TOTAL ECCENTRICITY DAN *ECCENTRIC CONNECTIVITY INDEX* DARI GRAF IDENTITAS RING KOMUTATIF DENGAN UNSUR KESATUAN

SKRIPSI

OLEH
LILA ARYANI PUSPITASARI
NIM. 15610120

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

TOTAL ECCENTRICITY DAN *ECCENTRIC CONNECTIVITY INDEX* DARI GRAF IDENTITAS RING KOMUTATIF DENGAN UNSUR KESATUAN

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Lila Aryani Puspitasari
NIM. 15610107

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

***TOTAL ECCENTRICITY* DAN *ECCENTRIC CONNECTIVITY INDEX* DARI GRAF IDENTITAS RING KOMUTATIF DENGAN UNSUR KESATUAN**

SKRIPSI

Oleh
Lila Aryani Puspitasari
NIM. 15610107

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 13 Mei 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	M. Nafie Jauhari, M.Si
NIP. 19751006 200312 1 001	NIPT. 19870218 20160801 1 056

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

TOTAL ECCENTRICITY* DAN *ECCENTRIC CONNECTIVITY INDEX
DARI GRAF IDENTITAS RING KOMUTATIF DENGAN
UNSUR KESATUAN

SKRIPSI

Oleh
Lila Aryani Puspitasari
NIM. 15610107

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 23 Mei 2019

Penguji Utama	:	Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....
Ketua Penguji	:	H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	:	M. Nafie Jauhari, M.Si	....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

KEMENTERIAN AGAMA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Lila Aryani Puspitasari

NIM : 15610107

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : *Total Eccentricity* dan *Eccentric Connectivity Index* dari Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 23 Mei 2019
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
482AEF064818913
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Lila Aryani Puspitasari
NIM. 15610107

MOTO

"Jadikanlah hari ini lebih baik daripada hari kemarin dan esok lebih baik daripada hari ini"

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Ibu dan Bapak tercinta yang tak pernah lelah untuk memberikan dukungan fisik maupun psikis kepada penulis, tak pernah luput dalam menyambungkan doa kepada Tuhan, dan berbagai pengorbanan yang tak pernah ternilai. Serta kepada adik tersayang M. Arif R. Ferdiansyah yang selalu menjadi kebanggaan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas limpahan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Total Eccentricity* dan *Eccentric Connectivity Index* dari Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu Islam.

Pada penyusunan skripsi ini, penulis mendapatkan banyak bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.

5. Muhammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, ilmu, dan motivasinya kepada penulis.
6. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen wali yang selalu memberikan arahan dan motivasinya kepada penulis.
7. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam proses perkuliahan.
8. Bapak, Ibu serta adik tercinta yang selalu memberikan doa, semangat dan motivasi demi keberhasilan penulis.
9. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2015 dan Asrama Rahmany atas dukungan dan motivasinya dalam menggapai cita-cita.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, Mei 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Puspitasari, Lila Aryani. 2019. ***Total Eccentricity* dan *Eccentric Connectivity Index* dari Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) M. Nafie Jauhari, M.Si.

Kata kunci: *eccentric connectivity index*, graf identitas, ring komutatif dengan unsur kesatuan, *total eccentricity*

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung sederhana. *Total eccentricity* dari graf G didefinisikan sebagai $\xi(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v)$, dengan $e(v)$ adalah eksentrisitas dari titik v di G. *Eccentric connectivity index* dari graf G didefinisikan sebagai $\xi^c(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v)deg(v)$, dengan $deg(v)$ merupakan derajat dari titik v di G. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan pada modulo $Z_{2p}, Z_{3p}, Z_{4p}, Z_{5p}, Z_{6p}$, dengan p prima. Hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Misalkan $(Z_{2p}, +, \cdot)$ untuk p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan pada bilangan bulat modulo $2p$, maka:
   (a) $\xi\left(I(Z_{2p})\right) = 2$ dan $\xi^c\left(I(Z_{2p})\right) = 2$, untuk $p = 2$ atau $p = 3$
   (b) $\xi\left(I(Z_{2p})\right) = 2p - 3$ dan $\xi^c\left(I(Z_{2p})\right) = 5p - 12$, untuk $p \geq 5$

2. Misalkan $(Z_{3p}, +, \cdot)$ untuk p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan pada bilangan bulat modulo $3p$, maka:
   (a) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 2$ dan $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 2$, untuk $p = 2$
   (b) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 11$ dan $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 23$, untuk $p = 3$
   (c) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 4p - 5$ dan $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 10p - 21$, untuk $p \geq 5$

3. Misalkan $(Z_{4p}, +, \cdot)$ untuk p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan pada bilangan bulat modulo $4p$, maka:
   (a) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 7$ dan $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 9$, untuk $p = 2$ atau $p = 3$
   (b) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 4p - 2$ dan $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 10p - 21$, untuk $p \geq 5$

4. Misalkan $(Z_{5p}, +, \cdot)$ untuk p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan pada bilangan bulat modulo $5p$, maka:
   (a) $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 7$ dan $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 13$, untuk $p = 2$
   (b) $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 15$ dan $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 29$, untuk $p = 3$
   (c) $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 39$ dan $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 93$, untuk $p = 5$
   (d) $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 8p - 9$ dan $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 20p - 31$, untuk $p \geq 7$

5. Misalkan $(Z_{6p}, +, \cdot)$ untuk p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan pada bilangan bulat modulo $6p$, maka:
   (a) $\xi\left(I(Z_{6p})\right) = 7$ dan $\xi^c\left(I(Z_{6p})\right) = 9$, untuk $p = 2$
   (b) $\xi\left(I(Z_{6p})\right) = 11$ dan $\xi^c\left(I(Z_{6p})\right) = 23$, untuk $p = 3$
   (c) $\xi\left(I(Z_{6p})\right) = 4p - 5$ dan $\xi^c\left(I(Z_{6p})\right) = 10p - 21$, untuk $p \geq 5$

Penulis menyarankan bahwa dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan pada modulo $Z_{2p}, Z_{3p}, Z_{4p}, Z_{6p}$ untuk $p \geq 5$ dan Z_{5p} untuk $p \geq 7$, dengan p prima perlu dikaji lebih lanjut mengenai pola keterhubungan setiap dua titik yang berderajat 2 (pasangan *unit*).

ABTRACT

Puspitasari, Lila Aryani. 2019. **Total Eccentricity and Eccentric Connectivity Index of Identity Graph of a Finite Commutative Ring with Unity**. Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) M. Nafie Jauhari, M.Si.

Keyword: *commutative ring with unity, eccentric connectivity index, identity graph, total eccentricity*

Let $G = (V, E)$ is a simple connected graph. The total eccentricity of graph G defined as $\xi(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v)$, where $e(v)$ is eccentricity of vertex v in G. The eccentric connectivity index of graph G defined as $\xi^c(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v)deg(v)$, where $deg(v)$ is degree of vertex v in G. This study determined total eccentricity and eccentric connectivity index of identity graph of finite commutative ring with unity of $Z_{2p}, Z_{3p}, Z_{4p}, Z_{5p}, Z_{6p}$. The results of this study are as follows:

1. Let $(Z_{2p}, +, \cdot)$ be a commutative ring with unity of integer modulo $2p$, for a prime p. Then,
   (a) $\xi\left(I(Z_{2p})\right) = 2$ and $\xi^c\left(I(Z_{2p})\right) = 2$, for $p = 2$ or $p = 3$
   (b) $\xi\left(I(Z_{2p})\right) = 2p - 3$ and $\xi^c\left(I(Z_{2p})\right) = 5p - 12$, for $p \geq 5$

2. Let $(Z_{3p}, +, \cdot)$ be a commutative ring with unity of integer modulo $3p$, for a prime p. Then,
   (a) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 2$ and $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 2$, for $p = 2$
   (b) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 11$ and $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 23$, for $p = 3$
   (c) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 4p - 5$ and $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 10p - 21$, for $p \geq 5$

3. Let $(Z_{4p}, +, \cdot)$ be a commutative ring with unity of integer modulo $4p$, for a prime p. Then,
   (a) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 7$ and $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 9$, for $p = 2$ or $p = 3$
   (b) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 4p - 2$ and $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 10p - 21$, for $p \geq 5$

4. Let $(Z_{5p}, +, \cdot)$ be a commutative ring with unity of integer modulo $5p$, for a prime p. Then,
   (a) $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 7$ and $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 13$, for $p = 2$
   (b) $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 15$ and $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 29$, for $p = 3$

(c) $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 39$ and $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 93$, for $p = 5$
(d) $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 8p - 9$ and $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 20p - 31$, for $p \geq 7$

5. Let $(Z_{6p}, +, \cdot)$ be a commutative ring with unity of integer modulo $6p$, for a prime p. Then,
   (a) $\xi\left(I(Z_{6p})\right) = 7$ and $\xi^c\left(I(Z_{6p})\right) = 9$, for $p = 2$
   (b) $\xi\left(I(Z_{6p})\right) = 11$ and $\xi^c\left(I(Z_{6p})\right) = 23$, for $p = 3$
   (c) $\xi\left(I(Z_{6p})\right) = 4p - 5$ and $\xi^c\left(I(Z_{6p})\right) = 10p - 21$, for $p \geq 5$

The author suggests from the commutative ring of identity graph with the unity of modulo $Z_{2p}, Z_{3p}, Z_{4p}, Z_{6p}$ for $p \geq 5$ and Z_{5p} for $p \geq 7$, with p prime need to be studied further regarding the pattern of connectivity of every two vertices with the degree 2 (pair of units).

ملخص

فوفيتساري, ليلا اريايي. ٢٠١٩ . **الانحراف الكلي ومؤشر الاتصال الغريب الأطوار للرسم البياني للهوية لخاتم تبادلي محدود مع الوحدة.** شعبة الرياضيات، كلية العلوم و التكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) الدكتور عبد الشاكر الماجستير (٢)محمد نافي جوهار الماجستير

الكلمات الرئيسية: الحلقة التبادلية مع الوحدة، *eccentricity connectivity index*، مخطاط للهوية، *total eccentricity*

دع $G = (V, E)$ عبارة عن خطاط متصل بسيط. *total eccentricity* من الخطاط G يعرف بأنه $\xi(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v)$، حيث $e(v)$ غريب الأطوار من قمة النقطة v في G. *Eccentric connectivity index* من الخطاط G يعرف بأنه $\xi^c(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v)\, deg(v)$، حيث $deg(v)$ هي درجة من قمة الرأس v في G. حددت هذه الدراسة مجموع *total eccentricity* و *eccentric connectivity index* من هوية الخطاط للحلقة التبادلية المحدودة مع وحدة Z_{2p}، Z_{3p}، Z_{4p}، Z_{5p}، Z_{6p}. وفيما يلي نتيجة هذه الدراسة:

١) دعوانا $(Z_{2p}, +, \cdot)$ يكون حلقه تبادليه مع وحده العدد الصحيح مودولو $2p$، حيث p هي prima. ثم

أ) $\xi\left(I(Z_{2p})\right) = 2$ و $\xi^c\left(I(Z_{2p})\right) = 2,$ من اجل $p = 2$ أو $p = 3$

ب) $\xi\left(I(Z_{2p})\right) = 2p - 3$ و $\xi^c\left(I(Z_{2p})\right) = 5p - 12,$ من اجل $p \geq 5$

٢) دعوانا $(Z_{3p}, +, \cdot)$ يكون حلقه تبادليه مع وحده العدد الصحيح مودولو $3p$، حيث p هي prima. ثم

أ) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 2$ و $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 2,$ من اجل $p = 2$

ب) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 11$ و $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 23,$ من اجل $p = 3$

ج) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 4p - 5$ و $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 10p - 21,$ من اجل $p \geq 5$

٣) دعوانا $(Z_{4p}, +, \cdot)$ يكون حلقه تبادليه مع وحده العدد الصحيح مودولو $4p$، حيث p هي prima. ثم

أ) $p = 3$ أو $p = 2$ من اجل $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 7$ و $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 9,$

ب) $p \geq 5$ من اجل $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 4p - 2$ و $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 10p - 21,$

٤) دعوانا $(Z_{5p}, +, \cdot)$ يكون حلقه تبادليه مع وحده العدد الصحيح مودولو $5p$، حيث p هي prima. ثم

أ) $p = 2$ من اجل $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 7$ و $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 13,$

ب) $p = 3$ من اجل $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 15$ و $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 29,$

ج) $p = 5$ من اجل $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 39$ و $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 93,$

د) $p \geq 7$ من اجل $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 8p - 9$ و $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 20p - 31,$

٥) دعوانا $(Z_{6p}, +, \cdot)$ يكون حلقه تبادليه مع وحده العدد الصحيح مودولو $6p$، حيث p هي prima. ثم

أ) $p = 2$ من اجل $\xi\left(I(Z_{6p})\right) = 7$ و $\xi^c\left(I(Z_{6p})\right) = 9,$

ب) $p = 3$ من اجل $\xi\left(I(Z_{6p})\right) = 11$ و $\xi^c\left(I(Z_{6p})\right) = 23,$

ج) $p \geq 5$ من اجل $\xi\left(I(Z_{6p})\right) = 4p - 5$ و $\xi^c\left(I(Z_{6p})\right) = 10p - 21,$

يقترح المؤلف من حلقة تبادلية من الخطاط الهوية مع عناصر حدة مودولو Z_{2p} و Z_{3p} و Z_{4p} و Z_{6p} لـ $p \geq 5$ و Z_{5p} لـ$p \geq 7$، مع ع مقتبل تحتاج إلى مزيد من الدراسة بشأن نمط **أدجيسينت** كل رأسين مع درجة 2 (زوج من وحدة).

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf merupakan salah satu topik bahasan dalam penelitian matematika abstrak. Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan berhingga dan tidak kosong dari objek-objek yang disebut titik dan E adalah himpunan yang mungkin kosong dari 2-elemen subhimpunan pada titik V yang disebut sisi. Himpunan titik dan sisi dinotasikan dengan $V(G)$ dan $E(G)$. Jika v adalah titik pada graf G, maka banyak banyak titik di G yang terhubung langsung ke v disebut derajat titik v dan dinotasikan $deg(v)$ (Chartrand, dkk, 2016).

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Titik u dan v dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan u–v di G. Jika untuk setiap dua titik berbeda di G adalah terhubung, maka G disebut graf terhubung. Sebaliknya jika ada dua titik u dan v di G, tetapi tidak terdapat lintasan u–v di G, maka G dikatakan tak terhubung (*disconnected*) (Abdussakir, dkk, 2009).

Misalkan G graf terhubung, untuk setiap $u, v \in V(G)$ terdapat jarak antara u dan v yang didefinisikan sebagai titik terpendek antara u dan v di G dan dinotasikan dengan $d(u, v)$. Jarak maksimal dari titik u dan suatu titik lain di G yang disimbolkan oleh $e(u)$ disebut eksentrisitas (Kusmayadi dan Sudibyo, 2011).

Total eccentricity dari graf G dinotasikan dengan $\xi(G)$ yang didefinisikan sebagai $\xi(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v)$ merupakan jumlah semua eksentrisitas titik v di G (Fathalikhani, dkk, 2014). Penelitian mengenai *total eccentricity* sebelumnya telah dikaji oleh Fathalikhani, dkk (2014) pada beberapa operasi graf, De, dkk (2015) meneliti pada produk *generalized Hierarchical* dari graf, De, dkk (2015) juga meneliti pada beberapa graf komposit, serta Hua dan Miao (2017) meneliti pada pasangan titik yang tidak terhubung di graf.

Eccentric connectivity index pada graf juga menarik untuk diteliti. *Eccentric connectivity index* dari graf G yang dinotasikan dengan $\xi^c(G)$ didefinisikan sebagai $\xi^c(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v)\, deg(v)$ adalah jumlah hasil kali eksentrisitas titik v yang disimbolkan $e(v)$ dan derajat titik v yang disimbolkan $deg(v)$ (Sharma, dkk, 1997). Sebelumnya terdapat beberapa penelitian mengenai *eccentric connectivity index* di antaranya Zhou dan Du (2010) telah meneliti mengenai *eccentric connectivity index*, Morgan, dkk (2011) pada *eccentric connectivity index* dari sebuah graf, Eskender dan Vumar (2013) pada *eccentric connectivity index* dan *eccentric distance sum* dari beberapa operasi graf, Došlic dan Saheli (2014) pada *eccentric connectivity index* dari graf komposit, dan Nacaroglu dan Maden (2018) pada *eccentric connectivity index* dari graf *unicyclic*.

Graf juga diperoleh dari struktur aljabar grup dan ring. Graf yang diperoleh dari struktur aljabar grup yaitu graf Cayley (Heydemann, 1997), graf konjugasi (Abdussakir dan Khasanah, 2018), graf *non-commuting* (Abdussakir, Putri, dan Fadhillah, 2018), graf subgrup (Kakeri dan Erfanian, 2015), graf invers (Alfuraidan dan Zakariya, 2017), graf *non-centralizer* (Tolue, 2015), dan graf identitas (Kandasamy dan Smarandache, 2009). Sedangkan graf dari struktur aljabar ring seperti graf pembagi nol (Anderson dan Livingston, 1999), graf *annihilator* (Badawi, 2014), graf *co-maximal ideal* (Wang, 2008), dan graf identitas (Kandasamy dan Smarandache, 2009).

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan. Suatu unsur x di R dikatakan *unit* di R jika terdapat suatu unsur y di R sedemikian sehingga $xy = yx = 1$. Himpunan *unit* di R dinotasikan dengan $I(R)$ (Dummit dan Foote, 2004). Kemudian unsur-unsur dari $I(R)$ akan membentuk titik pada graf sederhana. Dua unsur x dan y di R terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = 1$. Diasumsikan bahwa 1 terhubung langsung dengan setiap *unit* di R. Sehingga graf dengan himpunan titik $I(R)$ tersebut adalah graf identitas atau graf *unit* dari R (Kandasamy dan Smarandache, 2009). Graf identitas sebelumnya telah diteliti oleh Leihitu dan Patty (2016) tetapi pembahasannya mengenai struktur graf di grup bukan di ring.

Graf identitas pada penelitian ini diperoleh dari ring komutatif dengan unsur kesatuan. Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah ring, didefinisikan sebagai grup abel yang memiliki sifat tertutup pada operasi perkalian, asosiatif pada operasi perkalian, dan distributif operasi perkalian terhadap operasi penjumlahan. Ring R memiliki unsur kesatuan pada operasi kedua dan perkalian di R komutatif. Sehingga, R adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan (Gilbert dan Gilbert, 2015).

Allah Swt berfirman dalam surah al-Insyirah ayat 7-8, yaitu:

فَإِذَا فَرَغۡتَ فَٱنصَبۡ ۝٧ وَإِلَىٰ رَبِّكَ فَٱرۡغَب ۝٨

"Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain, dan hanya kepada Tuhanmulah hendaknya kamu berharap" (Qs. al-Insyirah/94:7-8).

Maka apabila engkau telah selesai dari suatu urusan, tetaplah bekerja keras untuk urusan yang lain. Apabila engkau menyelesaikan suatu urusan dunia atau berdakwah, bergegaslah bersimpuh di hadapan Tuhanmu. Begitu engkau selesai beribadah, bersungguh-sungguhlah dalam berdoa, demikian seterusnya. Hanya kepada Tuhanmulah engkau patut berharap dengan selalu bertawakal serta mengharap rahmat dan ridha-Nya (Agama, 1985).

Hal tersebut juga berlaku bagi para peneliti, ketika satu penelitian telah dilakukan maka lakukanlah penelitian yang lainnya. Penelitian mengenai *eccentric connectivity index* telah banyak diteliti di berbagai bidang. Gupta, Singh, dan Madan (2002) dalam penelitiannya menyatakan bahwa *eccentric connectivity index* jauh lebih efektif dalam mendesain obat pembengkakan pada cacar dibandingkan Wiener's index. Gutman (2011) menunjukkan bahwa *eccentric connectivity index* bermanfaat pada struktur kimia broom. Ashrafi, Došlic, dan Saheli, (2011) juga menemukan manfaatnya pada formulasi TUC4C8 (R) *nanotubes*. Došlic, Graovac, dan Ori (2011) menemukan formulasi eksplisit rantai *hexagonal*. Hal ini menunjukkan bahwa satu topik pembahasan memiliki manfaat diberbagai bidang. Hal tersebut merupakan bentuk dedikasi yang dilakukan peneliti setelah selesai dalam satu penelitiannya. Oleh sebab itu jika kita telah menyelesaikan suatu penelitian, maka lakukanlah penelitian yang lainnya untuk menemukan solusi dari permasalahan yang ada.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan sebelumnya maka topik mengenai "*Total Eccentricity* dan *Eccentric Connectivity Index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan" belum pernah diteliti. Jadi penulis akan menelitinya sebagai judul baru dalam skripsi.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah pada penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana rumus umum *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{2p}?
2. Bagaimana rumus umum *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{3p}?
3. Bagaimana rumus umum *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{4p}?
4. Bagaimana rumus umum *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{5p}?
5. Bagaimana rumus umum *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{6p}?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini di antaranya sebagai berikut:

1. Menemukan rumus umum *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{2p}.
2. Menemukan rumus umum *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{3p}.
3. Menemukan rumus umum *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{4p}.
4. Menemukan rumus umum *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{5p}.

