau data yang sesuai dengan kebutuhan peneliti dengan berbagai macam sumber yang terdapat di perpustakaan dan internet seperti jurnal, artikel, dan buku-buku yang terkait dengan pelabelan titik $L(3,2,1)$. Adapun sumber pustaka yang digunakan sebagai referensi pada penelitian ini adalah buku teori graf karangan Abdussakir, skripsi tentang pelabelan titik $L(2,1)$ pada graf *super cycle*, skripsi tentang pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada beberapa graf khusus, dan sumber lain yang dapat membantu terselesaikannya penelitian ini.

b. Tahap Penelitian

Pada penelitian ini langkah-langkah yang digunakan sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1. Mengumpulkan beberapa literatur yang berhubungan dengan topik yang di teliti, yaitu mengenai pelabelan titik $L(3,2,1)$ dan graf *super cycle*.
2. Melabeli setiap titik pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ untuk $n \in \mathbb{N}$ dan $r = 1$ dan $r = 2$ dengan aturan pelabelan titik $L(3,2,1)$.
3. Menggunakan hasil pelabelan sebagai referensi untuk menentukan batas atas dari pelabelan titik $L(3,2,1)$.
4. Membuat konjektur (dugaan awal) berdasarkan pola yang ditemukan dari pelabelan titik pada graf *super cycle* untuk masing-masing kasus.
5. Merumuskan konjektur sebagai suatu teorema.
6. Menghasilkan teorema tentang pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *super cycle* yang dilengkapi dengan bukti.
7. Menulis laporan penelitian.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan penelitian ini, agar pembahasan dalam penelitian tersaji secara sistematis dan mempermudah pembaca untuk memahaminya, maka penulis menggunakan sistematika sebagai berikut.

Bab I Pendahuluan

Bab ini membahas hal-hal yang melatarbelakangi penulisan, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan beberapa teori yang berhubungan dengan topik penelitian, yaitu mengenai graf, graf terhubung, derajat titik, jarak, pelabelan titik $L(3,2,1)$, hasil pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada beberapa graf khusus, graf hanoi

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Hn_r, graf *super cycle* $Sc(n,r)$, dan hubungan manusia dengan manusia dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Bab ini menjelaskan tentang bagaimana pola pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$.

Bab IV Penutup

Bab ini menyajikan kesimpulan hasil penelitian dan beberapa saran.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

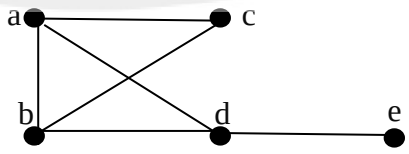
Abdussakir, dkk (2009:4) menyatakan bahwa graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dikaji hanya graf G, maka *order* dan ukuran dari G cukup ditulis p dan q. Graf dengan *order* p dan ukuran q dapat disebut graf-(p, q) dan ditulis $G(p, q)$.

Berikut akan diperlihatkan graf G yang memuat himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$.

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}.$$

Graf G tersebut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 2.1 Graf $G(5, 6)$

Graf G memiliki 5 titik sehingga *order* G adalah $p = 5$. Graf G memiliki 6 sisi sehingga ukuran graf G adalah $q = 6$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Graf G dengan himpunan titik dan sisi masing-masing

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$$

dapat ditulis dengan

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

dengan

$$e_1 = (a, b)$$

$$e_2 = (a, c)$$

$$e_3 = (a\ , d)$$

$$e_4 = (b, d)$$

$$e_5 = (b, c)$$

$$e_6 = (d, e)$$

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut terikat langsung *(incident)*, dan titik u dan v disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung *(adjacent)*, jika terkait langsung pada satu titik yang sama (Abdussakir, dkk, 2009:6).

2.2 Graf Terhubung

Misalkan u dan v adalah titik di graf G (boleh berbeda). *Walk* (jalan) $u - v$ pada graf G adalah barisan berhingga yang berselang-seling

$$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n = v$$

antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$e_i = v_{i-1}v_i \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n$

adalah sisi di G. v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, titik $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut jalan terbuka. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut jalan tertutup. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut jalan trivial (Abdussakir, dkk, 2009:49).

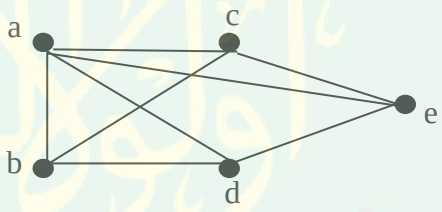
Karena dalam graf dua titik hanya akan dihubungkan oleh tepat satu sisi, maka jalan $u - v$

$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$

dapat ditulis menjadi

$W: u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = v.$

Perhatikan graf G berikut



Gambar 2.2 Graf $G(5, 8)$

maka

$W_1 = a, b, c, a, e, d, a, d, b, a$

dan

$W_2 = b, c, b, c, b, c, a, d$

adalah jalan di G. W_1 adalah jalan tertutup dan W_2 adalah jalan terbuka. W_1 mempunyai panjang 9 dan W_2 mempunyai panjang 7.

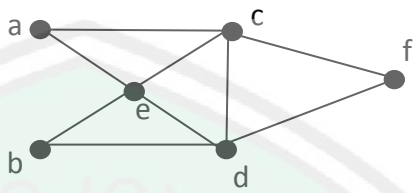
$W_3 = a, b, c, d, e, a$

W_3 bukan jalan di G karena sisi cd tidak ada di G.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jalan W yang semua sisinya berbeda disebut *trail* (Abdussakir, dkk, 2009:51).

Perhatikan graf G berikut.



Gambar 2.3 Graf $G(6, 9)$

maka

$$W_1 = f, c, a, e, b, d, e, c, d, f$$

adalah jalan tertutup, dan merupakan *trail* karena semua sisinya berbeda atau tidak ada sisi yang dilalui lebih dari satu kali.

$$W_2 = a, c, e, b, d, a, c, d, f$$

adalah jalan terbuka, dan bukan *trail* karena sisi ac dilalui lebih dari satu kali, atau dengan kata lain ada sisi yang sama pada jalan W_2.

Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut lintasan (Abdussakir, dkk, 2009:51). Dengan demikian setiap lintasan pasti merupakan *trail*, tetapi tidak semua *trail* merupakan lintasan.

Jalan

$$W_1 = a, c, e, b, d, f$$

$$W_2 = a, e$$

dan

$$W_3 = a, e, b, c$$

adalah lintasan di G karena semua titiknya berbeda. Sedangkan

$$W_4 = a, c, e, b, d, f, d, e, a$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$W_5 = a, e, b, e, c$

bukan lintasan karena ada titik yang sama.

Jalan tertutup W tak trivial yang semua sisinya berbeda disebut sirkuit. Sirkuit adalah *trail* tertutup tak trivial. Jalan tertutup tak trivial yang semua titiknya berbeda disebut sikel (*cycle*). Dengan demikian setiap *cycle* pasti merupakan sirkuit, tetapi tidak semua sirkuit merupakan *cycle* (Abdussakir, dkk, 2009:53-54).

Graf berbentuk *cycle* dengan titik sebanyak n, $n \geq 3$, disebut graf *cycle* dan ditulis C_n. Graf *cycle* sering juga disebut sebagai graf lingkaran karena gambarnya dapat dibentuk menjadi lingkaran. Graf *cycle* dapat juga digambar dalam bentuk *polygon*. C_3 dapat disebut segitiga, C_4 segiempat, dan secara umum C_n dapat disebut segi-n. *Cycle* yang banyak titiknya ganjil disebut *cycle* ganjil dan *cycle* yang banyak titiknya genap disebut *cycle* genap (Abdussakir, dkk, 2009:55).

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Titik u dan v dikatakan *connected* (terhubung) jika terdapat lintasan $u - v$ di G. Sedangkan suatu graf G dikatakan terhubung, jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terhubung. Dengan kata lain, suatu graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap titik u dan v di G terdapat lintasan $u - v$ di G (Abdussakir, dkk, 2009:55-56).

2.3 Derajat Titik

Abdussakir, dkk (2009:9) menyatakan bahwa jika v adalah titik pada graf G, maka himpunan semua titik di G yang terhubung langsung dengan v disebut lingkungan dari v dan ditulis $N_G(v)$. Derajat dari titik v di graf G, ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam

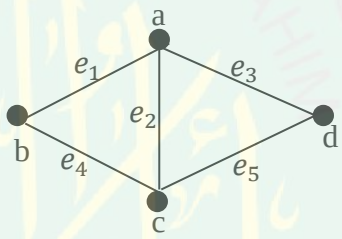
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$ dan $N_G(v)$ disingkat menjadi $N(v)$. Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik v di graf G adalah banyaknya anggota dalam $N(v)$. Jadi,

$$\deg(v) = |N(v)|.$$

Suatu titik yang memiliki derajat 0 disebut titik terasing atau titik terisolasi. Titik berderajat 1 disebut titik ujung. Titik berderajat genap dan berderajat ganjil masing-masing disebut titik genap dan titik ganjil. Derajat maksimum titik di G dilambangkan dengan $\Delta(G)$ dan derajat minimum dilambangkan dengan $\delta(G)$.

Perhatikan graf G berikut.



Gambar 2.4 Graf $G(4, 5)$

Berdasarkan gambar, diperoleh bahwa

$N(a) = \{b, c, d\}$

$N(b) = \{a, c\}$

$N(c) = \{a, b, d)$

$N(d) = \{a, c\}$

Dengan demikian, maka

$\deg(a) = 3$

$\deg(b) = 2$

$\deg(c) = 3$

$\deg(d) = 2$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Berdasarkan hasil di atas dapat diketahui bahwa derajat maksimum di G adalah $\Delta(G) = 3$ dan derajat minimum $\delta(G) = 2$. Titik b dan d adalah titik genap, titik c dan d adalah titik ganjil. Karena tidak terdapat titik yang berderajat 0 atau 1, maka graf G tidak mempunyai titik ujung.

2.4 Jarak

Menurut Abdussakir, dkk (2009:56) misalkan G graf terhubung dan misalkan u dan v titik di G. *Distance* (jarak) dari u dan v di G, dinotasikan dengan $d(u, v)$, adalah panjang lintasan $u - v$ terpendek di G. Himpunan titik di G dengan fungsi jarak ini membentuk ruang metrik. Untuk setiap titik u, v, dan w di G, maka:

a. $d(u, v) \geq 0$ dan $d(u, v) = 0$ jika dan hanya jika $u = v$.

b. $d(u, v) = d(v, u)$

c. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

2.5 Pelabelan Graf

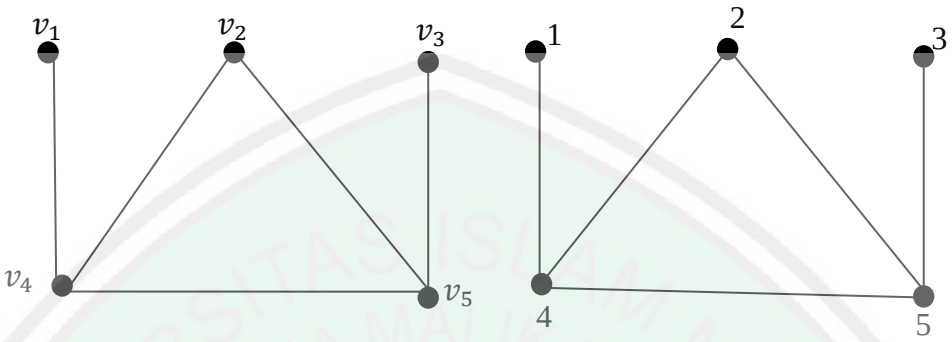
Menurut Gallian (2018) pelabelan graf adalah suatu pemberian nilai pada titik atau sisi dari graf atau keduanya sehingga memenuhi kondisi tertentu. Jika domain dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik. Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi, dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total.

Contoh: Pelabelan titik

Diberikan graf G sebagai berikut.

Didefinisikan $f(v_1) = 1, f(v_2) = 2, f(v_3) = 3, f(V_4) = 4, f(v_5) = 5$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

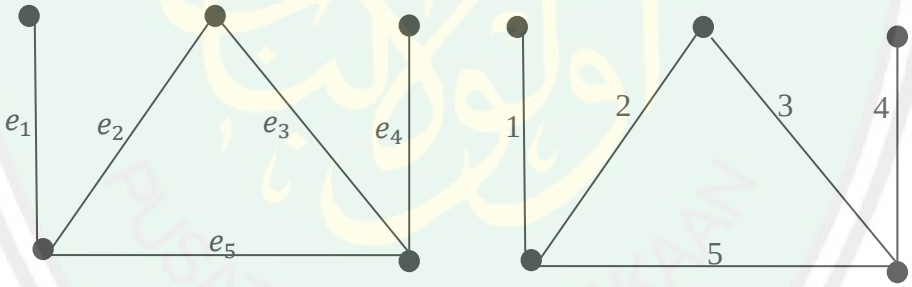


Gambar 2.5 Pelabelan Titik pada Graf

Contoh: Pelabelan sisi

Diberikan graf G sebagai berikut.