5. Menemukan rumus umum *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{6p}.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat dicapai dengan adanya penelitian ini yaitu untuk memberikan informasi mengenai rumus umum dari *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan pada $Z_{2p}, Z_{3p}, Z_{4p}, Z_{5p}, Z_{6p}$, dengan p prima.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini akan memfokuskan pembahasannya pada *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo $2p, 3p, 4p, 5p$, dan $6p$, dengan p bilangan prima.

1.6 Metode Penelitian

Berdasarkan latar belakang tersebut maka penelitian ini akan menggunakan jenis penelitian kepustakaan (*library research).* Penelitian ini dilakukan dengan mengkaji buku-buku serta jurnal-jurnal yang membahas mengenai topik teori graf dan aljabar abstrak yang berkaitan dengan tema penelitian.

Pada penelitian ini digunakan pendekatan kualitatif. Pola pembahasannya dimulai dari hal-hal khusus yang diperumum dan bersifat deduktif. Adapun langkah-langkah untuk mengetahui *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif pada modulo $Z_{2p}, Z_{3p}, Z_{4p}, Z_{5p}$ dan Z_{6p}, sebagai berikut:

1. Menentukan anggota dari Z_{2p} dengan menggunakan tabel Cayley operasi perkalian.
2. Menentukan himpunan titik $I(R)$ dari anggota Z_{2p}.
3. Menggambar graf identitas dengan menghubungkan setiap elemen *unit* dengan unsur kesatuan.
4. Menentukan eksentrisitas dan derajat titik pada graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{2p}.
5. Menetukan *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{2p}.
6. Mengulangi langkah 1, 2, 3, 4, dan 5 untuk ring komutatif dengan unsur kesatuan $Z_{3p}, Z_{4p}, Z_{5p}, Z_{6p}$.
7. Membuat dugaan (konjektur) *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* berdasarkan pola yang ditemukan untuk masing-masing kasus pada $Z_{2p}, Z_{3p}, Z_{4p}, Z_{5p}$, dan Z_{6p}.
8. Merumuskan konjektur tentang *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* sebagai suatu teorema.
9. Menghasilkan teorema-teorema *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan pada penelitian ini dibagi menjadi empat bab dan setiap bab terdiri dari beberapa subbab. Sistematika tersebut dimaksudkan agar penulisan lebih terarah dan mudah dipahami. Adapun sistematika tersebut yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan berisi mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka berisi mengenai teori-teori yang berkaitan dengan permasalahan. Pada penelitian ini teori yang digunakan meliputi: graf yang terdiri dari derajat titik, graf terhubung, dan eksentrisitas. Selain itu terdapat kajian mengenai ring, graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index*, serta anjuran untuk selalu berpikir dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Pembahasan berisi mengenai penyelesaian terhadap permasalan *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan, serta kajian agama mengenai tanda bagi orang yang berilmu.

Bab IV Penutup

Penutup berisi kesimpulan dari hasil pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

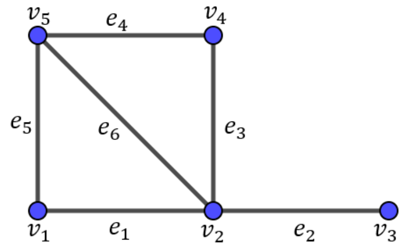
2.1 Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan berhingga dan tidak kosong dari objek-objek yang disebut titik dan E adalah himpunan yang mungkin kosong dari 2-elemen subhimpunan pada titik V yang disebut sisi. Himpunan titik dan sisi dinotasikan dengan $V(G)$ dan $E(G)$ (Chartrand, dkk, 2016). Banyak unsur di $V(G)$ disebut order dari G yang dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyak unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dimaksudkan hanya graf G maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q (Abdussakir, dkk, 2009).

Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut terkait langsung *(incident)*, dan titik u dan v disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung (*adjacent*), jika terkait langsung pada satu titik yang sama (Abdussakir, dkk, 2009).

Contoh:

G:



Gambar 2.1 Graf $\boldsymbol{G}$ Berorder 5

Berdasarkan Gambar 2.1 dapat diketahui bahwa graf G memiliki lima titik yang terhimpun pada $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Serta terdiri dari 6 sisi, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

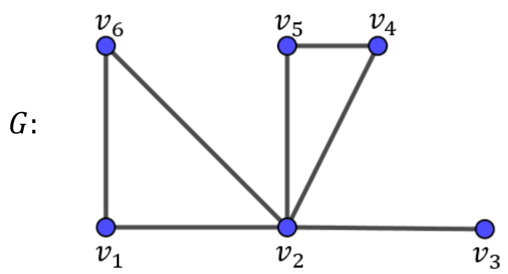
2.1.1 Derajat Titik

Derajat titik v pada graf G merupakan banyak titik di G yang terhubung langsung ke v. Sehingga, himpunan derajat titik v di G disebut lingkungan dari v dan ditulis $N(v)$. Selain itu derajat titik v juga diartikan sebagai banyaknya sisi yang terkait langsung dengan v. Derajat titik v dinotasikan dengan $deg_G\, v$ atau lebih sederhana disimbolkan dengan $deg(v)$. Titik dengan derajat 0 atau $deg(v) = 0$ disebut titik terasing (terisolasi). Titik dengan derajat 1 atau $deg(v) = 1$ disebut titik ujung (akhir). Titik yang memiliki derajat paling besar atau maksimum di G dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Sedangkan titik dengan derajat minimum di G dinotasikan dengan $\delta(G)$. Dengan demikian, jika v adalah titik dari graf G pada order n, maka

$$0 \leq \delta(G) \leq deg(v) \leq \Delta(G) \leq n - 1$$

(Chartrand, dkk, 2016).

Contoh:



Gambar 2.2 Graf ***G*** Berorder 6

Berdasarkan Gambar 2.2 maka diperoleh derajat pada masing-masing titik yaitu $deg(v_1) = 1, deg(v_2) = 5, deg(v_3) = 1, deg(v_4) = 1, deg(v_5) = 1$, $deg(v_6) = 1$. Sehingga didapatkan $\Delta(G) = 5$ dan $\delta(G) = 1$.

2.1.2 Graf Terhubung

Misalkan u dan v adalah titik di G yang mungkin sama. Deretan berbatas dan berselang-seling pada graf G disebut jalan u-v dan dinotasikan sebagai berikut

$$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$$

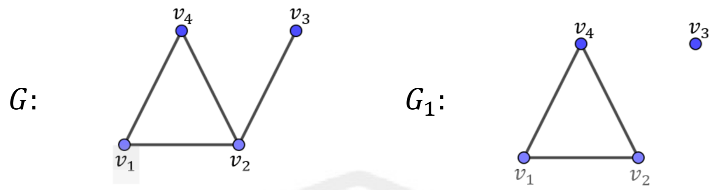
antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan

$$e_i = v_{i-1}v_i \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

adalah sisi di G, v_0 disebut titik awal, dan v_n disebut titik akhir, titik $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut jalan terbuka. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut jalan tertutup. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut jalan trivial. Jalan W yang semua sisinya berbeda disebut *trail*. Jalan terbuka yang semua titik berbeda disebut lintasan (Abdussakir, dkk, 2009).

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Titik u dan v dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan u-v di G. Suatu graf G juga dikatakan graf terhubung, jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terhubung. Sebaliknya jika ada dua titik u dan v di G, tetapi tidak terdapat lintasan u-v di G, maka G dikatakan tak terhubung (*disconnected*) (Abdussakir, dkk, 2009).

Contoh:



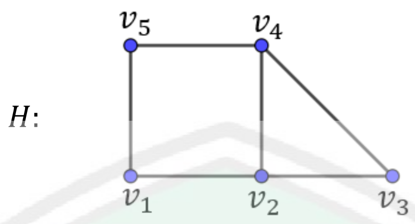
Gambar 2.3 Graf $\boldsymbol{G}$ Berorder 4 dan Graf $\boldsymbol{G_1}$ Berorder 4

Pada Gambar 2.3 graf G setiap titik terhubung langsung dengan titik yang lainnya yaitu v_1 dan v_2, v_1 dan v_4, v_2 dan v_3, v_2 dan v_4, serta v_3 dan v_4. Sehingga graf G merupakan graf terhubung. Sedangkan pada graf G_1 terdapat satu titik terasing yaitu titik 3, sehingga graf G_1 bukan merupakan graf terhubung.

2.1.3 Eksentrisitas

Jarak *(distance)* merupakan lintasan terpendek dari banyaknya sisi yang dilalui suatu titik u ke v di G dinotasikan dengan $d(u,v)$. Jumlah semua $d(u,v)$ dari titik u di G dinotasikan dengan $D(u)$. Apabila tidak ditemukan lintasan yang terhubung pada titik u dan v, maka $d(u,v) = \infty$. Eksentrisitas dari titik u pada G merupakan jarak maksimal dari titik u ke titik lain pada G yang dinotasikan dengan $e(u)$. Sehingga, $e(u) = \max\{d(u,v)|u,v \in V(G)\}$. Titik yang memiliki eksentrisitas terbesar disebut diameter, dinotasikan dengan $diam(G)$. Sedangkan, titik yang memiliki eksentrisitas terkecil disebut radius, dinotasikan dengan $rad(G)$ (Kusmayadi dan Sudibyo, 2011).

Contoh:



Gambar 2.4 Graf ***H*** Berorder 5

Berdasarkan Gambar 2.4 diperoleh eksentrisitas pada masing-masing titik sebagai berikut

$e(1) \ = \max\{d(u,v)|u,v \in H(G)\}$

$= \max\{d(v_1,v_2), d(v_1,v_3), d(v_1,v_4), d(v_1,v_5)\}$

$= \max\{1,2,1,2\}$

$= 2$

Dengan cara yang sama maka akan diperoleh nilai eksentrisitas titik lainya yaitu $e(v_2) = 2, e(v_3) = 2, e(v_4) = 2, e(v_5) = 2$. Berdasarkan data tersebut didapatkan $diam(H) = 2$ dan $rad(H) = 2$.

2.2 Ring

Definisi Ring:

Ring R merupakan suatu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner, operasi penjumlahan (dinotasikan oleh $a + b$) dan operasi perkalian (dinotasikan oleh $a \cdot b$), sedemikian sehingga untuk setiap $a, b, c \in R$, maka:

1. $a + b = b + a$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$.

3. Terdapat identitas pada operasi penjumlahan yaitu 0. Sedemikian sehingga $a + 0 = a$ untuk semua a di R.
4. Terdapat suatu elemen $-a$ di R sedemikian sehingga $a + (-a) = 0$.
5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(b + c) \cdot a = a \cdot b + c \cdot a$

Jadi, ring adalah suatu grup Abelian di bawah operasi penjumlahan, serta asosiatif terhadap operasi perkalian pada distributif kiri dan kanannya atas operasi penjumlahan (Gallian, 2013).

2.2.1 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah ring. Jika terdapat suatu unsur e di R sedemikian sehingga $x \cdot e = e \cdot x = x$ untuk setiap x di R, maka 1 disebut unsur kesatuan dan R adalah ring dengan unsur kesatuan. Jika R komutatif terhadap operasi perkalian, maka R disebut ring komutatif. Sehingga, R yang komutatif dan mempunyai unsur kesatuan terhadap operasi perkalian disebut ring komutatif dengan unsur kesatuan (Gilbert dan Gilbert, 2015).

Misalkan $(R, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan yaitu e dan $x \in R$. Jika terdapat suatu unsur y di R sedemikian sehingga $xy = yx = e$, maka y merupakan invers pada operasi perkalian dari x dan x disebut *unit* (*invertible element*) di R (Gilbert dan Gilbert, 2015). Himpunan dari *unit* di R dinotasikan dengan $I(R)$. Jika himpunan $I(R)$ memenuhi aksioma grup maka $I(R)$ disebut grup *unit*.

2.3 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan

Misalkan R adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan 1. Diambil $I(R)$ sebagai himpunan *unit* di R (Jelas $I(R) \neq \emptyset$ sebagaimana $1 \in I(R)$). Kemudian unsur-unsur dari $I(R)$ akan membentuk titik pada graf sederhana. Dua unsur x dan y di R terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = 1$. Diasumsikan bahwa 1 terhubung langsung dengan setiap *unit* di R. Sehingga graf dengan himpunan titik $I(R)$ tersebut adalah graf identitas atau graf *unit* dari R. Jika R tidak memiliki unsur selain 1, misalnya $I(R) = \{1\}$ maka graf identitasnya hanya satu titik (Kandasamy dan Smarandache, 2009).

Contoh:

Diberikan $(Z_8, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 8 dengan $Z_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel Cayley $(Z_8, +, \cdot)$ terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 2.1 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\boldsymbol{Z_8}$

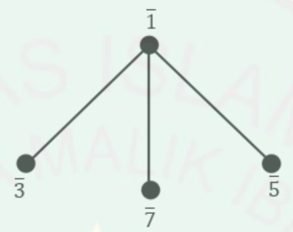
$\cdot$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
1	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	4	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	5
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{\bar{7}}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	5	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Didefinisikan graf identitas yaitu dua unsur x dan y di Z_8 terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = \bar{1}$ (Kandasamy dan Smarandache, 2009). Sehingga berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh *unit* dari Z_8 adalah

$\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$ $\qquad$ $\bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{1}$

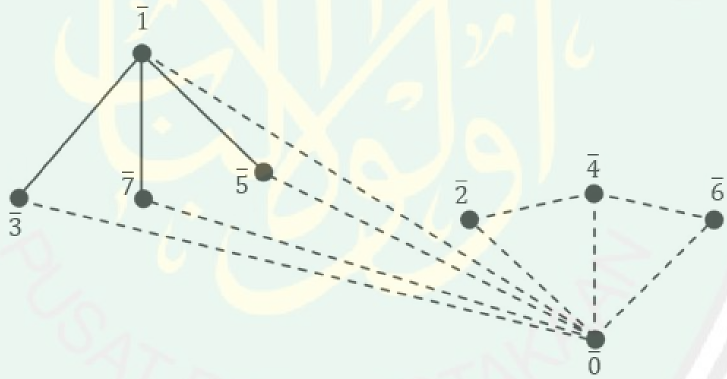
$\bar{5} \cdot \bar{5} = \bar{1}$ $\bar{7} \cdot \bar{7} = \bar{1}$

Maka himpunan *unit* dari Z_8 yaitu $I(Z_8) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$. Setiap *unit* di Z_8 akan terhubung langsung dengan $\bar{1}$. Jadi graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan dari Z_8 sebagai berikut



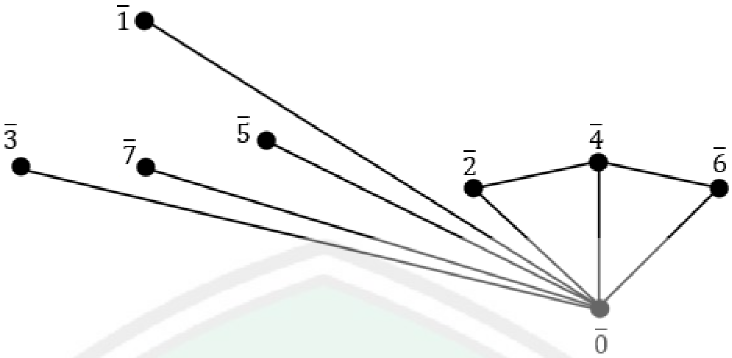
Gambar 2.5 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\boldsymbol{Z_8}$

Berikut akan ditunjukkan perbandingan dari graf identitas Z_8 dan graf *zero* Z_8



Gambar 2.6 Graf Identitas dan Graf *Zero* Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\boldsymbol{Z_8}$

Berdasarkan Gambar 2.5 dan Gambar 2.6 dapat diketahui graf *zero divisor* dari modulo 8 sebagai berikut



Gambar 2.7 Graf *Zero Divisor* Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\boldsymbol{Z_8}$

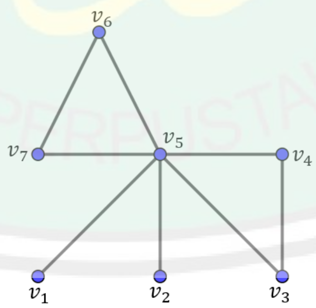
2.4 *Total Eccentricity* dan *Eccentric Connectivity Index*

Total eccentricity dari graf G didefinisikan sebagai jumlah eksentrisitas pada semua titik di G, dinotasikan dengan $\xi(G)$ dan dituliskan sebagai berikut

$$\xi(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v)$$

(Fathalikhani, dkk, 2014).

Contoh:



Gambar 2.8 Graf $\boldsymbol{G}$ Berorder 7

Berdasarkan Gambar 2.8 diperoleh eksentrisitas pada masing-masing titik sebagai berikut

$e(1)\ = \max\{d(u,v)|u,v \in H(G)\}$

$= \max\{d(v_1,v_2),\ d(v_1,v_3),\ d(v_1,v_4),\ d(v_1,v_5),\ d(v_1,v_6),\ d(v_1,v_7)\}$

$= \max\{2, 2, 2, 1, 2, 2\}$

$= 2$

Dengan cara yang sama maka akan diperoleh nilai eksentrisitas titik yang lainya yaitu $e(v_2) = 2, e(v_3) = 2, e(v_4) = 2, e(v_5) = 1, e(v_6) = 2, e(v_7) = 2$. Sehingga nilai *total eccentricity* dari graf G berorder 7, yaitu

$\xi(G) = \Sigma_{v\in V} e(v)$

$= e(v_1) + e(v_2) + e(v_3) + e(v_4) + e(v_5) + e(v_6) + e(v_7)$

$= 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2$

$= 13$

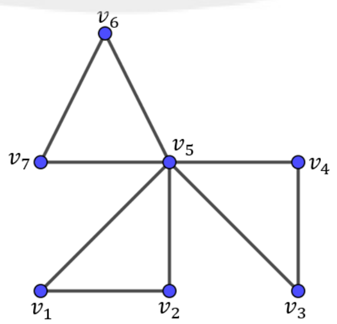
Jadi, *total eccentricity* graf G adalah 13.

Eccentric connectivity index merupakan jumlah hasil kali eksentrisitas titik dan derajat titik pada semua titik di G yang dinotasikan dengan $\xi^c(G)$. *Eccentric connectivity index* pada graf G dituliskan:

$$\xi^c(G) = \Sigma_{v\in V} e(v)deg(v)$$

(Sharma, dkk, 1997).

Contoh:



Gambar 2.9 Graf ***H*** Berorder 7

Berdasarkan Gambar 2.9 diperoleh eksentrisitas pada masing-masing titik sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
e(1) &= \max\{d(u,v) | u,v \in H(G)\} \\
&= \max\{d(v_1,v_2), d(v_1,v_3), d(v_1,v_4), d(v_1,v_5), d(v_1,v_6), d(v_1,v_7)\} \\
&= \max\{1,2,2,1,2,2\} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Dengan cara yang sama maka akan diperoleh nilai eksentrisitas titik lainya yaitu $e(v_2) = 2, e(v_3) = 2, e(v_4) = 2, e(v_5) = 1, e(v_6) = 2, e(v_7) = 2$. Selain itu, juga diperoleh nilai derajat titik yaitu $deg(v_1) = 2, deg(v_2) = 2, deg(v_3) = 2, deg(v_4) = 2, deg(v_5) = 6, deg(v_6) = 2, deg(v_7) = 2$. Sehingga diperoleh nilai *eccentric connectivity index* dari graf H yaitu

$$
\begin{aligned}
\xi^c(H) &= \Sigma_{v \in V} e(v) deg(v) \\
&= e(v_1)\, deg(v_1) + e(v_2)\, deg(v_2) + e(v_3)\, deg(v_3) \\
&\quad + e(v_4)\, deg(v_4) + e(v_5)\, deg(v_5) + e(v_6)\, deg(v_6) \\
&\quad + e(v_7)\, deg(v_7) \\
&= 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times 6 + 2 \times 2 + 2 \times 2 \\
&= 4 + 4 + 4 + 4 + 6 + 4 + 4 \\
&= 30
\end{aligned}
$$

Jadi, *eccentric connectivity index* dari graf H adalah 30.

2.5 Anjuran untuk Selalu Berpikir dalam Al-Quran

Allah berfirman dalam surah ali-Imran ayat 190-191:

إِنَّ فِي خَلۡقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَٱخۡتِلَٰفِ ٱلَّيۡلِ وَٱلنَّهَارِ لَأٓيَٰتٖ لِّأُوْلِي ٱلۡأَلۡبَٰبِ ١٩٠ ٱلَّذِينَ
يَذۡكُرُونَ ٱللَّهَ قِيَٰمٗا وَقُعُودٗا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمۡ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلۡقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ رَبَّنَا
مَا خَلَقۡتَ هَٰذَا بَٰطِلٗا سُبۡحَٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ ٱلنَّارِ ١٩١

"Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka" (Qs. ali-Imran/3:190-191).

Syaikh Imam al-Qurthubi mentafsirkan bahwa Allah Swt memerintahkan kita untuk melihat, merenung, dan mengambil kesimpulan pada tanda-tanda ke-Tuhanan. Tanda-tanda tersebut tidak mungkin ada kecuali diciptakan oleh Yang Maha Hidup, Yang Maha Suci, Maha Menyelamatkan, Maha Kaya dan tidak membutuhkan apapun yang ada di alam semesta. Sehinga, keimanan mereka bersandarkan atas keyakinan yang benar dan bukan hanya sekedar ikut-ikutan dengan menyakini hal tersebut. Pada lafadz لَأٓيَٰتٖ لِّأُوْلِي ٱلۡأَلۡبَٰبِ *"Terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal"*. Inilah salah satu fungsi akal yang diberikan kepada seluruh manusia, yaitu agar mereka dapat menggunakan akal tersebut untuk merenungi tanda-tanda yang telah diberikan oleh Allah Swt (Qurthubi, 2008).

Langit dan bumi dijadikan oleh sang khaliq, sangat indah dengan tersusun tertib dan sesuai aturan. Silih berganti malam dengan siang, betapa besar pengaruhnya terhadap kehidupan segala yang bernyawa. Terkadang malamnya pendek, siangnya panjang atau sebaliknya. Terdapat musim panas, musim dingin, musim hujan, musim gugur, musim semi, bahkan musim salju selamanya seperti yang terjadi di kutub. Semua ini menjadi ayat, tanda bagi orang yang berpikir, bahwa tidaklah semuanya ini terjadi dengan sendirinya (Hamka, 2015).

Orang yang melihat dan mempergunakan pikiran meninjaunya, masing-masing sesuai bakat pikirannya. Entah seorang ahli ilmu alam, ahli ilmu binatang, ahli ilmu tumbuh-tumbuhan, ahli pertambangan, ahli filosof, ataupun seorang penyair dan seniman sekalipun. Semuanya akan dipesona oleh keteraturan alam semesta yang luar biasa. Terasa kecil dihadapan keajaiban alam, terasa kecil alam dihadapan kebesaran penciptanya. Pada akhirnya tiada arti diri, tiada arti alam, yang ada hanyalah Dia. Karena kita manusia (*al-hayawan an-nathiq*) kita berpikir. Layaknya *ulul-albāb* memiliki intisari, mempunyai pikiran. Mempunyai biji akal (potensi) yang bila ditanam dengan baik akan tumbuh (Hamka, 2015).

Orang yang berpikir artinya orang yang tidak pernah lepas dari mengingat Allah Swt, baik dalam keadaan berdiri, duduk atau berbaring. Kata *yadzkurūna* berarti ingat berpokok pada kata dzikir. Disebutkan pula, bahwasanya dzikir hendaklah bertali diantara sebutan dan ingatan. Kita mampu menyebut Asma Allah dengan mulut karena telah teringat terlebih dahulu dalam hati. Sesudah pengelihatan atas kejadian langit dan bumi, atau pergantian siang dan malam, langsungkan ingatan kepada yang menciptakannya. Jelaslah dengan sebab ilmu pengetahuan bahwa semuanya itu tidaklah ada yang terjadi sia-sia atau secara kebetulan. Kegiatan mengingat (*tadzakkur*) itu berhubungan dengan kegiatan memikirkan (*tafakkur*) (Shihab, 2002).

Berdasarkan beberapa penafsiran yang diberikan oleh para mufassir, dapat dipahami bahwa manusia diberikan hidayah berupa akal untuk digunakan sebaik-baiknya. Diantara tugas atau kegiatan akal yang disebutkan dalam ayat tersebut adalah bertafakur memikirkan ciptaan Allah. Merekalah yang dalam al-Quran disebut orang yang berakal (*Ulul- albāb*), yang memiliki akal kuat untuk digunakan mengingat dan memikirkan ciptaan di alam semesta.

Sedangkan berpikir, bisa dengan membaca, merenungi dan memahami segala yang ada di langit dan bumi yang berisi rahasia-rahasia Ilahi. Terdapat berbagai manfaat dan hikmah-hikmah yang menunjukkan kebesaran, kekuasaan, ilmu, serta rahmat sang Khalik yang patut disyukuri dan dijaga.

Hal ini juga berlaku pada penelitian, sebuah penelitian tidak akan ada habiskan apabila manusia senantiasa berpikir dan menemukan hal baru. Pada penelitian *eccentric connectivity index* pun sedemikian, pada tahun 1997 telah ditemukan konsep ini oleh 3 orang peneliti, Sharma, Goswami, dan Madan. Mereka menghubungkan teori graf dengan struktur kimia dan biologi. Sebelumnya telah digunakan teori graf lainnya untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Penelitian ini menunjukkan korelasi yang baik antara *eccentric connectivity index* dengan aktifitas dari analogi *piperidinyl methyl ester* dan *methylene methyl ester*. Hasil tersebut menunjukkan bahwa *eccentric connectivity index* memberikan korelasi yang sangat baik secara kimia maupun biologi.

Gupta, dkk (2002) juga meneliti mengenai hubungan *eccentric connectivity index* dan Wiener's index dengan aktivitas anti-inflamasi. Anti-inflamasi merupakan suatu zat yang dugunakan untuk mengurangi peradangan atau pembengkakan. Pada penelitiannya Gupta, dkk memberikan anti-inflamasi untuk pembengkakan cacar. Perbandingan hasil penelitiannya pada *eccentric connectivity index* dan Wiener's index menunjukkan bahwa *eccentric connectivity index* jauh lebih baik untuk mengaktifkan anti-inflamasi.

Berbagai penelitian tersebut merupakan hasil berpikir dan merenungi peristiwa-peristiwa di sekitar kehidupan kita. Sehingga dengan berbekal akal yang telah Allah berikan, manusia bisa membaca, mengetahui, memikirkan, meneliti, serta menelaah fenomena-fenomena yang ada, kemudian menghasilkan suatu pengetahuan atau ilmu. Penemuan dalam berbagai ilmu pengetahuan dan teknologi tersebut mengantarkan orang yang berakal untuk mensyukuri dan meyakini segala ciptaan Allah amat bermanfaat dan tidak ada yang sia-sia. Allah juga memerintahkan kita untuk senantiasa berpikir dan melakukan urusan yang lain apabila telah selesai dari suatu urusan, seperti firman-Nya dalam surah al-Insyirah ayat 7-8:

فَإِذَا فَرَغْتَ فَٱنصَبْ ٧ وَإِلَىٰ رَبِّكَ فَٱرْغَب ٨

"Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain, dan hanya kepada Tuhanmulah hendaknya kamu berharap" (Qs. al-Insyirah/94:7-8).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 *Total Eccentricity* dan *Eccentric Connectivity Index* dari Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{2p}

3.1.1 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_4

Diberikan $(Z_4, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 4 dengan $Z_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel Cayley $(Z_4, +, \cdot)$ terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.1 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\boldsymbol{Z_4}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Didefinisikan graf identitas yaitu dua unsur x dan y yang berbeda di Z_4 terhubung langsung jika dan hanya jika $x \cdot y = \bar{1}$ (Kandasamy dan Smarandache, 2009). Sehingga berdasarkan Tabel 3.1 diperoleh *unit* dari Z_4 adalah

$$\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$$

$$\bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{1}$$

Maka himpunan *unit* dari Z_4 yaitu $I(Z_4) = \{\bar{1}, \bar{3}\}$. Setiap *unit* di Z_4 akan terhubung langsung dengan $\bar{1}$. Jadi diperoleh graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan dari Z_4 sebagai berikut

Gambar 3.1 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur kesatuan $\boldsymbol{Z_4}$

Berikut perolehan nilai dari eksentrisitas dan derajat titik berdasarkan Gambar 3.1.

Derajat titik : $deg(\bar{1}) = 1, deg(\bar{3}) = 1$

Eksentrisitas titik : $e(\bar{1}) = \max\{d(\bar{1}, \bar{3})\} = 1$

$e(\bar{3}) = \max\{d(\bar{3}, \bar{1})\} = 1$

a) *Total eccentricity*

$$\xi(I(Z_4)) = \sum_{v \in V(I(Z_4))} e(v)$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c(I(Z_4)) = \sum_{v \in V(I(Z_4))} e(v)\, deg(v)$$

$$= (1 \times 1) + (1 \times 1)$$

$$= 2$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_4 adalah 2 dan 2.

3.1.2 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_6

Diberikan $(Z_6, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan semua kelas bilangan modulo 6 dengan $Z_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{5}\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel Cayley $(Z_6, +, \cdot)$ terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.2 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\boldsymbol{Z_6}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.2, maka diperoleh $I(Z_6) = \{\bar{1}, \bar{5}\}$. Sehingga graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_6 adalah

Gambar 3.2 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_6

Berikut perolehan nilai dari eksentrisitas dan derajat titik berdasarkan Gambar 3.3.

Derajat titik : $deg(\bar{1}) = 1, deg(\bar{5}) = 1$

Eksentrisitas titik : $e(\bar{1}) = \max\{d(\bar{1}, \bar{5})\} = 1,$

$$e(5) = \max\{d(\bar{5}, \bar{1})\} = 1$$

a) *Total eccentricity*

$$\xi(I(Z_6)) = \sum_{v \in V(I(Z_6))} e(v)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c\big(I(Z_6)\big) = \sum_{v \in V(I(Z_6))} e(v)\, deg(v)$$

$$= (1 \times 1) + (1 \times 1)$$

$$= 2$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_6 adalah 2 dan 2.

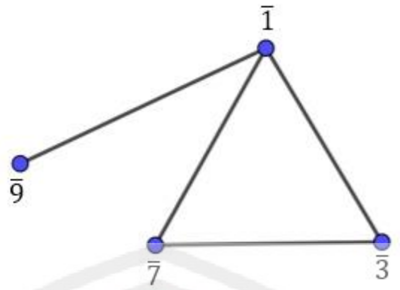
3.1.3 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{10}

Diberikan $(Z_{10}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan semua kelas bilangan modulo 10 dengan $Z_{10} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{9}\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel Cayley $(Z_{10}, +, \cdot)$ terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.3 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{10}

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	4	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.3, maka diperoleh $I(Z_{10}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}\}$. Sehingga graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{10} adalah



Gambar 3.3 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{10}

Berikut perolehan nilai dari eksentrisitas dan derajat titik berdasarkan Gambar 3.3.

Derajat titik : $deg(\bar{1}) = 3, deg(\bar{3}) = 2, deg(\bar{7}) = 2, deg(\bar{9}) = 1$

Eksentrisitas titik: $e(\bar{1}) = \max\{d(\bar{1},\bar{3}), d(\bar{1},\bar{7}), d(\bar{1},\bar{9})\}$

$$= \max\{1, 1, 1\} = 1$$

$$e(\bar{3}) = 2, e(\bar{7}) = 2, e(\bar{9}) = 2$$

a) *Total eccentricity*

$$\xi\big(I(Z_{10})\big) = \sum_{v \in V(I(Z_{10}))} e(v)$$

$$= 1 + 2 + 2 + 2$$

$$= 1 + (2 \times 3)$$

$$= 7$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c\big(I(Z_{10})\big) = \sum_{v \in V(I(Z_{10}))} e(v)\, deg(v)$$

$$= (1 \times 3) + (2 \times 1) + (2 \times 2) + (2 \times 2)$$

$$= 3 + (2 \times 1) + ((2 \times 2) \times 2)$$

$$= 13$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{10} adalah 7 dan 13.

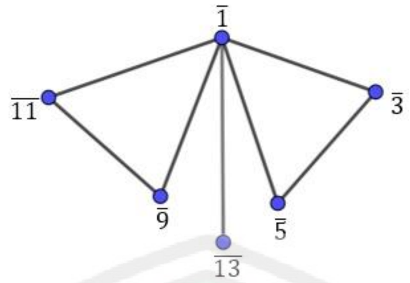
3.1.4 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{14}

Diberikan $(Z_{14}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan semua kelas bilangan modulo 14 dengan $Z_{14} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{13}\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel Cayley $(Z_{14}, +, \cdot)$ terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.4 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{14}

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\overline{12}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\overline{11}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\bar{6}$	$\overline{10}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\overline{11}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\overline{12}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\overline{13}$	$\bar{4}$	$\bar{9}$
$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{6}$	$\overline{12}$	$\bar{4}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\bar{8}$
$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$	$\bar{7}$
$\bar{8}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\overline{10}$	$\bar{4}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$
$\bar{9}$	$\bar{0}$	$\bar{9}$	$\bar{4}$	$\overline{13}$	$\bar{8}$	$\bar{3}$	$\overline{12}$	$\bar{7}$	$\bar{2}$	$\overline{11}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\overline{10}$	$\bar{5}$
$\overline{10}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\overline{10}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\overline{12}$	$\bar{8}$	$\bar{4}$
$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\overline{11}$	$\bar{8}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\bar{7}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\overline{12}$	$\bar{9}$	$\bar{6}$	$\bar{3}$
$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\bar{8}$	$\bar{6}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\overline{13}$	$\bar{0}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.4, maka diperoleh $I(Z_{14}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{13}\}$. Sehingga graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{14} adalah



Gambar 3.4 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{14}

Berikut perolehan nilai dari eksentrisitas dan derajat titik berdasarkan Gambar 3.4.

Derajat titik : $deg(\bar{1}) = 5, deg(\bar{3}) = 2, deg(\bar{5}) = 2, deg(\bar{9}) = 2,$

$deg(\overline{11}) = 2, deg(\overline{13}) = 1$

Eksentrisitas titik: $e(\bar{1}) = \max\{d(\bar{1},\bar{3}), d(\bar{1},\bar{5}), d(\bar{1},\bar{9}), d(\bar{1},\overline{11}), d(\bar{1},\overline{13})\}$

$= \max\{1, 1, 1, 1, 1\} = 1$

$e(\bar{3}) = 2, e(\bar{5}) = 2, e(\bar{9}) = 2, e(\overline{11}) = 2, e(\overline{13}) = 2$

a) *Total eccentricity*

$$\xi(I(Z_{14})) = \sum_{v \in V(I(Z_{14}))} e(v)$$

$$= 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

$$= 1 + (2 \times 5)$$

$$= 11$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c(I(Z_{14})) = \sum_{v \in V(I(Z_{14}))} e(v)\, deg(v)$$

$$= (1 \times 5) + (2 \times 1) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2)$$

$$= 5 + (2 \times 1) + ((2 \times 2) \times 4)$$

$$= 23$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{14} adalah 11 dan 23.

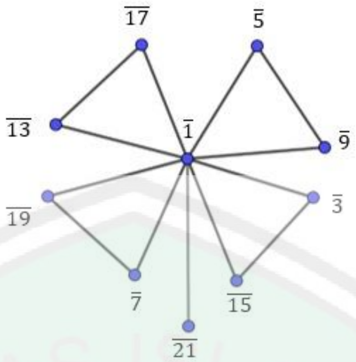
3.1.5 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{22}

Diberikan $(Z_{22}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan semua kelas bilangan modulo 22 dengan $Z_{22} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{21}\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel Cayley $(Z_{22}, +, \cdot)$ terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.5 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{22}

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	8	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\overline{21}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{11}$	$\overline{14}$	$\overline{17}$	$\overline{20}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{19}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{20}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{13}$	$\overline{18}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{16}$	$\overline{21}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{14}$	$\overline{19}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{12}$	$\overline{17}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$	$\overline{20}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{19}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{18}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{17}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{16}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{15}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{18}$	$\overline{5}$	$\overline{14}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{19}$	$\overline{6}$	$\overline{15}$	$\overline{2}$	$\overline{11}$	$\overline{20}$	$\overline{7}$	$\overline{16}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{21}$	$\overline{8}$	$\overline{17}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$
$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$
$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$	$\overline{17}$	$\overline{8}$	$\overline{21}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{16}$	$\overline{7}$	$\overline{20}$	$\overline{11}$	$\overline{2}$	$\overline{15}$	$\overline{6}$	$\overline{19}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{14}$	$\overline{5}$	$\overline{18}$	$\overline{9}$
$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$
$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{16}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{17}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{18}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{19}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{20}$	$\overline{13}$	$\overline{6}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$
$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{17}$	$\overline{0}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{19}$	$\overline{14}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{21}$	$\overline{16}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{18}$	$\overline{13}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{20}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{19}$	$\overline{0}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{20}$	$\overline{17}$	$\overline{14}$	$\overline{11}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{21}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{21}$	$\overline{20}$	$\overline{19}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Berdasarkan Tabel 3.5, maka diperoleh $I(Z_{22}) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{13}, \overline{15}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{21}\}$. Sehingga graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{22} adalah



Gambar 3.5 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{22}

Berikut perolehan nilai dari eksentrisitas dan derajat titik berdasarkan Gambar 3.5.

Derajat titik : $deg(\overline{1}) = 9, deg(\overline{3}) = 2, deg(\overline{5}) = 2, deg(\overline{7}) = 2,$

$deg(\overline{9}) = 2, deg(\overline{13}) = 2, deg(\overline{15}) = 2, deg(\overline{17}) = 2,$

$deg(\overline{19}) = 2, deg(\overline{21}) = 1$

Eksentrisitas titik: $e(\overline{1}) = \max\{d(\overline{1},\overline{3}), d(\overline{1},\overline{5}), d(\overline{1},\overline{7}), d(\overline{1},\overline{9}), d(\overline{1},\overline{13}),$

$d(\overline{1},\overline{15}), d(\overline{1},\overline{17}), d(\overline{1},\overline{19}), d(\overline{1},\overline{21})\}$

$= \max\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$=1

$e(\overline{3}) = 2, e(\overline{5}) = 2, e(\overline{7}) = 2, e(\overline{9}) = 2, e(\overline{13}) = 2,$

$e(\overline{15}) = 2, e(\overline{17}) = 2, e(\overline{19}) = 2, e(\overline{21}) = 2$

a) *Total eccentricity*

$$\xi(I(Z_{22})) = \sum_{v \in V(I(Z_{22}))} e(v)$$

$$= 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

$$= 1 + (2 \times 9)$$

$$= 19$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c\big(I(Z_{22})\big) = \sum\nolimits_{v \in V(I(Z_{22}))} e(v)\, deg(v)$$

$$= (1 \times 9) + (2 \times 1) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2)$$

$$+(2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2)$$

$$= 9 + (2 \times 1) + \big((2 \times 2) \times 8\big)$$

$$= 43$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{22} adalah 41 dan 76.