Didefinisikan $f(e_1) = 1, f(e_2) = 2, f(e_3) = 3, f(e_4) = 4, f(e_5) = 5$



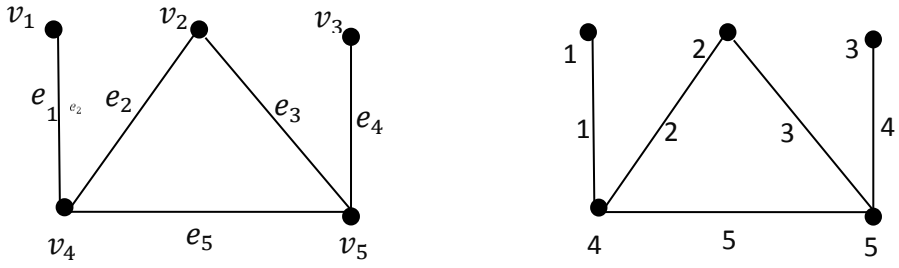
Gambar 2.6 Pelabelan Sisi pada Graf

Contoh: Pelabelan total

Diberikan graf G sebagai berikut.

Didefinisikan $f(v_1) = 1, f(v_2) = 2, f(v_3) = 3, f(V_4) = 4, f(v_5) = 5$

$f(e_1) = 1, f(e_2) = 2, f(e_3) = 3, f(e_4) = 4, f(e_5) = 5$



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Gambar 2.7 Pelabelan Total pada Graf

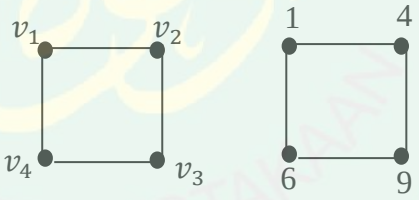
2.6 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$

Berdasarkan hasil penelitian Clipperton, dkk (2005:3) jika diketahui graf $G = (V(G), E(G))$, maka pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf G adalah fungsi $f: V(G) \to \mathbb{N}$, dengan $x, y \in V(G)$ berlaku:

$$|f(x) - f(y)| \geq \begin{cases} 3, \text{jika } d(x,y) = 1 \\ 2, \text{jika } d(x,y) = 2 \\ 1, \text{jika } d(x,y) = 3 \end{cases}$$

Jika 1 tidak digunakan sebagai label titik dalam suatu pelabelan $L(3,2,1)$ pada suatu graf, maka setiap label titik dapat diturunkan 1 untuk memperoleh pelabelan $L(3,2,1)$ dari suatu graf. Jadi dalam pelabelan $L(3,2,1)$ minimal 1 harus digunakan sebagai label titik.

Nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ disimbolkan dengan $\lambda_{3,2,1}$.



Gambar 2.8 Contoh Pelabelan Titik $L(3,2,1)$

Pada gambar dijelaskan tentang pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada suatu graf G. Pertama, diberikan label 1 pada suatu titik misalkan titik v_1. Karena titik v_1 dan v_2 berjarak satu maka harus diberikan label dengan selisih minimal tiga, misalkan titik v_2 diberi label 4. Sedangkan pada titik v_1 dan v_3 berjarak dua maka harus diberikan label dengan selisih minimal dua, misalkan titik v_3 diberi label 9, karena pada titik v_1 dan v_4 berjarak tiga maka harus diberikan label dengan selisih

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

minimal satu, maka titik v_4 diberi label 6. Sehingga diperoleh label terkecil pada graf G adalah 1 dan $\lambda_{3,2,1}(G) = 9$.

2.7 Beberapa Hasil Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Beberapa Graf

2.7.1 Graf *Path* P_n

Lemma 2.1

Untuk setiap graf *path* P_n, dengan $n \geq 8$, maka $\lambda_{3,2,1}(P_n) \geq 8$ (Anggraeni, 2013:20).

Bukti:

Misalkan f adalah pelabelan titik $L(3,2,1)$ minimal untuk graf *path* pada n titik yang dinotasikan dengan P_n dan andaikan $\lambda_{3,2,1}(P_n) < 8$ untuk $n \geq 8$. Misalkan v_1 merupakan titik dengan label 1. Di sana dimasukkan *subpath* paling sedikit 8 titik dengan v_1 sebagai titik pertama. Misalkan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ merupakan graf *path*. Selanjutnya akan dihitung kemungkinan untuk $f(v_2)$.

Kasus I: $f(v_2) = 4$

Jika dimisalkan $f(v_3) = 8$, maka kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $\lambda_{3,2,1}(P_n) < 8$.

Kasus II: $f(v_2) = 6$

Jika dimisalkan $f(v_3) = 8$, maka kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $\lambda_{3,2,1}(P_n) < 8$.

Kasus III: $f(v_2) = 6$

Jika dimisalkan $f(v_3) = 3, f(v_4) \geq 8$, maka kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $\lambda_{3,2,1}(P_n) < 8$.

Kasus IV: $f(v_2) = 7$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jika dimisalkan $f(v_3) = 3$ atau 4. Keduanya mungkin untuk $f(v_2)$ dengan memberi $f(v_4) \geq 9$, yang mana kontradiksi dengan $\lambda_{3,2,1}(P_n) < 8$. Hal ini dapat dilihat bahwa jika diambil $f(v_3) = 3, f(v_4) \geq 9, f(v_5) = 5,$ dan $f(v_6) = 2$, maka kontradiksi. Jika diambil $f(v_3) = 4, f(v_4) \geq 9, f(v_5) = 6$, dan $f(v_6) = 3$, maka kontradiksi juga. Oleh karena itu, dapat diambil kesimpulan bahwa $\lambda_{3,2,1}(P_n) \geq 8$, jika $n \geq 8$.

2.7.2 Graf *Cycle* C_n

Lemma 2.2

Misalkan n adalah bilangan bulat ganjil, jika $n > 3$ maka $\lambda_{3,2,1}(C_n) \neq 8$.

Bukti:

Misalkan f adalah pelabelan titik $L(3,2,1)$ minimal dari C_n dengan n adalah bilangan ganjil dan $n > 3$. Andaikan $\lambda_{3,2,1}(C_n) = 8$. Maka hanya pelabelan yang mungkin dengan 8 sebagai bilangan bulat maksimum adalah sebagai berikut:

$f_1(V) = \{8, 5, 2, 7, 4, 1, 6, 3\}$

$f_2(V) = \{8, 5, 2, 7, 4, 1, X\}$

$f_3(V) = \{8, 5, 1, 7, 3, X, X\}$

$f_4(V) = \{8, 4, 1, 7, 3, X, X\}$

$f_5(V) = \{8, 5, 2, 7, 4, 1\}$

$f_6(V) = \{8, 4, 1, 6, X\}$

$f_7(V) = \{8, 2, 5, X, X\}$

$f_8(V) = \{8, 2, 6, X, X\}$

$f_9(V) = \{8, 1, 5, X, X\}$

$f_{10}(V) = \{8, 3, 6, 1\}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dapat dilihat bahwa f_1, f_5 dan f_{10} adalah pelabelan untuk *cycle* genap. Dari pelabelan sisa $f_2, f_3, f_4, f_6, f_7, f_8$ dan f_9 semua gagal sebagai pelabelan pada *cycle* karena label X yang hilang harus lebih besar daripada yang diasumsikan $\lambda_{3,2,1}(C_n) = 8$. Oleh karena itu, tidak ada pelabelan titik $L(3,2,1)$ minimal yang berada pada C_n dengan n ganjil dan $n > 3$ sedemikian sehingga $\lambda_{3,2,1}(C_n) \neq 8$.

Teorema 2.1

Untuk setiap graf *cycle* C_n dengan $n \geq 3$, maka

$$\lambda_{3,2,1}(C_n) = \begin{cases} 7, \text{jika } n = 3 \\ 8, \text{jika } n \text{ genap} \\ 9, \text{jika } n \text{ ganjil dan } n \neq 3, 7 \\ 10, \text{jika } n = 7 \end{cases}$$

Bukti:

Misalkan $n \geq 3$ dan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah titik dari C_n sedemikian sehingga untuk $1 \leq i < n, (v_i, v_{i+1})$ dan (v_1, v_n) adalah sisi dalam C_n. Kasus berikut ini menggambarkan semua kemungkinan pada $\lambda_{3,2,1}(C_n)$ (Anggraeni, 2013).

Kasus I: $n = 3$

Dapat dilihat bahwa C_3 adalah graf lengkap. Oleh karena itu, berdasarkan teorema yang dibahas pada penelitian Anggraeni (2013) untuk graf lengkap, maka $\lambda_{3,2,1}(C_n) = 7$.

Kasus II: n genap

Pada penelitian Anggraeni (2013) diketahui $\lambda_{3,2,1}(C_4) = 8$ dan $\lambda_{3,2,1}(C_6) = 8$. Pada graf *path* ditunjukkan bahwa $\lambda_{3,2,1}(P_n) \geq 8$ untuk $n \geq 8$. Maka untuk setiap graf *cycle* yang genap $\lambda_{3,2,1}(C_n) \geq 8$. Mengingat pelabelan yang digunakan pada C_4 dan C_6 pada penelitian Anggraeni (2013), secara

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

berturut-turut yaitu: untuk C_4 digunakan $f(V) = \{1, 6, 3, 8\}$ dan untuk C_6 digunakan $f(V) = \{1, 4, 7, 2, 5, 8\}$. Dapat dilihat bahwa pelabelan yang digunakan untuk C_4 dapat diulang secara tak terbatas untuk setiap C_n dengan n perkalian dari 4. Demikian juga, pelabelan yang digunakan untuk C_6 dapat diulang secara tak terbatas untuk setiap C_n dengan n perkalian dari 6. Selain itu, pelabelan dari C_4 dan C_6 dapat digabung bersama menjadi label C_{10} seperti berikut: $f(V) = \{1, 6, 3, 8, 1, 4, 7, 2, 5, 8\}$. Diketahui bahwa setiap bilangan bulat genap yang lebih dari atau sama dengan 4 dapat dinyatakaan sebagai kombinasi dari perkalian tidak negatif dari 4 dan 6. Dari hal ini, jelas bahwa pelabelan dari setiap C_n yang genap tersusun dari kombinasi yang berasal dari perkalian tidak negatif pada pola pelabelan C_4 dan C_6. Oleh karena itu, $\lambda_{3,2,1}(C_n) = 8$ untuk setiap n genap.

Kasus III: ganjil dan $n \neq 3$ atau 7

Pada penelitian Anggraeni (2013) diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(C_5) = 9$, kemudian untuk graf *path* diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(C_n) \geq 8$ untuk $n \geq 8$ karena $\lambda_{3,2,1}(P_n) = 8$, dan diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(C_n) \neq 8$ untuk graf *cycle* ganjil. Ini mengimplikasikan bahwa untuk setiap graf *cycle* ganjil $\lambda_{3,2,1}(C_n) \geq 9$. C_5 dilabeli dengan $\{5, 1, 7, 3, 9\}$. Dapat dilihat bahwa pelabelan dari C_5 dapat diulang secara tak terbatas untuk setiap C_n dengan n perkalian dari 5. Serta dapat dikombinasikan pelabelan untuk C_5 dengan pelabelan untuk C_4 yang digunakan untuk label C_9 seperti berikut: $\{5, 1, 7, 3, 9, 1, 6, 3, 8\}$. Diketahui bahwa setiap bilangan bulat ganjil yang lebih dari atau sama dengan 9, dengan pengecualian 11, dapat dinyatakaan sebagai suatu kombinasi dari perkalian tidak negatif dari 4 dan 5. Ini mengimplikasikan bahwa setiap C_n dengan $n \geq 9$ dan $n \neq 11$, terdiri dari kombinasi yang berasal dari perkalian tidak negatif pada C_4 dan C_5. Oleh

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sebab itu, karena $\lambda_{3,2,1}(C_5) = 9$, diperoleh $\lambda_{3,2,1}(C_n) = 9$ untuk setiap C_n, dengan $n \geq 9$ dan $n \neq 11$. Untuk C_{11} dapat diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(C_{11}) \geq 9$. Didefinisikan f untuk C_{11} sedemikian sehinga $f(V) = \{1, 6, 3, 8, 5, 1, 9, 6, 2, 8\}$. Karena $max\left(f(V)\right) = 9, \lambda_{3,2,1}(C_{11}) = 9$.

Kasus IV: $n = 7$

Misalkan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_7\}$ adalah himpunan titik dari C_7. Andaikan $\lambda_{3,2,1}(C_7) < 10$ dan misalkan f adalah pelabelan titik $L(3, 2, 1)$ minimal dari C_7, maka kemungkinan nilai pada $f(V)$ berada di dalam $S = \{1, 2, \dots, 9\}$. Karena jarak terbesar antara dua titik yang berada di dalam V adalah 3, tidak ada kemungkinan nilai untuk $f(V)$ dapat diulang. Serta, hanya sampai dua label berurutan yang mungkin digunakan. Jika menggunakan tiga label berurutan itu tidak mungkin karena terdapat pembatas jarak pada pelabelan V. Maka paling banyak ada 6 label yang dapat digunakan dari S, seharusnya titik yang tak berlabel menjadi berlabel dengan nilai yang ≥ 10, sehingga kontradiksi dengan yang diasumsikan bahwa $\lambda_{3,2,1}(C_7) < 10$. Dengan demikian $\lambda_{3,2,1}(C_7) \geq 10$. Sehingga, pola pelabelan $\{1, 8, 5, 2, 10, 7, 4\}$ menunjukkan bahwa $\lambda_{3,2,1}(C_7) = 10$. Oleh karena itu $\lambda_{3,2,1}(C_7) = 10$.