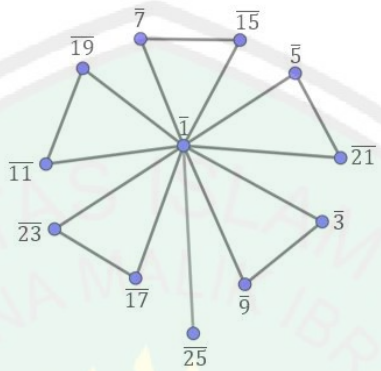
3.1.6 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{26}

Diberikan $(Z_{26}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan semua kelas bilangan modulo 26 dengan $Z_{26} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{25}\}$. Berikut akan ditunjukkan tabel Cayley $(Z_{26}, +, \cdot)$ terhadap operasi perkalian yaitu

Tabel 3.6 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{26}

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	3	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{22}$	$\overline{24}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{18}$	$\overline{20}$	$\overline{22}$	$\overline{24}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{18}$	$\overline{21}$	$\overline{24}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{10}$	$\overline{13}$	$\overline{16}$	$\overline{19}$	$\overline{22}$	$\overline{25}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{11}$	$\overline{14}$	$\overline{17}$	$\overline{20}$	$\overline{23}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{24}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$	$\overline{22}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{20}$	$\overline{24}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{18}$	$\overline{22}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{20}$	$\overline{25}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{14}$	$\overline{19}$	$\overline{24}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{13}$	$\overline{18}$	$\overline{23}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{12}$	$\overline{17}$	$\overline{22}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{16}$	$\overline{21}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{24}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\overline{22}$	$\overline{2}$	8	$\overline{14}$	$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{18}$	$\overline{24}$	$\overline{4}$	$\overline{10}$	$\overline{16}$	$\overline{22}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{14}$	$\overline{20}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{21}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{16}$	$\overline{23}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{18}$	$\overline{25}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$	$\overline{20}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{15}$	$\overline{22}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{17}$	$\overline{24}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{19}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{24}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{22}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{24}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{22}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{20}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{18}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{18}$	$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{19}$	$\overline{2}$	$\overline{11}$	$\overline{20}$	$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{21}$	$\overline{4}$	$\overline{13}$	$\overline{22}$	$\overline{5}$	$\overline{14}$	$\overline{23}$	$\overline{6}$	$\overline{15}$	$\overline{24}$	$\overline{7}$	$\overline{16}$	$\overline{25}$	$\overline{8}$	$\overline{17}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{24}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{22}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{20}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{24}$	$\overline{8}$	$\overline{18}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{22}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{22}$	$\overline{7}$	$\overline{18}$	3	$\overline{14}$	$\overline{25}$	$\overline{10}$	$\overline{21}$	$\overline{6}$	$\overline{17}$	$\overline{2}$	$\overline{13}$	$\overline{24}$	$\overline{9}$	$\overline{20}$	$\overline{5}$	$\overline{16}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{23}$	$\overline{8}$	$\overline{19}$	$\overline{4}$	$\overline{15}$
$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{24}$	$\overline{10}$	$\overline{22}$	$\overline{8}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{24}$	$\overline{10}$	$\overline{22}$	$\overline{8}$	$\overline{20}$	$\overline{6}$	$\overline{18}$	$\overline{4}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{14}$
$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$
$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{20}$	$\overline{8}$	$\overline{22}$	$\overline{10}$	$\overline{24}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{4}$	$\overline{18}$	$\overline{6}$	$\overline{20}$	$\overline{8}$	$\overline{22}$	$\overline{10}$	$\overline{24}$	$\overline{12}$
$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{4}$	$\overline{19}$	$\overline{8}$	$\overline{23}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{16}$	$\overline{5}$	$\overline{20}$	$\overline{9}$	$\overline{24}$	$\overline{13}$	$\overline{2}$	$\overline{17}$	$\overline{6}$	$\overline{21}$	$\overline{10}$	$\overline{25}$	$\overline{14}$	$\overline{3}$	$\overline{18}$	$\overline{7}$	$\overline{22}$	$\overline{11}$
$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{22}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{24}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{22}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{18}$	$\overline{8}$	$\overline{24}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{20}$	$\overline{10}$
$\overline{17}$	$\overline{0}$	$\overline{17}$	$\overline{8}$	$\overline{25}$	$\overline{16}$	$\overline{7}$	$\overline{24}$	$\overline{15}$	$\overline{6}$	$\overline{23}$	$\overline{14}$	$\overline{5}$	$\overline{22}$	$\overline{13}$	$\overline{4}$	$\overline{21}$	$\overline{12}$	$\overline{3}$	$\overline{20}$	$\overline{11}$	$\overline{2}$	$\overline{19}$	$\overline{10}$	$\overline{1}$	$\overline{18}$	$\overline{9}$
$\overline{18}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{22}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{24}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{20}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{22}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{24}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$
$\overline{19}$	$\overline{0}$	$\overline{19}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{24}$	$\overline{17}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{22}$	$\overline{15}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{20}$	$\overline{13}$	$\overline{6}$	$\overline{25}$	$\overline{18}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{23}$	$\overline{16}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{21}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$
$\overline{20}$	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{22}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{24}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{20}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{22}$	$\overline{16}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{24}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{21}$	$\overline{0}$	$\overline{21}$	$\overline{16}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{22}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{23}$	$\overline{18}$	$\overline{13}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{24}$	$\overline{19}$	$\overline{14}$	9	$\overline{4}$	$\overline{25}$	$\overline{20}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{22}$	$\overline{0}$	$\overline{22}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{24}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{22}$	$\overline{18}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{24}$	$\overline{20}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{23}$	$\overline{0}$	$\overline{23}$	$\overline{20}$	$\overline{17}$	$\overline{14}$	$\overline{11}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{25}$	$\overline{22}$	$\overline{19}$	$\overline{16}$	$\overline{13}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{24}$	$\overline{21}$	$\overline{18}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{24}$	$\overline{0}$	$\overline{24}$	$\overline{22}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{24}$	$\overline{22}$	$\overline{20}$	$\overline{18}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{25}$	$\overline{0}$	$\overline{25}$	$\overline{24}$	$\overline{23}$	$\overline{22}$	$\overline{21}$	$\overline{20}$	$\overline{19}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	10	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Berdasarkan Tabel 3.6, maka diperoleh $I(Z_{26}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{15}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{21}, \overline{23}, \overline{25}\}$. Sehingga graf identitas ring komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{26} adalah



Gambar 3.6 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{26}

Berikut perolehan nilai dari eksentrisitas dan derajat titik berdasarkan Gambar 3.6.

Derajat titik : $deg(\bar{1}) = 11, deg(\bar{3}) = 2, deg(\bar{5}) = 2, deg(\bar{7}) = 2,$

$deg(\bar{9}) = 2, deg(\overline{11}) = 2, deg(\overline{15}) = 2, deg(\overline{17}) = 2,$

$deg(\overline{19}) = 2, deg(\overline{21}) = 2, deg(\overline{23}) = 2, deg(\overline{25}) = 1$

Eksentrisitas titik: $e(\bar{1}) = \max\{d(\bar{1},\bar{3}), d(\bar{1},\bar{5}), d(\bar{1},\bar{7}), d(\bar{1},\bar{9}), d(\bar{1},\overline{11}),$

$d(\bar{1},\overline{15}), d(\bar{1},\overline{17}), d(\bar{1},\overline{19}), d(\bar{1},\overline{21}), d(\bar{1},\overline{23}),$

$d(\bar{1},\overline{25})\}$

$= \max\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} = 1$

$e(\bar{3}) = 2, e(\bar{5}) = 2, e(\bar{7}) = 2, e(\bar{9}) = 2, e(\overline{11}) = 2,$

$e(\overline{15}) = 2, e(\overline{17}) = 2, e(\overline{19}) = 2, e(\overline{21}) = 2, e(\overline{23}) = 2,$

$e(\overline{25}) = 1$

a) *Total eccentricity*

$$\xi(I(Z_{26})) = \sum_{v \in V(I(Z_{26}))} e(v)$$

$$= 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

$$= 1 + (2 \times 11)$$

$$= 23$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c(I(Z_{26})) = \sum_{v \in V(I(Z_{26}))} e(v)\, deg(v)$$

$$= (1 \times 11) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2)$$

$$+ (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 2) + (2 \times 1)$$

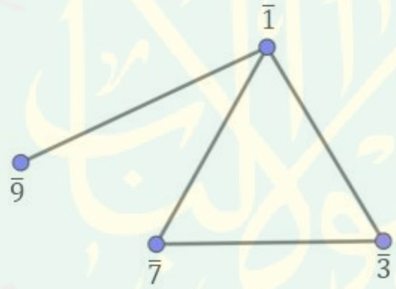
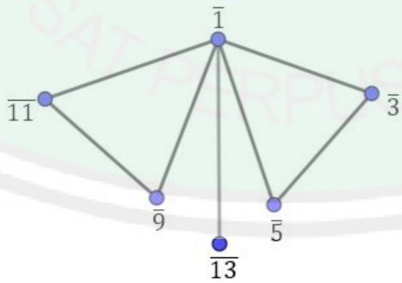
$$= 11 + \big((2 \times 2) \times 10\big) + (2 \times 1)$$

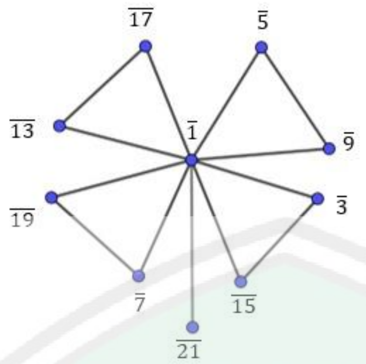
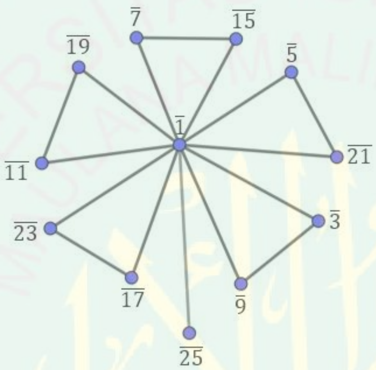
$$= 53$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{26} adalah 23 dan 53.

Berdasarkan perhitungan *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{2p}, maka dapat dinyatakan dalam tabel berikut ini:

Tabel 3.7 *Total Eccentricity* dan *Eccentric Connectivity Index* dari Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{2p}

Modulo	**Gambar Graf**	***Total Eccentricity***	**ECI**
Z_4		2	2
Z_6		2	2
Z_{10}		$(2 \times 5) - 3$ $= 7$	$(5 \times 5) - 12$ $= 13$
Z_{14}		$(2 \times 7) - 3$ $= 11$	$(7 \times 5) - 12$ $= 23$

Z_{22}		$(2 \times 11) - 3 = 19$	$(11 \times 5) - 12 = 43$
Z_{26}		$(2 \times 13) - 3 = 23$	$(13 \times 5) - 12 = 53$

Teorema 3.1

Misalkan $(Z_{2p}, +, \cdot)$ dengan p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo $2p$, maka *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf $I(Z_{2p})$ adalah:

(a) $\xi\left(I(Z_{2p})\right) = 2$ dan $\xi^c\left(I(Z_{2p})\right) = 2$, untuk $p = 2$

(b) $\xi\left(I(Z_{2p})\right) = 2p - 3$ dan $\xi^c\left(I(Z_{2p})\right) = 5p - 12$, untuk $p \geq 5$

Bukti

(a) Misalkan $(Z_4, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan unsur identitas yaitu $\bar{1}$, maka pada himpunan bilangan bulat modulo 4 didapatkan unsur yang hasil perkaliannya $\bar{1}$ yaitu $\bar{1}$ dan $\bar{3}$. Berdasarkan definisi graf identitas pada ring komutatif dengan unsur kesatuan, yaitu untuk setiap dua unsur yang hasil perkaliannya identitas akan terhubung langsung dengan $\bar{1}$. Sehingga $\bar{1}$ dan $\bar{3}$ terhubung langsung dengan $\bar{1}$. Akan tetapi, $\bar{1}$ tidak akan terhubung langsung dengan dirinya sendiri karena dua titik yang terhubung langsung haruslah titik yang berbeda di Z_4. Selanjutnya dari graf identitas tersebut diperoleh nilai $deg(\bar{1}) = deg(\bar{3}) = 1$ dan $e(\bar{1}) = e(\bar{3}) = 1$. Dengan demikian didapatkan *total eccentric* dan *eccentric connectivity index* dari graf $I(Z_4)$ adalah

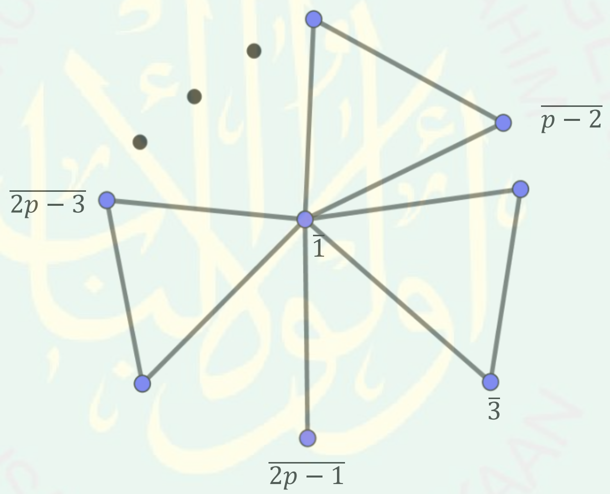
$$\xi\big(I(Z_4)\big) = 2 \text{ dan } \xi^c\big(I(Z_4)\big) = 2.$$

Misalkan $(Z_6, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan unsur identitas yaitu $\bar{1}$, maka pada himpunan bilangan bulat modulo 6 didapatkan unsur yang hasil perkaliannya $\bar{1}$ yaitu $\bar{1}$ dan $\bar{5}$. Berdasarkan definisi graf identitas pada ring komutatif dengan unsur kesatuan, yaitu untuk setiap dua unsur yang hasil perkaliannya identitas akan terhubung langsung dengan $\bar{1}$. Sehingga $\bar{1}$ dan $\bar{5}$ terhubung langsung dengan $\bar{1}$. Akan tetapi, $\bar{1}$ tidak akan terhubung langsung dengan dirinya sendiri karena dua titik yang terhubung langsung haruslah titik yang berbeda di Z_6. Selanjutnya dari graf identitas tersebut diperoleh nilai $deg(\bar{1}) = deg(\bar{5}) = 1$ dan $e(\bar{1}) = e(\bar{5}) = 1$. Dengan demikian didapatkan *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf $I(Z_6)$ adalah

$$\xi\big(I(Z_6)\big) = 2 \text{ dan } \xi^c\big(I(Z_6)\big) = 2.$$

(b) Misalkan $(Z_{2p}, +, \cdot)$ untuk $p \geq 5$ dengan p prima adalah ring komutatif dengan unsur identitas yaitu $\bar{1}$. Unsur pada himpunan bilangan bulat modulo

$2p$ adalah $Z_{2p} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{2p-1}\}$. Maka diperoleh himpunan *unit* pada bilangan bulat modulo $2p$ yaitu $I(Z_{2p}) = \{\overline{1}, \overline{3}, \dots, \overline{p-2}, \overline{2p-(p-2)}, \dots, \overline{2p-3}, \overline{2p-1}\}$. Kemudian unsur-unsur dari $I(Z_{2p})$ akan membentuk titik pada graf sederhana dengan order $p-1$. Dua unsur dari $I(Z_{2p})$ yang hasil perkaliannya $\overline{1}$ akan terhubung langsung. Selanjutnya, untuk setiap unsur $I(Z_{2p})$ akan terhubung langsung dengan $\overline{1}$. Dengan bantuan program Matlab diperoleh graf $I(Z_{2p})$ sebagai berikut



Gambar 3.7 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{2p}

Berdasarkan Gambar 3.7 maka diperoleh $deg(\overline{1}) = p-2, deg(\overline{2p-1}) = 1$ dan $deg(v) = 2$ untuk $v \neq \overline{1}$ atau $v \neq \overline{2p-1}$. Didapatkan nilai eksentrisitas titiknya yaitu $e(\overline{1}) = 1$ dan $e(v) = 2$ untuk $v \neq \overline{1}$. Dengan demikian didapatkan *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf $I(Z_{2p})$ untuk $p \geq 5$ dan p prima, sebagai berikut

$$\xi\left(I(Z_{2p})\right) = \sum_{v \in V\left(I(Z_{2p})\right)} e(v)$$

$$= 1 + \underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{p-2}$$

$$= 1 + \left(2 \times (p-2)\right)$$

$$= 2p - 3$$

dan

$$\xi^c\left(I(Z_{2p})\right) = \sum_{v \in V\left(I(Z_{2p})\right)} e(v)\, deg(v)$$

$$= 1(p-2) + (2 \times 1) + \underbrace{(2 \times 2) + (2 \times 2) + \ldots + (2 \times 2)}_{p-3}$$

$$= (p-2) + 2 + \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{p-3}$$

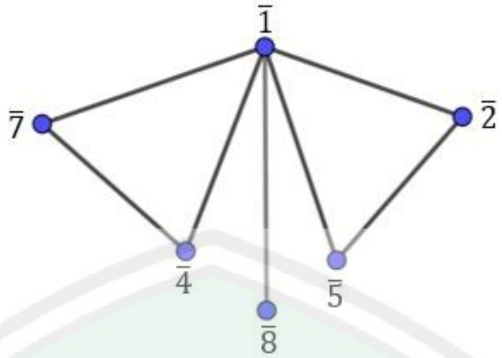
$$= (p-2) + 2 + \left(4 \times (p-3)\right)$$

$$= 5p - 12. \qquad \blacksquare$$

3.2 *Total Eccentricity* dan *Eccentric Connectivity Index* dari Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{3p}

3.2.1 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_9

Diberikan $(Z_9, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 9 dengan $Z_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{8}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_9 yaitu $I(Z_9) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.8 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_9

Berdasarkan Gambar 3.8 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi(I(Z_9)) = \sum_{v \in V(I(Z_9))} e(v)$$

$$= 1 + (5 \times 2)$$

$$= 11$$

b) *Eccentric connectivity index*

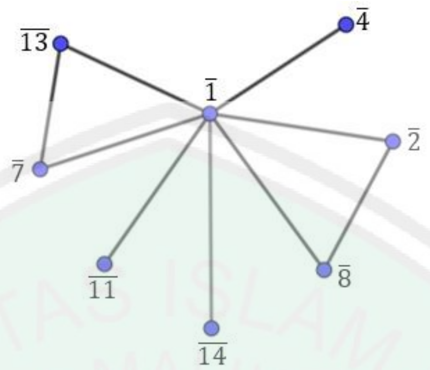
$$\xi^c(I(Z_9)) = \sum_{v \in V(I(Z_9))} e(v)\, deg(v)$$

$$= (1 \times 5) + ((2 \times 2) \times 4) + (2 \times 1) = 23$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_9 adalah 2 dan 2.

3.2.2 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{15}

Diberikan $(Z_{15}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 15 dengan $Z_{15} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{14}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_{15} yaitu $I(Z_{15}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.9 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{15}

Berdasarkan Gambar 3.9 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi\big(I(Z_{15})\big) = \sum_{v \in V(I(Z_{15}))} e(v)$$

$$= 1 + (7 \times 2)$$

$$= 15$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c\big(I(Z_{15})\big) = \sum_{v \in V(I(Z_{15}))} e(v)\, deg(v)$$

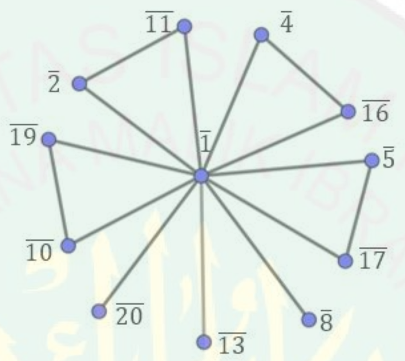
$$= (1 \times 7) + \big((2 \times 2) \times 4\big) + \big((2 \times 1) \times 3\big)$$

$$= 29$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{15} adalah 15 dan 29.

3.2.3 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{21}

Diberikan $(Z_{21}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 21 dengan $Z_{21} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{20}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_{21} yaitu $I(Z_{21}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.10 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{21}

Berdasarkan Gambar 3.10 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan Unsur Kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi(I(Z_{21})) = \sum_{v \in V(I(Z_{21}))} e(v)$$

$$= 1 + (2 \times 11)$$

$$= 23$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c(I(Z_{21})) = \sum_{v \in V(I(Z_{21}))} e(v)\, deg(v)$$

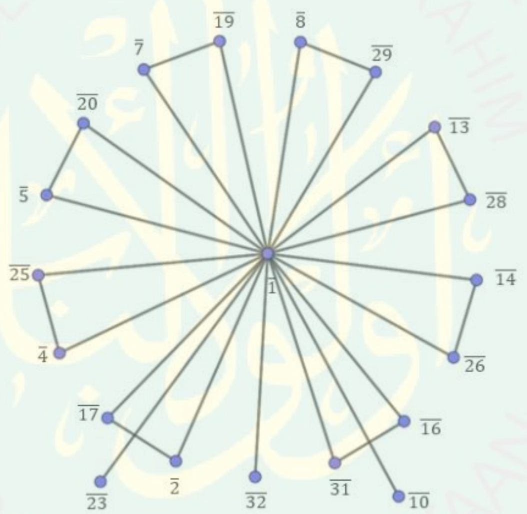
$$= (1 \times 11) + \big((2 \times 2) \times 8\big) + \big((2 \times 1) \times 3\big)$$

$$= 49$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{21} adalah 23 dan 49.

3.2.4 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{33}

Diberikan $(Z_{33},+,\ \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 33 dengan $Z_{33}=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\ldots,\overline{32}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_{33} yaitu $I(Z_{33})=\{\bar{1},\bar{2},\bar{4},\bar{5},\bar{7},\bar{8},\overline{10},\overline{13},\overline{14},\overline{16},\overline{17},\overline{19},\overline{20},\overline{23},\overline{25},\overline{26},\overline{28},\overline{29},\overline{31},\overline{32}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.11 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{33}

Berdasarkan Gambar 3.11 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi\big(I(Z_{33})\big) = \sum\nolimits_{v\in V(I(Z_{33}))} e(v)$$

$$= 1 + (2 \times 19)$$

$$= 39$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c(I(Z_{33})) = \sum_{v \in V(I(Z_{33}))} e(v)\, deg(v)$$

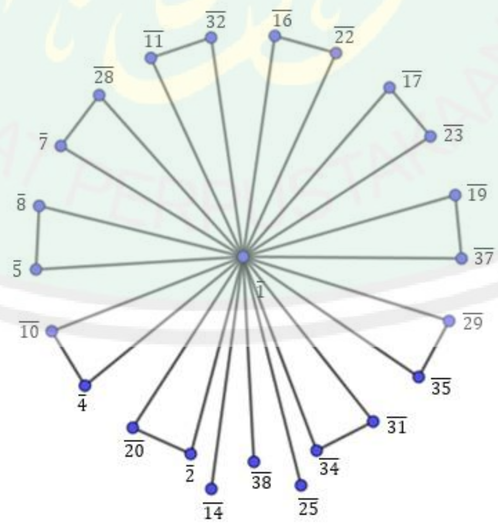
$$= 19 + ((2 \times 2) \times 16) + ((2 \times 1) \times 3)$$

$$= 89$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{33} adalah 39 dan 89.