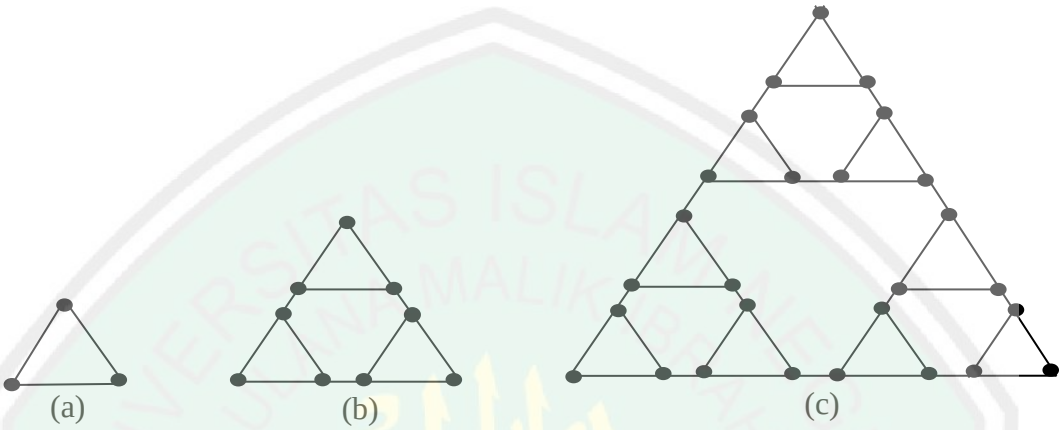
2.8 Graf Hanoi

Definisi 2.1

Graf hanoi Hn_r adalah graf yang merepresentasikan *puzzle* menara Hanoi dengan tiga tiang dan r cakram. Graf ini juga dikenal sebagai salah satu kasus khusus dari *Sierpinski Gasket*. Graf ini sering dibahas dalam penelitian-penelitian graf fraktal dan optimasi jaringan (Jauhari, 2013:13).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh graf hanoi



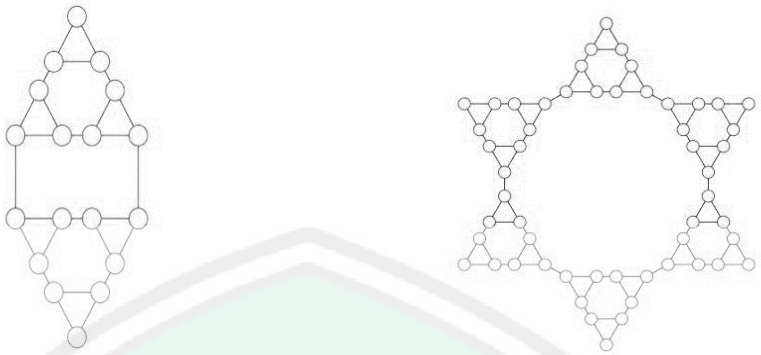
Gambar 2.9 (a) Graf Hn_1, (b) Graf Hn_2, (c) Graf Hn_3

2.9 Graf *Super Cycle* $Sc(n, r)$

Definisi 2.2

Graf *super cycle* adalah graf yang diperoleh dari C_n dengan mengganti semua titiknya menjadi Hn_r, kemudian salah satu titik ujung Hn_r yang berderajat 2 dihubungkan dengan salah satu titik Hn_r lain yang juga berderajat 2 (Jauhari, 2013:17).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



(a) (b)

Gambar 2.10 (a) Graf $Sc(2,2)$, (b) Graf $Sc(6,2)$

2.10 Hubungan Manusia dengan Manusia dalam Al-Quran

Agama Islam telah mengatur segala aspek kehidupan manusia, termasuk hubungan manusia dengan sesama, hubungan manusia dengan lingkungan, dan hubungan manusia dengan Allah Swt. Allah Swt. memerintahkan agar setiap manusia menyambung hubungan baik (silaturrahim) terlebih lagi hubungan antar umat Islam. Arti silaturrahim di sini adalah ikatan yang mengikat sesama manusia berupa ikatan iman yang menuntut haknya agar dijaga dalam rasa saling mencintai karena Allah Swt. Sebagaimana disebutkan di dalam al-Quran surat al-Hujurat ayat 10, yaitu:

إِنَّمَا الْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ ۚ وَاتَّقُوا اللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ ﴿١٠﴾

"Sesungguhnya orang-orang yang beriman itu bersaudara. Karena itu damaikanlah antara saudara-saudaramu dan bertawakallah kepada Allah supaya kamu mendapat rahmat" (QS. Al-Hujurat:10).

Dalam tafsir al-Qur'anul Majid (2000:3919), ayat *"sesungguhnya orang-orang yang beriman itu bersaudara"* maksudnya adalah semua orang mukmin dipandang sebagai suatu keluarga, sebab mereka semua mempunyai asas

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

tunggal, yaitu iman. Sedangkan Shihab (2003) menyatakan sesungguhnya orang-orang mukmin yang mantap imannya serta dihimpun oleh keimanan, meskipun tidak seketurunan adalah bagaikan bersaudara seketurunan, dengan demikian mereka memiliki keterikatan bersama dalam iman dan juga keterikatan bagaikan seketurunan.

Kata *innama* digunakan untuk membatasi sesuatu. Di sini kaum beriman dibatasi hakikat hubungan mereka dengan persaudaraan. Seakan-akan tidak ada jalinan hubungan antar mereka kecuali persaudaraan itu. Kata *innama* digunakan untuk menggambarkan sesuatu yang telah diterima sebagai suatu hal yang demikian itu adanya dan telah diketahui oleh semua pihak secara baik. Penggunaan kata *innama* dalam konteks penjelasan tentang persaudaraan antara sesama mukmin ini, mengisyaratkan bahwa sebenarnya semua pihak telah mengetahui secara pasti bahwa kaum beriman bersaudara, sehingga semestinya tidak terjadi dari pihak mana pun hal-hal yang mengganggu persaudaraan itu (Shihab, 2003).

Pada ayat *"karena itu damaikanlah antara saudara-saudaramu"* dalam tafsir al-Qur'anul Majid dijelaskan bahwa maksud dari ayat tersebut adalah oleh karena semua dipandang sebagai orang yang bersaudara, maka damaikanlah di antara saudara-saudaramu yang seagama itu, sebagaimana kamu mendamaikan saudaramu yang seketurunan. Dalam tafsir Al-Maraghi (1993:217), Allah Swt. menerangkan bahwa perdamaian itu sebagaimana wajib dilakukan antara dua kelompok, maka wajib pula antara dua orang bersaudara. Menurut Shihab (2003) orang-orang beriman yang tidak terlibat langsung dalam pertikaian antar

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

kelompok-kelompok maka damaikanlah walau pertikaian itu hanya terjadi antara kedua saudaramu apalagi jumlah yang bertikai lebih dari dua orang.

Ayat *"dan bertakwalah kepada Allah supaya kamu mendapat rahmat"*. Dalam tafsir Al-Qur'anul Majid dijelaskan bahwa maksud dari ayat tersebut adalah ketahuilah, bahwa bertakwa kepada Allah itu merupakan obat yang dapat meleraikan pertengkaran dan melenyapkan permusuhan. Dan bertakwalah kamu kepada Allah dalam segala hal yang kamu lakukan maupun yang kamu tinggalkan. Yang di antaranya adalah memperbaiki hubungan di antara sesama kamu yang kamu disuruh melaksanakannya. Semoga Tuhanmu memberi rahmat kepadamu dan memaafkan dosa-dosamu yang telah lalu apabila kamu mematuhi Allah dan mengikuti perintah dan larangan-Nya (Al-Maraghi, 1993).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan tentang berapa nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$, adapun batasan masalah dalam pembahasan ini yaitu dibatasi pada saat $r=1$ dan $r=2$ untuk sebarang nilai $n \in \mathbb{N}$.

Untuk melabeli setiap titik pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$, maka harus diperhatikan label titik lain yang berjarak satu, berjarak dua, dan berjarak tiga dengan menerapkan selisih pelabelan yang sesuai dengan pelabelan titik $L(3,2,1)$, yaitu apabila terdapat jarak satu maka selisih minimal label yang digunakan adalah tiga, terdapat jarak dua maka selisih minimal label yang digunakan adalah dua, dan apabila terdapat jarak tiga maka selisih minimal label adalah satu.

3.1 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf *Super Cycle* $Sc(n,1)$ untuk $r=1$

Untuk menentukan nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(n,1)$ pembahasan dibagi menjadi dua kasus. Kasus yang pertama adalah saat n genap dan kasus kedua adalah saat n ganjil. Nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ disimbolkan dengan $\lambda_{3,2,1}$.

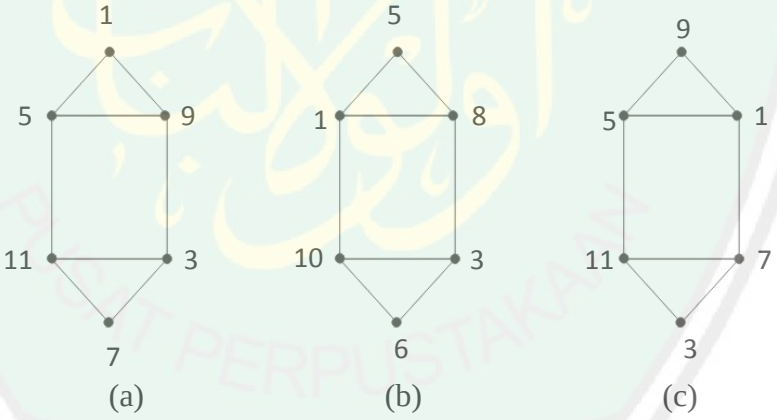
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.1.1 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(n,1)$ dengan n Genap

Berikut akan dilakukan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,1)$. Pertama akan diperlihatkan gambar graf $Sc(2,1)$ sebagai berikut.

Gambar 3.1 Graf $Sc(2,1)$

Contoh beberapa kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(2,1)$ adalah sebagai berikut.

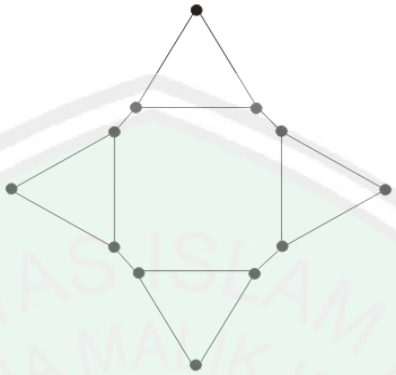


Gambar 3.2 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(2,1)$

Berdasarkan Gambar 3.2 di atas dapat diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(2,1)) = 10$. Menggunakan algoritma *backtracking* sudah dicoba semua kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(2,1)$ bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(2,1))$ tidak mungkin 9.

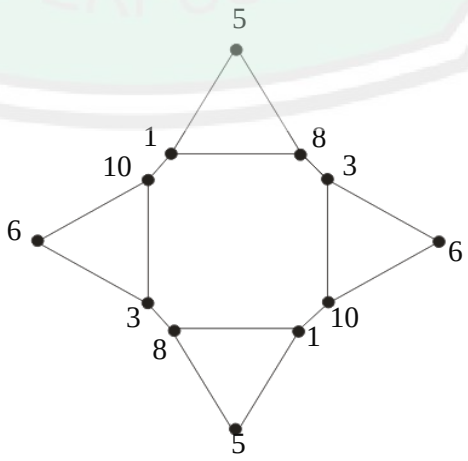
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selanjutnya akan dilakukan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(4,1)$. Sebelumnya akan diperlihatkan gambar graf $Sc(4,1)$ sebagai berikut.



Gambar 3.3 Graf $Sc(4,1)$

Pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(4,1)$ mengikuti pola seperti pada Gambar 3.2 bagian (b) yaitu {1, 5, 8, 3, 6, 10}, kemudian label yang terdapat pada titik yang berderajat 2 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 5 (terpendek) yang juga berderajat 2 lainnya. Selanjutnya label yang terdapat pada titik yang berderajat 3 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 4 (terpendek) yang juga berderajat 3 lainnya. Hasil pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(4,1)$ ditunjukkan pada Gambar 3.4.

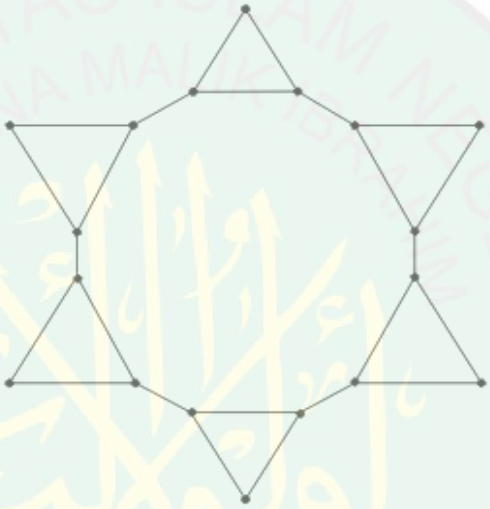


Gambar 3.4 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(4,1)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Berdasarkan Gambar 3.4 di atas dapat diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(4,1)) = 10$. Menggunakan algoritma *backtracking* sudah dicoba semua kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(4,1)$ bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(4,1))$ tidak mungkin 9.