3.2.5 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{39}

Diberikan $(Z_{39}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 39 dengan $Z_{39} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{38}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_{39} yaitu $I(Z_{39}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{25}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{32}, \overline{34}, \overline{35}, \overline{37}, \overline{38}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.12 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{39}

Berdasarkan Gambar 3.12 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi(I(Z_{39})) = \sum_{v \in V(I(Z_{39}))} e(v)$$

$$= 1 + (2 \times 23)$$

$$= 47$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c(I(Z_{39})) = \sum_{v \in V(I(Z_{39}))} e(v)\, deg(v)$$

$$= 23 + \big((2 \times 2) \times 20\big) + \big((2 \times 1) \times 3\big)$$

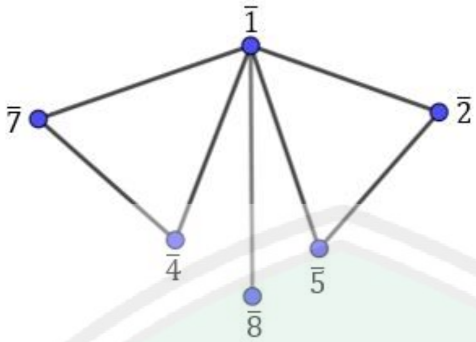
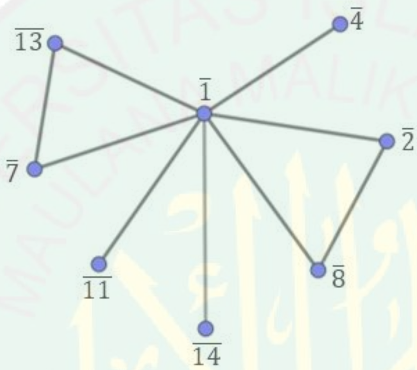
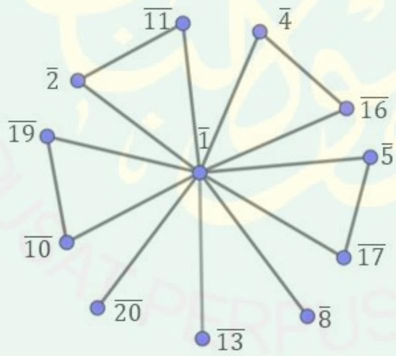
$$= 109$$

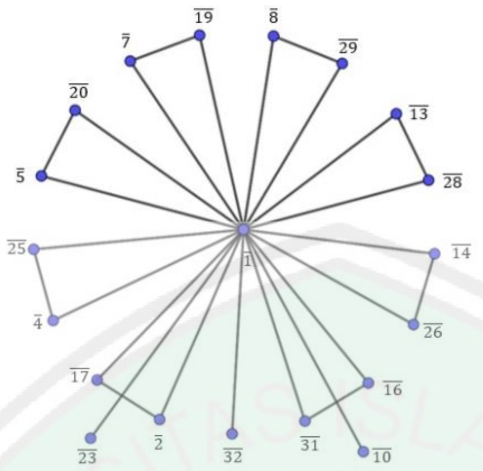
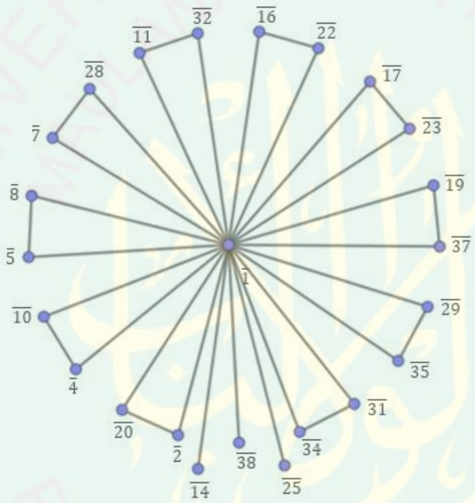
Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{39} adalah 47 dan 109.

Berdasarkan perhitungan *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{3p}, maka dapat dinyatakan dalam tabel berikut ini:

Tabel 3.8 *Total Eccentricity* dan *Eccentric Connectivity Index* dari Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{3p}

Modulo	**Gambar Graf**	***Total Eccentricity***	**ECI**
Z_6		2	2

Z_9		11	23
Z_{15}		$(4 \times 5) - 5$ $= 15$	$(10 \times 5) - 21$ $= 29$
Z_{21}		$(4 \times 7) - 5$ $= 23$	$(10 \times 7) - 21$ $= 49$

Z_{33}		$(4 \times 11) - 5 = 39$	$(10 \times 11) - 21 = 89$
Z_{39}		$(4 \times 13) - 5 = 47$	$(10 \times 13) - 21 = 109$

Teorema 3.2

Misalkan $(Z_{3p}, +, \cdot)$ dengan p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo $3p$, maka *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf $I(Z_{3p})$ adalah:

(a) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 2$ dan $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 2$, untuk $p = 2$

(b) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 11$ dan $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 23$, untuk $p = 3$

(c) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 4p - 5$ dan $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 10p - 21$, untuk $p \geq 5$

Bukti:

(a) Misalkan $(Z_6, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan unsur identitas yaitu $\bar{1}$, maka pada himpunan bilangan bulat modulo 6 didapatkan unsur yang hasil perkaliannya $\bar{1}$ yaitu $\bar{1}$ dan $\bar{5}$. Berdasarkan definisi graf identitas pada ring komutatif dengan unsur identitas, yaitu untuk setiap dua unsur yang hasil perkaliannya identitas akan terhubung langsung dengan $\bar{1}$. Sehingga $\bar{1}$ dan $\bar{5}$ terhubung langsung dengan $\bar{1}$. Akan tetapi, $\bar{1}$ tidak akan terhubung langsung dengan dirinya sendiri karena dua titik yang terhubung langsung haruslah titik yang berbeda di Z_6. Selanjutnya dari graf identitas tersebut diperoleh nilai $deg(\bar{1}) = deg(\bar{5}) = 1$ dan $e(\bar{1}) = e(\bar{5}) = 1$. Dengan demikian didapatkan hasil *total eccentric* dan *eccentric connectivity index* graf $I(Z_6)$ adalah

$$\xi(I(Z_6)) = 2 \text{ dan } \xi^c(I(Z_6)) = 2$$

(b) Misalkan $(Z_9, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan unsur identitas yaitu $\bar{1}$, maka pada himpunan bilangan bulat modulo 9 didapatkan unsur-unsur *unit* yaitu $I(Z_9) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8}\}$. Kemudian setiap unsur $I(Z_9)$ akan membentuk himpunan titik $V(I(Z_9))$ pada graf sederhana. Dua unsur dari $V(I(Z_9))$ yang hasil perkaliannya $\bar{1}$ akan terhubung langsung. Selanjutnya, untuk setiap unsur $V(I(Z_9))$ akan terhubung langsung dengan $\bar{1}$. Sehingga diperoleh derajat titik dan eksentrisitas titik pada masing-masing titik $V(I(Z_9))$ yaitu $deg(\bar{1}) = 5, deg(\bar{8}) = 1,$ dan $deg(v) = 2$ untuk $v \neq \bar{1}$ atau $v \neq \bar{8}$. Kemudian eksentrisitasnya adalah $e(\bar{1}) = 1$ dan $e(v) = 2$ untuk $v \neq \bar{1}$. Dengan demikian didapatkan *total eccentric* dan *eccentric connectivity index* dari graf $I(Z_9)$ adalah

$$\xi\left(I(Z_{3p})\right) = \sum_{v \in V\left(I(Z_{3p})\right)} e(v)$$

$$= 1 + \left((2 \times 5) \times 10\right) = 11$$

dan

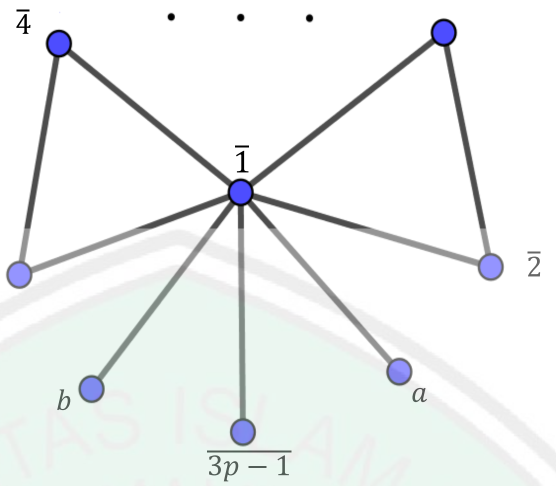
$$\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = \sum_{v \in V\left(I(Z_{3p})\right)} e(v)\, deg(v)$$

$$= (1 \times 5) + \left((2 \times 2) \times 4\right) + (2 \times 1)$$

$$= 5 + 16 + 2$$

$$= 23$$

(c) Misalkan $(Z_{3p}, +, \cdot)$ untuk $p \geq 5$ dengan p prima adalah ring komutatif dengan unsur identitas yaitu $\bar{1}$. Unsur pada himpunan bilangan bulat modulo $3p$ adalah $Z_{3p} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{3p-1}\}$. Maka diperoleh himpunan *unit* pada bilangan bulat modulo $3p$ yaitu $I(Z_{3p}) = \left\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \dots, \overline{\frac{3p-1}{2}}, \overline{3p - \frac{3p-1}{2}}, \dots, \overline{3p-1}\right\}$. Kemudian unsur-unsur dari $I(Z_{3p})$ akan membentuk titik $V\left(I(Z_{3p})\right)$ pada graf sederhana dengan order $2p - 2$. Dua unsur dari $V\left(I(Z_{3p})\right)$ yang hasil perkaliannya $\bar{1}$ akan terhubung langsung. Selanjutnya, untuk setiap unsur $V\left(I(Z_{3p})\right)$ akan terhubung langsung dengan $\bar{1}$. Dengan bantuan program Matlab diperoleh graf $I(Z_{3p})$ sebagai berikut



Gambar 3.13 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Keatuan Z_{3p}

Berdasarkan Gambar 3.13, maka diperoleh $deg(\bar{1}) = 2p - 3$, $deg(a) = deg(b) = 1$, $deg(\overline{3p-1}) = 1$ dan $deg(v) = 2$ untuk $v \neq \bar{1}, v \neq a, v \neq b$, atau $v \neq \overline{3p-1}$. Didapatkan nilai eksentrisitas titik yaitu $e(\bar{1}) = 1$ dan $e(v) = 2$ untuk $v \neq \bar{1}$. Dengan demikian didapatkan *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf $I(Z_{3p})$ untuk $p \geq 5$ dan p prima, sebagai berikut

$$\xi\left(I(Z_{3p})\right) = \sum_{v \in V\left(I(Z_{3p})\right)} e(v)$$

$$= 1 + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{2p-3}$$

$$= 1 + \left(2 \times (2p - 3)\right)$$

$$= 4p - 5$$

dan

$$\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = \sum_{v \in V\left(I(Z_{3p})\right)} e(v)\, deg(v)$$

$$= \left(1 \times (2p - 3)\right) + (2 \times 1) + (2 \times 1) + (2 \times 1)$$

$$+ \underbrace{(2 \times 2) + (2 \times 2) + \dots + (2 \times 2)}_{2p-6}$$

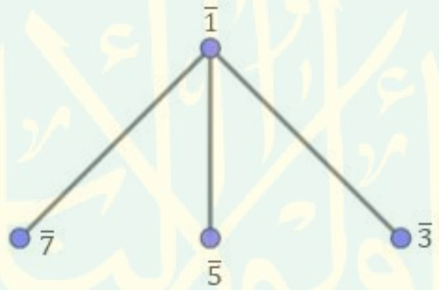
$$= \left(1 \times (2p - 3)\right) + 2 + 2 + 2 + \left(4 \times (2p - 6)\right)$$

$$= 10p - 21. \qquad \blacksquare$$

3.3 *Total Eccentricity* dan *Eccentric Connectivity Index* dari Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{4p}

3.3.1 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_8

Diberikan $(Z_8, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 8 dengan $Z_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{7}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_8 yaitu $I(Z_8) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.14 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_8

Berdasarkan Gambar 3.14 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi\left(I(Z_8)\right) = \sum_{v \in V(I(Z_8))} e(v)$$

$$= 1 + (3 \times 2)$$

$$= 7$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c\left(I(Z_8)\right) = \sum_{v \in V(I(Z_8))} e(v)\, deg(v)$$

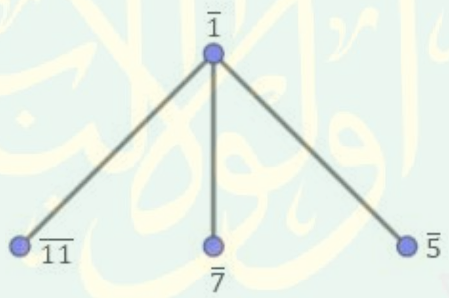
$$= (1 \times 3) + ((2 \times 1) \times 3)$$

$$= 9$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_8 adalah 7 dan 9.

3.3.2 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{12}

Diberikan $(Z_{12}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 12 dengan $Z_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{11}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_{12} yaitu $I(Z_{12}) = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.15 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{12}

Berdasarkan Gambar 3.15 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi(I(Z_{12})) = \sum_{v \in V(I(Z_{12}))} e(v)$$

$$= 1 + (2 \times 3)$$

$$= 7$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c(I(Z_{12})) = \sum_{v \in V(I(Z_{12}))} e(v)\, deg(v)$$

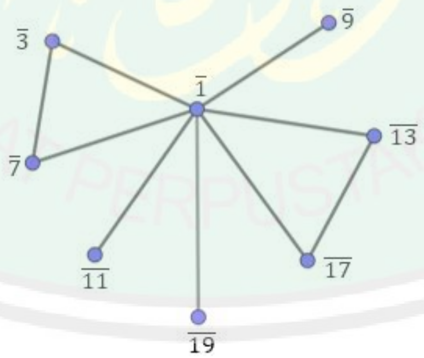
$$= (1 \times 3) + ((2 \times 1) \times 3)$$

$$= 9$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{12} adalah 7 dan 9.

3.3.3 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{20}

Diberikan $(Z_{20}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 20 dengan $Z_{20} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{19}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_{20} yaitu $I(Z_{20}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.16 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{20}

Berdasarkan Gambar 3.16 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi\big(I(Z_{20})\big) = \sum\nolimits_{v \in V(I(Z_{20}))} e(v)$$

$$= 1 + (2 \times 7)$$

$$= 15$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c\big(I(Z_{20})\big) = \sum\nolimits_{v \in V(I(Z_{20}))} e(v)\, deg(v)$$

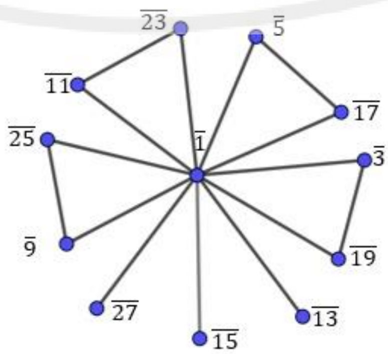
$$= (1 \times 7) + \big((2 \times 2) \times 4\big) + \big((2 \times 1) \times 3\big)$$

$$= 29$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{20} adalah 15 dan 29.

3.3.4 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{28}

Diberikan $(Z_{28}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 28 dengan $Z_{28} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{27}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_{28} yaitu $I(Z_{28}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{15}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{23}, \overline{25}, \overline{27}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.17 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{28}

Berdasarkan Gambar 3.17 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi\big(I(Z_{28})\big) = \sum\nolimits_{v \in V(I(Z_{28}))} e(v)$$
$$= 1 + (2 \times 11)$$
$$= 23$$

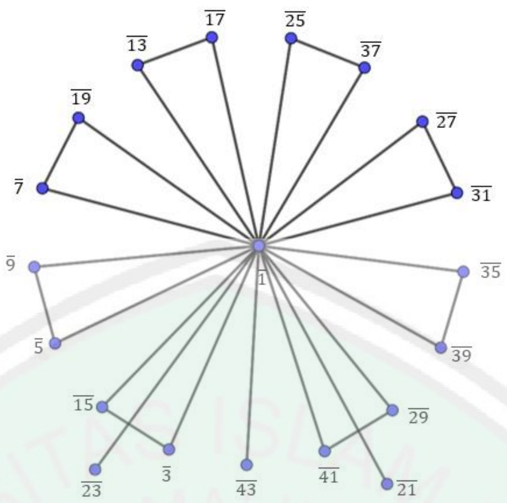
b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c\big(I(Z_{28})\big) = \sum\nolimits_{v \in V(I(Z_{28}))} e(v)\, deg(v)$$
$$= 11 + \big((2 \times 2) \times 8\big) + \big((2 \times 1) \times 3\big)$$
$$= 49$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{28} adalah 53 dan 94.

3.3.5 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{44}

Diberikan $(Z_{44}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 44 dengan $Z_{44} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{43}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_{44} yaitu $I(Z_{44}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \overline{13}, \overline{15}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{21}, \overline{23}, \overline{25}, \overline{27}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{35}, \overline{37}, \overline{39}, \overline{41}, \overline{43}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.18 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{44}

Berdasarkan Gambar 3.18 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi(I(Z_{44})) = \sum_{v \in V(I(Z_{44}))} e(v)$$

$$= 1 + (2 \times 19)$$

$$= 39$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c(I(Z_{44})) = \sum_{v \in V(I(Z_{44}))} e(v)\, deg(v)$$

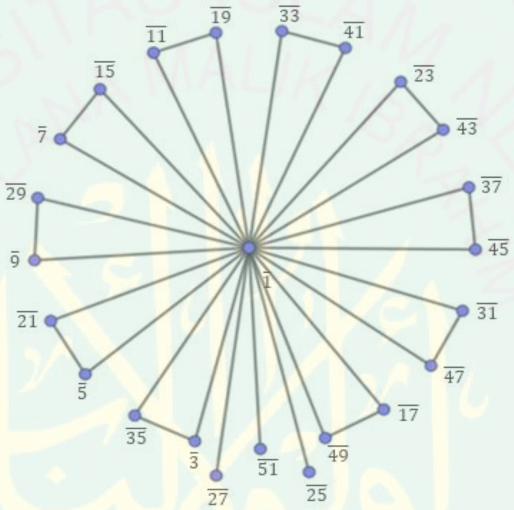
$$= (1 \times 19) + \big((2 \times 2) \times 16\big) + \big((2 \times 1) \times 3\big)$$

$$= 89$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{44} adalah 39 dan 89.

3.3.6 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{52}

Diberikan $(Z_{52}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 52 dengan $Z_{52} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{51}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_{52} yaitu $I(Z_{52}) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{11}, \overline{15}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{21}, \overline{23}, \overline{25}, \overline{27}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{33}, \overline{35}, \overline{37}, \overline{41}, \overline{43}, \overline{45}, \overline{47}, \overline{49}, \overline{51}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.19 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{52}

Berdasarkan Gambar 3.19 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi(I(Z_{52})) = \sum_{v \in V(I(Z_{52}))} e(v)$$

$$= 1 + (2 \times 23)$$

$$= 47$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c(I(Z_{52})) = \sum_{v \in V(I(Z_{52}))} e(v)\, deg(v)$$

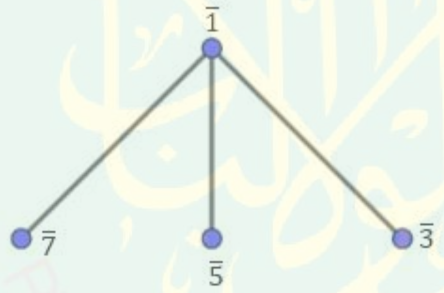
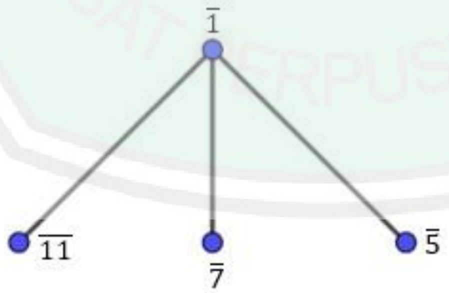
$$= 23 + \big((2 \times 2) \times 20\big) + \big((2 \times 1) \times 3\big)$$

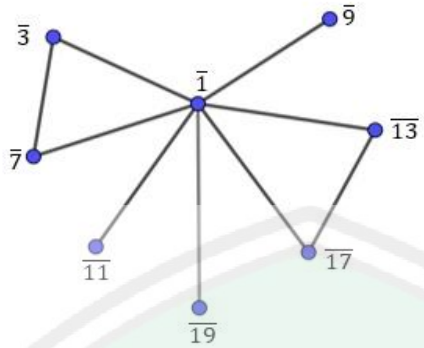
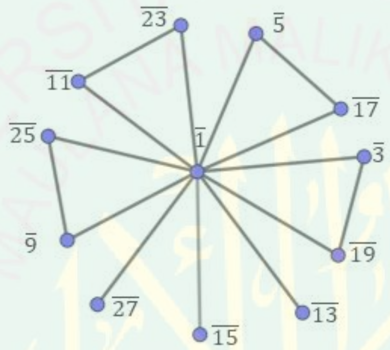
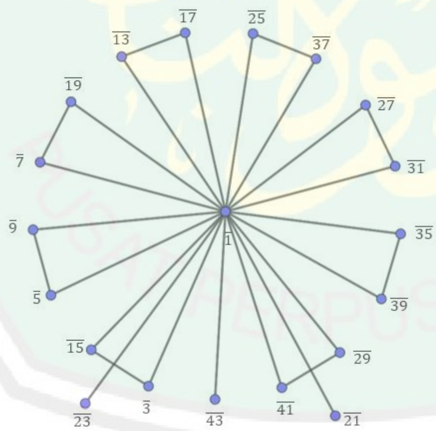
$$= 109$$

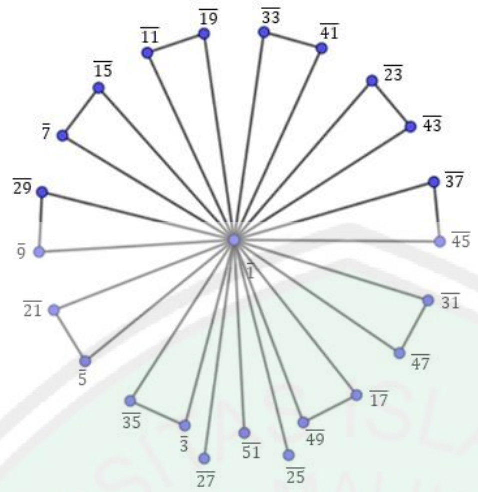
Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{52} adalah 47 dan 109.

Berdasarkan perhitungan *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{4p}, maka dapat dinyatakan dalam tabel berikut ini:

Tabel 3.9 *Total Eccentricity* dan *Eccentric Connectivity Index* dari Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{4p}

Modulo	**Gambar Graf**	***Total Eccentricity***	**ECI**
Z_8		7	9
Z_{12}		7	9

Z_{20}		$(4 \times 5) - 5 = 15$	$(10 \times 5) - 21 = 29$
Z_{28}		$(4 \times 7) - 5 = 23$	$(10 \times 7) - 21 = 49$
Z_{44}		$(4 \times 11) - 5 = 39$	$(10 \times 11) - 21 = 89$

Z_{52}		$(4 \times 13) - 5 = 47$	$(10 \times 13) - 21 = 109$

Teorema 3.3

Misalkan $(Z_{4p}, +, \cdot)$ dengan p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo $4p$, maka *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf $I(Z_{4p})$ adalah:

(a) $\xi\left(I(Z_{4p})\right) = 7$ dan $\xi^c\left(I(Z_{4p})\right) = 9$, untuk $p = 2$ atau $p = 3$

(b) $\xi\left(I(Z_{4p})\right) = 4p - 5$ dan $\xi^c\left(I(Z_{4p})\right) = 10p - 21$, untuk $p \geq 5$

Bukti:

(a) Misalkan $(Z_8, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan unsur identitas yaitu $\overline{1}$, maka pada himpunan bilangan bulat modulo 8 didapatkan unsur-unsur *unit* yaitu $I(Z_8) = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{7}\}$. Kemudian setiap unsur $I(Z_8)$ akan membentuk himpunan titik $V\left(I(Z_8)\right)$ pada graf sederhana. Dua unsur dari $V\left(I(Z_8)\right)$ yang hasil perkaliannya $\overline{1}$ akan terhubung langsung. Selanjutnya, untuk setiap unsur $V\left(I(Z_8)\right)$ akan terhubung langsung dengan $\overline{1}$. Sehingga diperoleh derajat titik dan eksentrisitas titik pada masing-masing titik $V\left(I(Z_8)\right)$ yaitu $deg(\overline{1}) = 3$

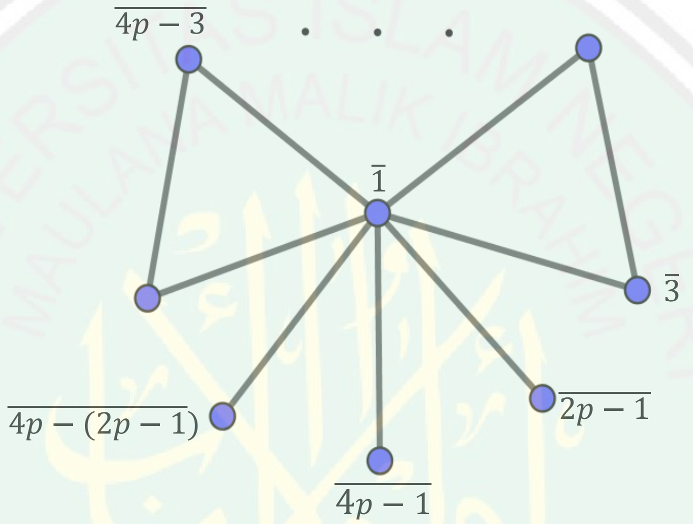
dan $deg(v) = 1$ untuk $v \neq \overline{1}$. Kemudian eksentrisitasnya adalah $e(\overline{1}) = 1$ dan $e(v) = 2$ untuk $v \neq \overline{1}$. Dengan demikian didapatkan hasil *total eccentric* dan *eccentric connectivity index* dari graf $I(Z_8)$ adalah

$$\xi\big(I(Z_8)\big) = 7 \text{ dan } \xi^c\big(I(Z_8)\big) = 9$$

Misalkan $(Z_{12}, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan unsur identitas pada operasi kedua yaitu $\overline{1}$, maka pada himpunan bilangan bulat modulo 12 didapatkan unsur-unsur *unit* yaitu $I(Z_{12}) = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}\}$. Kemudian setiap unsur $I(Z_{12})$ akan membentuk himpunan titik $V\big(I(Z_{12})\big)$ pada graf sederhana. Dua unsur dari $V\big(I(Z_{12})\big)$ yang hasil perkaliannya $\overline{1}$ akan terhubung langsung. Selanjutnya, untuk setiap unsur $V\big(I(Z_{12})\big)$ akan terhubung langsung dengan $\overline{1}$. Sehingga diperoleh derajat titik dan eksentrisitas titik pada masing-masing titik $V\big(I(Z_{12})\big)$ yaitu $deg(\overline{1}) = 3$ dan $deg(v) = 1$ untuk $v \neq \overline{1}$. Kemudian eksentrisitasnya adalah $e(\overline{1}) = 1$ dan $e(v) = 2$ untuk $v \neq \overline{1}$. Dengan demikian didapatkan hasil *total eccentric* dan *eccentric connectivity index* dari graf $I(Z_{12})$ adalah

$$\xi\big(I(Z_{12})\big) = 7 \text{ dan } \xi^c\big(I(Z_{12})\big) = 9$$

(b) Misalkan $(Z_{4p}, +, \cdot)$ untuk $p \geq 5$ dengan p prima adalah ring komutatif dengan unsur identitas pada operasi kedua yaitu $\overline{1}$. Unsur pada himpunan bilangan bulat modulo $3p$ adalah $Z_{4p} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{4p-1}\}$. Maka diperoleh himpunan *unit* pada bilangan bulat modulo $4p$ yaitu $I(Z_{4p}) = \{\overline{1}, \overline{3}, \dots, \overline{2p-1}, \overline{4p-(2p-1)}, \dots, \overline{4p-3}, \overline{4p-1}\}$. Kemudian unsur-unsur dari $I(Z_{4p})$ akan membentuk titik $V\left(I(Z_{4p})\right)$ pada graf sederhana dengan order $2p-2$. Dua unsur dari $V\left(I(Z_{4p})\right)$ yang hasil perkaliannya $\bar{1}$ akan terhubung langsung. Selanjutnya, untuk setiap unsur $V\left(I(Z_{4p})\right)$ akan terhubung langsung dengan $\bar{1}$. Dengan bantuan program Matlab diperoleh graf $I(Z_{4p})$ sebagai berikut



Gambar 3.20 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{4p}

Berdasarkan Gambar 3.20, maka diperoleh $deg(\bar{1}) = 2p-3, deg(\overline{2p-1}) = 1$, $deg(\overline{2p+1}) = 1$, $deg(\overline{4p-1}) = 1$ dan $deg(v) = 2$ untuk $v \neq \bar{1}$, $v \neq \overline{2p-1}$, $v \neq \overline{2p+1}$, atau $v \neq \overline{4p-1}$. Didapatkan nilai eksentrisitas titik yaitu $e(\bar{1}) = 1$ dan $e(v) = 2$ untuk $v \neq \bar{1}$. Dengan demikian didapatkan *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf $I(Z_{3p})$ untuk $p \geq 5$ dan p prima, sebagai berikut

$$\xi\left(I(Z_{4p})\right) = \sum\nolimits_{v \in V\left(I(Z_{4p})\right)} e(v)$$

$$= 1 + \underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{2p-3}$$

$$= 1 + \big(2 \times (2p - 3)\big)$$

$$= 4p - 5$$

dan

$$\xi^c\left(I(Z_{4p})\right) = \sum_{v \in V\left(I(Z_{4p})\right)} e(v)\, deg(v)$$

$$= \big(1 \times (2p - 3)\big) + (2 \times 1) + (2 \times 1) + (2 \times 1)$$

$$+ \underbrace{(2 \times 2) + (2 \times 2) + \ldots + (2 \times 2)}_{2p-6}$$

$$= (2p - 3) + 2 + 2 + 2 + \big(4 \times (2p - 6)\big)$$

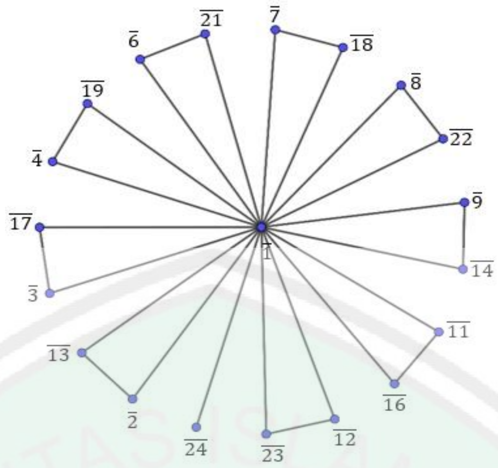
$$= 10p$$

$$- 21.$$ ■

3.4 *Total Eccentricity* dan *Eccentric Connectivity Index* dari Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{5p}

3.4.1 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{25}

Diberikan $(Z_{25}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 25 dengan $Z_{25} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{24}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_{25} yaitu $I(Z_{25}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}\}$ Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.21 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{25}

Berdasarkan Gambar 3.21 dengan cara yang sama pada ring modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi(I(Z_{25})) = \sum_{v \in V(I(Z_{25}))} e(v)$$

$$= 1 + (2 \times 19)$$

$$= 39$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c(I(Z_{25})) = \sum_{v \in V(I(Z_{25}))} e(v)\, deg(v)$$

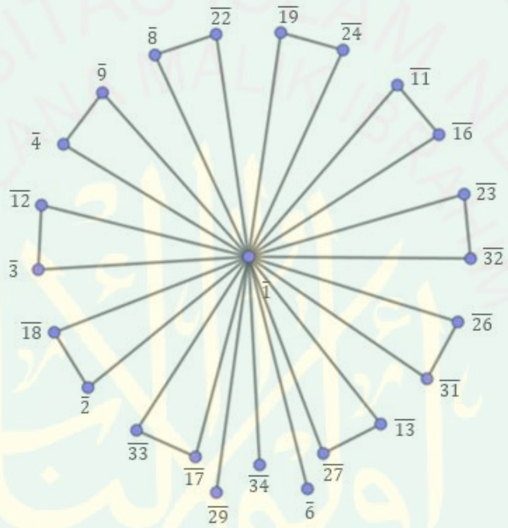
$$= (1 \times 19) + \big((2 \times 2) \times 18\big) + \big((2 \times 1) \times 1\big)$$

$$= 93$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{25} adalah 39 dan 93.

3.4.2 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{35}

Diberikan $(Z_{35}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 35 dengan $Z_{35} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{34}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_{35} yaitu $I(Z_{35}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{26}, \overline{27}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{32}, \overline{33}, \overline{34}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.22 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{35}

Berdasarkan Gambar 3.22 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi(I(Z_{35})) = \sum_{v \in V(I(Z_{35}))} e(v)$$

$$= 1 + (2 \times 23)$$

$$= 47$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c(I(Z_{35})) = \sum_{v \in V(I(Z_{35}))} e(v)\, deg(v)$$

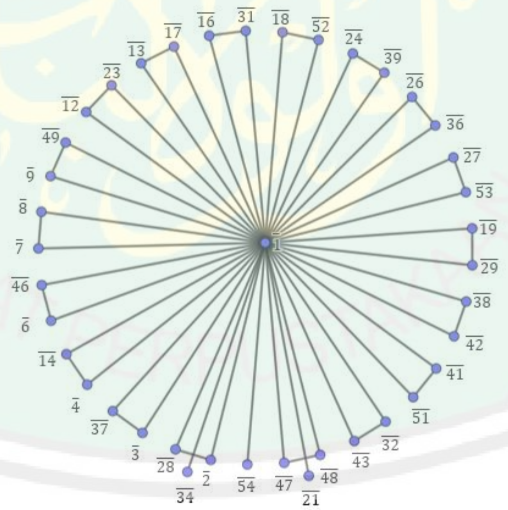
$= 23 + \big((2 \times 2) \times 20\big) + \big((2 \times 1) \times 3\big)$

$= 109$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{35} adalah 47 dan 109.

3.4.3 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{55}

Diberikan $(Z_{55}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 55 dengan $Z_{55} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{54}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_{55} yaitu $I(Z_{55}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{21}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{26}, \overline{27}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{32}, \overline{34}, \overline{36}, \overline{37}, \overline{38}, \overline{39}, \overline{41}, \overline{42}, \overline{43}, \overline{46}, \overline{47}, \overline{48}, \overline{49}, \overline{51}, \overline{53}, \overline{54}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.23 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{55}

Berdasarkan Gambar 3.23 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan Unsur Kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi\big(I(Z_{55})\big) = \sum_{v \in V(I(Z_{55}))} e(v)$$

$$= 1 + (2 \times 39)$$

$$= 79$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c\big(I(Z_{55})\big) = \sum_{v \in V(I(Z_{55}))} e(v)\, deg(v)$$

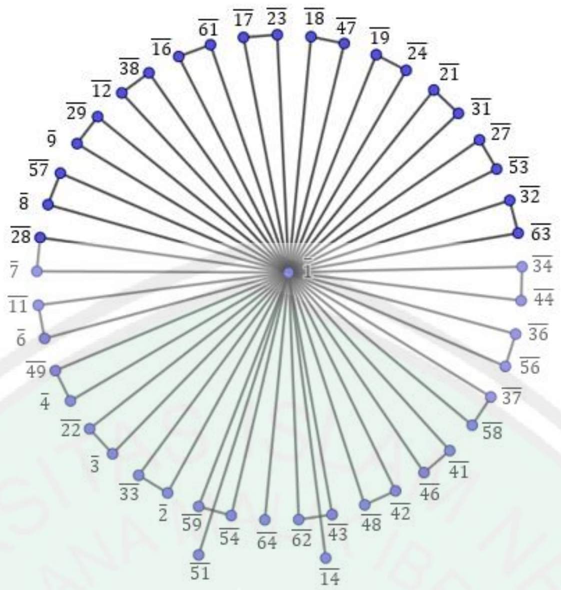
$$= 39 + \big((2 \times 2) \times 36\big) + \big((2 \times 1) \times 3\big)$$

$$= 189$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{55} adalah 79 dan 189.

3.4.4 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{65}

Diberikan $(Z_{65}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 65 dengan $Z_{65} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{64}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_{65} yaitu $I(Z_{65}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{27}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{32}, \overline{33}, \overline{34}, \overline{36}, \overline{37}, \overline{38}, \overline{41}, \overline{42}, \overline{43}, \overline{44}, \overline{46}, \overline{47}, \overline{48}, \overline{49}, \overline{51}, \overline{53}, \overline{54}, \overline{56}, \overline{57}, \overline{58}, \overline{59}, \overline{61}, \overline{62}, \overline{63}, \overline{64}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.24 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{65}

Berdasarkan Gambar 3.24 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi\big(I(Z_{65})\big) = \sum\nolimits_{v\in V(I(Z_{65}))} e(v)$$

$$= 1 + (2 \times 47)$$

$$= 95$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c\big(I(Z_{65})\big) = \sum\nolimits_{v\in V(I(Z_{65}))} e(v)\, deg(v)$$

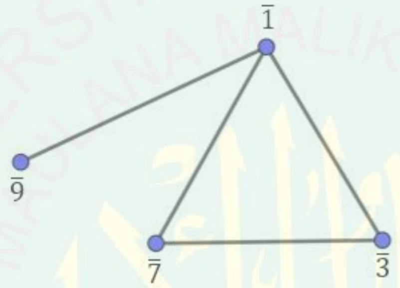
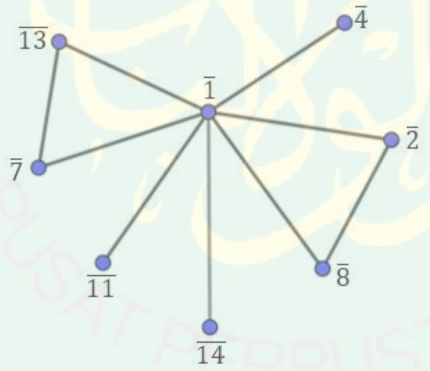
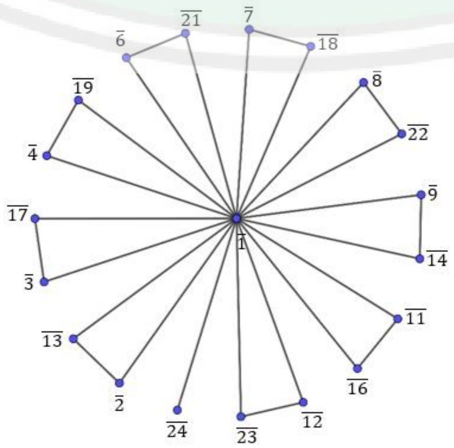
$$= 47 + \big((2 \times 2) \times 44\big) + \big((2 \times 1) \times 3\big)$$

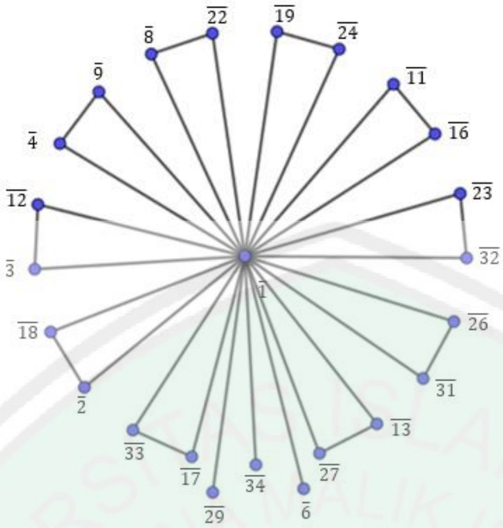
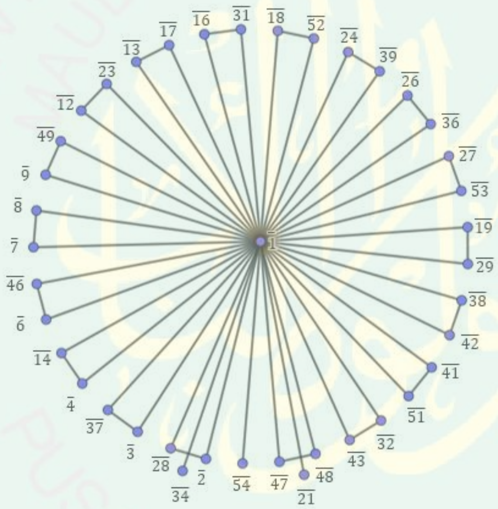
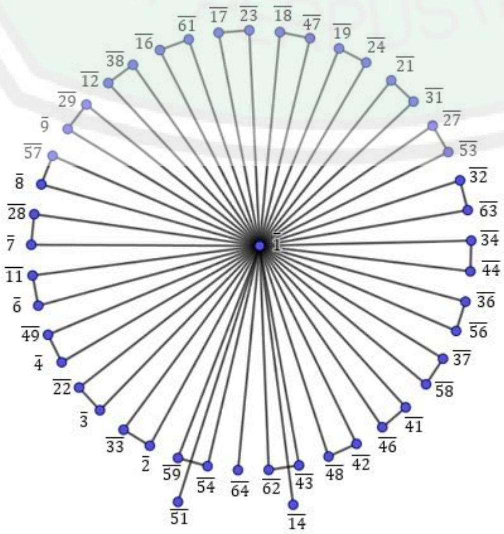
$$= 229$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{65} adalah 95 dan 229.