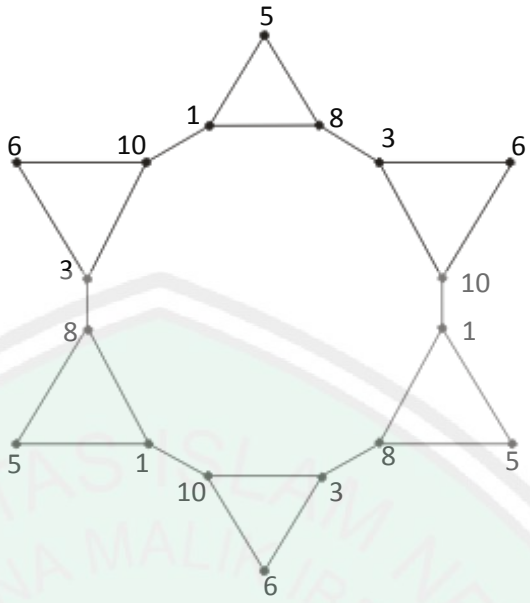
Selanjutnya akan dilakukan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(6,1)$. Sebelumnya akan diperlihatkan gambar graf $Sc(6,1)$ sebagai berikut.



Gambar 3.5 Graf $Sc(6,1)$

Pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(6,1)$ mengikuti pola seperti pada Gambar 3.2 bagian (b) yaitu {1, 5, 8, 3, 6, 10}, kemudian label yang terdapat pada titik yang berderajat 2 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 5 (terpendek) yang juga berderajat 2 lainnya. Selanjutnya label yang terdapat pada titik yang berderajat 3 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 4 (terpendek) yang juga berderajat 3 lainnya. Hasil pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(6,1)$ ditunjukkan pada Gambar 3.6.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.6 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(6,1)$

Berdasarkan Gambar 3.6 di atas dapat diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(6,1)) = 10$. Menggunakan algoritma *backtracking* sudah dicoba semua kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(6,1)$ bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(6,1))$ tidak mungkin 9.

Berdasarkan data di atas, karena $\lambda_{3,2,1}(Sc(2,1)) = 10$, $\lambda_{3,2,1}(Sc(4,1)) = 10$ dan $\lambda_{3,2,1}(Sc(6,1)) = 10$, maka diperoleh dugaan bahwa

$\lambda_{3,2,1}(Sc(n,1)) = 10$, untuk n genap.

Sehingga dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

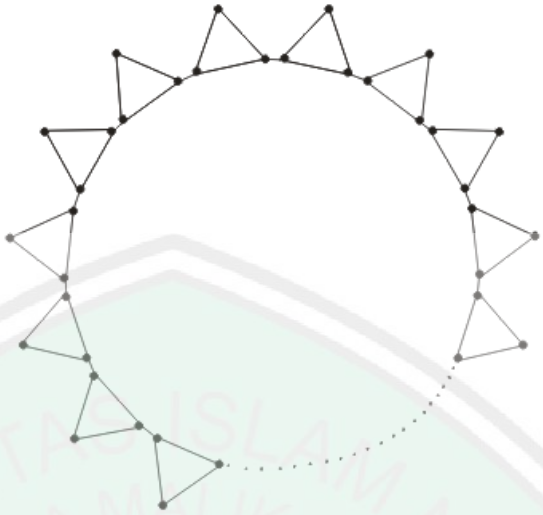
Teorema 3.1

Untuk sebarang graf *super cycle* $Sc(n,1)$ dengan n genap, maka nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada $Sc(n,1)$ adalah $\lambda_{3,2,1}(Sc(n,1)) = 10$.

Bukti:

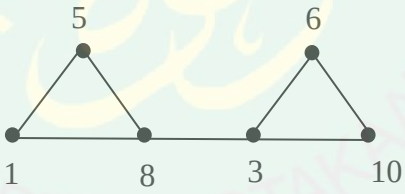
Graf $Sc(n,1)$ untuk n genap dapat digambar sebagai berikut.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.7 Graf $Sc(n,1)$ untuk n Genap

Untuk membuktikan nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(n,1)$ dengan $n \geq 4$ maka dapat diambil subgraf seperti Gambar 3.8, kemudian dilabeli dengan {1, 5, 8, 3, 6, 10} sesuai aturan pelabelan titik $L(3,2,1)$ sebagai berikut.

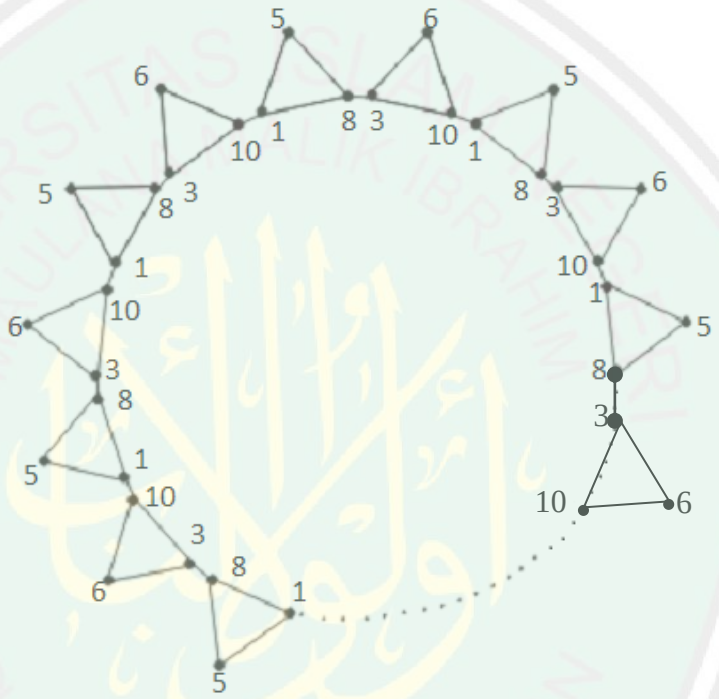


Gambar 3.8 Subgraf dari Graf $Sc(n,1)$ dengan Pelabelan Titik $L(3,2,1)$

Pelabelan tersebut merupakan pelabelan titik $L(3,2,1)$. Menggunakan algoritma *backtracking* sudah dicoba semua kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada subgraf dari graf $Sc(n,1)$ bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(n,1))$ tidak mungkin 9. Karena n genap, maka terdapat tepat $\frac{n}{2}$ subgraf tersebut di $Sc(n,1)$. Sehingga untuk melabeli $Sc(n,1)$ untuk n genap hanya perlu melabeli subgraf seperti di atas dengan menggunakan label $\{1,5,8,3,6,10\}$. Kemudian label yang terdapat pada

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

titik yang berderajat 2 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 5 (terpendek) yang juga berderajat 2 lainnya. Selanjutnya label yang terdapat pada titik yang berderajat 3 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 4 (terpendek) yang juga berderajat 3 lainnya. Hasil pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(n,1)$ ditunjukkan pada Gambar 3.9.



Gambar 3.9 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(n,1)$ untuk n Genap

Dengan demikian telah terbukti bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(n,1)) = 10$, untuk n genap.

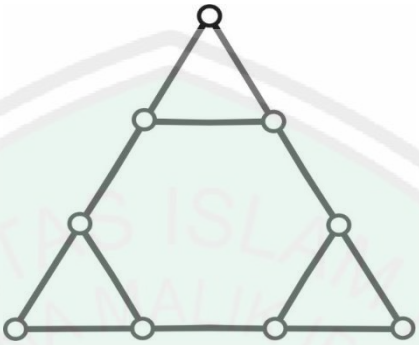
3.1.2 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(n,1)$ dengan n Ganjil

Pada subbab ini, akan dijelaskan tentang pelabelan titik $L(3,2,1)$ saat n ganjil. Pembahasan ini akan dibagi menjadi 3 kasus, kasus yang pertama yaitu jika $n \equiv 0(mod\ 3)$, kedua jika $n \equiv 1(mod\ 3)$, dan ketiga jika $n \equiv 2(mod\ 3)$. Dari pembahasan tersebut dapat digunakan untuk sebarang nilai $n \in \mathbb{N}$ saat n ganjil.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

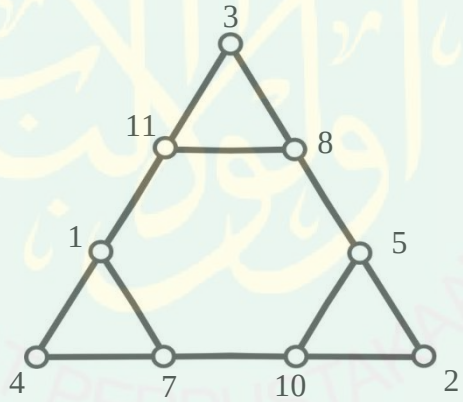
Kasus I: $n \equiv 0(mod\ 3)$

Berikut akan dilakukan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,1)$. Pertama akan diperlihatkan gambar graf $Sc(3,1)$ sebagai berikut.

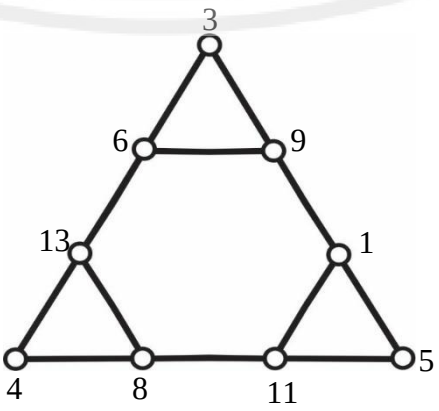


Gambar 3.10 Graf $Sc(3,1)$

Contoh beberapa kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(3,1)$ adalah sebagai berikut.

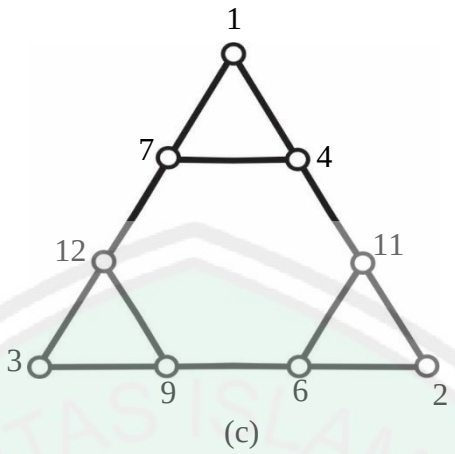


(a)



(b)

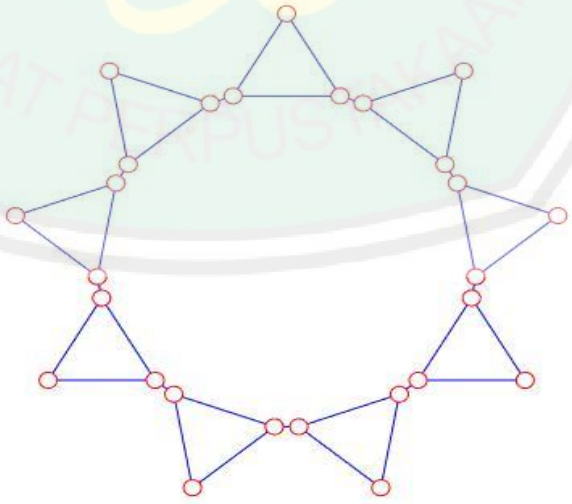
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.11 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(3,1)$

Berdasarkan Gambar 3.11 di atas dapat diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(3,1)) = 11$. Menggunakan algoritma *backtracking* sudah dicoba semua kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(3,1)$ bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(3,1))$ tidak mungkin 10.

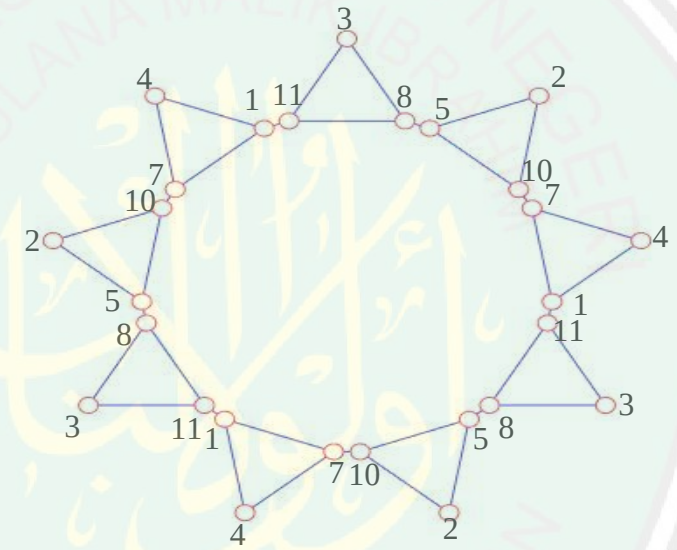
Selanjutnya akan dilakukan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(9,1)$. Sebelumnya akan diperlihatkan gambar graf $Sc(9,1)$ sebagai berikut.



Gambar 3.12 Graf $Sc(9,1)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(9,1)$ mengikuti pola seperti pada Gambar 3.11 bagian (a) yaitu {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1}. Kemudian label yang terdapat pada titik yang berderajat 2 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 7 (terpendek) yang juga berderajat 2 lainnya. Selanjutnya label yang terdapat pada titik yang berderajat 3 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 6 (terpendek) yang juga berderajat 3 lainnya. Hasil pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(9,1)$ ditunjukkan pada Gambar 3.13.

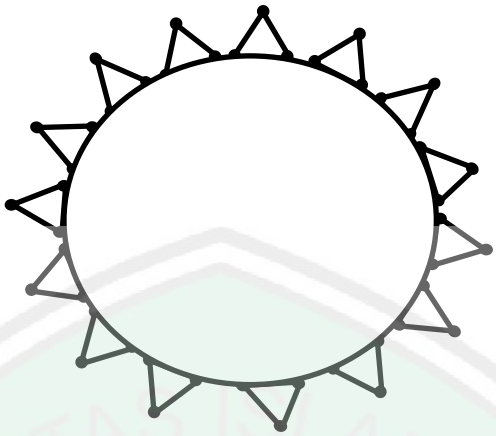


Gambar 3.13 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(9,1)$

Berdasarkan Gambar 3.13 di atas dapat diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(3,1)) = 11$. Menggunakan algoritma *backtracking* sudah dicoba semua kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(9,1)$ bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(9,1))$ tidak mungkin 10.

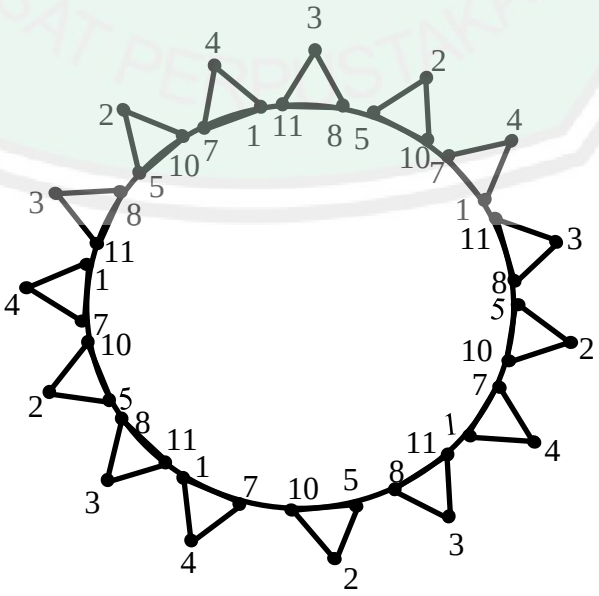
Selanjutnya akan dilakukan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(15,1)$. Sebelumnya akan diperlihatkan gambar graf $Sc(15,1)$ sebagai berikut.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.14 Graf $Sc\ (15, 1)$

Pelabelan titik $L(3, 2, 1)$ pada graf $Sc(15, 1)$ mengikuti pola seperti pada Gambar 3.11 bagian (a) yaitu {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1}. Kemudian label yang terdapat pada titik yang berderajat 2 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 7 (terpendek) yang juga berderajat 2 lainnya. Selanjutnya label yang terdapat pada titik yang berderajat 3 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 6 (terpendek) yang juga berderajat 3 lainnya. Hasil pelabelan titik $L(3, 2, 1)$ pada graf $Sc(15, 1)$ ditunjukkan pada Gambar 3.15.



Gambar 3.15 Pelabelan Titik $L(3, 2, 1)$ pada Graf $Sc(15, 1)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Berdasarkan Gambar 3.15 di atas dapat diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(15,1)) = 11$. Menggunakan algoritma *backtracking* sudah dicoba semua kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(15,1)$ bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(15,1))$ tidak mungkin 10.

Berdasarkan data di atas, karena $\lambda_{3,2,1}(Sc(3,1)) = 11$, $\lambda_{3,2,1}(Sc(9,1)) = 11$, dan $\lambda_{3,2,1}(Sc(15,1)) = 11$, maka diperoleh dugaan bahwa

$\lambda_{3,2,1}(Sc(n,1)) = 11$, untuk n ganjil.

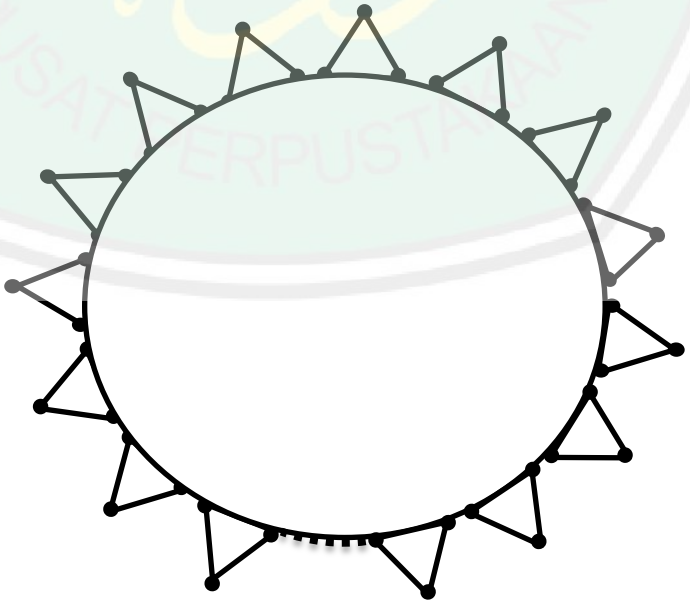
Sehingga dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

Teorema 3.2

Untuk sebarang graf *super cycle* $Sc(n,1)$ dengan $n \equiv 0(mod\ 3)$ dan n ganjil, maka nilai minimal label terbesar untuk pelabelan titik $L(3,2,1)$ dari $Sc(n,1)$ adalah $\lambda_{3,2,1}(Sc(n,1)) = 11$.

Bukti:

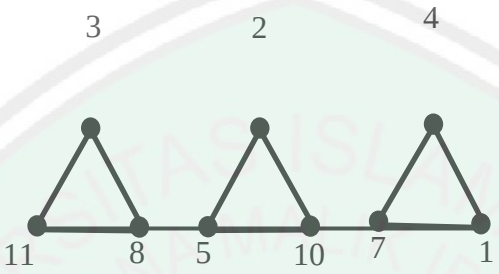
Graf $Sc(n,1)$ untuk n ganjil dan $n \equiv 0(mod\ 3)$ dapat digambar sebagai berikut.



Gambar 3.16 Graf $Sc(n,1)$ saat n Ganjil untuk $n \equiv 0(mod\ 3)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

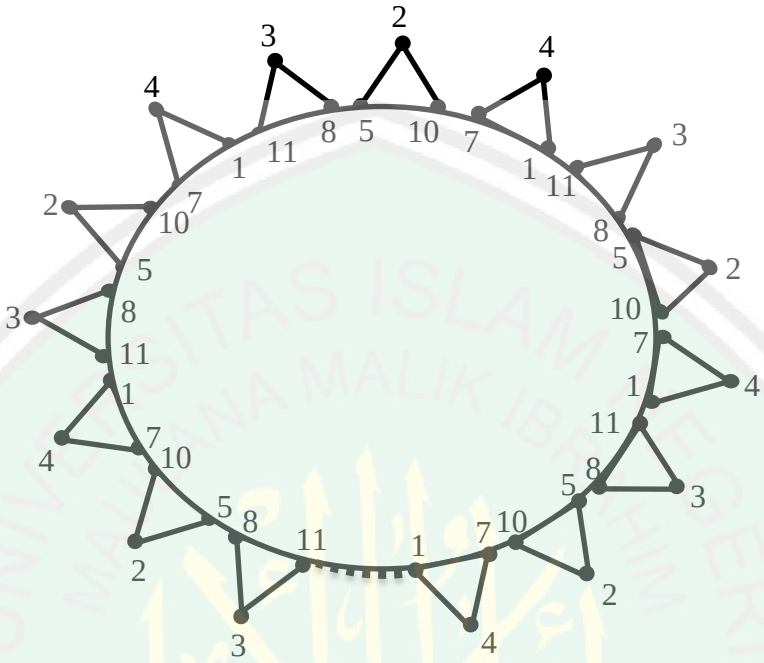
Untuk membuktikan nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(n,1)$ saat $n \equiv 0(mod\ 3)$, graf $Sc(n,1)$ saat $n \equiv 0(mod\ 3)$ dengan $n \geq 9$ maka dapat diambil subgraf seperti Gambar 3.17, kemudian dilabeli dengan {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1} sesuai dengan aturan pelabelan titik $L(3,2,1)$ sebagai berikut.



Gambar 3.17 Subgraf dari Graf $Sc(n,1)$ saat $n \equiv 0(\ mod\ 3)$ dengan Pelabelan Titik $L(3,2,1)$

Pelabelan tersebut merupakan pelabelan titik $L(3,2,1)$. Menggunakan algoritma *backtracking* sudah dicoba semua kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada subgraf dari graf $Sc(n,1)$ bahwa $\lambda_{3,2,1}$ tidak mungkin 10. Karena $n \equiv 0(mod\ 3)$, maka terdapat tepat $\frac{n}{3}$ subgraf tersebut di $Sc(n,1)$. Sehingga untuk melabeli $Sc(n,1)$ untuk n ganjil saat $n \equiv 0(mod\ 3)$ dengan $n \geq 9$ hanya perlu melabeli subgraf seperti di atas dengan menggunakan label {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1}. Kemudian label yang terdapat pada titik yang berderajat 2 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 7 (terpendek) yang juga berderajat 2 lainnya. Selanjutnya label yang terdapat pada titik yang berderajat 3 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 6 (terpendek) yang juga berderajat 3 lainnya. Karena graf pada Gambar 3.17 merupakan graf dengan $n \equiv 0(mod\ 3)$, maka label {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1} diulangi sampai subgraf $\frac{n}{3}$. Hasil pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(n,1)$ dengan $n \equiv 0(mod\ 3)$ ditunjukkan pada Gambar 3.18.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

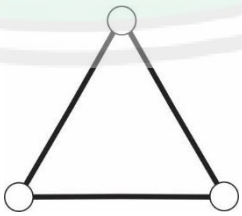


Gambar 3.18 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(n,1)$ saat n Ganjil untuk $n \equiv 0(mod\ 3)$

Dengan demikian telah terbukti bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(n,1)) = 11$, untuk n ganjil saat $n \equiv 0(mod\ 3)$.

Kasus II: $n \equiv 1(mod\ 3)$

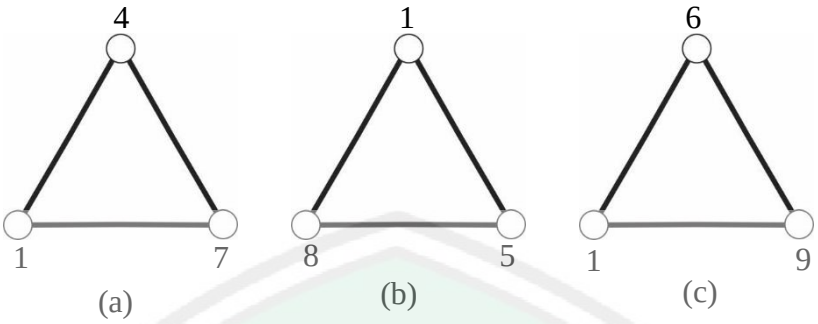
Berikut akan dilakukan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,1)$. Pertama akan diperlihatkan gambar graf $Sc(1,1)$ sebagai berikut.



Gambar 3.19 Graf $Sc(1,1)$

Contoh beberapa kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(1,1)$ adalah sebagai berikut.

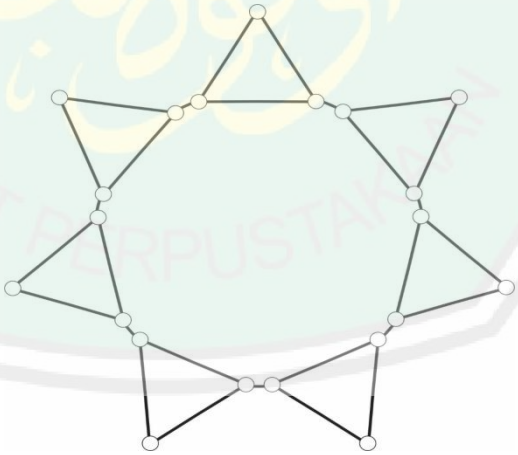
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.20 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(1,1)$

Berdasarkan Gambar 3.20 di atas dapat diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(1,1)) = 7$. Menggunakan algoritma *backtracking* sudah dicoba semua kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(1,1)$ bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(1,1))$ tidak mungkin 6.

Selanjutnya akan dilakukan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(7,1)$. Sebelumnya akan diperlihatkan gambar graf $Sc(7,1)$ sebagai berikut.

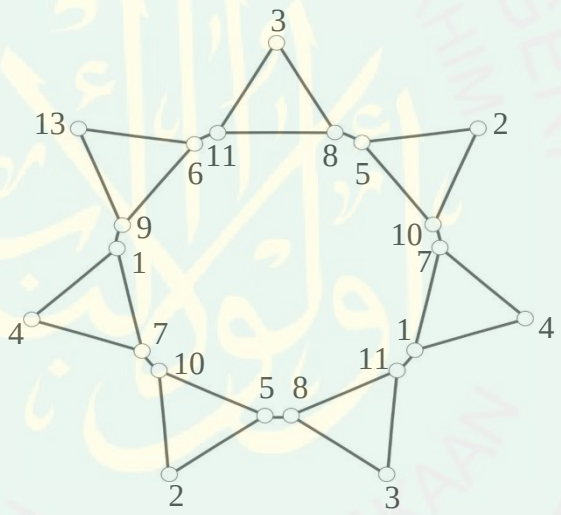


Gambar 3.21 Graf $Sc(7,1)$

Pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(7,1)$ mengikuti pola seperti pada Gambar 3.11 bagian (a) yaitu {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1}. Kemudian label yang terdapat pada titik yang berderajat 2 digunakan kembali untuk melabeli titik yang

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

berjarak 7 (terpendek) yang juga berderajat 2 lainnya. Selanjutnya label yang terdapat pada titik yang berderajat 3 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 6 (terpendek) yang juga berderajat 3 lainnya. Karena graf pada Gambar 3.21 merupakan graf dengan $n \equiv 1(mod\ 3)$, maka dapat diambil subgraf dengan 3 hanoi sehingga akan tersisa 1 hanoi. Kemudian label {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1} diulangi sampai subgraf $\frac{7-1}{3}$, kemudian pelabelan dilanjutkan dengan label baru yaitu {9, 13, 6}. Hasil pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(7,1)$ ditunjukkan pada Gambar 3.22.