Berdasarkan perhitungan *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{5p}, maka dapat dinyatakan dalam tabel berikut ini:

Tabel 3.10 *Total Eccentricity* dan *Eccentric Connectivity Index* dari Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{5p}

Modulo	**Gambar Graf**	***Total Eccentricity***	**ECI**
Z_{10}		7	13
Z_{15}		15	29
Z_{25}		39	93

Z_{35}		$(8 \times 7) - 9 = 47$	$(20 \times 7) - 31 = 109$
Z_{55}		$(8 \times 11) - 9 = 79$	$(20 \times 11) - 31 = 189$
Z_{65}		$(8 \times 13) - 9 = 95$	$(20 \times 13) - 31 = 229$

Teorema 3.4

Misalkan $(Z_{5p},+,\ \cdot)$ dengan p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo $5p$, maka *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf $I(Z_{5p})$ adalah:

(a) $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 7$ dan $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 13$, untuk $p = 2$

(b) $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 15$ dan $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 29$, untuk $p = 3$

(c) $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 39$ dan $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 93$, untuk $p = 5$

(d) $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 8p - 9$ dan $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 20p - 31$, untuk $p \geq 7$

Bukti:

(a) Misalkan $(Z_{10},+,\ \cdot)$ adalah ring komutatif dengan unsur identitas pada operasi kedua yaitu $\bar{1}$, maka pada himpunan bilangan bulat modulo 10 didapatkan unsur-unsur *unit* yaitu $I(Z_{10}) = \{\bar{1},\bar{3},\bar{7},\bar{9}\}$. Kemudian setiap unsur $I(Z_{10})$ akan membentuk himpunan titik $V\big(I(Z_{10})\big)$ pada graf sederhana. Dua unsur dari $V\big(I(Z_{10})\big)$ yang hasil perkaliannya $\bar{1}$ akan terhubung langsung. Selanjutnya, untuk setiap unsur $V\big(I(Z_{10})\big)$ akan terhubung langsung dengan $\bar{1}$. Sehingga diperoleh derajat titik dan eksentrisitas titik pada masing-masing titik $V\big(I(Z_{10})\big)$ yaitu $deg(\bar{1}) = 3$, $deg(\bar{9}) = 1$ dan $deg(v) = 2$ untuk $v \neq \bar{1}$ atau $v \neq \bar{9}$. Kemudian eksentrisitasnya adalah $e(\bar{1}) = 1$ dan $e(v) = 2$ untuk $v \neq \bar{1}$. Dengan demikian didapatkan hasil *total eccentric* dan *eccentric connectivity index* dari graf $I(Z_{10})$ adalah

$$\xi\big(I(Z_{10})\big) = 7 \text{ dan } \xi^c\big(I(Z_{10})\big) = 13$$

(b) Misalkan $(Z_{15}, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan unsur identitas pada operasi kedua yaitu $\bar{1}$, maka pada himpunan bilangan bulat modulo 8 didapatkan unsur-unsur *unit* yaitu $I(Z_{15}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\}$. Kemudian setiap unsur $I(Z_{15})$ akan membentuk himpunan titik $V\big(I(Z_{15})\big)$ pada graf sederhana. Dua unsur dari $V\big(I(Z_{15})\big)$ yang hasil perkaliannya $\bar{1}$ akan terhubung langsung. Selanjutnya, untuk setiap unsur $V\big(I(Z_{15})\big)$ akan terhubung langsung dengan $\bar{1}$. Sehingga diperoleh derajat titik dan eksentrisitas titik pada masing-masing titik $V\big(I(Z_{15})\big)$ yaitu $deg(\bar{1}) = 3$, $deg(\bar{4}) = deg(\overline{11}) = deg(\overline{14}) = 1$ dan $deg(v) = 2$ untuk $v \neq \bar{1}$ atau $v \neq \bar{4}$ atau $v \neq \overline{14}$. Kemudian eksentrisitasnya adalah $e(\bar{1}) = 1$ dan $e(v) = 2$ untuk $v \neq \bar{1}$. Dengan demikian didapatkan hasil *total eccentric* dan *eccentric connectivity index* dari graf $I(Z_{15})$ adalah

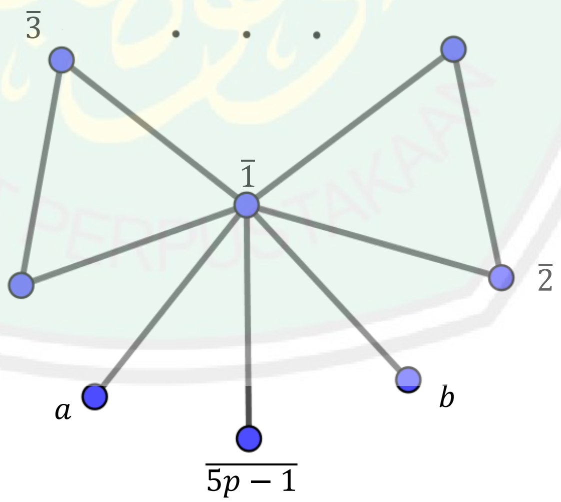
$$\xi\big(I(Z_{15})\big) = 15 \text{ dan } \xi^c\big(I(Z_{15})\big) = 29$$

c) Misalkan $(Z_{25}, +, \cdot)$ adalah ring komutatif dengan unsur identitas pada operasi kedua yaitu $\bar{1}$, maka pada himpunan bilangan bulat modulo 8 didapatkan unsur-unsur *unit* yaitu $I(Z_{25}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}\}$. Kemudian setiap unsur $I(Z_{25})$ akan membentuk himpunan titik $V\big(I(Z_{25})\big)$ pada graf sederhana. Dua unsur dari $V\big(I(Z_{25})\big)$ yang hasil perkaliannya $\bar{1}$ akan terhubung langsung. Selanjutnya, untuk setiap unsur $V\big(I(Z_{25})\big)$ akan terhubung langsung dengan $\bar{1}$. Sehingga diperoleh derajat titik dan eksentrisitas titik pada masing-masing titik $V\big(I(Z_{25})\big)$ yaitu $deg(\bar{1}) = 19$, $deg(\overline{24}) = 1$ dan $deg(v) = 2$ untuk $v \neq \bar{1}$ atau $v \neq \overline{14}$. Kemudian eksentrisitasnya adalah $e(\bar{1}) = 1$ dan $e(v) = 2$ untuk

$v \neq \bar{1}$. Dengan demikian didapatkan hasil *total eccentric* dan *eccentric connectivity index* dari graf $I(Z_{25})$ adalah

$$\xi\big(I(Z_{25})\big) = 39 \text{ dan } \xi^c\big(I(Z_{25})\big) = 93$$

d) Misalkan $(Z_{5p}, +, \cdot)$ untuk $p \geq 7$ dengan p prima adalah ring komutatif dengan unsur identitas pada operasi kedua yaitu $\bar{1}$. Unsur pada himpunan bilangan bulat modulo $5p$ adalah $Z_{5p} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{5p-1}\}$. Maka diperoleh himpunan *unit* pada bilangan bulat modulo $5p$ yaitu $I(Z_{5p}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots, \overline{\frac{5p-1}{2}}, \overline{5p - \frac{5p-1}{2}}, \ldots, \overline{5p-1}\}$. Kemudian unsur-unsur dari $I(Z_{2p})$ akan membentuk titik pada graf sederhana dengan order $4p - 4$. Dua unsur dari $I(Z_{5p})$ yang hasil perkaliannya $\bar{1}$ akan terhubung langsung. Selanjutnya, untuk setiap unsur $I(Z_{5p})$ akan terhubung langsung dengan $\bar{1}$. Dengan bantuan program Matlab diperoleh graf $I(Z_{5p})$ sebagai berikut



Gambar 3.25 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{5p}

Berdasarkan Gambar 3.25, maka diperoleh $deg(\overline{1}) = 4p - 5$, $deg(\overline{5p-1}) = 1, deg(a) = 1, deg(b) = 1,\ \ deg(v) = 2$, untuk $v \neq \overline{1}$ atau $v \neq \overline{5p-1}$ atau $v \neq a$ atau $v \neq b$. Didapatkan nilai eksentrisitas titik yaitu $e(\overline{1}) = 1$ dan $e(v) = 2$ untuk $v \neq \overline{1}$. Dengan demikian didapatkan *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{5p} untuk $p \geq 7$ dan p prima, sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\xi\left(I(Z_{5p})\right) &= \sum\nolimits_{v \in V\left(I(Z_{5p})\right)} e(v) \\
&= 1 + \underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{4p-5} \\
&= 1 + \left(2 \times (4p-5)\right) \\
&= 8p - 9
\end{aligned}$$

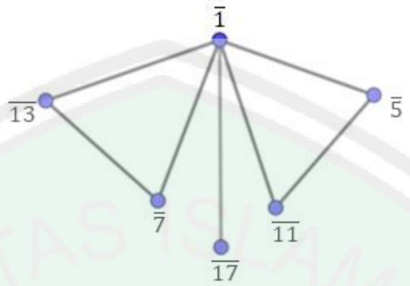
dan

$$\begin{aligned}
\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) &= \sum\nolimits_{v \in V\left(I(Z_{5p})\right)} e(v)\, deg(v) \\
&= \left(1 \times (4p-5)\right) + (2 \times 1) + (2 \times 1) + (2 \times 1) \\
&\quad + \underbrace{(2 \times 2) + (2 \times 2) + \ldots + (2 \times 2)}_{4p-8} \\
&= (4p-5) + 2 + 2 + 2 + \left(4 \times (4p-8)\right) \\
&= 20 - 31. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

3.5 *Total Eccentricity* dan *Eccentric Connectivity Index* dari Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{6p}

3.5.1 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{18}

Diberikan $(Z_{18}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 18 dengan $Z_{18} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{17}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_{18} yaitu $I(Z_{18}) = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.26 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{18}

Berdasarkan Gambar 3.26 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi(I(Z_{18})) = \sum_{v \in V(I(Z_{18}))} e(v)$$

$$= 1 + (2 \times 5)$$

$$= 11$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c(I(Z_{18})) = \sum_{v \in V(I(Z_{18}))} e(v)\, deg(v)$$

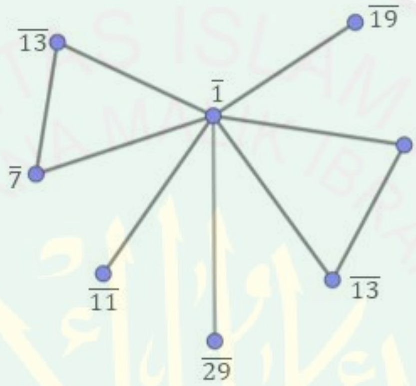
$$= (1 \times 5) + ((2 \times 2) \times 4) + ((2 \times 1) \times 1)$$

$$= 23$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{18} adalah 11 dan 23.

3.5.2 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{30}

Diberikan $(Z_{30}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 30 dengan $Z_{30} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{29}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_{30} yaitu $I(Z_{30}) = \{\bar{1}, \bar{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{23}, \overline{29}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.27 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{30}

Berdasarkan Gambar 3.27 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi\big(I(Z_{30})\big) = \sum_{v \in V(I(Z_{30}))} e(v)$$

$$= 1 + (2 \times 7)$$

$$= 15$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c\big(I(Z_{30})\big) = \sum_{v \in V(I(Z_{30}))} e(v)\, deg(v)$$

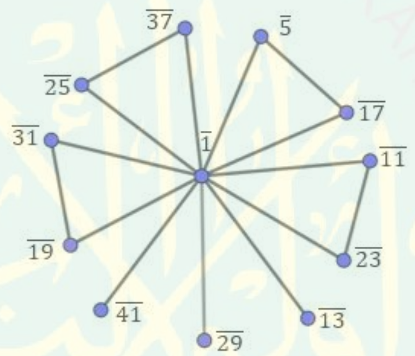
$$= (1 \times 7) + ((2 \times 2) \times 4) + \big((2 \times 1) \times 3\big)$$

$$= 29$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{30} adalah 15 dan 29.

3.5.3 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{42}

Diberikan $(Z_{42}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 42 dengan $Z_{42} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{41}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_{42} yaitu $I(Z_{42}) = \{\bar{1}, \bar{5}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{23}, \overline{25}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{37}, \overline{41}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.28 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{42}

Berdasarkan Gambar 3.28 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\begin{aligned}\xi(I(Z_{42})) &= \sum_{v \in V(I(Z_{42}))} e(v) \\ &= 1 + (2 \times 11) \\ &= 23\end{aligned}$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c(I(Z_{42})) = \sum_{v \in V(I(Z_{42}))} e(v)\, deg(v)$$

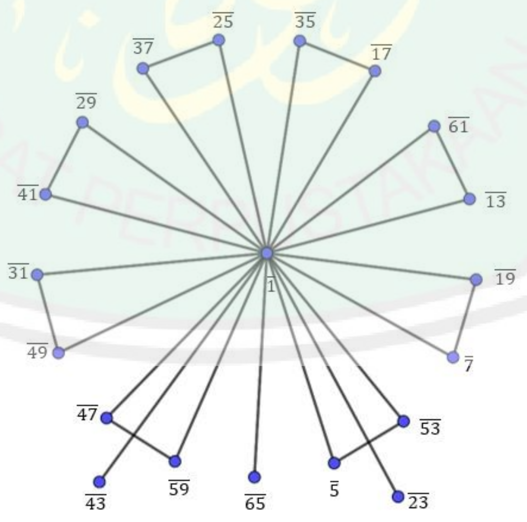
$$= 11 + ((2 \times 2) \times 8) + ((2 \times 1) \times 3)$$

$$= 49$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{42} adalah 23 dan 49.

3.5.4 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{66}

Diberikan $(Z_{66}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 66 dengan $Z_{66} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{66}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_{66} yaitu $I(Z_{66}) = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{23}, \overline{25}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{35}, \overline{37}, \overline{41}, \overline{43}, \overline{47}, \overline{49}, \overline{53}, \overline{59}, \overline{61}, \overline{65}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.29 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{66}

Berdasarkan Gambar 3.29 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi\big(I(Z_{66})\big) = \sum_{v \in V(I(Z_{66}))} e(v)$$

$$= 1 + (2 \times 19)$$

$$= 39$$

b) *Eccentric connectivity index*

$$\xi^c\big(I(Z_{66})\big) = \sum_{v \in V(I(Z_{66}))} e(v)\, deg(v)$$

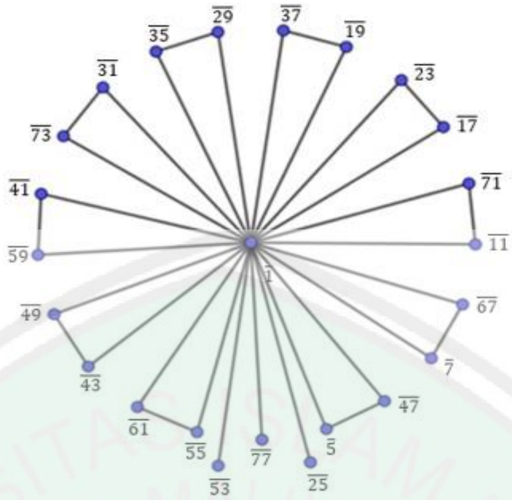
$$= 19 + \big((2 \times 2) \times 16\big) + \big((2 \times 1) \times 3\big)$$

$$= 89$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{66} adalah 39 dan 89.

3.5.5 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{78}

Diberikan $(Z_{78}, +, \cdot)$ sebagai ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo 78 dengan $Z_{78} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{78}\}$. Maka himpunan *unit* dari Z_{78} yaitu $I(Z_{78}) = \{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}, \overline{17}, \overline{19}, \overline{23}, \overline{25}, \overline{29}, \overline{31}, \overline{35}, \overline{37}, \overline{41}, \overline{43}, \overline{47}, \overline{49}, \overline{53}, \overline{55}, \overline{59}, \overline{61}, \overline{67}, \overline{71}, \overline{73}, \overline{77}\}$. Sehingga graf identitasnya sebagai berikut



Gambar 3.30 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{78}

Berdasarkan Gambar 3.30 dengan cara yang sama pada ring komutatif dengan unsur kesatuan modulo Z sebelumnya maka diperoleh:

a) *Total eccentricity*

$$\xi(I(Z_{78})) = \sum_{v\in V(I(Z_{78}))} e(v)$$
$$= 1 + (2 \times 23)$$
$$= 47$$

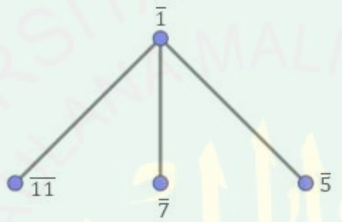
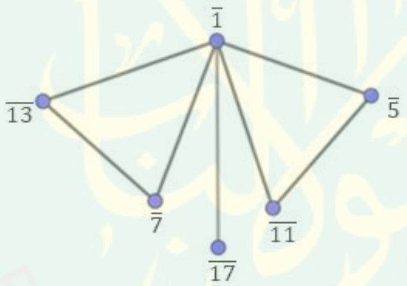
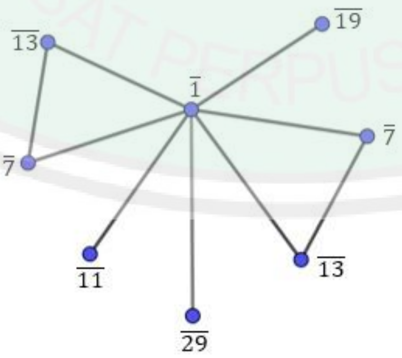
b) *Eccentric connectivity index*

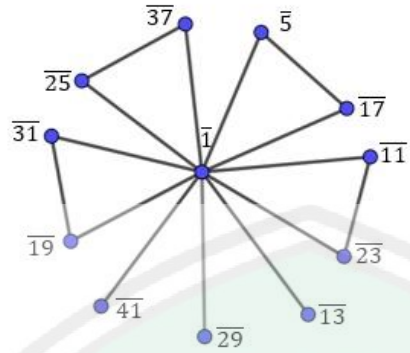
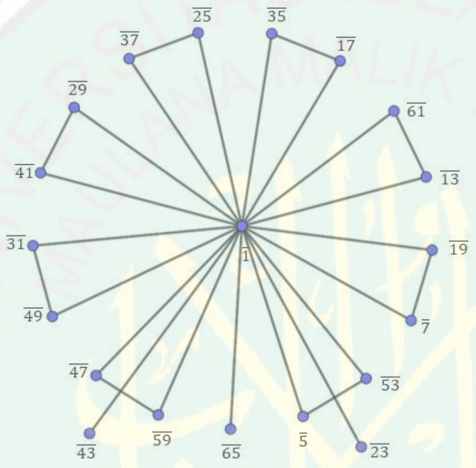
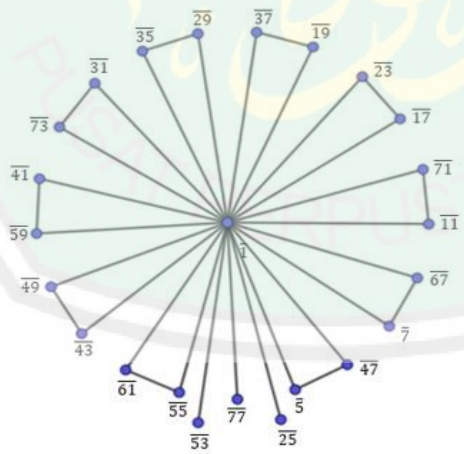
$$\xi^c(I(Z_{78})) = \sum_{v\in V(I(Z_{78}))} e(v)\,deg(v)$$
$$= 23 + \big((2 \times 2) \times 20\big) + \big((2 \times 1) \times 3\big)$$
$$= 109$$

Jadi, *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{78} adalah 47 dan 109.