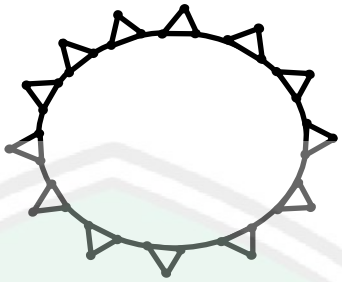


Gambar 3.22 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(7,1)$

Berdasarkan Gambar 3.22 di atas dapat diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(7,1)) = 13$. Menggunakan algoritma *backtracking* sudah dicoba semua kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(7,1)$ bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(7,1))$ tidak mungkin 12.

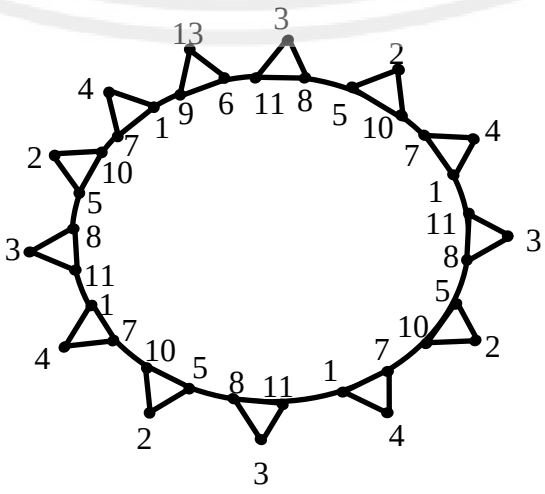
Selanjutnya akan dilakukan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(13,1)$. Sebelumnya akan diperlihatkan gambar graf $Sc(13,1)$ sebagai berikut.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.23 Graf $Sc(13,1)$

Pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(13,1)$ mengikuti pola seperti pada Gambar 3.11 bagian (a) yaitu {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1}. Kemudian label yang terdapat pada titik yang berderajat 2 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 7 (terpendek) yang juga berderajat 2 lainnya. Selanjutnya label yang terdapat pada titik yang berderajat 3 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 6 (terpendek) yang juga berderajat 3 lainnya. Karena graf pada Gambar 3.23 merupakan graf dengan $n \equiv 1(mod\ 3)$, maka dapat diambil subgraf dengan 3 hanoi sehingga akan tersisa 1 hanoi. Kemudian label {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1} diulangi sampai subgraf $\frac{13-1}{3}$, kemudian pelabelan dilanjutkan dengan label baru yaitu {9, 13, 6}. Hasil pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(13,1)$ ditunjukkan pada Gambar 3.24.



Gambar 3.24 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(13,1)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Berdasarkan Gambar 3.24 di atas dapat diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(13,1)) = 13$. Menggunakan algoritma *backtracking* sudah dicoba semua kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(13,1)$ bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(13,1))$ tidak mungkin 12.

Berdasarkan data di atas, karena $\lambda_{3,2,1}(Sc(7,1)) = 13$ dan $\lambda_{3,2,1}(Sc(13,1)) = 13$, maka diperoleh dugaan bahwa

$\lambda_{3,2,1}(Sc(n,1)) = 13$, untuk n ganjil saat $n \equiv 1(mod\ 3)$ dan $n > 1$.

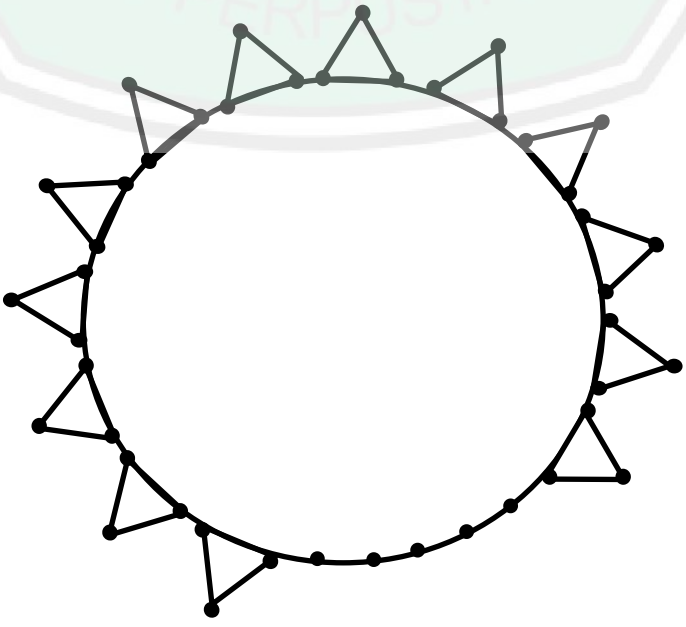
Sehingga dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

Teorema 3.3

Untuk sebarang graf *super cycle* $Sc(n,1)$ untuk n ganjil saat $n \equiv 1(mod\ 3)$ dan $n > 1$, maka nilai minimal label terbesar untuk pelabelan titik $L(3,2,1)$ dari $Sc(n,1)$ adalah $\lambda_{3,2,1}(Sc(n,1)) = 13$.

Bukti:

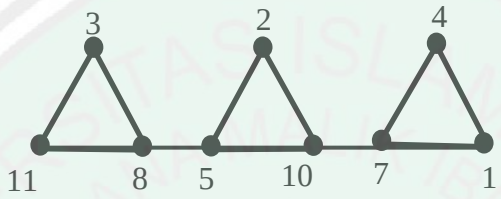
Graf $Sc(n,1)$ saat n ganjil untuk $n \equiv 1(mod\ 3)$ dapat digambar sebagai berikut



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Gambar 3.25 Graf $Sc(n,1)$ saat n Ganjil untuk $n \equiv 1(mod\ 3)$

Graf $Sc(n,1)$ saat n ganjil untuk $n \equiv 1(mod\ 3)$ dengan $n \geq 7$, maka dapat diambil subgraf dan dilabeli dengan {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1} sesuai aturan pelabelan titik $L(3,2,1)$ sebagai berikut.

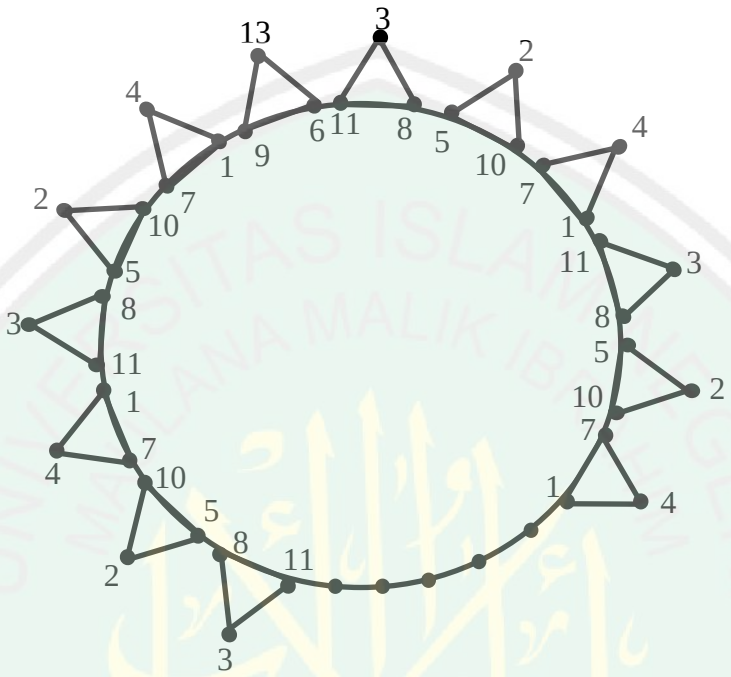


Gambar 3.26 Subgraf dari Graf $Sc(n,1)$ saat n Ganjil untuk $n \equiv 1(mod\ 3)$ dengan Pelabelan Titik $L(3,2,1)$

Pelabelan tersebut merupakan pelabelan titik $L(3,2,1)$. Menggunakan algoritma *backtracking* sudah dicoba semua kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada subgraf dari graf $Sc(n,1)$ bahwa $\lambda_{3,2,1}$ tidak mungkin 10. Karena graf pada Gambar 3.25 merupakan graf dengan $n \equiv 1(mod\ 3)$, ketika diambil subgraf dengan 3 hanoi maka akan tersisa 1 hanoi. Sehingga untuk membuktikan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(n,1)$ saat n ganji untuk $n \equiv 1(mod\ 3)$ dan $n \geq 1$ hanya perlu melabeli subgraf di atas dengan label {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1}. Kemudian label yang terdapat pada titik yang berderajat 2 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 7 (terpendek) yang juga berderajat 2 lainnya. Selanjutnya label yang terdapat pada titik yang berderajat 3 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 6 (terpendek) yang juga berderajat 3 lainnya. Karena graf pada Gambar 3.25 merupakan graf dengan $n \equiv 1(mod\ 3)$, maka label {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1} diulangi sampai subgraf $\frac{n-1}{3}$, kemudian pelabelan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dilanjutkan dengan label baru yaitu {9, 13, 6}. Hasil pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(n,1)$ saat n ganjil untuk $n \equiv 1(mod\ 3)$ ditunjukkan pada Gambar 3.27.



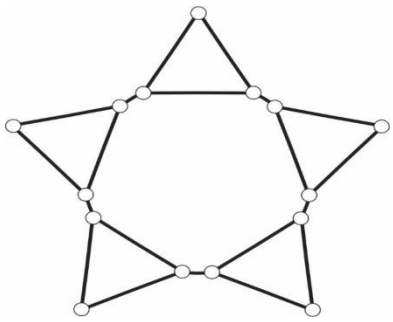
Gambar 3.27 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(n,1)$ saat n Ganjil untuk $n \equiv 1(mod\ 3)$

Dengan demikian, untuk n ganjil saat $n \equiv 1(mod\ 3)$ diperoleh

$$\lambda_{3,2,1}(Sc(n,1)) = \begin{cases} 7, \text{jika } n = 1 \\ 13, \text{jika } n > 1 \end{cases}$$

Kasus III: $n \equiv 2(mod\ 3)$

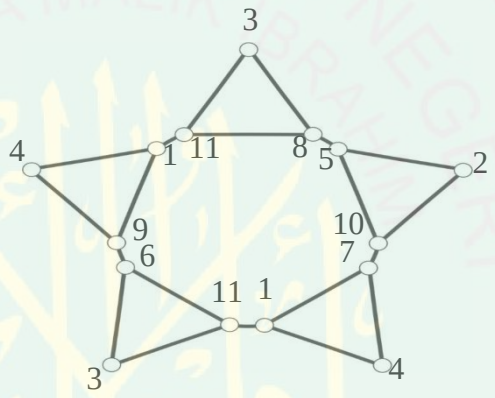
Berikut akan dilakukan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,1)$. Pertama akan diperlihatkan gambar graf $Sc(5,1)$ sebagai berikut.



Gambar 3.28 Graf $Sc(5,1)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

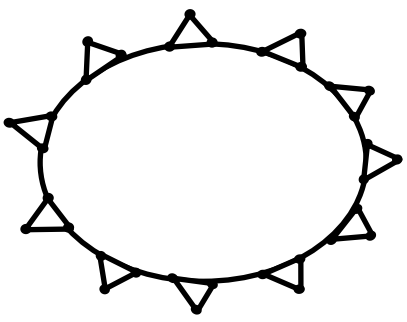
Pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(5,1)$ mengikuti pola seperti pada Gambar 3.11 bagian (a) yaitu {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1}. Karena graf pada Gambar 3.28 merupakan graf dengan $n \equiv 2(mod\ 3)$, maka dapat diambil subgraf dengan 3 hanoi sehingga akan tersisa 2 hanoi. Kemudian label {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1} digunakan untuk melabeli subgraf $\frac{5-2}{3}$, kemudian pelabelan dilanjutkan dengan label baru yaitu {11, 3, 6, 9, 4, 1}. Hasil pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(5,1)$ ditunjukkan pada Gambar 3.29.



Gambar 3.29 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(5,1)$

Berdasarkan Gambar 3.35 di atas dapat diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(5,1)) = 11$. Menggunakan algoritma *backtracking* sudah dicoba semua kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(5,1)$ bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(5,1))$ tidak mungkin 10.

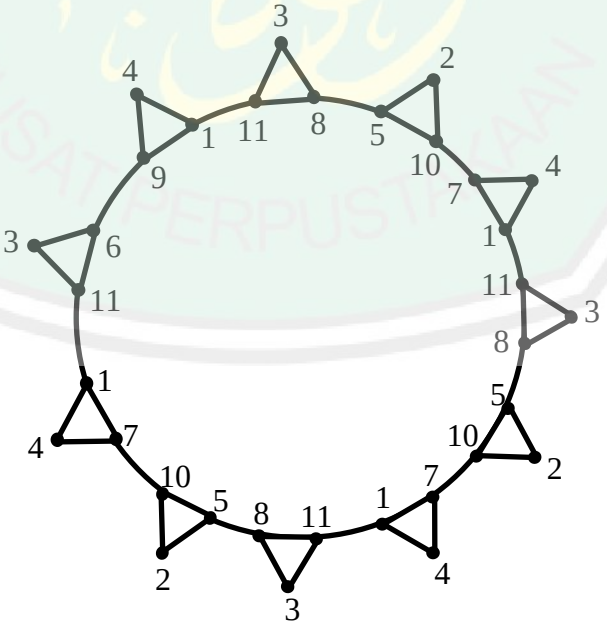
Selanjutnya akan dilakukan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(11,1)$. Sebelumnya akan diperlihatkan gambar graf $Sc(11,1)$ sebagai berikut.