Berdasarkan perhitungan *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{6p}, maka dapat dinyatakan dalam tabel berikut ini:

Tabel 3.11 *Total Eccentricity* dan *Eccentric Connectivity Index* dari Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{6p}

Modulo	**Gambar Graf**	***Total Eccentricity***	**ECI**
Z_{12}		7	9
Z_{18}		11	23
Z_{30}		$(4 \times 5) - 5$ $= 15$	$(10 \times 5) - 21$ $= 29$

Z_{42}		$(4 \times 7) - 5$ $= 23$	$(10 \times 7) - 21$ $= 49$
Z_{66}		$(4 \times 11) - 5$ $= 39$	$(10 \times 11) - 21$ $= 89$
Z_{78}		$(4 \times 13) - 5$ $= 47$	$(10 \times 13) - 21$ $= 109$

Teorema 3.5

Misalkan $(Z_{6p},+,\ \cdot)$ dengan p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan pada himpunan bilangan bulat modulo $6p$, maka *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf $I(Z_{6p})$ adalah:

(a) $\xi\left(I(Z_{6p})\right) = 7$ dan $\xi^c\left(I(Z_{6p})\right) = 9$, untuk $p = 2$

(b) $\xi\left(I(Z_{6p})\right) = 11$ dan $\xi^c\left(I(Z_{6p})\right) = 23$, untuk $p = 3$

(c) $\xi\left(I(Z_{6p})\right) = 4p - 5$ dan $\xi^c\left(I(Z_{6p})\right) = 10p - 21$, untuk $p \geq 5$

Bukti:

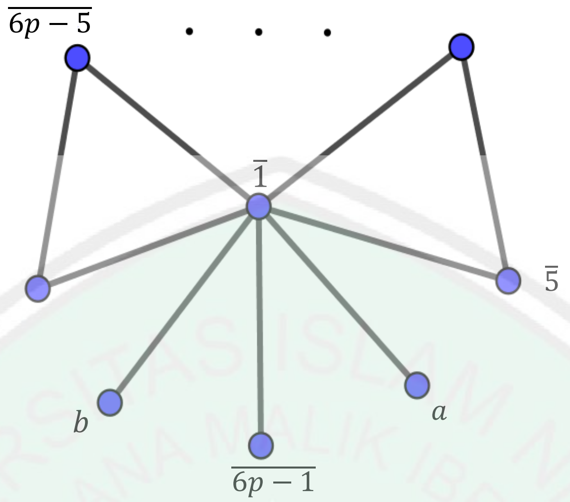
(a) Misalkan $(Z_{12},+,\ \cdot)$ adalah ring komutatif dengan unsur yaitu $\bar{1}$, maka pada himpunan bilangan bulat modulo 12 didapatkan unsur-unsur *unit* yaitu $I(Z_{12}) = \{\bar{1},\bar{5},\bar{7},\overline{11}\}$. Kemudian setiap unsur $I(Z_{12})$ akan membentuk himpunan titik $V\left(I(Z_{12})\right)$ pada graf sederhana. Dua unsur dari $V\left(I(Z_{12})\right)$ yang hasil perkaliannya $\bar{1}$ akan terhubung langsung. Selanjutnya, untuk setiap unsur $V\left(I(Z_{12})\right)$ akan terhubung langsung dengan $\bar{1}$. Sehingga diperoleh derajat titik dan eksentrisitas titik pada masing-masing titik $V\left(I(Z_{12})\right)$ yaitu $deg(\bar{1}) = 3$ dan $deg(v) = 1$ untuk $v \neq \bar{1}$. Kemudian eksentrisitasnya adalah $e(\bar{1}) = 1$ dan $e(v) = 2$ untuk $v \neq \bar{1}$. Dengan demikian didapatkan hasil *total eccentric* dan *eccentric connectivity index* dari graf $I(Z_{12})$ adalah

$$\xi\left(I(Z_{12})\right) = 7 \text{ dan } \xi^c\left(I(Z_{12})\right) = 9$$

(b) Misalkan $(Z_{18},+,\ \cdot)$ adalah ring komutatif dengan unsur identitas yaitu $\bar{1}$, maka pada himpunan bilangan bulat modulo 18 didapatkan unsur-unsur *unit* yaitu $I(Z_{18}) = \{\bar{1},\bar{5},\bar{7},\overline{11},\overline{13},\overline{17}\}$. Kemudian setiap unsur $I(Z_{18})$ akan membentuk himpunan titik $V\big(I(Z_{18})\big)$ pada graf sederhana. Dua unsur dari $V\big(I(Z_{18})\big)$ yang hasil perkaliannya $\bar{1}$ akan terhubung langsung. Selanjutnya, untuk setiap unsur $V\big(I(Z_{18})\big)$ akan terhubung langsung dengan $\bar{1}$. Sehingga diperoleh derajat titik dan eksentrisitas titik pada masing-masing titik $V\big(I(Z_{18})\big)$ yaitu $deg(\bar{1}) = 5, deg(\overline{17}) = 1,$ dan $deg(v) = 2$ untuk $v \neq \bar{1}$ atau $v \neq \overline{17}$. Kemudian eksentrisitasnya adalah $e(\bar{1}) = 1$ dan $e(v) = 2$ untuk $v \neq \bar{1}$. Dengan demikian didapatkan hasil *total eccentric* dan *eccentric connectivity index* dari graf $I(Z_{18})$ adalah

$$\xi\big(I(Z_{18})\big) = 11 \text{ dan } \xi^c\big(I(Z_{18})\big) = 23$$

(c) Misalkan $(Z_{6p}, +, \cdot)$ untuk $p \geq 5$ dengan p prima adalah ring komutatif dengan unsur identitas pada operasi kedua yaitu $\bar{1}$. Unsur pada himpunan bilangan bulat modulo $6p$ adalah $Z_{6p} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{6p-1}\}$. Maka diperoleh himpunan *unit* pada bilangan bulat modulo $2p$ yaitu $I\big(Z_{6p}\big) = \{\bar{1}, \bar{5}, \ldots, \overline{3p-2}, \overline{6p-(3p-2)}, \ldots, \overline{6p-5}, \overline{6p-1}\}$. Kemudian unsur-unsur dari $I\big(Z_{2p}\big)$ akan membentuk titik pada graf sederhana dengan order $2p - 2$. Dua unsur dari $I(Z_{6p})$ yang hasil perkaliannya $\bar{1}$ akan terhubung langsung. Selanjutnya, untuk setiap unsur $I(Z_{6p})$ akan terhubung langsung dengan $\bar{1}$. Dengan bantuan program Matlab diperoleh graf $I(Z_{6p})$ sebagai berikut



Gambar 3.31 Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan Z_{6p}

Berdasarkan Gambar 3.31, maka diperoleh $deg(\overline{1}) = 2p - 3$, $deg(a) = 1$, $deg(b) = 1$, $deg(\overline{6p-1}) = 1$ dan $deg(v) = 2$ untuk $v \neq \overline{1}$, $v \neq a$, $v \neq b$, atau $v \neq \overline{6p-1}$. Didapatkan nilai eksentrisitas titik yaitu $e(\overline{1}) = 1$ dan $e(v) = 2$ untuk $v \neq \overline{1}$. Dengan demikian didapatkan *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan Z_{2p} untuk $p \geq 5$ dan p prima, sebagai berikut

$$\xi\left(I(Z_{6p})\right) = \sum_{v\in V\left(I(Z_{6p})\right)} e(v)$$

$$= 1 + \underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{2p-3}$$

$$= 1 + \left(2 \times (2p - 3)\right)$$

$$= 4p - 5$$

dan

$$\xi^c\left(I(Z_{6p})\right) = \sum_{v\in V\left(I(Z_{6p})\right)} e(v)\, deg(v)$$

$$= \left(1\times(2p-3)\right) + (2\times 1) + (2\times 1) + (2\times 1)$$

$$+ \underbrace{(2\times 2) + (2\times 2) + \ldots + (2\times 2)}_{2p-6}$$

$$= (2p-3) + 2 + 2 + 2 + \left(4\times(2p-6)\right)$$

$$= 10p - 21. \qquad \blacksquare$$

3.6 Tanda Bagi Orang yang Berilmu

Allah berfirman dalam surah al-Ankabut ayat 43:

وَتِلْكَ ٱلْأَمْثَٰلُ نَضْرِبُهَا لِلنَّاسِ ۖ وَمَا يَعْقِلُهَآ إِلَّا ٱلْعَٰلِمُونَ ﴿٤٣﴾

Dan perumpamaan-perumpamaan ini Kami buat untuk manusia, dan tiada yang memahaminya kecuali orang-orang yang berilmu (Qs. al-Ankabut/ 29:43).

Demikianlah Allah mengumpamakan suatu perumpamaan bagi manusia. Hanya orang berakal yang dapat memikirkan perumpamaan tersebut. Allah sengaja mengambil laba-laba sebagai perumpamaan, karena itu barangkali yang mudah mereka pahami. Selain dari itu, juga dimaksudkan untuk menerangkan segala keraguan mereka selama ini. Orang yang selalu menggunakan hati dan pikirannya dan ahli-ahli ilmu pengetahuan pasti dapat memahami perumpamaan tersebut dan akan semakin banyak mengetahui rahasia-rahasia Allah yang terkandung dalam ayat-ayat-Nya. Diriwayatkan dari Jabir bahwa Rasulullah Saw pernah berkata:

"Orang yang berilmu itu ialah orang yang menjaga hal-hal yang dari Allah, dan beramal dalam rangka taat kepada-Nya serta menjauhi segala kemarahan-Nya." (Riwayat al-Haitsami).

Ayat tersebut sebagaimana dalam matematika yang mengandung banyak simbol. Simbol tersebut mengandung banyak makna dan memiliki beragam manfaat dalam kehidupan. Hal tersebut seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa *eccentric connectivity index* memiliki banyak manfaat pada bidang keilmuan lain. Misalkan di bidang kimia pada penelitian Gutman (2011), bidang biologi pada penelitian Ashrafi, Došlic, dan Saheli, (2011), serta bidang farmasi pada penelitian Gupta, Singh, dan Madan (2002).

Manfaat tersebut didapatkan karena ilmu pengetahuan yang mumpuni oleh seorang peneliti. Dengan demikian, kita harus menjadi orang berilmu dengan terus memahaminya melalui pendidikan serta mengembangkannya dalam berbagai penelitian.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada penelitian ini maka dapat disimpulkan rumus umum dari *total eccentricity* dan *eccentric connectivity index* dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan pada $Z_{2p}, Z_{3p}, Z_{4p}, Z_{5p}$, dan Z_{6p}, dengan p prima adalah:

1. Misalkan $(Z_{2p}, +, \cdot)$ untuk p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan pada bilangan bulat modulo $2p$, maka:

   (a) $\xi\left(I(Z_{2p})\right) = 2$ dan $\xi^c\left(I(Z_{2p})\right) = 2$, untuk $p = 2$ atau $p = 3$

   (b) $\xi\left(I(Z_{2p})\right) = 2p - 3$ dan $\xi^c\left(I(Z_{2p})\right) = 5p - 12$, untuk $p \geq 5$

2. Misalkan $(Z_{3p}, +, \cdot)$ untuk p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan pada bilangan bulat modulo $3p$, maka:

   (a) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 2$ dan $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 2$, untuk $p = 2$

   (b) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 11$ dan $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 23$, untuk $p = 3$

   (c) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 4p - 5$ dan $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 10p - 21$, untuk $p \geq 5$

3. Misalkan $(Z_{4p}, +, \cdot)$ untuk p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan pada bilangan bulat modulo $4p$, maka:

   (a) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 7$ dan $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 9$, untuk $p = 2$ atau $p = 3$

   (b) $\xi\left(I(Z_{3p})\right) = 4p - 5$ dan $\xi^c\left(I(Z_{3p})\right) = 10p - 21$, untuk $p \geq 5$

4. Misalkan $(Z_{5p}, +, \cdot)$ untuk p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan pada bilangan bulat modulo $5p$, maka:
   (a) $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 7$ dan $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 13$, untuk $p = 2$
   (b) $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 15$ dan $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 29$, untuk $p = 3$
   (c) $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 39$ dan $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 93$, untuk $p = 5$
   (d) $\xi\left(I(Z_{5p})\right) = 8p - 9$ dan $\xi^c\left(I(Z_{5p})\right) = 20p - 31$, untuk $p \geq 7$
5. Misalkan $(Z_{6p}, +, \cdot)$ untuk p prima adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan pada bilangan bulat modulo $6p$, maka:
   (a) $\xi\left(I(Z_{6p})\right) = 7$ dan $\xi^c\left(I(Z_{6p})\right) = 9$, untuk $p = 2$
   (b) $\xi\left(I(Z_{6p})\right) = 11$ dan $\xi^c\left(I(Z_{6p})\right) = 23$, untuk $p = 3$
   (c) $\xi\left(I(Z_{6p})\right) = 4p - 5$ dan $\xi^c\left(I(Z_{6p})\right) = 10p - 21$, untuk $p \geq 5$

4.2 Saran

Penulis menyarankan bahwa dari graf identitas ring komutatif dengan unsur kesatuan pada modulo $Z_{2p}, Z_{3p}, Z_{4p}, Z_{6p}$ untuk $p \geq 5$ dan Z_{5p} untuk $p \geq 7$, dengan p prima perlu dikaji lebih lanjut mengenai pola keterhubungan setiap dua titik yang berderajat 2 (pasangan *unit*).

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir, A., dan Khasanah, R. 2018. Spektrum Signless-Laplace dan Spektrum Detour Graf Konjugasi dari Grup Dihedral. *Kubik*, *3*(1), 45–51.

Abdussakir, Azizah, N. N., dan Nofandika, F. F. 2009. *Teori Graf: Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi*. Malang: UIN-Maliki Press.

Abdussakir, Putri, D. C. A., dan Fadhillah, Z. R. 2018. Full Automorphism Group of Commuting and Non-Commuting Graph of Dihedral and Symmetric Groups. *Journal of Physics: Conference Series*. 1028, 1-6.

Agama, D. 1985. *Muqaddimah Al-Quran dan Tafsirnya*. Jakarta: Departemen Agama, Republik Indonesia.

Alfuraidan, M. R. dan Zakariya, Y. F. 2017. Inverse Graphs Associated with Finite Groups. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, *5*(1).

Anderson, D. F. dan Livingston, P. S. 1999. The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring. *Journal of Algebra*, *2172*), 434–447.

Ashrafi, A. R., Došlic, T., dan Saheli, M. 2011. The Eccentric Connectivity Index of TUC4C8 (R) Nanotubes. *MATCH Communication in Mathematical and in Computer Chemistry*, *65*(1), 221–230.

Badawi, A. 2014. On the Annihilator Graph of a Commutative Ring. *Communications in Algebra*, *42*(1), 108–121.

Carol Leihitu, V., Patty, D., dan Patty, H. W. M. 2016. Struktur dalam Bentuk Graf Identitas. In *Prosiding Seminar Nasional Pendidikan Matematika*. Ambon: Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Unpatti.

Chartrand, G., Lesniak, L., dan Zhang, P. 2016. *Graphs dan Digraphs Sixth Edition. Direct*. Boca Raton: CRC Press.

De, N., Abu Nayeem, S. M., dan Pal, A. 2015. Total Eccentricity Index of the Generalized Hierarchical Product of Graphs. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, *1*(3), 503–511.

De, N., Pal, A., dan Nayeem, S. M. A. 2015. Total Eccentricity Index of Some Composite Graphs. *Malaya J. Mat*, *3*(4), 523–529.

Došlic, T., Graovac, A., dan Ori, O. 2011. Eccentric Connectivity Index of Hexagonal Belts and Chains. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, *65*(3), 745–752.

Došlic, T. dan Saheli, M. 2014. Eccentric Connectivity Index of Composite Graphs. *Utilitas Math*, *95*, 3–22.

Dummit, D. S. dan Foote, R. M. 2004. Abstract Algebra. Kanada: John Wiley and Sons, Inc.

Eskender, B. dan Vumar, E. 2013. Eccentric Connectivity Index and Eccentric Distance Sum of Some Graph Operations. *Transactions on Combinatorics*, *2*(1), 103–111.

Fathalikhani, K., Faramarzi, H., dan Yousefi-Azari, H. 2014. Total Eccentricity of Some Graph Operations. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, *45*, 125–131.

Gallian, J. A. 2013. *Contemporary Abstract Algebra, Eighth Edition*. Boston: Nelson Education, Ltd.

Gilbert, L. dan Gilbert, J. 2015. *Elements of Modern Algebra Eighth Edition*. Stamford: Nelson Education, Ltd.

Gupta, S., Singh, M., dan Madan, A. K. 2002. Application of Graph Theory: Relationship of Eccentric Connectivity Index and Wiener's Index with Anti-Inflammatory Activity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (*266*2), 259–268.

Gutman, I. 2011. Eccentric Connectivity Index of Chemical Trees. *arXiv preprint arXiv:1104.3206*.

Hamka. 2015. *Tafsir Al-Azhar Jilid 2*. Jakarta: Gema Insani.

Heydemann, M-C. 1997. Cayley Graphs and Interconnection Networks. In *Graph symmetry* (hal. 167–224). Springer.

Hua, H. dan Miao, Z. 2017. The Total Eccentricity Sum of Non-adjacent Vertex Pairs in Graphs. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 1–17.

Kakeri, F. dan Erfanian, A. 2015. The Complement of Subgroup Graph of a Group. *Journal of Prime Research in Mathematics*, *11*.

Kandasamy, W. B. Vasantha dan Smarandache, F. 2009. *Groups as Graphs*. Romania: Editura CuArt.

Kusmayadi, T. A. dan Sudibyo, N. A. 2011. Eccentric Digraph of Cocktail Party Graph and Hypercube. *IPTEK The Journal for Technology and Science*, *22*(4), 198–204.

Morgan, M. J., Mukwembi, S., dan Swart, H. C. 2011. On The Eccentric Connectivity Index of a Graph. *Discrete Mathematics*, *311*(13), 1229–1234.

Nacaroglu, Y. dan Maden, A. D. 2018. On The Eccentric Connectivity Index of Unicyclic. *Iranian Journal of Mathematical Chemstry*, *9*(1), 47–56.

Qurthubi, S. I. 2008. *Tafsir Al-Qurthubi*. *Terj. Muhyiddin Masridha*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Sharma, V., Goswami, R., dan Madan, A. K. 1997. Eccentric Connectivity Index: A Novel Highly Discriminating Topological Descriptor for Structure−Property and Structure−Activity Studies. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, *37*2), 273–282.

Shihab, M. Q. 2002. *Tafsir Al-Misbah: Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.

Tolue, B. 2015. The Non-Centralizer Graph of a Finite Group. *Math. Rep. Buchar*, *17*(67), 3.

Wang, H-J. 2008. Graphs Associated to Co-Maximal Ideals of Commutative Rings. *Journal of Algebra*, *320*(7), 2917–2933.

Zhou, B. dan Du, Z. 2010. On Eccentric Connectivity Index. *MATCH Communication in Mathematical and in Computer Chemistry*, (63), 181–198.

RIWAYAT HIDUP

Lila Aryani Puspitasari, lahir di Kediri pada 19 Desember 1996, akrab dipanggil Lila. Anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan bapak Damun dan ibu Siti.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Blabak IV Kota Kediri dan lulus pada tahun 2009. Kemudian melanjutkan pendidikannya di MTsN 2 Kota Kediri, lulus pada tahun 2012. Setelah itu menempuh pendidikan di MAN 2 Kota Kediri, lulus pada tahun 2015. Pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa telah mengikuti beberapa penelitian, di antaranya PKRM (Penelitian Kompetitif Riset Mahasiswa) dan penelitian bersama dosen.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lila Aryani Puspitasari
NIM : 15610107
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : *Total Eccentricity* dan *Eccentric Connectivity Index* dari Graf Identitas Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Muhammad Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	28 Januari 2019	Konsultasi Latar Belakang dan Bab II	1.
2.	28 Januari 2019	Konsultasi Gagasan pada Integrasi	2.
3.	4 Februari 2019	Konsultasi Latar Belakang, Bab II, dan Penulisan Pembahasan	3.
4.	6 Februari 2019	Konsultasi Bab I, Bab II, dan Bab III	4.
5.	15 Maret 2019	Konsultasi Integrasi Bab II	5.
6.	15 April 2019	Konsultasi Pembuktian Teorema	6.
7.	25 April 2019	Konsultasi Integrasi Bab III	7.
8.	26 April 2019	Konsultasi Bab I, Bab II, Bab III, dan Bab IV	8.
9.	7 Mei 2019	ACC Bab I, Bab II, Bab III, dan Bab IV	9.
10.	7 Mei 2019	ACC Integrasi Bab I, Bab II, dan Bab III	10.

Malang, 07 Mei 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001