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Gambar 3.30 Graf $Sc(11, 1)$

Pelabelan titik $L(3, 2, 1)$ pada graf $Sc(11, 1)$ mengikuti pola seperti pada Gambar 3.11 bagian (a) yaitu {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1}. Kemudian label yang terdapat pada titik yang berderajat 2 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 7 (terpendek) yang juga berderajat 2 lainnya. Selanjutnya label yang terdapat pada titik yang berderajat 3 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 6 (terpendek) yang juga berderajat 3 lainnya. Karena graf pada Gambar 3.30 merupakan graf dengan $n \equiv 2(mod\ 3)$, maka dapat diambil subgraf dengan 3 hanoi sehingga akan tersisa 2 hanoi. Kemudian label {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1} diulangi sampai subgraf $\frac{11-2}{3}$, kemudian pelabelan dilanjutkan dengan label baru yaitu {11, 3, 6, 9, 4, 1}. Hasil pelabelan titik $L(3, 2, 1)$ pada graf $Sc(11, 1)$ ditunjukkan pada Gambar 3.31.



Gambar 3.31 Pelabelan Titik $L(3, 2, 1)$ pada Graf $Sc(11, 1)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Berdasarkan Gambar 3.31 di atas dapat diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(11,1)) = 11$. Menggunakan algoritma *backtracking* sudah dicoba semua kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada $Sc(11,1)$ bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(11,1))$ tidak mungkin 10.

Berdasarkan data di atas, karena $\lambda_{3,2,1}(Sc(5,1)) = 11$ dan $\lambda_{3,2,1}(Sc(11,1)) = 11$, maka diperoleh dugaan bahwa

$\lambda_{3,2,1}(Sc(n,1)) = 11$, untuk n ganjil saat $n \equiv 2(mod\ 3)$.

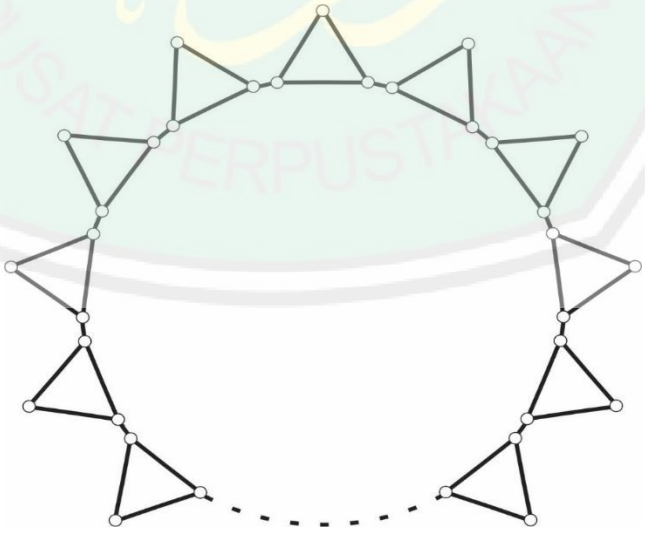
Sehingga dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

Teorema 3.4

Untuk sebarang graf *super cycle* $Sc(n,1)$ dengan $n \equiv 2(mod\ 3)$ dan n ganjil, maka nilai minimal label terbesar untuk pelabelan titik $L(3,2,1)$ dari $Sc(n,1)$ adalah $\lambda_{3,2,1}(Sc(n,1)) = 11$.

Bukti:

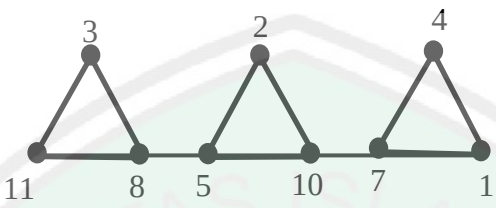
Graf $Sc(n,1)$ saat n ganjil untuk $n \equiv 2(mod\ 3)$ dapat digambar sebagai berikut.



Gambar 3.32 Graf $Sc(n,1)$ saat n Ganjil untuk $n \equiv 2(mod\ 3)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

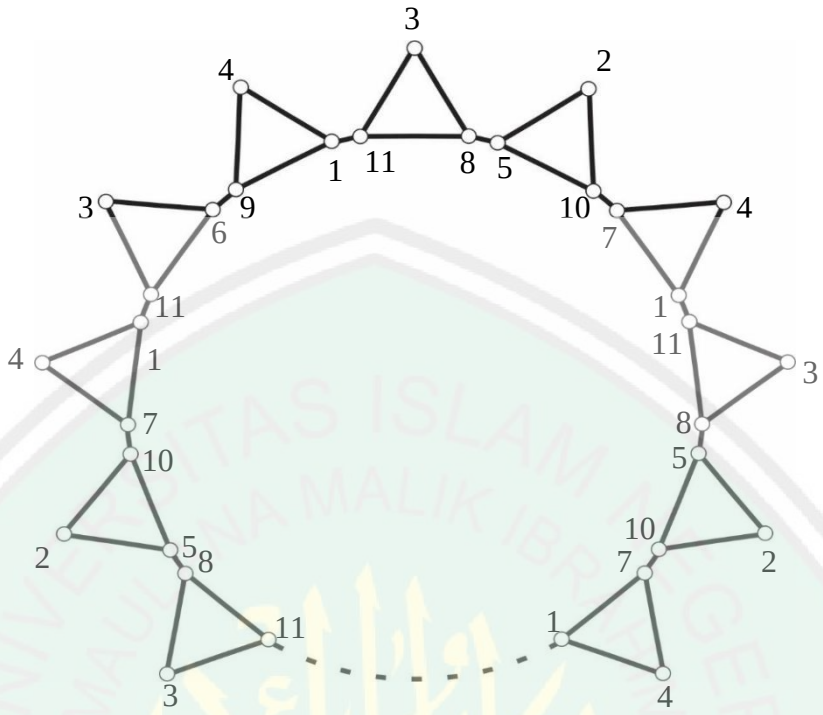
Graf $Sc(n,1)$ saat n ganjil untuk $n \equiv 2(mod\ 3)$ di atas dapat diambil subgraf dan dilabeli dengan {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1} sesuai aturan pelabelan titik $L(3,2,1)$ sebagai berikut.



Gambar 3.33 Subgraf dari Graf $Sc(n,1)$ saat n Ganjil untuk $n \equiv 2(mod 3)$ dengan Pelabelan Titik $L(3,2,1)$

Pelabelan tersebut merupakan pelabelan titik $L(3,2,1)$. Menggunakan algoritma *backtracking* sudah dicoba semua kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada subgraf dari graf $Sc(n,1)$ bahwa $\lambda_{3,2,1}$ tidak mungkin 10. Karena graf pada Gambar 3.32 merupakan graf dengan $n \equiv 2(mod\ 3)$, ketika diambil subgraf dengan 3 hanoi maka akan tersisa 2 hanoi. Sehingga untuk membuktikan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(n,1)$ saat n ganji untuk $n \equiv 2(mod\ 3)$ hanya perlu melabeli subgraf di atas dengan label {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1}. Kemudian label yang terdapat pada titik yang berderajat 2 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 7 (terpendek) yang juga berderajat 2 lainnya. Selanjutnya label yang terdapat pada titik yang berderajat 3 digunakan kembali untuk melabeli titik yang berjarak 6 (terpendek) yang juga berderajat 3 lainnya. Karena graf pada Gambar 3.32 merupakan graf dengan $n \equiv 2(mod\ 3)$, maka label {11, 3, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1} diulangi sampai subgraf $\frac{n-2}{3}$, kemudian pelabelan dilanjutkan dengan label baru yaitu {11, 3, 6, 9, 4, 1}. Hasil pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(n,1)$ saat n ganjil dengan $n \equiv 2(mod\ 3)$ ditunjukkan pada Gambar 3.34.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

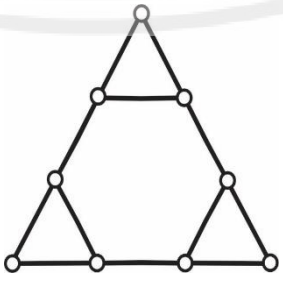


Gambar 3.34 Pelabelan Titik $L(3,2\ 1)$ pada Graf $Sc(n,1)$ saat n Ganjil untuk $n \equiv 2(mod\ 3)$

Dengan demikian, untuk n ganjil saat $n \equiv 2(mod\ 3)$ diperoleh $\lambda_{3,2,1}(Sc(n,1)) = 11$.

3.2 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf *Super Cycle* $Sc(n,r)$ untuk $r = 2$

Berikut akan dilakukan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(n,2)$. Pertama akan diperlihatkan gambar graf $Sc(1,2)$ sebagai berikut.

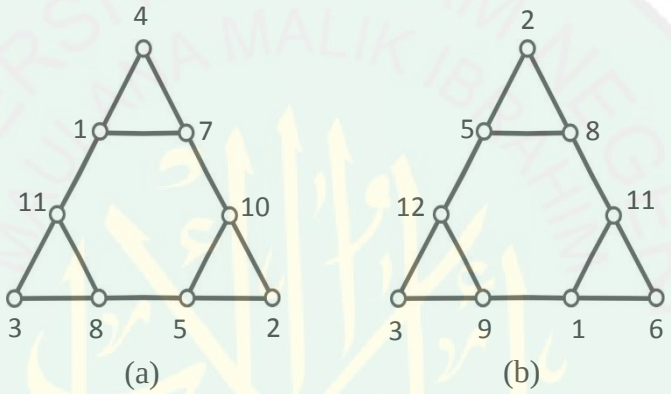


Gambar 3.35 Graf $Sc(1,2)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

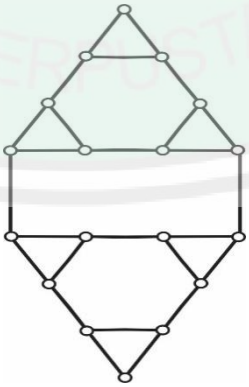
Karena gambar $Sc(1,2)$ sama dengan gambar $Sc(3,1)$ maka dapat diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(1,2)) = 11$. Menggunakan algoritma *backtracking* sudah dicoba semua kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(1,2)$ bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(1,2))$ tidak mungkin 10.

Contoh beberapa kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(1,2)$ adalah sebagai berikut.



Gambar 3.36 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(1,2)$

Selanjutnya akan dilakukan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(2,2)$. Sebelumnya akan diperlihatkan gambar graf $Sc(2,2)$ sebagai berikut.

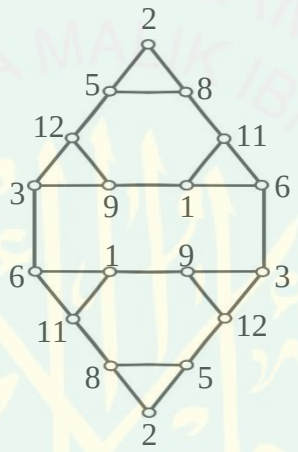


Gambar 3.37 Graf $Sc(2,2)$

Pola pada Gambar 3.36 bagian (a) bukan merupakan pola kunci, karena pada saat pola tersebut digunakan untuk melabeli $Sc(2,2)$, terdapat label yang

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

memiliki selisih satu pada titik yang berjarak satu, sehingga tidak memenuhi aturan pelabelan titik $L(3,2,1)$. Pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(2,2)$ mengikuti pola pada Gambar 3.36 bagian (b) yaitu {2, 8, 11, 6, 1, 9, 3, 12, 5}. Kemudian pola tersebut diputar sedemikian sehingga setiap titik yang berderajat 2 memiliki label yang sama yaitu 2. Hasil dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(2,2)$ ditunjukkan pada Gambar 3.38.

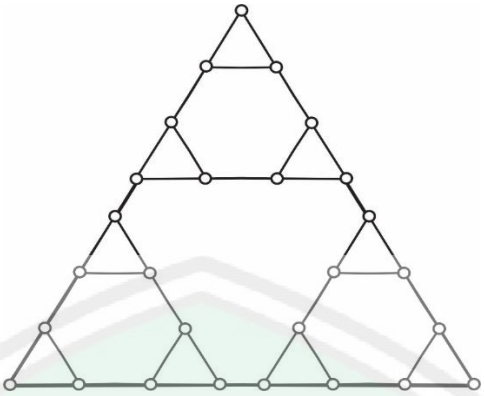


Gambar 3.38 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(2,2)$

Berdasarkan Gambar 3.38 di atas dapat diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(2,2)) = 12$. Menggunakan algoritma *backtracking* sudah dicoba semua kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(2,2)$ bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(2,2))$ tidak mungkin 11.

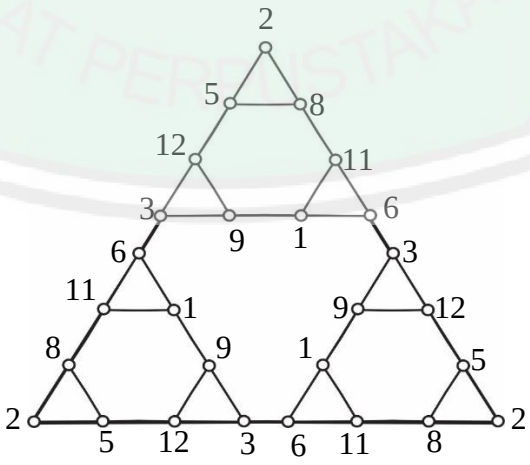
Selanjutnya akan dilakukan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(3,2)$. Sebelumnya akan diperlihatkan gambar graf $Sc(3,2)$ sebagai berikut.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.39 Graf $Sc(3,2)$

Pola pada Gambar 3.36 bagian (a) bukan merupakan pola kunci, karena pada saat pola tersebut digunakan untuk melabeli $Sc(3,2)$, terdapat label yang memiliki selisih satu pada titik yang berjarak satu, sehingga tidak memenuhi aturan pelabelan titik $L(3,2,1)$. Pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(3,2)$ mengikuti pola pada Gambar 3.36 bagian (b) yaitu {2, 8, 11, 6, 1, 9, 3, 12, 5}. Kemudian pola tersebut diputar sedemikian sehingga setiap titik yang berderajat 2 memiliki label yang sama yaitu 2. Hasil dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(3,2)$ ditunjukkan pada Gambar 3.40.



Gambar 3.40 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf $Sc(3,2)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Berdasarkan Gambar 3.40 di atas dapat diketahui bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(2,2)) = 12$. Menggunakan algoritma *backtracking* sudah dicoba semua kemungkinan pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(3,2)$ bahwa $\lambda_{3,2,1}(Sc(3,2))$ tidak mungkin 11.

Berdasarkan data di atas, karena $\lambda_{3,2,1}(Sc(2,2)) = 12$ dan $\lambda_{3,2,1}(Sc(3,2))$ =12, maka diperoleh dugaan bahwa

$$\lambda_{3,2,1}(Sc(n,2)) = 12 \text{ untuk } n > 1.$$

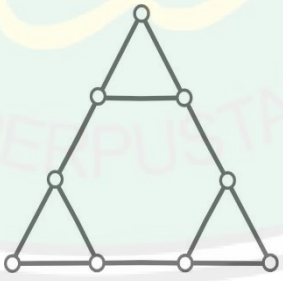
Sehingga dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

Teorema 3.5

Untuk sebarang graf *super cycle* $Sc(n,2)$ untuk $n > 1$, maka nilai minimal label terbesar untuk pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada $Sc(n,2)$ adalah $\lambda_{3,2,1}(Sc(n,2)) = 12$.

Bukti:

$Sc(n,2)$ pasti memuat $Sc(1,2)$ sebagai subgrafnya. Berikut gambar graf $Sc(1,2)$.

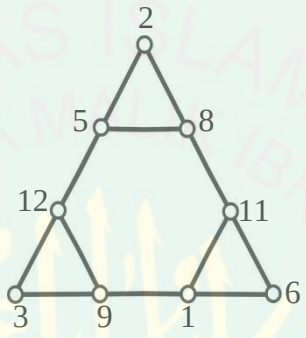


Gambar 3.41 Subgraf dari Graf $Sc(n,2)$

Subgraf tersebut dapat dilabeli dengan {1, 4, 7, 10, 2, 5, 8, 3, 11} sesuai dengan aturan pelabelan titik $L(3,2,1)$. Tetapi pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada subgraf dengan label {1, 4, 7, 10, 2, 5, 8, 3, 11} tidak berlaku untuk melabeli graf $Sc(n,2)$ untuk $n \geq 2$, sebab akan terdapat label yang memiliki selisih satu pada titik yang

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

berjarak satu hal tersebut tidak sesuai dengan aturan pelabelan titik $L(3,2,1)$. Sehingga untuk membuktikan nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(n,2)$ adalah dengan cara melabeli subgraf di atas menggunakan label baru yaitu {2, 8, 11, 6, 1, 9, 3, 12, 5}. Hasil pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada subgraf dari $Sc(n,2)$ ditunjukkan pada Gambar 3.42.



Gambar 3.42 Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Subgraf

Pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf $Sc(n,2)$ mengikuti pola pada Gambar 3.42 yaitu {2, 8, 11, 6, 1, 9, 3, 12, 5}. Kemudian pola tersebut diputar sedemikian sehingga setiap titik yang berderajat 2 memiliki label yang sama yaitu 2. Dengan demikian terbukti bahwa, $\lambda_{3,2,1}(Sc(n,2)) = 12$.

3.3 Memahami Silaturrahim dengan Pendalaman Teori Graf

Allah Swt. telah menjelaskan pada Al-Quran surat Al-Hujurat ayat 10 bahwa "sesungguhnya orang-orang yang beriman itu bersaudara. Karena itu damaikanlah antara saudara-saudaramu dan bertawakallah kepada Allah supaya kamu mendapat rahmat". Oleh karena itu, setiap manusia diperintahkan untuk menyambung hubungan baik (silaturrahim) terlebih lagi hubungan antar umat Islam. Arti silaturrahim di sini adalah ikatan yang mengikat sesama manusia

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

berupa ikatan iman yang menuntut haknya agar dijaga dalam rasa saling mencintai karena Allah Swt. di antara mereka. Silaturrahim dapat mendatangkan manfaat bagi yang menjalankan, diantaranya yaitu merekatkan ukhuwah dan kekerabatan yang mulai pupus atau berkurang, bersilaturrahim bisa memperbanyak rezeki, dengan silaturrahim bisa menambah kenalan dan memperluas persaudaraan, menambah ilmu dan hikmah hidup yang banyak dari berbagai orang, menambah empati dan menjauhi sikap egois, dan menambah kekuatan dan kesatuan Islam.

Dalam teori graf ini, manusia dimisalkan sebagai himpunan titik. Jika antar manusia tersebut menjalin silaturrahim dengan baik maka antar titik satu dengan titik yang lain ada sisi yang menghubungkan namun jika antar manusia tersebut tidak menjalin silaturrahim atau tidak saling mengenal maka grafnya hanya terdiri dari titik saja dan tidak terdapat sisi yang menghubungkan antar titik satu dengan yang lain, seperti diperlihatkan dalam contoh berikut.

Gambar 3.43 (a) Representasi Manusia yang Menjalin Silaturrahim
(b) Representasi Manusia yang Tidak Menjalin Silaturrahim

Pada Gambar 3.43 (a) terlihat ada tiga titik, setiap titik dengan titik lainnya saling terhubung. Hal ini menggambarkan bahwa antar manusia tersebut terjalin silaturrahim yang baik. Sehingga dapat disimpulkan bahwa antar manusia yang satu dengan yang lain terjalin ukhuwah yang begitu erat (terhubung) dan antara manusia satu dengan yang lain saling mengenal. Karena manusia (umat

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Islam) saling mengenal dan terjalin ukhuwah maka sangat berpengaruh bagi kekuatan dan kesatuan Islam. Pada Gambar 3.43 (b) terlihat bahwa ada tiga titik dan semuanya tidak mempunyai sisi. Hal ini dapat diartikan bahwa antara manusia yang satu dengan manusia lainnya tidak terjalin silaturrahim. Sehingga ukhuwah pun tidak terjadi antara umat Islam dan tanpa silaturrahim tentu tidak dapat menambah kenalan, tidak akan mengenal keluarga, kerabat, dan sahabat yang lain. Sedangkan, setiap umat Islam adalah saudara. Hal tersebut akan berpengaruh pada kekuatan dan kesatuan Islam. Andaikan umat Islam hidup individual dan tidak saling membantu, maka umat Islam bisa bercerai berai dan kesatuan Islam akan terancam. Untuk itu diwajibkan bagi setiap muslim untuk saling bersilaturrahim.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dijelaskan, dapat disimpulkan bahwa nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ untuk $r = 1$ adalah

$$\lambda_{3,2,1}(Sc(n,r)) = \begin{cases} 10, \text{jika } n \text{ genap} \\ 7, \text{jika } n = 1 \\ 11, \text{jika } n \equiv 2(mod\ 3), n \text{ ganjil} \\ 13, \text{jika } n \equiv 1(mod\ 3), n \text{ ganjil} \\ 11, \text{jika } n \equiv 0(mod\ 3), n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Untuk $r = 2$, nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik $L(3,2,1)$ pada graf *super cycle* $Sc(n,r)$ adalah:

$$\lambda_{3,2,1}(Sc(n,r)) = \begin{cases} 11, \text{jika } n = 1 \\ 12, \text{jika } n > 1 \end{cases}$$

4.2 Saran

Berdasarkan penelitian ini, maka bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat mengembangkan penelitian pada graf *super cycle* dengan menggunakan jenis pelabelan yang lain.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir, Azizah, N.N., dan Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press.

Al-Jazairi, Syaikh A.B.J. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar*. Jakarta: Darus Sunnah.

Al-Maraghi, A.M. 1993. *Tafsir Al-Maraghi*. Terjemahan Bahrun Abu Bakar. Semarang: CV. Toha Putra Semarang.

Anggraeni, M.D. 2013. *Pelabelan $L(3,2,1)$ dan Pembentukan Graf Middle pada Beberapa Graf Khusus*. Skripsi. Semarang: FMIPA Universitas Negeri Semarang.

Ash-Shiddieqy, Muhammad H.T. 2000. *Tafsir Al-Qur'anul Majid An-Nuur*. Semarang: Pustaka Rizki Putra.

Clipperton, J., Gehrtz, J., Szaniszlo, Z., dan Torkornoo, D. 2005. *$L(3,2,1)$* Labeling of Simple Graphs. *Paper*, (Online), (https://www.valpo.edu/mathematics-statistics/files/2015/07/L3-2-1-Labeling-of-Simple-Graphs.pdf), diakses 01 Juli 2018.

Fatimah, S., Sudarsana, I.W., dan Musdalifah, S. 2016. Pelabelan *$L(2,1)$* pada Operasi Beberapa Kelas Graf. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, (Online), 13 (2): 73-84, (http://jurnal.untad.ac.id/jurnal/index.php/JIMT/article/viewFile/7207/5797), diakses 02 Juli 2018.

Gallian, Joseph A. 2018. A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics, DS6*, (Online), (http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/viewFile/DS6/pdf), diakses 26 Februari 2019.

Jauhari, M.N. 2013. *Fungsi Iterasi dari Subdivisi dan Operasi Graf Garis pada Graf*. Tesis tidak dipublikasikan. Bandung: ITB.

Lingscheit, M., Ruff, K., dan Ward, J. 2009. *$L(d,j,s)$* Minimal and Surjective Graf Labeling. *Rose-Hulman Mathematics Journal*, (Online), 10 (12): 2, (https://scholar.rose-hulman.edu/cgi/viewcontent.cgi?referer=https://www.google.co.id/&httpsredir=1&article=1146&context=rhumj), diakses 02 Juli 2018.

Karimah, L.N. 2016. *Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Super cycle*. Skripsi. Tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maliki Malang.

Setyaningsih, M.D. 2010. *Pelabelan $L(3,2,1)$ pada Beberapa Jenis Graf Sederhana*. Skripsi. Semarang: FMIPA Universitas Diponegoro.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Shihab, M.Q. 2003. *Tafsir Al-Mishbah Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.

Wahyuningrum, T dan Usada, E. 2016. *Matematika Disrit*. [Online]. Yogyakarta: CV. Budi Utama. (https://books.google.co.id/books?id=CdVBDAAAQBAJ&pg=PA111&dq=sejarah+graf&hl=id&sa=X&ved=0ahUKEwj_xa77lN7ZAhUGupQKHWTcDJwQ6wEIMjAC#v=onepage&q=sejarah%20graf&f=false), diakses 08 Maret 2018.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

RIWAYAT HIDUP

Lusiana Ika Putri dilahirkan di Kediri pada tanggal 30 Mei 1995, merupakan anak pertama dari dua bersaudara, pasangan bapak Surono dan ibu Sringatin. Pendidikan dasarnya ditempuh di kampung halamannya di SDN Selodono yang ditamatkan pada tahun 2008.

Pada tahun yang sama dia melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP N 1 Kandat yang ditamatkan pada tahun 2011, kemudian dia melanjutkan pendidikan menengah atas di SMA N 1 Kandat dan menamatkan pendidikan tersebut pada tahun 2014. Jenjang pendidikan berikutnya dia tempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SNMPTN undangan dengan mengambil Jurusan Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang
Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lusiana Ika Putri
NIM : 14610029
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Minimal Label Terbesar dari Pelabelan Titik $L(3,2,1)$ pada Graf *Super Cycle*
Pembimbing I : H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd
Pembimbing II : Achmad Nashichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	30 Juli 2018	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	02 Agustus 2018	Konsultasi Keagamaan Bab I dan II	2.
3.	05 Agustus 2018	Revisi Keagamaan Bab I dan II	3.
4.	07 Agustus 2018	ACC Keagamaan Bab I dan II	4.
5.	16 Agustus 2018	Konsultasi Bab III	5.
6.	27 Agustus 2018	Revisi Bab III	6.
7.	3 September 2018	Revisi Bab III	7.
8.	25 September 2018	Konsultasi Bab I dan III	8.
9.	17 Oktober 2018	Konsultasi Keagamaan Bab III	9.
10.	08 November 2018	Revisi Keagamaan Bab III	10.
11.	09 November 2018	Konsultasi Bab I, II, III, dan IV	11.
12.	09 November 2018	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 09 November 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG