***ECCENTRIC DISTANCE SUM* DAN *ADJACENT ECCENTRIC DISTANCE SUM INDEX* GRAF PETERSEN DIPERUMUM**

SKRIPSI

OLEH
RAFENDA MUNDI WIDYA ZALICHA
NIM. 15610102

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

***ECCENTRIC DISTANCE SUM* DAN *ADJACENT ECCENTRIC DISTANCE SUM INDEX* GRAF PETERSEN DIPERUMUM**

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Rafenda Mundi Widya Zalicha
NIM. 156101012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

ECCENTRIC DISTANCE SUM DAN _ADJACENT ECCENTRIC DISTANCE SUM INDEX_ GRAF PETERSEN DIPERUMUM

SKRIPSI

Oleh
Rafenda Mundi Widya Zalicha
NIM. 156101012

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 07 Mei 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19730705 200003 1002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

***ECCENTRIC DISTANCE SUM* DAN *ADJACENT ECCENTRIC DISTANCE SUM INDEX* GRAF PETERSEN DIPERUMUM**

SKRIPSI

Oleh
Rafenda Mundi Widya Zalicha
NIM. 156101012

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 28 Mei 2019

Penguji Utama	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....
Ketua Penguji	: M. Nafie Jauhari, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Ach. Nashichuddin, M.A	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rafenda Mundi Widya Zalicha

NIM : 15610102

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* Graf Petersen Diperumum

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, Mei 2019
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
4973DAFF708919054
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Rafenda Mundi Widya Zalicha
NIM. 15610102

MOTO

فَمَن يَعۡمَلۡ مِثۡقَالَ ذَرَّةٍ خَيۡرٗا يَرَهُۥ ۝٧ وَمَن يَعۡمَلۡ مِثۡقَالَ ذَرَّةٖ شَرّٗا يَرَهُۥ ۝٨

"Barangsiapa yang mengerjakan kebaikan seberat dzarrahpun, niscaya dia akan melihat (balasan)nya. Dan barangsiapa yang mengerjakan kejahatan sebesar dzarrahpun, niscaya dia akan melihat (balasan)nya pula." (QS. al-Zalzalah/99:07-08)

"Siapa saja yang mengajak kepada kebenaran, maka ia memperoleh pahala seperti pahala orang yang mengerjakannya tanpa dikurangi sedikitpun. Dan siapa saja yang mengajak kepada kesesatan, maka ia mendapat dosa seperti dosa orang yang mengerjakan tanpa dikurangi sedikitpun" (HR Muslim)

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Ayahanda Drs. Widajat Setyono dan Ibunda Sri Suprihatin (Alm.) tercinta, kedua kakak tersayang Renno Widda dan Dyarafira Widka serta adik tersayang Dzabillah Widza yang senantiasa dengan ikhlas selalu mendoakan, memberi nasihat, semangat, dan kasih sayang yang tak ternilai.

Keluarga besar Soewarto dan keluarga besar Warkiman. B.Sc yang senantiasa mendoakan dan memberikan motivasi kepada penulis

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* Graf Petersen Diperumum" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.

5. Ach. Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II dan dosen wali yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam proses perkuliahan.
7. Bapak dan Ibu serta kakak dan adik tercinta yang selalu memberikan do'a, semangat, dan motivasi demi keberhasilan penulis.
8. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2015 (LATTICE) khususnya Matematika-C, kelompok ABA 54, Keluarga Bumi Palapa yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terima kasih atas dukungan dan motivasi yang tak terlupakan serta kenang-kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, Mei 2019

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Zalicha, Rafenda Mundi Widya. 2019. *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* Graf Petersen Diperumum. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd (II) Ach. Nashichuddin, M.A

Kata kunci: *eccentric distance sum*, *adjacent eccentric distance sum index*, graf Petersen diperumum.

Eccentric distance sum dari G didefinisikan sebagai $\xi^{ds}(G) = \sum_{v\in V(G)} e(v)D(v)$ dan *adjacent eccentric distance sum index* dari G didefinisikan sebagai $\xi^{sv}(G) = \sum_{v\in V(G)} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)}$, dengan $e(v)$ eksentrisitas titik v adalah jarak terbesar antara titik v dan titik lainnya di G. $D(v)$ menunjukkan jumlah semua panjang lintasan terpendek (jarak) dari titik v ke setiap titik yang lain pada graf G. Derajat titik v atau $\deg(v)$ merupakan jumlah sisi yang terkait langsung dengan v.

Graf Petersen diperumum dinotasikan $GP(n,k)$ untuk bilangan positif $n \geq 3$ dan $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$, adalah graf dengan himpunan titik $V\big(GP(n,k)\big) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ dan himpunan sisi $E\big(GP(n,k)\big) = \{u_i u_{(i+1)}, v_i v_{(i+k)}, u_i v_i | i = 0,1, \dots, n-1\}$, dengan penambahan di dalam indeks $(i+1), (i+k)$ adalah modulo n. Dengan memperhatikan $GP(n,k)$ adalah graf teratur-3. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* graf Petersen diperumum yang kemudian menjadi teorema. Hasil penelitian ini adalah:

1. *Eccentric distance sum* dan *Adjacent eccentric distance sum index* graf Petersen diperumum $GP(n,1)$ dengan n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$,
2. *Eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* graf Petersen diperumum $GP(n,2)$ dengan n bilangan bulat positif dan $n \geq 8$.

Untuk penelitian selanjutnya diharapkan dapat menemukan teorema terkait *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* graf Petersen diperumum $GP(n,k)$ dengan $k \notin \{1,2\}$.

ABSTRACT

Zalicha, Rafenda Mundi Widya. 2019. Eccentric Distance Sum and Adjacent Eccentric Distance Sum Index of Generalized Petersen Graph. Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd (II) Ach. Nashichuddin, M.A

Keywords: eccentric distance sum, adjacent eccentric distance sum index, generalized Petersen Graph.

Eccentric distance sum of G is defined as $\xi^{ds}(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v)D(v)$ and adjacent eccentric distance sum index of G is defined as $\xi^{sv}(G) = \sum_{v \in V(G)} \frac{e(v)D(\boldsymbol{v})}{deg(\boldsymbol{v})}$, with eccentricity $e(v)$ of a vertex v is the largest distance between u and any other vertex v of G. $D(v)$ denotes the sum of distances between v and all other vertices of G. The degree of a vertex $v \in V(G)$ is denoted by $\deg(v)$ and is the number of vertices adjacent to v.

The generalized Petersen graph $GP(n,k)$ for positive integers $n \geq 3$ and $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$, is defined to have vertex set $V(GP(n,k)) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ and edge set $E(GP(n,k)) = \{u_i u_{(i+1)}, v_i v_{(i+k)}, u_i v_i | i = 0,1, \dots, n-1\}$, where addition in the subscripts is modulo n. Notice that $GP(n,k)$ is a regular 3-graph. The purpose of this research is to find the formula of eccentric distance sum and adjacent eccentric distance sum index generalized Petersen graph . The result of this research are:

1. Eccentric distance sum and Adjacent eccentric distance sum index generalized Petersen graph $GP(n,1)$, for positif integers n and $n \geq 3$,
2. Eccentric distance sum and adjacent eccentric distance sum index generalized Petersen graph $GP(n,2)$ for positif integers n and $n \geq 8$.

For the further research the author suggest to determine the theorem related to the eccentric distance sum and adjacent eccentric distance sum index generalized Petersen graph $GP(n,k)$ for $k \notin \{1,2\}$.

ملخص

زليحة ، رافندا موندي ويديا. ٢٠١٩. *eccentric distance sum and adjacent eccentric distance sum index* مخطط *Petersen*. قسم الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشارون: (١) دكتور عبد الشاكر الماجستير. (٢) أحمد ناصح الدين الماجستير.

الكلمات المفتاحية: *eccentric distance sum, adjacent eccentric distance sum index*, مخطط *Petersen*

Eccentric distance sum من G على أنه مبلغ المسافة غريب الأطوار $\xi^{ds}(G) = \sum_{v\in V(G)} e(v)D(v)$ و *adjacent eccentric distance sum index* من G على $\xi^{sv}(G) = \sum_{v\in V(G)} \frac{e(v)D(v)}{deg(v)}$. $e(v)$ *eccentricity* من *vertex* v هو تشير المسافة الأكبر بين u وأي قمة أخرى v من G. $D(v)$ إلى مجموع المسافات بين v وجميع الرؤوس الأخرى لـ G. إلى درجة $v \in V(G)$ من الرأس بواسطة $\deg(v)$ وهي عدد الرؤوس المجاورة لـ v.

يتم تعريف مخطط المعمم *Petersen* $GP(n,k)$ للأعداد الصحيحة الموجبة $n \geq 3$ و $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ ، على أنه يوجد فيرتكس مجموعة $V(GP(n,k)) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ ومجموعة حافة $E(GP(n,k)) = \{u_i u_{(i+1)}, v_i v_{(i+k)}, u_i v_i | i = 0,1,\dots,n-1\}$ ، حيث تكون الإضافة في الاشتراكات هي *modulo* n. لاحظ أن $GP(n,k)$ عبارة عن رسم بياني ثلاثي الأبعاد. والغرض من هذا البحث هو العثور على صيغة *eccentric distance sum and adjacent eccentric distance sum index* مخطط *Petersen*. نتيجة هذا البحث هي:

١. *Eccentric distance sum and Adjacent eccentric distance sum index* مخطط Petersen $GP(n,1)$ و n عدد طبيعي و $n \geq 3$

٢. *Eccentric distance sum and Adjacent eccentric distance sum index* مخطط Petersen $GP(n,2)$ و n عدد طبيعي و $n \geq 8$

للبحث الإضافي ، يقترح المؤلف تحديد النظرية المتعلقة *eccentric distance sum and* *adjacent eccentric distance sum index* مخطط $Petersen$ $GP(n.k). k \notin \{1.2\}$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Sungguh tidak salah jika dinyatakan bahwa Allah adalah Maha matematis (Abdussakir, 2007). Maka tidak diragukan lagi bahwa al-Quran merupakan dasar kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi bagi umat Islam.

Allah berfirman dalam surat al-Qamar : 49 sebagai berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: *"Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran"(QS. al-Qamar: 49).*

Matematika merupakan suatu ilmu yang mengkaji tentang cara berhitung atau mengukur sesuatu dengan angka, simbol atau jumlah. Pokok kajiannya meliputi aljabar, statistika, logika, geometri pengukuran, dan lain-lain. Matematika tak lepas dari kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Peranannya sangat dibutuhkan karena setiap cabang ilmu pengetahuan banyak yang berkaitan dengan matematika (Nasution, 2017).

Ilmu matematika ini memiliki banyak cabang, salah satu yang penting untuk dipelajari dan banyak manfaatnya adalah teori graf, karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. (Purwanto, 1998). Dengan menggunakan rumusan atau model teori graf yang tepat, suatu permasalahan menjadi lebih jelas, sehingga mudah menganalisisnya.

Contoh aplikasi dalam teori graf adalah menentukan kota terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari suatu kota ke kota lain yang terdiri dari kumpulan kota dalam suatu daerah. Masalah ini ekuivalen dengan menentukan eksentrisitas titik pada graf (Padmapriya, 2017). Berbicara tentang eksentrisitas, dalam teori graf banyak topik menarik yang membahas hal tersebut, salah satunya yaitu mengenai *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index*.

Eccentric distance sum dari G didefinisikan sebagai $\xi^{ds}(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v)D(v)$ (Gupta, 2002) dan *adjacent eccentric distance sum index* dari G didefinisikan sebagai $\xi^{sv}(G) = \sum_{v \in V(G)} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)}$ (Sardana dan Madan, 2002). Untuk G adalah graf terhubung dengan himpunan titik $V(G)$, himpunan sisi $E(G)$ dan titik-titik $u, v \in V(G)$. Derajat titik $v \in V(G)$ dinotasikan dengan $\deg(v)$, merupakan jumlah sisi yang berdekatan dengan v. Jarak $d(u,v)$ didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek antara titik u dan v pada graf G. Jumlah jarak dari titik v dinotasikan dengan $D(v)$ adalah jumlah semua panjang lintasan terpendek (jarak) dari titik v ke setiap titik yang lain pada graf G. Eksentrisitas titik v dinotasikan dengan $e(v)$ adalah jarak terbesar antara titik v dan titik lainnya di G yaitu, $e(v) = \max\{d(u,v); u, v \in V(G)\}$.

Beberapa penelitian tentang *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* pada graf yang telah dilakukan oleh beberapa peneliti diantaranya yaitu Bielak (2014) meneliti tentang *adjacent eccentric distance sum index* dari beberapa graf, Padmapriya (2017) meneliti tentang *eccentric distance sum* dari beberapa graf, dan Bielak (2017) meneliti tentang *eccentric distance sum* dari beberapa kelas graf dari graf terhubung.

Dengan adanya kedua topik tersebut, penulis tertarik menggabungkannya dengan graf Petersen diperumum. Graf Petersen diperumum menarik untuk dikaji karena graf ini memiliki bermacam-macam graf di dalamnya, salah satu yang paling dikenal adalah Graf Petersen. Holton dan Sheehan (1993) menyatakan graf Petersen diambil dari nama Peter Christian Julius Petersen untuk menghargainya karena pada tahun 1898 ia membuktikan bahwa Graf Petersen tidak terfaktor-1. Graf Petersen sangat populer untuk dipelajari karena keunikannya yang setiap titiknya memiliki derajat tiga, sebagai contoh penyangkal di banyak tempat dan mempunyai banyak sifat-sifat menarik.

Berdasarkan uraian di atas, belum ada penelitian terkait *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* graf Petersen diperumum. Dengan demikian penulis melakukan penelitian tersebut dan dituliskan dalam tulisan ini dengan judul "*Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* Graf Petersen Diperumum".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* graf Petersen diperumum $GP(n,1)$?
2. Bagaimana *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* graf Petersen diperumum $GP(n,2)$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang sudah disebutkan, maka tujuan dalam penelitian adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* graf Petersen diperumum $GP(n, 1)$.
2. Untuk mengetahui *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* graf Petersen diperumum $GP(n, 2)$.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian dalam penulisan skripsi ini adalah menambah pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya yang mempelajari tentang *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* serta memberikan motivasi pada penulis lain untuk melakukan penelitian lebih luas tentang *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index.*

1.5 Batasan Masalah

Agar pembahasan pada skripsi ini tidak meluas, maka penulis membatasi objek kajian yang diteliti yaitu graf Petersen diperumum $GP(n, k)$ dengan $n \geq 3$ dan $k = 1, 2$.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti buku dan jurnal. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam mengetahui *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* graf Petersen diperumum $GP(n,1)$ dan $GP(n,2)$ adalah sebagai berikut:

1. Menggambar graf Petersen diperumum $GP(n,k)$ dengan $k=1$ dan $n=3,4,5,6,7,8$ serta $GP(n,k)$ dengan $k=2$ dan $n=8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19$
2. Menentukan jarak tiap titik dengan titik lainnya pada tiap graf tersebut.
3. Menentukan eksentrisitas dan jumlah jarak dari masing-masing titik graf tersebut
4. Menentukan *eccentric distance sum* dari graf tersebut
5. Menentukan banyak derajat titik dari masing-masing titik graf tersebut
6. Menentukan *adjacent eccentric distance sum index* graf tersebut
7. Menemukan pola dan menjadikan teorema *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* pada graf tersebut
8. Membuktikan teorema tersebut

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk lebih mudah memahami penelitian ini secara keseluruhan, maka penulis memberikan gambaran umum sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Dalam bab ini diuraikan mengenai latar belakang penelitian, rumusan masalah penelitian, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Dalam bab ini diuraikan kajian pustaka yang dipakai dasar pembahasan penelitian ini, seperti definisi-definisi dari graf, derajat titik, graf terhubung, jarak, jumlah jarak, eksentrisitas, graf teratur, graf Petersen, graf Petersen diperumum, *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index*. Juga disertai tafsir ayat dalam al-Quran yang menggambarkan keteraturan ciptaan Allah.

Bab III Pembahasan

Dalam bab ini diuraikan tentang hasil penelitian yang diperoleh, yaitu meliputi *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index*. Juga disertai kajian agama Islam tentang konsep keteraturan ciptaan Allah.

Bab IV Penutup

Dalam bab ini diuraikan kesimpulan akhir yang merupakan jawaban dari rumusan masalah penelitian, dan saran dari penulis untuk pembaca.

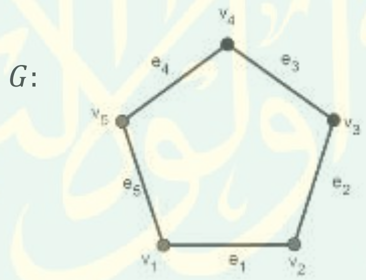
BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Graf adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$ (Abdussakir, dkk, 2009).

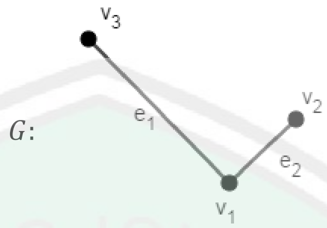


Gambar 2.1 Graf G dengan Lima Titik dan Lima Sisi

Pada Gambar 2.1 graf G diketahui $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ sehingga order dari G, $p(G) = 5$. Dan $E(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_1, v_5)\}$ atau dapat ditulis $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dengan $e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_2, v_3), e_3 = (v_3, v_4)$, $e_4 = (v_4, v_5), e_5 = (v_1, v_5)$. Sehingga ukuran dari G, $q(G) = 5$.

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, u dan e serta v dan e disebut terkait langsung *(incident)* (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Sebagai contoh, diberikan graf G yang memuat himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2\}$ berikut ini:



Gambar 2.2 Graf G dengan Tiga Titik dan Dua Sisi

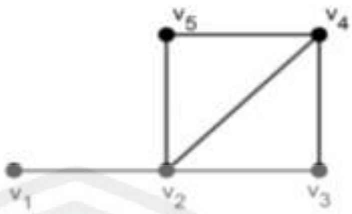
Pada Gambar 2.2 tersebut, titik v_1 dan v_2 serta v_1 dan v_3 adalah terhubung langsung *(adjacent)*, karena masing-masing dipasangkan oleh sisi e_1 dan sisi e_2. Titik v_2 dan v_3 tidak terhubung langsung, karena tidak terdapat sisi yang memasangkan kedua titik tersebut. Sisi e_1 terkait langsung (*incident*) dengan titik v_1 dan v_3. Sisi e_2 terkait langsung dengan titik v_1 dan v_2. Sisi e_1 tidak terkait langsung dengan titik v_3. Perlu diperhatikan bahwa satu sisi hanya dapat terkait langsung dengan dua titik berbeda. Hal ini terjadi karena satu sisi hanya menghubungkan dua titik berbeda.

2.1.2 Derajat Titik

Jika v adalah titik pada graf G, maka banyak sisi di G yang terkait langsung dengan v disebut derajat sisi, dinotasikan dengan $\deg_G(v)$ atau $\deg(v)$. Derajat terbesar di antara titik-titik pada G disebut derajat maksimum pada G dan dinotasikan $\Delta(G)$. Derajat minimum pada G dinotasikan dengan $\delta(G)$ (Chartrand, dkk, 2016).

Sebagai contoh diberikan graf G seperti berikut:

G:



Gambar 2.3 Graf G dengan Lima Titik dan Enam Sisi

Dari Gambar 2.3 diperoleh derajat titiknya sebagai berikut

$deg(v_1) = 1,$

$deg(v_2) = 4,$

$deg(v_3) = 2,$

$\deg(v_4) = 3,$

$deg\ (v_5) = 2.$

Sedangkan derajat maksimumnya $\Delta(P)$ adalah 4 yaitu pada titik v_2, dan derajat minimumnya $\delta(P)$ adalah 1, yaitu pada titik v_1.

2.1.3 Graf Terhubung

Misalkan G graf. Misalkan u dan v adalah titik di G (yang tidak harus berbeda). Jalan u-v pada graf G adalah barisan berhingga yang berselang seling

$$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2 \dots, e_n, v_n = v$$

antara titik dan sisi yang dimulai dari titik v_0 dan diakhiri dengan titik v_n, dengan

$$e_i = v_{i-1}v_i, i = 1,2,3, \dots, n$$

adalah sisi di G. v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, titik $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W

disebut jalan terbuka. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut jalan tertutup. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut jalan trivial (Abdussakir, dkk, 2009).

Karena dalam graf dua titik hanya akan dihubungkan oleh tepat satu sisi, maka jalan u-v

$$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$$

dapat ditulis menjadi

$$W: u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = v.$$

Jalan W yang semua sisinya berbeda disebut trail. Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut lintasan. Dengan demikian setiap lintasan pasti merupakan trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan (Abdussakir, dkk, 2009).

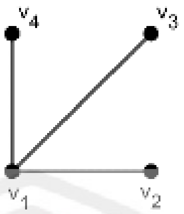
Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Titik u dan v dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan u-v di G. Suatu graf G dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terhubung. Sebaliknya, jika ada dua titik u dan v di G, tetapi tidak ada lintasan u-v di G, maka G dikatakan tak terhubung (*disconnected*) (Chartrand, dkk, 2016).

2.1.4 Jarak, Eksentrisitas dan Jumlah Jarak

Misalkan G graf terhubung dan misalkan u dan v titik di G. Jarak dari u dan v di G dinotasikan dengan $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara titik u dan v di G (Abdussakir, dkk, 2009).

Sebagai contoh diberikan graf G seperti berikut:

G:



Gambar 2.4 Graf G dengan Empat Titik dan Tiga Sisi

Pada Gambar 2.4, diperoleh jarak sebagai berikut:

$d(v_1, v_2) = 1$ $\quad$ $d(v_2, v_3) = 2$

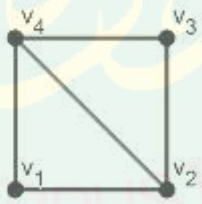
$d(v_1, v_3) = 1$ $\quad$ $d(v_2, v_4) = 2$

$d(v_1, v_4) = 1$ $\quad$ $d(v_3, v_4) = 2$

Eksentrisitas titik v di G dinotasikan dengan $e(v)$ adalah jarak terbesar antara titik v dan titik lainnya di G yaitu, $e(v) = \max\{d(u.v); u.v \in V(G)\}$ (Harary, 1969).

Diberikan graf G seperti berikut:

G:



Gambar 2.5 Graf G dengan Empat Titik dan Lima Sisi

Pada Gambar 2.5, diperoleh eksentrisitas sebagai berikut

$$e(v_1) = \max\{d(v_1, v_j); j = 1,2 \ldots n\ , j \neq 1, v \in V(G)\}$$

$$= \max\{d(v_1, v_2), d(v_1, v_3), d(v_1, v_4)\}$$

$$= \max\{1, 2, 1\}$$

$$= 2$$

$e(v_2) = \max\{d(v_2, v_j); j = 1,2 \ldots n, j \neq 2, v \in V(G)\}$

$= \max\{d(v_2, v_1), d(v_2, v_3), d(v_2, v_4)\}$

$= \max\{1, 1, 1\}$

$= 1$

$e(v_3) = \max\{d(v_3, v_j); j = 1,2 \ldots n, j \neq 3. v \in V(G)\}$

$= \max\{d(v_3, v_1), d(v_3, v_2), d(v_3, v_4)\}$

$= \max\{2, 1, 1\}$

$= 2$

$e(v_4) = \max\{d(v_4, v_j); j = 1,2 \ldots n, j \neq 4, v \in V(G)\}$

$= \max\{d(v_4, v_1), d(v_4, v_2), d(v_4, v_3)\}$

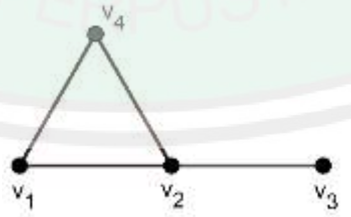
$= \max\{1, 1, 1\}$

$= 1$

Jumlah jarak dari titik v dinotasikan dengan $D(v)$ adalah jumlah semua panjang lintasan terpendek (jarak) dari titik v ke setiap titik yang lain pada graf G (Harary, 1969).

Diberikan graf G seperti berikut:

G:



Gambar 2.6 Graf G dengan Empat Titik dan Empat Sisi

Pada Gambar 2.6 diperoleh jumlah jarak sebagai berikut

$D(v_1) = d(v_1, v_2) + d(v_1, v_3) + d(v_1, v_4) = 1 + 2 + 1 = 4$

$D(v_2) = d(v_2, v_1) + d(v_2, v_3) + d(v_2, v_4) = 1 + 1 + 1 = 3$

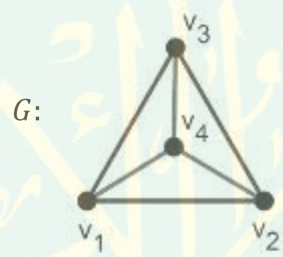
$D(v_3) = d(v_3, v_1) + d(v_3, v_2) + d(v_3, v_4) = 2 + 1 + 2 = 5$

$D(v_4) = d(v_4, v_1) + d(v_4, v_2) + d(v_4, v_3) = 1 + 1 + 2 = 4$

2.1.5 Graf Teratur

Graf yang setiap titiknya mempunyai derajat yang sama disebut graf teratur. Apabila derajat setiap titik adalah r, maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat r (Harary, 1969).

Sebagai contoh, diberikan graf G seperti berikut

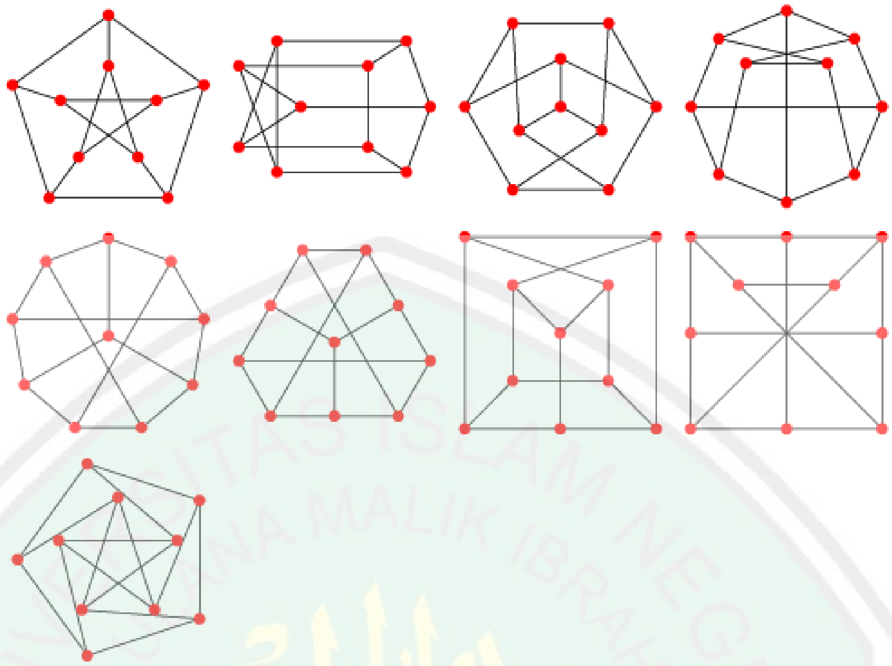


Gambar 2.7 Graf Teratur dengan Empat Titik dan Derajat Tiga

2.2 Graf Petersen

Graf Petersen (*Petersen Graph*) adalah graf teratur-3. Graf Petersen merupakan salah satu graf istimewa yang terkenal karena menjadi bukti penyangkal beberapa konjektur dalam teori graf. Graf ini dinamai oleh matematikawan Denmark, Julius Petersen pada 1898 (Holton dan Sheehan, 1993).

D'Angelo dan West (2000) mengilustrasikan graf Petersen yang memiliki sepuluh titik dan semua titik tersebut memiliki derajat tiga seperti berikut:



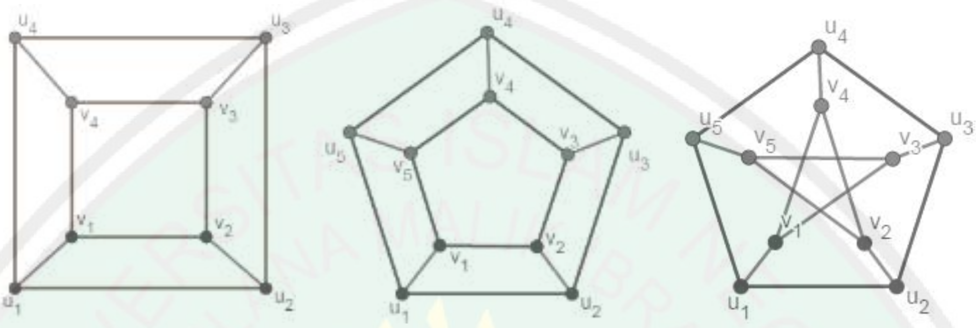
Gambar 2.8 Ilustrasi Graf Petersen

2.3 Graf Petersen Diperumum

Graf Petersen diperumum dinotasikan $GP(n,k)$ untuk bilangan bulat positif $n \geq 3$ dan $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$, adalah graf dengan himpunan titik $V\big(GP(n,k)\big) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ dan himpunan sisi $E\big(GP(n,k)\big) = \{u_i u_{(i+1)}, v_{(i+k)}, u_i v_i | i = 0,1, \dots, n-1\}$, dengan penambahan di dalam indeks $(i+1), (i+k)$ adalah modulo n. Dengan memperhatikan $GP(n,k)$ adalah graf teratur-3 (Baca, 2000).

Graf Petersen diperumum $GP(n,k)$ mempunyai tiga macam sisi yaitu *outer edge*, *inner edge*, dan *spoke*. *Outer edge* menghubungkan titik u_i dan u_{i+1}. *Inner edge* menghubungkan titik v_i dan v_{i+k}. Sedangkan *spoke* menghubungkan titik u_i dan v_i (Potanka, 1998).

Graf Petersen diperumum diperkenalkan oleh H. S. M. Coxeter (1950) dan diberi nama oleh Mark Watkins (1969). Contoh graf Petersen diperumum $GP(n, k)$ dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 2.9 Graf Petersen diperumum (a) $GP(4,1)$, (b) $GP(5,1)$, (c) $GP(5,2)$

2.4 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index*

Eccentric distance sum diperkenalkan oleh Gupta, Singh dan Madana (2002). Para penulis tersebut, menunjukkan bahwa *eccentric distance sum* dapat digunakan untuk memprediksi beberapa sifat biologis dan fisik serta memaparkan bahwa menggunakan *eccentric distance sum* terbukti lebih baik daripada nilai yang diperoleh menggunakan indeks Wiener dari graf G yang didefinisikan sebagai berikut :

$$W(G) = \sum_{\{u,v\} \in V(G)} d(u,v) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} D(v)$$ (Wiener, 1947)

Setelah mengetahui kegunaan *eccentric distance sum*, Padmapriya (2017) menyampaikan bahwa *eccentric distance sum* juga dapat digunakan dan dipelajari pada bidang matematika. *Eccentric distance sum* dari graf G didefinisikan sebagai berikut:

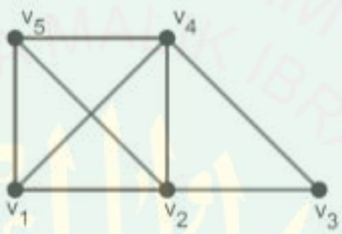
$$\xi^{ds}(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v)D(v)$$ (Gupta, 2002)

Di tahun yang sama ditemukannya *eccentric distance sum*, Sardana dan Madan (2002) memperkenalkan a*djacent eccentric distance sum index* dari graf G yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\xi^{sv}(G) = \sum_{v \in V(G)} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)}$$ (Sardana dan Madan, 2002)

Sebagai contoh, diberikan graf G seperti berikut:

G:



Gambar 2.10 Graf G dengan Lima Titik dan Delapan Sisi

Berdasarkan Gambar 2.10 terdapat himpunan titik $V(G) = \{v_1 . v_2 . v_3 . v_4 . v_5\}$ dan $d(v_1, v_2) = 1, d(v_1, v_3) = 2,\ d(v_1, v_4) = 1,\ d(v_1, v_5) = 1,\ \ d(v_2, v_3) = 1$, $d(v_2, v_4) = 1,\ d(v_2, v_5) = 1,\ d(v_3, v_4) = 1,\ d(v_3, v_5) = 2,\ d(v_4, v_5) = 1$. Selanjutnya diperoleh $e(v_1) = 2,\ e(v_2) = 1, e(v_3) = 2, e(v_4) = 1,\ e(v_5) = 2$ dan $D(v_1) = 5,\ D(v_2) = 4, D(v_3) = 6, D(v_4) = 4,\ D(v_5) = 5$ serta $deg(v_1) = 3,\ deg(v_2) = 4,\ deg(v_3) = 2, deg(v_4) = 4,\ deg(v_5) = 3$. Sehingga $\xi^{ds}(G) = (2 \times 5) + (2 \times 4) + (2 \times 6) + (2 \times 4) + (2 \times 5) = 48$ dan $\xi^{sv}(G) = \frac{(2\times5)}{3} + \frac{(2\times4)}{4} + \frac{(2\times12)}{2} + \frac{(2\times4)}{4} + \frac{(2\times5)}{3} = 29{,}33$.

2.5 Gambaran Keteraturan Ciptaan Allah dalam Al-Quran

Al-Quran merupakan kitab suci umat Islam yang menjadi sumber hukum utama dalam ajaran Islam. Dalam al-Quran terdapat ayat yang menjelaskan secara runtut dan teratur proses penciptaan manusia. Allah berfirman dalam surat al-Mu’minun ayat 12-14 :

وَلَقَدۡ خَلَقۡنَا ٱلۡإِنسَٰنَ مِن سُلَٰلَةٖ مِّن طِينٖ ١٢ ثُمَّ جَعَلۡنَٰهُ نُطۡفَةٗ فِي قَرَارٖ مَّكِينٖ ١٣ ثُمَّ خَلَقۡنَا ٱلنُّطۡفَةَ عَلَقَةٗ فَخَلَقۡنَا ٱلۡعَلَقَةَ مُضۡغَةٗ فَخَلَقۡنَا ٱلۡمُضۡغَةَ عِظَٰمٗا فَكَسَوۡنَا ٱلۡعِظَٰمَ لَحۡمٗا ثُمَّ أَنشَأۡنَٰهُ خَلۡقًا ءَاخَرَۚ فَتَبَارَكَ ٱللَّهُ أَحۡسَنُ ٱلۡخَٰلِقِينَ ١٤

Artinya : “Sesungguhnya kami telah menciptakan manusia itu dari saripati tanah. Kemudian kami jadikan saripati tanah itu menjadi suatu tetesan (nutfah) yang tersimpan di tempat yang aman dan kokoh. Kemudian tetesan (nutfah) itu kami olah menjadi struktur darah, dan struktur itu kami olah menjadi segumpal daging, lalu segumpal daging itu kami olah menjadi tulang belulang, selanjutnya tulang belulang itu kami bungkus dengan daging, selanjutnya kami jadikan makhluk yang berbentuk lain dari yang sebelumnya, Maha Suci Allah pencipta yang paling baik” (QS. al-Mu’minun: 12-14).

Menurut tafsir Ibnu Katsir, Imam Ahmad berkata: Abu Mu’awiyah menceritakan kepada kami, Al A’masy menceritakan kepada kami dari Zaid bin Wahb, dari Abdullah –yaitu Ibnu Mas’ud RA – ia berkata : Rasulullah Saw telah menceritakan kepada kami, dan beliau adalah orang yang benar lagi dibenarkan, “Sesungguhnya penciptaan setiap orang dari kalian (dengan) dihimpun di dalam perut ibunya selama empat puluh hari. Kemudian dia menjadi ‘alaqah (sepotong daging) selama itu pula, kemudian menjadi mudhghah (segumpal darah) selama itu pula. Kemudian diutuslah kepadanya seorang malaikat dan meniupkan ruh kepadanya lalu diperintahkan untuk (menulis) empat kalimat (perkara); rejekinya, ajalnya, amal perbuatannya, dan apakah dia tergolong orang yang celaka atau orang yang bahagia”(Bahreisy, 1990).

Dalam Tafsir Al-Maraghi, periodisasi kejadian manusia dituliskan dalam surat al-Mu’minun ayat 12-16 Artinya: (12) “Dan sesungguhnya Kami telah menciptakan manusia dari suatu saripati (berasal) dari tanah. (13) Kemudian Kami jadikan saripati itu air mani (yang disimpan) dalam tempat yang kokoh (rahim).

(14) Kemudian air mani itu Kami jadikan segumpal darah, lalu segumpal darah itu Kami jadikan segumpal daging, dan segumpal daging itu Kami jadikan tulang belulang, lalu tulang-belulang itu Kami bungkus dengan daging. Kemudian Kami jadikan dia makhluk yang (berbentuk) lain. Maka Maha sucilah Allah, Pencipta Yang Paling Baik (Al-Maraghi,1974).

Berikut akan dijelaskan lebih rinci

وَلَقَدۡ خَلَقۡنَا ٱلۡإِنسَٰنَ مِن سُلَٰلَةٖ مِّن طِينٖ

Sesungguhnya Kami telah menciptakan asal jenis ini dan individunya yang pertama, yaitu Adam as., dari saripati tanah pilihan yang tidak kotor.

Sekelompok mufassir berpendapat bahwa yang dimaksud dengan manusia di sini ialah Adam. Mereka mengatakan bahwa air mani lahir dari darah yang terjadi dari makanan, baik yang bersifat hewani maupun yang bersifat nabati. Makanan yang bersifat hewani akan berakhir pada makanan yang bersifat nabati, dan tumbuh-tumbuhan lahir dari saripati tanah dan air. Jadi, pada hakikatnya manusia lahir dari saripati tanah, kemudian saripati itu mengalami perkembangan kejadian hingga menjadi air mani.

ثُمَّ جَعَلۡنَٰهُ نُطۡفَةٗ فِي قَرَارٖ مَّكِينٖ

Kemudian Kami jadikan keturunannya dari air mani yang terdapat pada tulang rusuk bapak, kemudian dilemparkan ke dalam rahim hingga menetap di suatu tempat yang sangat kokoh sejak masa hamil sampai bersalin.

ثُمَّ خَلَقۡنَا ٱلنُّطۡفَةَ عَلَقَةً

Kemudian Kami ubah air mani itu dari sifatnya yang kedua menjadi sifat darah yang beku.

فَخَلَقۡنَا ٱلۡعَلَقَةَ مُضۡغَةً

Kemudian darah beku itu Kami jadikan sepotong daging sebesar apa yang dapat dikunyah.

فَخَلَقۡنَا ٱلۡمُضۡغَةَ عِظَٰمًا

Kemudian, segumpal daging itu Kami jadikan sedemikian rupa dan bagian-bagiannya kami uraikan. Maka, bagiannya yang termasuk anasir dalam pembentukan tulang, Kami jadikan tulang; dan yang termasuk substansi daging, Kami jadikan daging. Sedangkan zat-zat makanan meliputi semua itu dan tersebar di dalam darah. Karena itu, Allah berfirman:

فَكَسَوۡنَا ٱلۡعِظَٰمَ لَحۡمًا

Maka Kami jadikan daging itu sebagai penutupnya, dalam arti ia menutupi tulang, sehingga menyerupai pakaian yang menutupi tubuh.

ثُمَّ أَنشَأۡنَٰهُ خَلۡقًا ءَاخَرَ

Kemudian Kami jadikan dia makhluk lain yang berbeda sama sekali dengan kejadiannya yang pertama, karena kami meniupkan ruh padanya dan menjadikannya hewan setelah sebelumnya menyerupai benda mati yang bisa berbicara, mendengar dan melihat, serta Kami titipkan padanya sekian banyak keanehan, baik lahir maupun batin.

فَتَبَارَكَ ٱللَّهُ أَحۡسَنُ ٱلۡخَٰلِقِينَ

Maka, Maha Suci Tuhan Kami Yang Maha Kuasa. Dia adalah Pengukur dan Pembentuk yang Paling Baik (Al-Maraghi,1974).

Berdasarkan penjelasan dalam tafsir Ibn Katsir dan Al-Maraghi pada firman Allah Swt surat al-Mu'minun ayat 12-14 tampak bahwa Allah menciptakan manusia secara urut, dan teratur. Langkah demi langkah dilakukan dengan urutan yang sangat jelas. Tanpa ada satu langkah pun yang terlewati atau tertukar dengan langkah yang lain. Inilah gambaran keteraturan ciptaan Allah yang dapat dijadikan sebagai contoh para ahli matematika untuk diterapkan ketika melakukan penelitian dan perhitungan.

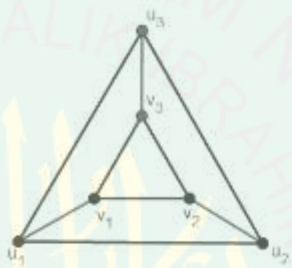
BAB III

PEMBAHASAN

3.1 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* Graf Petersen Diperumum $GP(n, 1)$

3.1.1 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* $GP(3, 1)$

Diberikan graf Petersen diperumum $GP(3,1)$ seperti gambar berikut,



Gambar 3.1 Graf Petersen Diperumum $GP(3,1)$

Berdasarkan Gambar 3.1 diperoleh jarak tiap titik dengan titik lainnya seperti berikut:

$d(v_1, v_2) = 1$	$d(v_1, u_2) = 2$	$d(v_2, u_1) = 2$	$d(v_3, u_1) = 2$
$d(v_1, v_3) = 1$	$d(v_1, u_3) = 2$	$d(v_2, u_2) = 1$	$d(v_3, u_2) = 2$
$d(v_1, u_1) = 1$	$d(v_2, v_3) = 1$	$d(v_2, u_3) = 2$	$d(v_3, u_3) = 1$

Eksentrisitas tiap titik:

$$e(v_1) = \max\{d(v_1, v_j); j = 1,2 \ldots n\ , j \neq 1, v \in V(G)\}$$

$$= \max\{d(v_1, v_2), d(v_1, v_3), d(v_1, u_1), d(v_1, u_2), d(v_1, u_3)\}$$

$$= \max\{1, 1, 1, 2, 2\} = 2$$

$e(v_2) = 2$

$e(v_3) = 2$

$e(u_1) = 2$

$e(u_2) = 2$

$e(u_3) = 2$

Jumlah jarak tiap titik ke titik lainnya:

$D(v_1) = d(v_1, v_2) + d(v_1, v_3) + d(v_1, u_1) + d(v_1, u_2) + d(v_1, u_3)$

$\quad = 1 + 1 + 1 + 2 + 2$

$\quad = 7$

$D(v_2) = 7$

$D(v_3) = 7$

$D(u_1) = 7$

$D(u_2) = 7$

$D(u_3) = 7$

Eccentric distance sum dari $GP(3,1)$,

$$\xi^{ds}(GP(3,1)) = \sum_{v \in V(GP(3,1))} e(v)D(v)$$

$$= e(v_1)\,D(v_1) + e(v_2)\,D(v_2) + e(v_3)\,D(v_3) + e(u_1)\,D(u_1)$$

$$+ e(u_2)\,D(u_2) + e(u_3)\,D(u_3)$$

$$= (2 \times 7) + (2 \times 7) + (2 \times 7) + (2 \times 7) + (2 \times 7) + (2 \times 7)$$

$$= 84$$

Karena pada graf Petersen maupun graf Petersen diperumum, setiap titiknya berderajat 3 maka nilai setiap $\deg(v_i) = 3.$ Sehingga *adjacent eccentric distance sum index* dari graf Petersen diperumum $GP(3,1)$

$$\xi^{sv}(GP(3,1)) = \sum_{v \in V(GP(3,1))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)}$$

$$= \frac{e(v_1)\,D(v_1)}{\deg(v_1)} + \frac{e(v_2)\,D(v_2)}{\deg(v_2)} + \frac{e(v_3)\,D(v_3)}{\deg(v_3)} + \frac{e(u_1)\,D(u_1)}{\deg(u_1)}$$

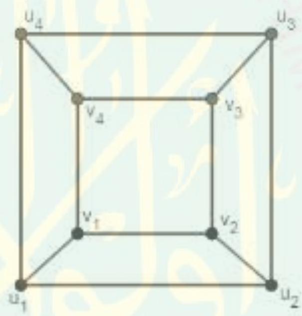
$$+ \frac{e(u_2)\,D(u_2)}{\deg(u_2)} + \frac{e(u_2)\,D(v_6)}{\deg(v_6)}$$

$$= \frac{2\times 7}{3} + \frac{2\times 7}{3} + \frac{2\times 7}{3} + \frac{2\times 7}{3} + \frac{2\times 7}{3} + \frac{2\times 7}{3}$$

$$= 28$$

3.1.2 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* $GP(4,1)$

Diberikan graf Petersen diperumum $GP(4,1)$ seperti gambar berikut,



Gambar 3.2 Graf Petersen Diperumum $GP(4,1)$

Berdasarkan Gambar 3.2 diperoleh jarak tiap titik dengan titik lainnya seperti berikut:

$d(v_1,v_2)=1$	$d(v_2,v_3)=1$	$d(v_3,u_1)=3$	$d(v_4,u_4)=1$
$d(v_1,v_3)=2$	$d(v_2,v_4)=2$	$d(v_3,u_2)=2$	$d(u_1,u_2)=1$
$d(v_1,v_4)=1$	$d(v_2,u_1)=2$	$d(v_3,u_3)=1$	$d(u_1,u_3)=2$
$d(v_1,u_1)=1$	$d(v_2,u_2)=1$	$d(v_3,u_4)=2$	$d(u_1,u_4)=1$
$d(v_1,u_2)=2$	$d(v_2,u_3)=2$	$d(v_4,u_1)=2$	$d(u_2,u_3)=1$
$d(v_1,u_3)=3$	$d(v_2,u_4)=3$	$d(v_4,u_2)=3$	$d(u_2,u_4)=2$
$d(v_1,u_4)=2$	$d(v_3,v_4)=1$	$d(v_4,u_3)=2$	$d(u_3,u_4)=1$

Eksentrisitas tiap titik:

$e(v_1) = 3$ $e(v_3) = 3$ $e(u_1) = 3$ $e(u_3) = 3$

$e(v_2) = 3$ $e(v_4) = 3$ $e(u_2) = 3$ $e(u_4) = 3$

Jumlah jarak tiap titik ke titik lainnya:

$D(v_1) = 12$ $D(v_4) = 12$ $D(u_3) = 12$

$D(v_2) = 12$ $D(u_1) = 12$ $D(u_4) = 12$

$D(v_3) = 12$ $D(u_2) = 12$

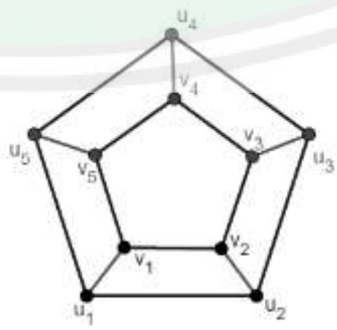
Untuk menghitung *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* dari $GP(4,1)$, digunakan cara yang sama seperti pada subbab 3.1.1 sehingga diperoleh:

$$\xi^{ds}(GP(4,1)) = \sum_{v \in V(GP(4,1))} e(v)D(v) = 288,$$

$$\xi^{sv}(GP(4,1)) = \sum_{v \in V(GP(4,1))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = 96.$$

3.1.3 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* $GP(5,1)$

Diberikan graf Petersen diperumum $GP(5,1)$ seperti gambar berikut,



Gambar 3.3 Graf Petersen Diperumum $GP(5,1)$

Berdasarkan Gambar 3.3 diperoleh jarak tiap titik dengan titik lainnya menggunakan cara yang sama pada subbab 3.1.1.

Kemudian diperoleh eksentrisitas tiap titik seperti berikut:

$e(v_1) = 3$	$e(v_4) = 3$	$e(u_2) = 3$	$e(u_5) = 3$
$e(v_2) = 3$	$e(v_5) = 3$	$e(u_3) = 3$	
$e(v_3) = 3$	$e(u_1) = 3$	$e(u_4) = 3$	

Jumlah jarak tiap titik ke titik lainnya:

$D(v_1) = 17$	$D(v_4) = 17$	$D(u_2) = 17$	$D(u_5) = 17$
$D(v_2) = 17$	$D(v_5) = 17$	$D(u_3) = 17$	
$D(v_3) = 17$	$D(u_1) = 17$	$D(u_4) = 17$	

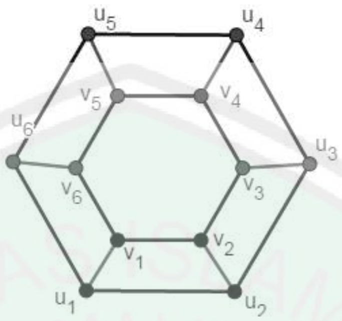
Untuk menghitung *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* dari $GP(5,1)$, digunakan cara yang sama seperti pada subbab 3.1.1 sehingga diperoleh:

$$\xi^{ds}(GP(5,1)) = \sum_{v \in V(GP(5,1))} e(v)D(v) = 510,$$

$$\xi^{sv}(GP(5,1)) = \sum_{v \in V(GP(5,1))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = 170.$$

3.1.4 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* $GP(6,1)$

Diberikan graf Petersen diperumum $GP(6,1)$ seperti gambar berikut,



Gambar 3.4 Graf Petersen Diperumum $GP(6,1)$

Berdasarkan Gambar 3.4 diperoleh jarak tiap titik dengan titik lainnya menggunakan cara yang sama pada subbab 3.1.1.

Kemudian diperoleh eksentrisitas tiap titik seperti berikut:

$e(v_1) = 4$	$e(v_4) = 4$	$e(u_1) = 4$	$e(u_4) = 4$
$e(v_2) = 4$	$e(v_5) = 4$	$e(u_2) = 4$	$e(u_5) = 4$
$e(v_3) = 4$	$e(v_6) = 4$	$e(u_3) = 4$	$e(u_6) = 4$

Jumlah jarak tiap titik ke titik lainnya:

$D(v_1) = 24$	$D(v_4) = 24$	$D(u_1) = 24$	$D(u_4) = 24$
$D(v_2) = 24$	$D(v_5) = 24$	$D(u_2) = 24$	$D(u_5) = 24$
$D(v_3) = 24$	$D(v_6) = 24$	$D(u_3) = 24$	$D(u_6) = 24$

Untuk menghitung *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* dari $GP(6,1)$, digunakan cara yang sama seperti pada subbab 3.1.1 sehingga diperoleh:

$$\xi^{ds}(GP(6,1)) = \sum_{v \in V(GP(6,1))} e(v)D(v) = 1152,$$

$$\xi^{sv}(GP(6,1)) = \sum_{v \in V(GP(6,1))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = 384.$$

3.1.5 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* $GP(7,1)$

Diberikan graf Petersen diperumum $GP(7,1)$ seperti gambar berikut,

Gambar 3.5 Graf Petersen Diperumum $GP(7,1)$

Berdasarkan Gambar 3.5 diperoleh jarak tiap titik dengan titik lainnya menggunakan cara yang sama pada subbab 3.1.1.

Kemudian diperoleh eksentrisitas tiap titik seperti berikut:

$e(v_1) = 4$	$e(v_5) = 4$	$e(u_2) = 4$	$e(u_6) = 4$
$e(v_2) = 4$	$e(v_6) = 4$	$e(u_3) = 4$	$e(u_7) = 4$
$e(v_3) = 4$	$e(v_7) = 4$	$e(u_4) = 4$	
$e(v_4) = 4$	$e(u_1) = 4$	$e(u_5) = 4$	

Jumlah jarak tiap titik ke titik lainnya:

$D(v_1) = 31$	$D(v_5) = 31$	$D(u_2) = 31$	$D(u_6) = 31$
$D(v_2) = 31$	$D(v_6) = 31$	$D(u_3) = 31$	$D(u_7) = 31$
$D(v_3) = 31$	$D(v_7) = 31$	$D(u_4) = 31$	
$D(v_4) = 31$	$D(u_1) = 31$	$D(u_5) = 31$	

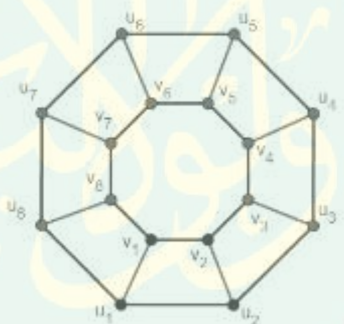
Untuk menghitung *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* dari $GP(7,1)$, digunakan cara yang sama seperti pada subbab 3.1.1 sehingga diperoleh:

$$\xi^{ds}\big(GP(7,1)\big) = \sum_{v \in V(GP(7,1))} e(v)D(v) = 1736,$$

$$\xi^{sv}(GP(7,1)) = \sum_{v \in V(GP(7,1))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = 578.66,$$

3.1.6 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* $\boldsymbol{GP(8,1)}$

Diberikan graf Petersen diperumum $GP(8,1)$ seperti gambar berikut,



Gambar 3.6 Graf Petersen Diperumum $GP(8,1)$

Berdasarkan Gambar 3.6 diperoleh jarak tiap titik dengan titik lainnya menggunakan cara yang sama pada subbab 3.1.1.

Kemudian diperoleh eksentrisitas tiap titik seperti berikut:

$e(v_1) = 5$	$e(v_5) = 5$	$e(u_1) = 5$	$e(u_5) = 5$
$e(v_2) = 5$	$e(v_6) = 5$	$e(u_2) = 5$	$e(u_6) = 5$
$e(v_3) = 5$	$e(v_7) = 5$	$e(u_3) = 5$	$e(u_7) = 5$
$e(v_4) = 5$	$e(v_8) = 5$	$e(u_4) = 5$	$e(u_8) = 5$

Jumlah jarak tiap titik ke titik lainnya:

$D(v_1) = 40$	$D(v_5) = 40$	$D(u_1) = 40$	$D(u_5) = 40$
$D(v_2) = 40$	$D(v_6) = 40$	$D(u_2) = 40$	$D(u_6) = 40$
$D(v_3) = 40$	$D(v_7) = 40$	$D(u_3) = 40$	$D(u_7) = 40$
$D(v_4) = 40$	$D(v_8) = 40$	$D(u_4) = 40$	$D(u_8) = 40$

Untuk menghitung *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* dari $GP(8,1)$, digunakan cara yang sama seperti pada subbab 3.1.1 sehingga diperoleh:

$$\xi^{ds}\big(GP(8,1)\big) = \sum_{v \in V(GP(8,1))} e(v)D(v) = 3200,$$

$$\xi^{sv}(GP(8,1)) = \sum_{v \in V(GP(8,1))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = 1066{,}66.$$

Setelah diketahui masing-masing *eccentric distance sum* $\xi^{ds}(GP)$ dan *adjacent eccentric distance sum index* $\xi^{sv}\,(GP)$ dari graf Petersen diperumum $GP(n,1)$, maka diperoleh pola sebagai berikut:

Tabel 3.1 ξ^{ds} dan ξ^{sv} pada $GP(n,1)$

$GP(n,1)$	$\xi^{ds}(GP(n.1))$	$\xi^{sv}\,(GP(n.1))$
$GP(3,1)$	$(2\times 7) + (2\times 7) + (2\times 7) + (2\times 7) + (2\times 7) + (2\times 7) = 84$	$\frac{2\times 7}{3} + \frac{2\times 7}{3} + \frac{2\times 7}{3} + \frac{2\times 7}{3} + \frac{2\times 7}{3} + \frac{2\times 7}{3} = 28$

$GP(4,1)$	$(3\times 12)+(3\times 12)+(3\times 12)+(3\times 12)+(3\times 12)+(3\times 12)+(3\times 12)+(3\times 12)=288$	$\frac{3\times 12}{3}+\frac{3\times 12}{3}+\frac{3\times 12}{3}+\frac{3\times 12}{3}+\frac{3\times 12}{3}+\frac{3\times 12}{3}+\frac{3\times 12}{3}+\frac{3\times 12}{3}=96$
$GP(5,1)$	$(3\times 17)+(3\times 17)+(3\times 17)+(3\times 17)+(3\times 17)+(3\times 17)+(3\times 17)+(3\times 17)+(3\times 17)+(3\times 17)=510$	$\frac{3\times 17}{3}+\frac{3\times 17}{3}+\frac{3\times 17}{3}+\frac{3\times 17}{3}+\frac{3\times 17}{3}+\frac{3\times 17}{3}+\frac{3\times 17}{3}+\frac{3\times 17}{3}+\frac{3\times 17}{3}+\frac{3\times 17}{3}=170$
$GP(6,1)$	$(4\times 24)+(4\times 24)+(4\times 24)+(4\times 24)+(4\times 24)+(4\times 24)+(4\times 24)+(4\times 24)+(4\times 24)+(4\times 24)+(4\times 24)+(4\times 24)=1152$	$\frac{6\times 1}{3}+\frac{6\times 1}{3}+\frac{6\times 1}{3}+\frac{6\times 1}{3}+\frac{6\times 1}{3}+\frac{6\times 1}{3}+\frac{6\times 1}{3}+\frac{6\times 1}{3}+\frac{6\times 1}{3}+\frac{6\times 1}{3}+\frac{6\times 1}{3}+\frac{6\times 1}{3}=384$
$GP(7,1)$	$(4\times 31)+(4\times 31)+(4\times 31)+(4\times 31)+(4\times 31)+(4\times 31)+(4\times 31)+(4\times 31)+(4\times 31)+(4\times 31)+(4\times 31)+(4\times 31)+(4\times 31)+(4\times 31)=1736$	$\frac{4\times 1}{3}+\frac{4\times 1}{3}+\frac{4\times 1}{3}+\frac{4\times 1}{3}+\frac{4\times 1}{3}+\frac{4\times 1}{3}+\frac{4\times 1}{3}+\frac{4\times 1}{3}+\frac{4\times 1}{3}+\frac{4\times 1}{3}+\frac{4\times 1}{3}+\frac{4\times 1}{3}+\frac{4\times 1}{3}+\frac{4\times 1}{3}=578{,}66$

$GP(8,1)$	$(5\times40)+(5\times40)+(5\times40)+(5\times40)+(5\times40)+(5\times40)+(5\times40)+(5\times40)+(5\times40)+(5\times40)+(5\times40)+(5\times40)+(5\times40)+(5\times40)+(5\times40)+(5\times40)=3200$	$\frac{5\times40}{3}+\frac{5\times40}{3}+\frac{5\times40}{3}+\frac{5\times40}{3}+\frac{5\times40}{3}+\frac{5\times40}{3}+\frac{5\times40}{3}+\frac{5\times40}{3}+\frac{5\times40}{3}+\frac{5\times40}{3}+\frac{5\times40}{3}+\frac{5\times40}{3}+\frac{5\times40}{3}+\frac{5\times40}{3}+\frac{5\times40}{3}+\frac{5\times40}{3}=1066{,}66$

Dari analisis pada beberapa graf Petersen diperumum $GP(n,1)$ diperoleh hasil-hasil berikut :

Lemma 1

Eksentrisitas tiap titik pada graf Petersen diperumum $GP(n,1)$ dengan n bilangan bulat positif dan $n\geq3$, adalah

$$e(v)=\begin{cases}\frac{n}{2}+1, \text{jika } n \text{ genap}\\ \frac{1}{2}(n+1), \text{jika } n \text{ ganjil}\end{cases}$$

Bukti

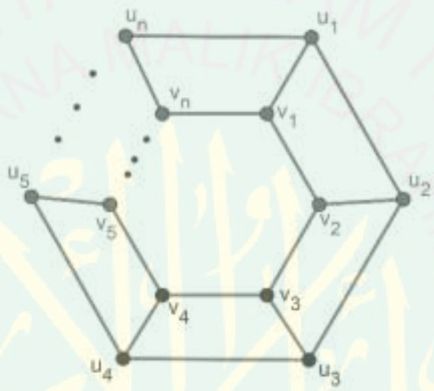
Pada graf Petersen diperumum $GP(n,k)$ dengan himpunan titik $V\big(GP(n,k)\big)=\{u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n\}$ dan himpunan sisi $E\big(GP(n,k)\big)=\{u_iu_{(i+1)},v_iv_{(i+k)},u_iv_i|i=1,..,n\}$, dengan penambahan di dalam indeks $(i+1),(i+k)$ adalah modulo n. Dengan memperhatikan kasus-kasus berikut :

a) Kasus n genap

Jika n genap dan $k = 1$, maka titik terjauh dari tiap titik didapatkan melalui lintasan berikut ini,

$$u_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{i+\frac{n}{2}}$$

Sehingga diperoleh panjang lintasannya adalah $\frac{n}{2} + 1$. Jadi terbukti bahwa eksentrisitas tiap titik pada $GP(n, 1)$ jika n genap yaitu $e(v) = \frac{n}{2} + 1$.



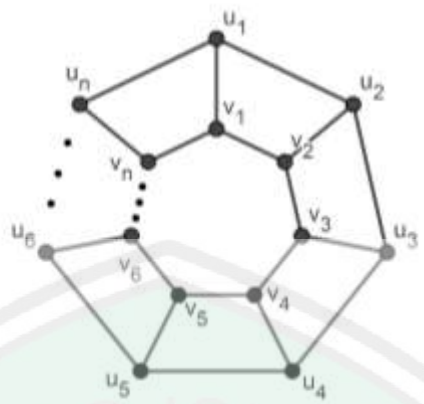
Gambar 3.7 Graf Petersen Diperumum $GP(n, 1)$ jika n Genap

b) Kasus n ganjil

Jika n ganjil dan $k = 1$, maka titik terjauh dari tiap titik didapatkan melalui lintasan berikut ini,

$$u_i, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{i+\frac{n-1}{2}}$$

Sehingga diperoleh panjang lintasannya adalah $\frac{1}{2}(n + 1)$. Jadi terbukti bahwa eksentrisitas tiap titik pada $GP(n, 1)$ jika n ganjil yaitu $e(v) = \frac{1}{2}(n + 1)$.



Gambar 3.8 Graf Petersen Diperumum $GP(n,1)$ jika n Ganjil

Lemma 2

Jumlah jarak tiap titik ke titik lain pada graf Petersen diperumum $GP(n,1)$ dengan n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$ adalah

$$D(v) = \begin{cases} \frac{1}{2}n^2 + n, \text{jika } n \text{ genap} \\ \frac{1}{2}n^2 + n - \frac{1}{2}, \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Bukti

a) Kasus n genap

Pada $GP(n,1)$ dengan n genap, titik v_i terhubung langsung dengan titik u_i, titik v_{i+1} dan titik v_{i+n-1}. Artinya $d(v_i,u_i) = 1, d(v_i,v_{i+1}) = 1$ dan $d(v_i,v_{i+n-1}) = 1$. Titik v_i tidak terhubung langsung dengan selain titik u_i, titik v_{i+1} dan titik v_{i+n-1}. Artinya $d(v_i,u_j) \neq 1$ untuk $j = 1, 2, \ldots n$, $j \neq i$ dan $d(v_i,v_j) \neq 1$ untuk $j = 1, 2, \ldots, n, j \neq i, j \neq i+1, j \neq i+n-1$. Selain itu, terdapat satu titik yang merupakan titik eksentrik dari v_i yaitu $d\left(v_i, u_{i+\frac{n}{2}}\right) = \frac{n}{2} + 1$ (Lemma 1). Sehingga,

$$D(v_i) = d(v_i, u_i) + d(v_i, v_{i+1}) + d(v_i, v_{i+n-1}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ j \neq i+1 \\ j \neq i+n-1}}^{n} d(v_i, v_j)$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ j \neq i+\frac{n}{2}}}^{n} d(v_i, u_j) + d\left(v_i, u_{i+\frac{n}{2}}\right)$$

$$= 1 + 1 + 1 + \frac{n^2 + n - 8}{2} + \frac{n}{2} + 1$$

$$= \frac{n^2 + 2n}{2}$$

$$= \frac{1}{2}n^2 + n$$

Jadi untuk $D(v_i)$ pada $GP(n,1)$ untuk n genap adalah $\frac{1}{2}n^2 + n$ terbukti.

b) Kasus n ganjil

Pada $GP(n,1)$ dengan n ganjil, titik v_i terhubung langsung dengan titik u_i, titik v_{i+1} dan titik v_{i+n-1}. Artinya $d(v_i, u_i) = 1, d(v_i, v_{i+1}) = 1$ dan $d(v_i, v_{i+n-1}) = 1$. Titik v_i tidak terhubung langsung dengan selain titik u_i, titik v_{i+1} dan titik v_{i+n-1}. Artinya $d(v_i, u_j) \neq 1$ untuk $j = 1, 2, \dots n$, $j \neq i$, dan $d(v_i, v_j) \neq 1$ untuk $j = 1, 2, \dots, n, j \neq i, j \neq i+1, j \neq i+n-1$. Selain itu, terdapat dua titik yang merupakan titik eksentrik dari v_i yaitu $d\left(v_i, u_{i+\frac{n-1}{2}}\right) = d\left(v_i, u_{i+\frac{n+1}{2}}\right) = e(v_i) = \frac{1}{2}(n+1)$ (Lemma 1). Sehingga,

$$D(v_i) = d(v_i, u_i) + d(v_i, v_{i+1}) + d(v_i, v_{i+n-1}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i \\ j\neq i+1 \\ j\neq i+n-1}}^{n} d(v_i, v_j)$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i \\ j\neq i+\frac{n-1}{2} \\ j\neq i+\frac{n+1}{2}}}^{n} d(v_i, u_j) + d\left(v_i, u_{i+\frac{n-1}{2}}\right) + d\left(v_i, u_{i+\frac{n+1}{2}}\right)$$

$$= 1 + 1 + 1 + \frac{n^2 - 9}{2} + 2\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{n^2 + 2n - 1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}n^2 + n - \frac{1}{2}$$

Jadi untuk $D(v_i)$ pada $GP(n,1)$ untuk n ganjil adalah $\frac{1}{2}n^2 + n - \frac{1}{2}$ terbukti.

Teorema 1

Eccentric distance sum graf Petersen diperumum $GP(n,1)$ dengan n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$, adalah

$$\xi^{ds}(GP(n,1)) = \begin{cases} \frac{n^4 + 4n^3 + 4n^2}{2}, \text{jika } n \text{ genap} \\ \frac{n^4 + 3n^3 + n^2 - n}{2}, \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Bukti

a) Kasus n genap

Dengan definisi *eccentric distance sum*

$$\xi^{ds}(GP(n,1)) = \sum_{v\in V(GP(n,1))} e(v)D(v)$$

Dan berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2, nilai $e(v)$ dan $D(v)$ pada setiap titik di graf $GP(n,1)$ adalah sama maka hasil perkalian keduanya dapat langsung dikalikan dengan banyaknya titik pada graf $GP(n,1)$, yaitu sebanyak $2n$

$$\xi^{ds}\big(GP(n,1)\big) = 2n\, e(v)D(v)$$

$$= 2n\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}n^2+n\right)$$

$$= \frac{n^4+4n^3+4n^2}{2}$$

Maka terbukti $\xi^{ds}\big(GP(n,1)\big) = \frac{n^4+4n^3+4n^2}{2}$ untuk n genap.

b) Kasus n ganjil

Dengan definisi *eccentric distance sum*

$$\xi^{ds}(GP(n,1)) = \sum_{v\in V(GP(n,1))} e(v)D(v)$$

Dan berdasarkan Lemma 1 dan Lemma 2, nilai $e(v)$ dan $D(v)$ pada setiap titik di graf $GP(n,1)$ adalah sama maka hasil perkalian keduanya dapat langsung dikalikan dengan banyaknya titik pada graf $GP(n,1)$, yaitu sebanyak $2n$

$$\xi^{ds}\big(GP(n,1)\big) = 2n\, e(v)D(v)$$

$$= 2n\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)\left(\frac{1}{2}n^2+n-1\right)$$

$$= \frac{n^4+3n^3+n^2-n}{2}$$

Maka terbukti $\xi^{ds}\big(GP(n,1)\big) = \frac{n^4+3n^3+n^2-n}{2}$ untuk n ganjil.

Teorema 2

Adjacent eccentric distance sum index graf Petersen diperumum $GP(n,1)$ dengan n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$, adalah

$$\xi^{sv}\left(GP(n,1)\right) = \begin{cases} \dfrac{n^4 + 4n^3 + 4n^2}{6}, \text{jika } n \text{ genap} \\ \dfrac{n^4 + 3n^3 + n^2 - n}{6}, \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Bukti

a) Kasus n genap

Berdasarkan Teorema 1 dan diketahui bahwa semua derajat titik pada tiap titik graf Petersen diperumum adalah 3 atau $deg\ (v) = 3$, sehingga diperoleh

$$\xi^{sv}(GP(n,1)) = \sum_{v \in V(GP(n,1))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)}$$

$$= \frac{1}{3}\ \xi^{ds}(GP(n,1))$$

$$= \frac{n^4 + 4n^3 + 4n^2}{6}$$

Maka terbukti $\xi^{sv}(GP(n,1)) = \frac{n^4+4n^3+4n^2}{6}$ untuk n genap.

b) Kasus n ganjil

Berdasarkan Teorema 1 dan diketahui bahwa semua derajat titik pada tiap titik graf Petersen diperumum adalah 3 atau $deg\ (v) = 3$, sehingga diperoleh

$$\xi^{sv}(GP(n,1)) = \sum_{v \in V(GP(n,1))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)}$$

$$= \frac{1}{3}\ \xi^{ds}(GP(n,1))$$

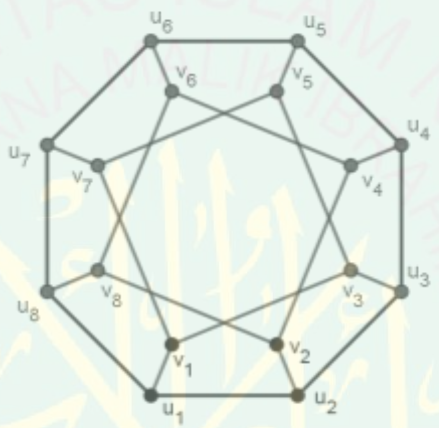
$$= \frac{n^4 + 3n^3 + n^2 - n}{6}$$

Maka terbukti $\xi^{sv}(GP(n,1)) = \frac{n^4+3n^3+n^2-n}{6}$ untuk n ganjil.

3.2 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* Graf Petersen Diperumum $GP(n,2)$

3.2.1 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* $GP(8,2)$

Diberikan graf Petersen diperumum $GP(8,2)$ seperti gambar berikut,



Gambar 3.9 Graf Petersen Diperumum $GP(8,2)$

Berdasarkan Gambar 3.9 diperoleh jarak tiap titik dengan titik lainnya menggunakan cara yang sama pada subbab 3.1.1.

Kemudian diperoleh eksentrisitas tiap titik seperti berikut:

$e(v_1) = 4$	$e(v_5) = 4$	$e(u_1) = 4$	$e(u_5) = 4$
$e(v_2) = 4$	$e(v_6) = 4$	$e(u_2) = 4$	$e(u_6) = 4$
$e(v_3) = 4$	$e(v_7) = 4$	$e(u_3) = 4$	$e(u_7) = 4$
$e(v_4) = 4$	$e(v_8) = 4$	$e(u_4) = 4$	$e(u_8) = 4$

Jumlah jarak tiap titik ke titik lainnya:

$D(v_1) = 36$	$D(v_4) = 36$	$D(v_7) = 36$	$D(u_2) = 34$
$D(v_2) = 36$	$D(v_5) = 36$	$D(v_8) = 36$	$D(u_3) = 34$
$D(v_3) = 36$	$D(v_6) = 36$	$D(u_1) = 34$	$D(u_4) = 34$

$D(u_6) = 34$ $\quad$ $D(u_7) = 34$ $\quad$ $D(u_8) = 34$ $\quad$ $D(u_9) = 34$

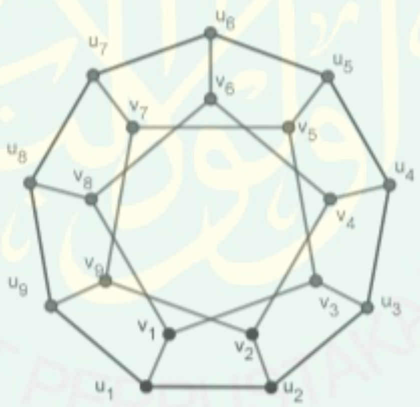
Untuk menghitung *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* dari $GP(8,2)$, digunakan cara yang sama seperti pada subbab 3.1.1 sehingga diperoleh:

$$\xi^{ds}(GP(8,2)) = \sum_{v \in V(GP(8,2))} e(v)D(v) = 2240,$$

$$\xi^{sv}(GP(8,2)) = \sum_{v \in V(GP(8,2))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = 746,66.$$

3.2.2 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* $GP(9,2)$

Diberikan graf Petersen diperumum $GP(9,2)$ seperti gambar berikut,



Gambar 3.10 Graf Petersen Diperumum $GP(9,2)$

Berdasarkan Gambar 3.10 diperoleh jarak tiap titik dengan titik lainnya menggunakan cara yang sama pada subbab 3.1.1.

Kemudian diperoleh eksentrisitas tiap titik seperti berikut:

$e(v_1) = 3$	$e(v_4) = 3$	$e(v_7) = 3$	$e(u_1) = 4$
$e(v_2) = 3$	$e(v_5) = 3$	$e(v_8) = 3$	$e(u_2) = 4$
$e(v_3) = 3$	$e(v_6) = 3$	$e(v_9) = 3$	$e(u_3) = 4$

$e(u_4) = 4$ $e(u_6) = 4$ $e(u_8) = 4$

$e(u_5) = 4$ $e(u_7) = 4$ $e(u_9) = 4$

Jumlah jarak tiap titik ke titik lainnya:

$D(v_1) = 39$ $D(v_6) = 39$ $D(u_2) = 41$ $D(u_7) = 41$

$D(v_2) = 39$ $D(v_7) = 39$ $D(u_3) = 41$ $D(u_8) = 41$

$D(v_3) = 39$ $D(v_8) = 39$ $D(u_4) = 41$ $D(u_9) = 41$

$D(v_4) = 39$ $D(v_9) = 39$ $D(u_5) = 41$

$D(v_5) = 39$ $D(u_1) = 41$ $D(u_6) = 41$

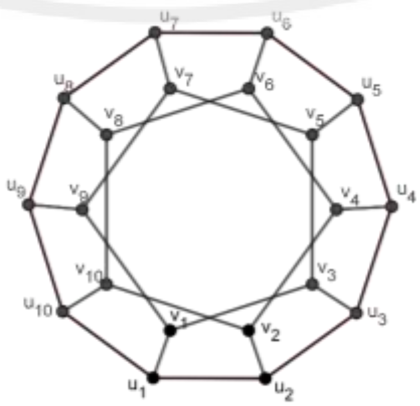
Untuk menghitung *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* dari $GP(9,2)$, digunakan cara yang sama seperti pada subbab 3.1.1 sehingga diperoleh:

$$\xi^{ds}(GP(9,2)) = \sum_{v\in V(GP(9,2))} e(v)D(v) = 2529,$$

$$\xi^{sv}(GP(9,2)) = \sum_{v\in V(GP(9,2))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = 843.$$

3.2.3 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* $GP(10,2)$

Diberikan graf Petersen Diperumum $GP(10,2)$ seperti gambar berikut,



Gambar 3.11 Graf Petersen Diperumum $GP(10,2)$

Berdasarkan Gambar 3.11 diperoleh jarak tiap titik dengan titik lainnya menggunakan cara yang sama pada subbab 3.1.1.

Kemudian diperoleh eksentrisitas tiap titik seperti berikut:

$e(v_1) = 5$	$e(v_6) = 5$	$e(u_1) = 5$	$e(u_6) = 5$
$e(v_2) = 5$	$e(v_7) = 5$	$e(u_2) = 5$	$e(u_7) = 5$
$e(v_3) = 5$	$e(v_8) = 5$	$e(u_3) = 5$	$e(u_8) = 5$
$e(v_4) = 5$	$e(v_9) = 5$	$e(u_4) = 5$	$e(u_9) = 5$
$e(v_5) = 5$	$e(v_{10}) = 5$	$e(u_5) = 5$	$e(u_{10}) = 5$

Jumlah jarak tiap titik ke titik lainnya:

$D(v_1) = 50$	$D(v_6) = 50$	$D(u_1) = 50$	$D(u_6) = 50$
$D(v_2) = 50$	$D(v_7) = 50$	$D(u_2) = 50$	$D(u_7) = 50$
$D(v_3) = 50$	$D(v_8) = 50$	$D(u_3) = 50$	$D(u_8) = 50$
$D(v_4) = 50$	$D(v_9) = 50$	$D(u_4) = 50$	$D(u_9) = 50$
$D(v_5) = 50$	$D(v_{10}) = 50$	$D(u_5) = 50$	$D(u_{10}) = 50$

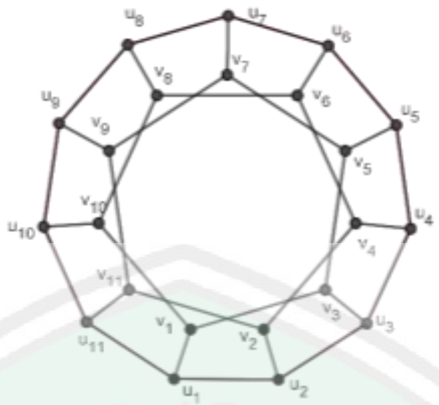
Untuk menghitung *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* dari $GP(10,2)$, digunakan cara yang sama seperti pada subbab 3.1.1 sehingga diperoleh:

$$\xi^{ds}\big(GP(10,2)\big) = \sum_{v \in V(GP(10,2))} e(v)D(v) = 5000,$$

$$\xi^{sv}(GP(10,2)) = \sum_{v \in V(GP(10,2))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = 166{,}667.$$

3.2.4 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* $\boldsymbol{GP(11,2)}$

Diberikan graf Petersen diperumum $GP(11,2)$ seperti gambar berikut,



Gambar 3.12 Graf Petersen Diperumum $GP(11,2)$

Berdasarkan Gambar 3.12 diperoleh jarak tiap titik dengan titik lainnya menggunakan cara yang sama pada subbab 3.1.1.

Kemudian diperoleh eksentrisitas tiap titik seperti berikut:

$e(v_1) = 4$	$e(v_7) = 4$	$e(u_2) = 5$	$e(u_8) = 5$
$e(v_2) = 4$	$e(v_8) = 4$	$e(u_3) = 5$	$e(u_9) = 5$
$e(v_3) = 4$	$e(v_9) = 4$	$e(u_4) = 5$	$e(u_{10}) = 5$
$e(v_4) = 4$	$e(v_{10}) = 4$	$e(u_5) = 5$	$e(u_{11}) = 5$
$e(v_5) = 4$	$e(v_{11}) = 4$	$e(u_6) = 5$	
$e(v_6) = 4$	$e(u_1) = 5$	$e(u_7) = 5$	

Jumlah jarak tiap titik ke titik lainnya seperti berikut:

$D(v_1) = 55$	$D(v_7) = 55$	$D(u_2) = 59$	$D(u_8) = 59$
$D(v_2) = 55$	$D(v_8) = 55$	$D(u_3) = 59$	$D(u_9) = 59$
$D(v_3) = 55$	$D(v_9) = 55$	$D(u_4) = 59$	$D(u_{10}) = 59$
$D(v_4) = 55$	$D(v_{10}) = 55$	$D(u_5) = 59$	$D(u_{11}) = 59$
$D(v_5) = 55$	$D(v_{11}) = 55$	$D(u_6) = 59$	
$D(v_6) = 55$	$D(u_1) = 59$	$D(u_7) = 59$	

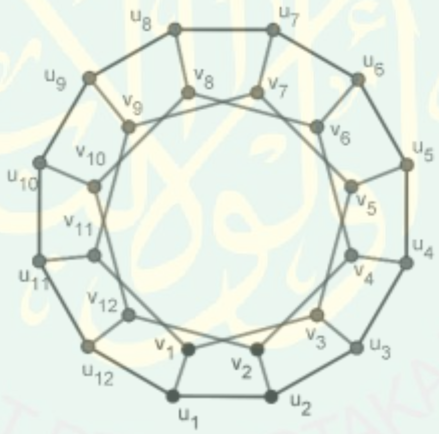
Untuk menghitung *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* dari $GP(11,2)$, digunakan cara yang sama seperti pada subbab 3.1.1 sehingga diperoleh:

$$\xi^{ds}\big(GP(11,2)\big) = \sum_{v\in V(GP(11,2))} e(v)D(v) = 5665,$$

$$\xi^{sv}\big(GP(11,2)\big) = \sum_{v\in V(GP(11,2))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = 1888.333.$$

3.2.5 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* $\boldsymbol{GP(12,2)}$

Diberikan graf Petersen diperumum $GP(12,2)$ seperti gambar berikut,



Gambar 3.13 Graf Petersen Diperumum $GP(12,2)$

Berdasarkan Gambar 3.13 diperoleh jarak tiap titik dengan titik lainnya menggunakan cara yang sama pada subbab 3.1.1.

Kemudian diperoleh eksentrisitas tiap titik seperti berikut:

$e(v_1) = 5$	$e(v_5) = 5$	$e(v_9) = 5$	$e(u_1) = 5$
$e(v_2) = 5$	$e(v_6) = 5$	$e(v_{10}) = 5$	$e(u_2) = 5$
$e(v_3) = 5$	$e(v_7) = 5$	$e(v_{11}) = 5$	$e(u_3) = 5$
$e(v_4) = 5$	$e(v_8) = 5$	$e(v_{12}) = 5$	$e(u_4) = 5$

$e(u_5) = 5$	$e(u_7) = 5$	$e(u_9) = 5$	$e(u_{11}) = 5$
$e(u_6) = 5$	$e(u_8) = 5$	$e(u_{10}) = 5$	$e(u_{12}) = 5$

Jumlah jarak tiap titik ke titik lainnya seperti berikut:

$D(v_1) = 66$	$D(v_7) = 66$	$D(u_1) = 68$	$D(u_7) = 68$
$D(v_2) = 66$	$D(v_8) = 66$	$D(u_2) = 68$	$D(u_8) = 68$
$D(v_3) = 66$	$D(v_9) = 66$	$D(u_3) = 68$	$D(u_9) = 68$
$D(v_4) = 66$	$D(v_{10}) = 66$	$D(u_4) = 68$	$D(u_{10}) = 68$
$D(v_5) = 66$	$D(v_{11}) = 66$	$D(u_5) = 68$	$D(u_{11}) = 68$
$D(v_6) = 66$	$D(v_{12}) = 66$	$D(u_6) = 68$	$D(u_{12}) = 68$

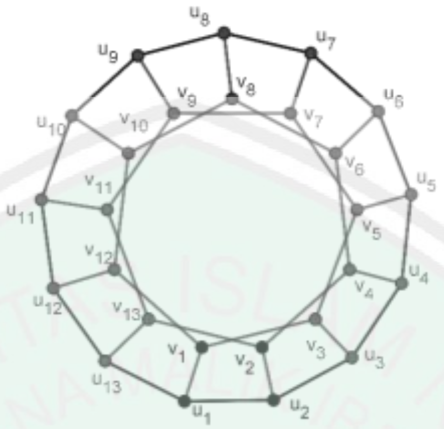
Untuk menghitung *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* dari $GP(12,2)$, digunakan cara yang sama seperti pada subbab 3.1.1 sehingga diperoleh:

$$\xi^{ds}\big(GP(12,2)\big) = \sum_{v \in V(GP(12,2))} e(v)D(v) = 8040,$$

$$\xi^{sv}(GP(12,2)) = \sum_{v \in V(GP(12,2))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = 2680.$$

3.2.6 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* $GP(13, 2)$

Diberikan graf Petersen diperumum $GP(13,2)$ seperti gambar berikut,



Gambar 3.14 Graf Petersen Diperumum $GP(13,2)$

Berdasarkan Gambar 3.14 diperoleh jarak tiap titik dengan titik lainnya menggunakan cara yang sama pada subbab 3.1.1.

Kemudian diperoleh eksentrisitas tiap titik seperti berikut:

$e(v_1) = 4$	$e(v_8) = 4$	$e(u_2) = 5$	$e(u_9) = 5$
$e(v_2) = 4$	$e(v_9) = 4$	$e(u_3) = 5$	$e(u_{10}) = 5$
$e(v_3) = 4$	$e(v_{10}) = 4$	$e(u_4) = 5$	$e(u_{11}) = 5$
$e(v_4) = 4$	$e(v_{11}) = 4$	$e(u_5) = 5$	$e(u_{12}) = 5$
$e(v_5) = 4$	$e(v_{12}) = 4$	$e(u_6) = 5$	$e(u_{13}) = 5$
$e(v_6) = 4$	$e(v_{13}) = 4$	$e(u_7) = 5$	
$e(v_7) = 4$	$e(u_1) = 5$	$e(u_8) = 5$	

Jumlah jarak tiap titik ke titik lainnya seperti berikut:

$D(v_1) = 71$	$D(v_5) = 71$	$D(v_9) = 71$	$D(v_{13}) = 71$
$D(v_2) = 71$	$D(v_6) = 71$	$D(v_{10}) = 71$	$D(u_1) = 77$
$D(v_3) = 71$	$D(v_7) = 71$	$D(v_{11}) = 71$	$D(u_2) = 77$
$D(v_4) = 71$	$D(v_8) = 71$	$D(v_{12}) = 71$	$D(u_3) = 77$

$D(u_4) = 77$ $D(u_7) = 77$ $D(u_{10}) = 77$ $D(u_{13}) = 77$

$D(u_5) = 77$ $D(u_8) = 77$ $D(u_{11}) = 77$

$D(u_6) = 77$ $D(u_9) = 77$ $D(u_{12}) = 77$

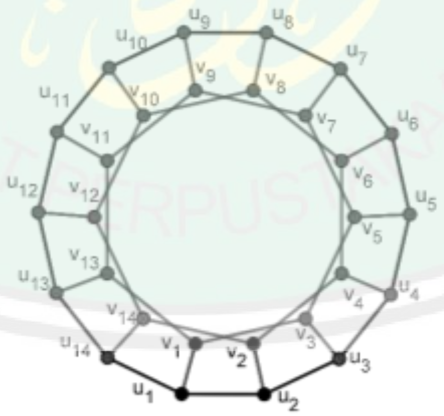
Untuk menghitung *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* dari $GP(13,2)$, digunakan cara yang sama seperti pada subbab 3.1.1 sehingga diperoleh:

$$\xi^{ds}(GP(13,2)) = \sum_{v \in V(GP(13,2))} e(v)D(v) = 8697,$$

$$\xi^{sv}(GP(13,2)) = \sum_{v \in V(GP(13,2))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = 2899.$$

3.2.7 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* $GP(14,2)$

Diberikan graf Petersen diperumum $GP(14,2)$ seperti gambar berikut,



Gambar 3.15 Graf Petersen Diperumum $GP(14,2)$

Berdasarkan Gambar 3.15 diperoleh jarak tiap titik dengan titik lainnya menggunakan cara yang sama pada subbab 3.1.1.

Kemudian diperoleh eksentrisitas tiap titik seperti berikut:

$e(v_1) = 6$	$e(v_8) = 6$	$e(u_1) = 6$	$e(u_8) = 6$
$e(v_2) = 6$	$e(v_9) = 6$	$e(u_2) = 6$	$e(u_9) = 6$
$e(v_3) = 6$	$e(v_{10}) = 6$	$e(u_3) = 6$	$e(u_{10}) = 6$
$e(v_4) = 6$	$e(v_{11}) = 6$	$e(u_4) = 6$	$e(u_{11}) = 6$
$e(v_5) = 6$	$e(v_{12}) = 6$	$e(u_5) = 6$	$e(u_{12}) = 6$
$e(v_6) = 6$	$e(v_{13}) = 6$	$e(u_6) = 6$	$e(u_{13}) = 6$
$e(v_7) = 6$	$e(v_{14}) = 6$	$e(u_7) = 6$	$e(u_{14}) = 6$

Jumlah jarak tiap titik ke titik lainnya seperti berikut:

$D(v_1) = 84$	$D(v_8) = 84$	$D(u_1) = 88$	$D(u_8) = 88$
$D(v_2) = 84$	$D(v_9) = 84$	$D(u_2) = 88$	$D(u_9) = 88$
$D(v_3) = 84$	$D(v_{10}) = 84$	$D(u_3) = 88$	$D(u_{10}) = 88$
$D(v_4) = 84$	$D(v_{11}) = 84$	$D(u_4) = 88$	$D(u_{11}) = 88$
$D(v_5) = 84$	$D(v_{12}) = 84$	$D(u_5) = 88$	$D(u_{12}) = 88$
$D(v_6) = 84$	$D(v_{13}) = 84$	$D(u_6) = 88$	$D(u_{13}) = 88$
$D(v_7) = 84$	$D(v_{14}) = 84$	$D(u_7) = 88$	$D(u_{14}) = 88$

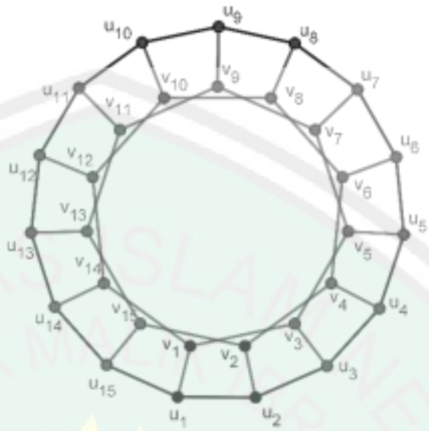
Untuk menghitung *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* dari $GP(14,2)$, digunakan cara yang sama seperti pada subbab 3.1.1 sehingga diperoleh:

$$\xi^{ds}\big(GP(14,2)\big) = \sum_{v\in V(GP(14,2))} e(v)D(v) = 14448,$$

$$\xi^{sv}(GP(14,2)) = \sum_{v\in V(GP(14,2))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = 4816.$$

3.2.8 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* $GP(15,2)$

Diberikan graf Petersen diperumum $GP(15,2)$ seperti gambar berikut,



Gambar 3.16 Graf Petersen Diperumum $GP(15,2)$

Berdasarkan Gambar 3.16 diperoleh jarak tiap titik dengan titik lainnya menggunakan cara yang sama pada subbab 3.1.1.

Kemudian diperoleh eksentrisitas tiap titik seperti berikut:

$e(v_1) = 5$	$e(v_9) = 5$	$e(u_2) = 6$	$e(u_{10}) = 6$
$e(v_2) = 5$	$e(v_{10}) = 5$	$e(u_3) = 6$	$e(u_{11}) = 6$
$e(v_3) = 5$	$e(v_{11}) = 5$	$e(u_4) = 6$	$e(u_{12}) = 6$
$e(v_4) = 5$	$e(v_{12}) = 5$	$e(u_5) = 6$	$e(u_{13}) = 6$
$e(v_5) = 5$	$e(v_{13}) = 5$	$e(u_6) = 6$	$e(u_{14}) = 6$
$e(v_6) = 5$	$e(v_{14}) = 5$	$e(u_7) = 6$	$e(u_{15}) = 6$
$e(v_7) = 5$	$e(v_{15}) = 5$	$e(u_8) = 6$	
$e(v_8) = 5$	$e(u_1) = 6$	$e(u_9) = 6$	

Jumlah jarak tiap titik ke titik lainnya seperti berikut:

$D(v_1) = 91$	$D(v_3) = 91$	$D(v_5) = 91$	$D(v_7) = 91$
$D(v_2) = 91$	$D(v_4) = 91$	$D(v_6) = 91$	$D(v_8) = 91$

$D(v_9) = 91$	$D(v_{15}) = 91$	$D(u_6) = 99$	$D(u_{12}) = 99$
$D(v_{10}) = 91$	$D(u_1) = 99$	$D(u_7) = 99$	$D(u_{13}) = 99$
$D(v_{11}) = 91$	$D(u_2) = 99$	$D(u_8) = 99$	$D(u_{14}) = 99$
$D(v_{12}) = 91$	$D(u_3) = 99$	$D(u_9) = 99$	$D(u_{15}) = 99$
$D(v_{13}) = 91$	$D(u_4) = 99$	$D(u_{10}) = 99$	
$D(v_{14}) = 91$	$D(u_5) = 99$	$D(u_{11}) = 99$	

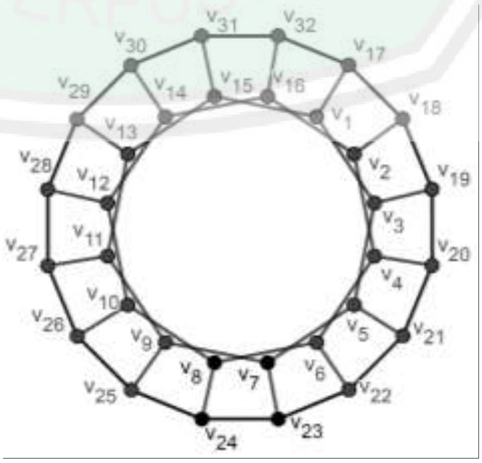
Untuk menghitung *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* dari $GP(15,2)$, digunakan cara yang sama seperti pada subbab 3.1.1 sehingga diperoleh:

$$\xi^{ds}\big(GP(15,2)\big) = \sum_{v \in V(GP(15,2))} e(v)D(v) = 15735,$$

$$\xi^{sv}(GP(15,2)) = \sum_{v \in V(GP(15,2))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = 5245.$$

3.2.9 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* $GP(16,2)$

Diberikan graf Petersen diperumum $GP(16,2)$ seperti gambar berikut,



Gambar 3.17 Graf Petersen Diperumum $GP(16,2)$

Berdasarkan Gambar 3.17 diperoleh jarak tiap titik dengan titik lainnya menggunakan cara yang sama pada subbab 3.1.1.

Kemudian diperoleh eksentrisitas tiap titik seperti berikut:

$e(v_1) = 6$	$e(v_9) = 6$	$e(u_1) = 6$	$e(u_9) = 6$
$e(v_2) = 6$	$e(v_{10}) = 6$	$e(u_2) = 6$	$e(u_{10}) = 6$
$e(v_3) = 6$	$e(v_{11}) = 6$	$e(u_3) = 6$	$e(u_{11}) = 6$
$e(v_4) = 6$	$e(v_{12}) = 6$	$e(u_4) = 6$	$e(u_{12}) = 6$
$e(v_5) = 6$	$e(v_{13}) = 6$	$e(u_5) = 6$	$e(u_{13}) = 6$
$e(v_6) = 6$	$e(v_{14}) = 6$	$e(u_6) = 6$	$e(u_{14}) = 6$
$e(v_7) = 6$	$e(v_{15}) = 6$	$e(u_7) = 6$	$e(u_{15}) = 6$
$e(v_8) = 6$	$e(v_{16}) = 6$	$e(u_8) = 6$	$e(u_{16}) = 6$

Jumlah jarak tiap titik ke titik lainnya seperti berikut:

$D(v_1) = 104$	$D(v_9) = 104$	$D(u_1) = 110$	$D(u_9) = 110$
$D(v_2) = 104$	$D(v_{10}) = 104$	$D(u_2) = 110$	$D(u_{10}) = 110$
$D(v_3) = 104$	$D(v_{11}) = 104$	$D(u_3) = 110$	$D(u_{11}) = 110$
$D(v_4) = 104$	$D(v_{12}) = 104$	$D(u_4) = 110$	$D(u_{12}) = 110$
$D(v_5) = 104$	$D(v_{13}) = 104$	$D(u_5) = 110$	$D(u_{13}) = 110$
$D(v_6) = 104$	$D(v_{14}) = 104$	$D(u_6) = 110$	$D(u_{14}) = 110$
$D(v_7) = 104$	$D(v_{15}) = 104$	$D(u_7) = 110$	$D(u_{15}) = 110$
$D(v_8) = 104$	$D(v_{16}) = 104$	$D(u_8) = 110$	$D(u_{16}) = 110$

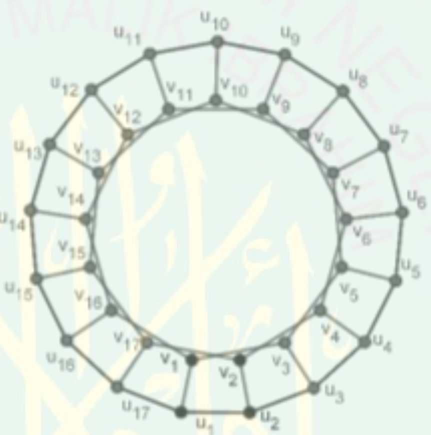
Untuk menghitung *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* dari $GP(16,2)$, digunakan cara yang sama seperti pada subbab 3.1.1 sehingga diperoleh:

$$\xi^{ds}(GP(16,2)) = \sum_{v \in V(GP(16,2))} e(v)D(v) = 20544,$$

$$\xi^{sv}(GP(16,2)) = \sum_{v \in V(GP(16,2))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = 6848.$$

3.2.10 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* $GP(17,2)$

Diberikan graf Petersen diperumum $GP(17,2)$ seperti gambar berikut,



Gambar 3.18 Graf Petersen Diperumum $GP(17,2)$

Berdasarkan Gambar 3.18 diperoleh jarak tiap titik dengan titik lainnya menggunakan cara yang sama pada subbab 3.1.1.

Kemudian diperoleh eksentrisitas tiap titik seperti berikut:

$e(v_1) = 5$	$e(v_7) = 5$	$e(v_{13}) = 5$	$e(u_2) = 6$
$e(v_2) = 5$	$e(v_8) = 5$	$e(v_{14}) = 5$	$e(u_3) = 6$
$e(v_3) = 5$	$e(v_9) = 5$	$e(v_{15}) = 5$	$e(u_4) = 6$
$e(v_4) = 5$	$e(v_{10}) = 5$	$e(v_{16}) = 5$	$e(u_5) = 6$
$e(v_5) = 5$	$e(v_{11}) = 5$	$e(v_{17}) = 5$	$e(u_6) = 6$
$e(v_6) = 5$	$e(v_{12}) = 5$	$e(u_1) = 6$	$e(u_7) = 6$

$e(u_8) = 6$ $e(u_{11}) = 6$ $e(u_{14}) = 6$ $e(u_{17}) = 6$

$e(u_9) = 6$ $e(u_{12}) = 6$ $e(u_{15}) = 6$

$e(u_{10}) = 6$ $e(u_{13}) = 6$ $e(u_{16}) = 6$

Jumlah jarak tiap titik ke titik lainnya seperti berikut:

$D(v_1) = 111$ $D(v_{10}) = 111$ $D(u_2) = 121$ $D(u_{11}) = 121$

$D(v_2) = 111$ $D(v_{11}) = 111$ $D(u_3) = 121$ $D(u_{12}) = 121$

$D(v_3) = 111$ $D(v_{12}) = 111$ $D(u_4) = 121$ $D(u_{13}) = 121$

$D(v_4) = 111$ $D(v_{13}) = 111$ $D(u_5) = 121$ $D(u_{14}) = 121$

$D(v_5) = 111$ $D(v_{14}) = 111$ $D(u_6) = 121$ $D(u_{15}) = 121$

$D(v_6) = 111$ $D(v_{15}) = 111$ $D(u_7) = 121$ $D(u_{16}) = 121$

$D(v_7) = 111$ $D(v_{16}) = 111$ $D(u_8) = 121$ $D(u_{17}) = 121$

$D(v_8) = 111$ $D(v_{17}) = 111$ $D(u_9) = 121$

$D(v_9) = 111$ $D(u_1) = 121$ $D(u_{10}) = 121$

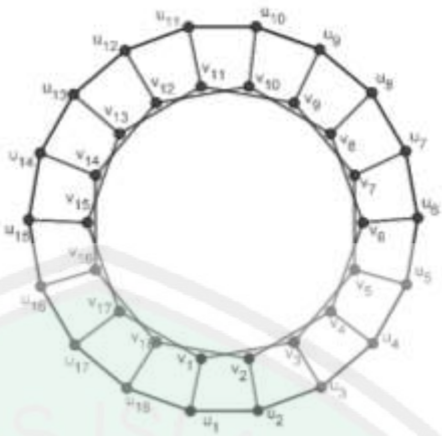
Untuk menghitung *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* dari $GP(17,2)$, digunakan cara yang sama seperti pada subbab 3.1.1 sehingga diperoleh:

$$\xi^{ds}(GP(17,2)) = \sum_{v \in V(GP(17,2))} e(v)D(v) = 21777,$$

$$\xi^{sv}(GP(17,2)) = \sum_{v \in V(GP(17,2))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = 7259.$$

3.2.11 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* $GP(18,2)$

Diberikan graf Petersen diperumum $GP(18,2)$ seperti gambar berikut,



Gambar 3.19 Graf Petersen Diperumum $GP(18,2)$

Berdasarkan Gambar 3.19 diperoleh jarak tiap titik dengan titik lainnya menggunakan cara yang sama pada subbab 3.1.1.

Kemudian diperoleh eksentrisitas tiap titik seperti berikut:

$e(v_1) = 7$	$e(v_{10}) = 7$	$e(u_1) = 7$	$e(u_{10}) = 7$
$e(v_2) = 7$	$e(v_{11}) = 7$	$e(u_2) = 7$	$e(u_{11}) = 7$
$e(v_3) = 7$	$e(v_{12}) = 7$	$e(u_3) = 7$	$e(u_{12}) = 7$
$e(v_4) = 7$	$e(v_{13}) = 7$	$e(u_4) = 7$	$e(u_{13}) = 7$
$e(v_5) = 7$	$e(v_{14}) = 7$	$e(u_5) = 7$	$e(u_{14}) = 7$
$e(v_6) = 7$	$e(v_{15}) = 7$	$e(u_6) = 7$	$e(u_{15}) = 7$
$e(v_7) = 7$	$e(v_{16}) = 7$	$e(u_7) = 7$	$e(u_{16}) = 7$
$e(v_8) = 7$	$e(v_{17}) = 7$	$e(u_8) = 7$	$e(u_{17}) = 7$
$e(v_9) = 7$	$e(v_{18}) = 7$	$e(u_9) = 7$	$e(u_{18}) = 7$

Jumlah jarak tiap titik ke titik lainnya seperti berikut:

$D(v_1) = 126$	$D(v_4) = 126$	$D(v_7) = 126$	$D(v_{10}) = 126$
$D(v_2) = 126$	$D(v_5) = 126$	$D(v_8) = 126$	$D(v_{11}) = 126$
$D(v_3) = 126$	$D(v_6) = 126$	$D(v_9) = 126$	$D(v_{12}) = 126$

$D(v_{13}) = 126$	$D(u_1) = 134$	$D(u_7) = 134$	$D(u_{13}) = 134$
$D(v_{14}) = 126$	$D(u_2) = 134$	$D(u_8) = 134$	$D(u_{14}) = 134$
$D(v_{15}) = 126$	$D(u_3) = 134$	$D(u_9) = 134$	$D(u_{15}) = 134$
$D(v_{16}) = 126$	$D(u_4) = 134$	$D(u_{10}) = 134$	$D(u_{16}) = 134$
$D(v_{17}) = 126$	$D(u_5) = 134$	$D(u_{11}) = 134$	$D(u_{17}) = 134$
$D(v_{18}) = 126$	$D(u_6) = 134$	$D(u_{12}) = 134$	$D(u_{18}) = 134$

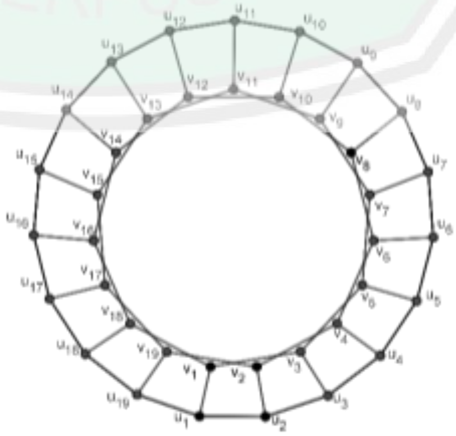
Untuk menghitung *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* dari $GP(18,2)$, digunakan cara yang sama seperti pada subbab 3.1.1 sehingga diperoleh:

$$\xi^{ds}\big(GP(18,2)\big) = \sum_{v \in V(GP(18,2))} e(v)D(v) = 32760,$$

$$\xi^{sv}\big(GP(18,2)\big) = \sum_{v \in V(GP(18,2))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = 10920$$

3.2.12 *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* $GP(19,2)$

Diberikan graf Petersen diperumum $GP(19,2)$ seperti gambar berikut,



Gambar 3.20 Graf Petersen Diperumum $GP(19,2)$

Berdasarkan Gambar 3.20 diperoleh jarak tiap titik dengan titik lainnya menggunakan cara yang sama pada subbab 3.1.1.

Kemudian diperoleh eksentrisitas tiap titik seperti berikut:

$e(v_1) = 6$	$e(v_{11}) = 6$	$e(u_2) = 7$	$e(u_{12}) = 7$
$e(v_2) = 6$	$e(v_{12}) = 6$	$e(u_3) = 7$	$e(u_{13}) = 7$
$e(v_3) = 6$	$e(v_{13}) = 6$	$e(u_4) = 7$	$e(u_{14}) = 7$
$e(v_4) = 6$	$e(v_{14}) = 6$	$e(u_5) = 7$	$e(u_{15}) = 7$
$e(v_5) = 6$	$e(v_{15}) = 6$	$e(u_6) = 7$	$e(u_{16}) = 7$
$e(v_6) = 6$	$e(v_{16}) = 6$	$e(u_7) = 7$	$e(u_{17}) = 7$
$e(v_7) = 6$	$e(v_{17}) = 6$	$e(u_8) = 7$	$e(u_{18}) = 7$
$e(v_8) = 6$	$e(v_{18}) = 6$	$e(u_9) = 7$	$e(u_{19}) = 7$
$e(v_9) = 6$	$e(v_{19}) = 6$	$e(u_{10}) = 7$	
$e(v_{10}) = 6$	$e(u_1) = 7$	$e(u_{11}) = 7$	

Jumlah jarak tiap titik ke titik lainnya seperti berikut:

$D(v_1) = 126$	$D(v_{11}) = 126$	$D(u_2) = 134$	$D(u_{12}) = 134$
$D(v_2) = 126$	$D(v_{12}) = 126$	$D(u_3) = 134$	$D(u_{13}) = 134$
$D(v_3) = 126$	$D(v_{13}) = 126$	$D(u_4) = 134$	$D(u_{14}) = 134$
$D(v_4) = 126$	$D(v_{14}) = 126$	$D(u_5) = 134$	$D(u_{15}) = 134$
$D(v_5) = 126$	$D(v_{15}) = 126$	$D(u_6) = 134$	$D(u_{16}) = 134$
$D(v_6) = 126$	$D(v_{16}) = 126$	$D(u_7) = 134$	$D(u_{17}) = 134$
$D(v_7) = 126$	$D(v_{17}) = 126$	$D(u_8) = 134$	$D(u_{18}) = 134$
$D(v_8) = 126$	$D(v_{18}) = 126$	$D(u_9) = 134$	$D(u_{19}) = 134$
$D(v_9) = 126$	$D(v_{19}) = 134$	$D(u_{10}) = 134$	
$D(v_{10}) = 126$	$D(u_1) = 134$	$D(u_{11}) = 134$	

Untuk menghitung *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* dari $GP(19,2)$, digunakan cara yang sama seperti pada subbab 3.1.1 sehingga diperoleh:

$$\xi^{ds}\big(GP(19,2)\big) = \sum_{v \in V(GP(19,2))} e(v)D(v) = 34941,$$

$$\xi^{sv}(GP(19,2)) = \sum_{v \in V(GP(19,2))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)} = 11647.$$

Setelah diketahui masing-masing *eccentric distance sum* $\xi^{ds}(GP)$ dan *adjacent eccentric distance sum index* ξ^{sv} (GP) dari graf Petersen diperumum $GP(n,2)$, dengan $n = 2m$ maka diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 3.2 ξ^{ds} dan ξ^{sv} pada $GP(n,2)$ dengan n Genap

	$GP(n,2)$	$\xi^{ds}(GP(n,2))$	$\xi^{sv}\left(GP(n,2)\right)$
$n \equiv 0(\text{mod } 4)$	$(8,2)$	$8(4 \times 36) + 8(4 \times 34) = 2240$	$8\left(\frac{4 \times 36}{3}\right) + 8\left(\frac{4 \times 34}{3}\right) = 746,66$
	$(12,2)$	$12(5 \times 66) + 12(5 \times 68) = 8040$	$12\left(\frac{5 \times 66}{3}\right) + 12\left(\frac{5 \times 68}{3}\right) = 2680$
	$(16,2)$	$16(6 \times 104) + 16(6 \times 110) = 20544$	$16\left(\frac{6 \times 104}{3}\right) + 16\left(\frac{6 \times 110}{3}\right) = 6848$
	$(20,2)$	$20(7 \times 150) + 20(7 \times 160) = 43400$	$20\left(\frac{7 \times 150}{3}\right) + 20\left(\frac{7 \times 160}{3}\right) = 14466,6$

$n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$	$(10,2)$	$10(5 \times 50)$ $+ 10(5 \times 50)$ $= 5000$	$10\left(\frac{5 \times 50}{3}\right)$ $+ 10\left(\frac{5 \times 50}{3}\right)$ $= 1666{,}667$
	$(14,2)$	$14(6 \times 84)$ $+ 14(6 \times 88)$ $= 14448$	$14\left(\frac{6 \times 84}{3}\right)$ $+ 14\left(\frac{6 \times 88}{3}\right)$ $= 4816$
	$(18,2)$	$18(7 \times 126)$ $+ 18(7 \times 134)$ $= 32760$	$18\left(\frac{7 \times 126}{3}\right)$ $+ 18\left(\frac{7 \times 134}{3}\right)$ $= 10920$

Tabel 3.3 ξ^{ds} dan ξ^{sv} pada $GP(n,2)$ dengan n Ganjil

	GP	$\xi^{ds}(GP(n,2))$	$\xi^{sv}\ (GP(n,2))$
$n \equiv 1(\text{mod } 4)$	$(9,2)$	$9(3\times 39) + 9(4\times 41) = 2529$	$9\left(\frac{3\times 39}{3}\right) + 9\left(\frac{4\times 41}{3}\right) = 843$
	$(13,2)$	$13(4\times 71) + 13(5\times 77) = 8697$	$13\left(\frac{4\times 71}{3}\right) + 13\left(\frac{5\times 77}{3}\right) = 2899$
	$(17,2)$	$17(5\times 111) + 17(6\times 121) = 21777$	$17\left(\frac{5\times 111}{3}\right) + 17\left(\frac{6\times 121}{3}\right) = 7259$
	$(21,2)$	$21(6\times 159) + 21(7\times 173) = 45465$	$21\left(\frac{6\times 159}{3}\right) + 21\left(\frac{7\times 173}{3}\right) = 15155$
$n \equiv 3(\text{mod } 4)$	$(11,2)$	$11(4\times 55) + 11(5\times 59) = 5665$	$11\left(\frac{4\times 55}{3}\right) + 11\left(\frac{5\times 59}{3}\right) = 1888{,}333$
	$(15,2)$	$15(5\times 91) + 15(6\times 99) = 15735$	$15\left(\frac{5\times 91}{3}\right) + 15\left(\frac{6\times 99}{3}\right) = 5245$
	$(19,2)$	$19(6\times 135) + 19(7\times 147) = 34941$	$19\left(\frac{6\times 135}{3}\right) + 19\left(\frac{7\times 147}{3}\right) = 11647$

Dari analisis pada beberapa graf Petersen diperumum $GP(n,2)$ diperoleh hasil-hasil berikut

Lemma 3

Eksentrisitas tiap titik pada graf Petersen diperumum $GP(n,2)$ dengan n bilangan bulat positif $n \geq 8$ adalah

$$e(v) = \begin{cases} \frac{n+8}{4}, \text{jika } n \equiv 0(\text{mod } 4) \\ \frac{n+10}{4}, \text{jika } n \equiv 2(\text{mod } 4) \end{cases}$$

$$e(v_i) = \begin{cases} \dfrac{n+3}{4}, \text{jika } n \equiv 1 (\text{mod } 4) \\ \dfrac{n+5}{4}, \text{jika } n \equiv 3 (\text{mod } 4) \end{cases}$$

$$e(u_i) = \begin{cases} \dfrac{n+7}{4}, \text{jika } n \equiv 1 (\text{mod } 4) \\ \dfrac{n+9}{4}, \text{jika } n \equiv 3 (\text{mod } 4) \end{cases}$$

Bukti

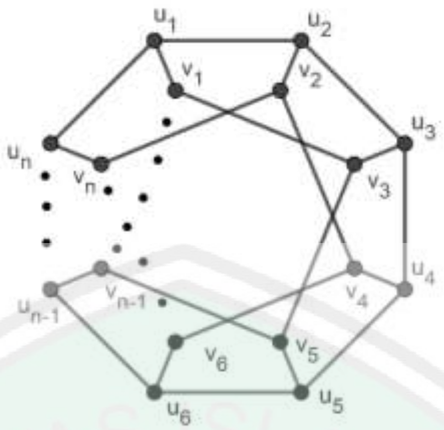
Pada graf Petersen diperumum $GP(n,k)$ dengan himpunan titik $V(GP(n,k)) = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(GP(n,k)) = \{u_i u_{(i+1)}, v_i v_{(i+k)}, u_i v_i | i = 1, \dots, n\}$, dengan penambahan di dalam indeks $(i + 1), (i + k)$ adalah modulo n. Dengan memperhatikan kasus-kasus berikut :

a) Kasus $e(v)$ pada $GP(n, 2)$ untuk $n \equiv 0 (\text{mod } 4)$

Jika $n \equiv 0 (\text{mod } 4)$, maka titik terjauh dari tiap titik didapatkan melalui lintasan berikut ini,

$$u_i, v_i, v_{i+2}, v_{i+4}, \dots, v_{i+\frac{n}{2}}, u_{i+\frac{n}{2}}$$

Sehingga diperoleh panjang lintasannya adalah $\frac{n+8}{4}$. Jadi terbukti bahwa eksentrisitas tiap titik pada $GP(n, 2)$ jika $n \equiv 0 (\text{mod } 4)$ yaitu $e(v) = \frac{n+8}{4}$.



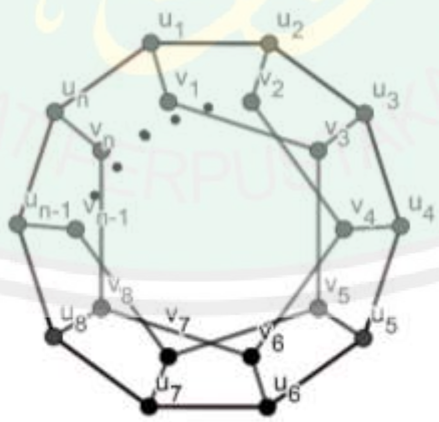
Gambar 3.21 Graf Petersen Diperumum $GP(n, 2)$ untuk $n \equiv 0(\bmod 4)$

b) Kasus $e(v)$ pada $GP(n, 2)$ untuk $n \equiv 2(\bmod 4)$

Jika $n \equiv 2(\bmod 4)$, maka titik terjauh dari tiap titik didapatkan melalui lintasan berikut ini,

$$u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+3}, \dots, v_{i+\frac{n}{2}}, u_{i+\frac{n}{2}}$$

Sehingga diperoleh panjang lintasannya adalah $\frac{n+10}{4}$. Jadi terbukti bahwa eksentrisitas tiap titik pada $GP(n, 2)$ jika $n \equiv 2(\bmod 4)$ yaitu $e(v) = \frac{n+10}{4}$.



Gambar 3.22 Graf Petersen Diperumum $GP(n, 2)$ untuk $n \equiv 2(\bmod 4)$

c) Kasus $e(v_i)$ pada $GP(n, 2)$ untuk $n \equiv 1(\bmod 4)$

Jika $n \equiv 1(\bmod 4)$, maka titik terjauh dari tiap titik v_i didapatkan melalui lintasan berikut ini

$$v_i, v_{i+2}, v_{i+4} \ \dots, v_{i+\frac{n+3}{2}}$$

Sehingga diperoleh panjang lintasannya adalah $\frac{n+3}{4}$. Jadi terbukti bahwa eksentrisitas tiap titik v_i pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 4)$ yaitu $e(v_i) = \frac{n+3}{4}$.

d) Kasus $e(v_i)$ pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 3(\text{mod } 4)$

Jika $n \equiv 3(\text{mod } 4)$, maka titik terjauh dari tiap titik v_i didapatkan melalui lintasan berikut ini,

$$v_i, v_{i+2}, v_{i+4} \ \dots, v_{i+\frac{n+5}{2}}$$

Sehingga diperoleh panjang lintasannya adalah $\frac{n+5}{4}$. Jadi terbukti bahwa eksentrisitas tiap titik v_i pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 3(\text{mod } 4)$ yaitu $e(v_i) = \frac{n+5}{4}$.

e) Kasus $e(u_i)$ pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 4)$

Jika $n \equiv 1(\text{mod } 4)$, maka titik terjauh dari tiap titik u_i didapatkan melalui lintasan berikut ini

$$u_i, v_i, v_{i+2}, v_{i+4} \ \dots, v_{i+\frac{n-1}{2}}, u_{i+\frac{n-1}{2}}$$

Sehingga diperoleh panjang lintasannya adalah $\frac{n+7}{4}$. Jadi terbukti bahwa eksentrisitas tiap titik u_i pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 4)$ yaitu $e(u_i) = \frac{n+7}{4}$.

f) Kasus $e(u_i)$ pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 3(\text{mod } 4)$

Jika $n \equiv 3(\text{mod } 4)$, maka titik terjauh dari tiap titik u_i didapatkan melalui lintasan berikut ini,

$$u_i, u_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+3}, \dots, v_{i+\frac{n-1}{2}}, u_{i+\frac{n-1}{2}}$$

Sehingga diperoleh panjang lintasannya adalah $\frac{n+9}{4}$. Jadi terbukti bahwa eksentrisitas tiap titik u_i pada $GP(n,2)$untuk $n \equiv 3(\text{mod } 4)$ yaitu $e(u_i) = \frac{n+9}{2}$.

Lemma 4

Jumlah jarak tiap titik ke titik lain pada graf Petersen diperumum $GP(n,2)$ dengan n bilangan bulat positif, $n \geq 8$ masing-masing adalah

$$D(v_i) = \frac{n^2 + 10n}{4}, \quad \text{jika } n \equiv 0 (\text{mod } 4) \text{ atau } n \equiv 2 (\text{mod } 4).$$

$$D(u_i) = \frac{n^2 + 14n - 40}{4}, \quad \text{jika } n \equiv 0 (\text{mod } 4) \text{ atau } n \equiv 2 (\text{mod } 4).$$

$$D(v_i) = \begin{cases} \frac{n^2 + 10n - 15}{4}, \text{jika } n \equiv 1 (\text{mod } 4) \\ \frac{n^2 + 10n - 11}{4}, \text{jika } n \equiv 3 (\text{mod } 4) \end{cases}$$

$$D(u_i) = \begin{cases} \frac{n^2 + 14 - 43}{4}, \text{jika } n \equiv 1 (\text{mod } 4) \\ \frac{n^2 + 14 - 39}{4}, \text{jika } n \equiv 3 (\text{mod } 4) \end{cases}$$

Bukti

a) Kasus $D(v_i)$ pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 0 (\text{mod } 4)$ atau $n \equiv 2 (\text{mod } 4)$.

Pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 0 (\text{mod } 4)$ atau $n \equiv 2 (\text{mod } 4)$, titik v_i terhubung langsung dengan titik u_i, titik v_{i+n-2} dan titik v_{i+2}. Artinya $d(v_i, u_i) = 1$, $d(v_i, v_{i+n-2}) = 1$ dan $d(v_i, v_{i+2}) = 1$. Titik v_i tidak terhubung langsung dengan selain titik u_i, titik v_{i+n-2} dan titik v_{i+2}. Artinya $d(v_i, u_j) \neq 1$ untuk $j = 1, 2, \ldots n$, $j \neq i$ dan $d(v_i, v_j) \neq 1$ untuk $j = 1, 2, \ldots, n, j \neq i, i+n-2, j \neq i+2$. Selain itu, terdapat dua titik yang merupakan titik eksentrik dari v_i yaitu $d\left(v_i, v_{i+\frac{n-2}{2}}\right) = d\left(v_i, v_{i+\frac{n}{2}+1}\right) = e(v_i) = \frac{n+8}{4}$ (Lemma 3). Sehingga,

$$D(v_i) = d(v_i, u_i) + d(v_i, v_{i+n-2}) + d(v_i, v_{i+2}) + d\left(v_i, v_{i+\frac{n-2}{2}}\right)$$

$$+ d\left(v_i, v_{i+\frac{n}{2}+1}\right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i \\ j\neq i+n-2 \\ j\neq i+2 \\ j\neq i+\frac{n-2}{2} \\ j\neq i+\frac{n}{2}+1}}^{n} d(v_i, v_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} d(v_i, u_j)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 2\left(\frac{n+8}{4}\right) + \frac{n^2 + 8n - 28}{4}$$

$$= \frac{n^2 + 10n}{4}$$

Jadi untuk $D(v_i)$ pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 0 (\text{mod } 4)$ atau $n \equiv 2 (\text{mod } 4)$ adalah $\frac{n^2+10n}{4}$ terbukti.

b) Kasus $D(u_i)$

Pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 0 (\text{mod } 4)$ atau $n \equiv 2 (\text{mod } 4)$, titik u_i terhubung langsung dengan titik v_i, titik u_{i+1} dan titik v_{i+n-1}. Artinya $d(u_i, v_i) = 1$, $d(u_i, u_{i+1}) = 1$ dan $d(u_i, u_{i+n-1}) = 1$. Titik u_i tidak terhubung langsung dengan selain titik v_i, titik u_{i+1} dan titik u_{i+n-1}. Artinya $d(u_i, v_j) \neq 1$ untuk $j = 1, 2, \ldots n$, $j \neq i$ dan $d(u_i, u_j) \neq 1$ untuk $j = 1, 2, \ldots, n, j \neq i, i+1, j \neq i+n-1$. Selain itu, terdapat satu titik yang merupakan titik eksentrik dari u_i yaitu $d\left(u_i, u_{i+\frac{n}{2}}\right) = \frac{n+8}{4}$ (Lemma 3). Sehingga,

$$D(u_i) = d(u_i, v_i) + d(u_i, u_{i+1}) + d(u_i, u_{i+n-1}) + d\left(u_i, u_{i+\frac{n}{2}}\right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} d(u_i, v_j)$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i \\ j\neq i+1 \\ j\neq i+n-1}}^{n} d(u_i, u_j)$$

$$= 1 + 1 + 1 + \left(\frac{n+8}{4}\right) + \frac{n^2 + 13n - 60}{4}$$

$$= \frac{n^2 + 14n - 40}{4}$$

Jadi untuk $D(u_i)$ pada $GP(n,2)$ untuk n genap adalah $\frac{n^2+14n-40}{4}$ terbukti.

c) Kasus $D(v_i)$ pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 4)$

Pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 4)$, titik v_i terhubung langsung dengan titik u_i, titik v_{i+n-2} dan titik v_{i+2}. Artinya $d(v_i, u_i) = 1, d(v_i, v_{i+n-2}) = 1$ dan $d(v_i, v_{i+2}) = 1$. Titik v_i tidak terhubung langsung dengan selain titik u_i, titik v_{i+n-2} dan titik v_{i+2}. Artinya $d(v_i, u_j) \neq 1$ untuk $j = 1, 2, \dots n$, $j \neq i$ dan $d(v_i, v_j) \neq 1$ untuk $j = 1, 2, \dots, n, j \neq i, i+n-2, j \neq i+2$. Selain itu, terdapat delapan titik yang merupakan titik eksentrik dari v_i yaitu $d\left(v_i, v_{i+\frac{n-7}{2}}\right) = d\left(v_i, v_{i+\frac{n-3}{2}}\right) = d\left(v_i, v_{i+\frac{n+3}{2}}\right) = d\left(v_i, v_{i+\frac{n+7}{2}}\right) = d\left(v_i, u_{i+\frac{n-3}{2}}\right) = d\left(v_i, u_{i+\frac{n-1}{2}}\right) = d\left(v_i, u_{i+\frac{n+1}{2}}\right) = d\left(v_i, u_{i+\frac{n+3}{2}}\right) = e(v_i) = \frac{n+3}{4}$ (Lemma 3).

Sehingga,

$$D(v_i) = d(v_i,u_i) + d(v_i,v_{i+n-2}) + d(v_i,v_{i+2}) + d\left(v_i,v_{i+\frac{n-7}{2}}\right)$$

$$+ d\left(v_i,v_{i+\frac{n-3}{2}}\right) + d\left(v_i,v_{i+\frac{n+3}{2}}\right) + d\left(v_i,v_{i+\frac{n+7}{2}}\right)$$

$$+ d\left(v_i,u_{i+\frac{n-3}{2}}\right) + d\left(v_i,u_{i+\frac{n-1}{2}}\right) + d\left(v_i,u_{i+\frac{n+1}{2}}\right)$$

$$+ d\left(v_i,u_{i+\frac{n+3}{2}}\right) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i\\ j\neq i+n-2\\ j\neq i+2\\ j\neq i+\frac{n\pm 7}{2}\\ j\neq i+\frac{n\pm 3}{2}}}^{n} d(v_i,v_j) + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i\\ j\neq i+\frac{n\pm 3}{2}\\ j\neq i+\frac{n\pm 1}{2}}}^{n} d(v_i,u_j)$$

$$= 1+1+1+8\left(\frac{n+3}{4}\right) + \frac{n^2+2n-51}{4}$$

$$= \frac{n^2+10n-15}{4}$$

Jadi untuk $D(v_i)$ pada $GP(n,2)$ dengan $n \equiv 1(\text{mod } 4)$ adalah $\frac{n^2+10n-15}{4}$ terbukti.

d) Kasus $D(v_i)$ pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 3(\text{mod } 4)$

Pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 3(\text{mod } 4)$, titik v_i terhubung langsung dengan titik u_i, titik v_{i+n-2} dan titik v_{i+2}. Artinya $d(v_i,u_i) = 1, d(v_i,v_{i+n-2}) = 1$ dan $d(v_i,v_{i+2}) = 1$. Titik v_i tidak terhubung langsung dengan selain titik u_i, titik v_{i+n-2} dan titik v_{i+2}. Artinya $d(v_i,u_j) \neq 1$ untuk $j = 1,2,\dots n$, $j \neq i$ dan $d(v_i,v_j) \neq 1$ untuk $j = 1,2,\dots,n, j \neq i, i+n-2, j \neq i+2$. Selain itu, terdapat empat titik yang merupakan titik eksentrik dari v_i yaitu $d\left(v_i,v_{i+\frac{n-5}{2}}\right) = d\left(v_i,v_{i+\frac{n+5}{2}}\right) = d\left(v_i,u_{i+\frac{n-1}{2}}\right) = d\left(v_i,u_{i+\frac{n+1}{2}}\right) = e(v_i) = \frac{n+5}{4}$ (Lemma 3). Sehingga,

$$D(v_i) = d(v_i,u_i) + d(v_i,v_{i+n-2}) + d(v_i,v_{i+2}) + d\left(v_i,v_{i+\frac{n-5}{2}}\right)$$

$$+ d\left(v_i,v_{i+\frac{n+5}{2}}\right) + d\left(v_i,u_{i+\frac{n-1}{2}}\right) + d\left(v_i,u_{i+\frac{n+1}{2}}\right)$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i \\ j\neq i+n-2 \\ j\neq i+2 \\ j\neq i+\frac{n\pm5}{2}}}^{n} d(v_i,v_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i \\ j\neq i+\frac{n\pm1}{2}}}^{n} d(v_i,u_j)$$

$$= 1+1+1+4\left(\frac{n+5}{4}\right) + \frac{n^2+6n-43}{4}$$

$$= \frac{n^2+10n-11}{4}$$

Jadi untuk $D(v_i)$ pada $GP(n,2)$ dengan $n \equiv 3(\text{mod } 4)$ adalah $\frac{n^2+10n-11}{4}$ terbukti.

e) Kasus $D(u_i)$ pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 4)$

Pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 4)$, titik u_i terhubung langsung dengan titik v_i, titik u_{i+2} dan titik u_{i+n-1}. Artinya $d(u_i,v_i)=1$, $d(u_i,u_{i+2})=1$ dan $d(u_i,u_{i+n-1})=1$. Titik u_i tidak terhubung langsung dengan selain titik v_i, titik u_{i+2} dan titik u_{i+n-1}. Artinya $d(u_i,v_j)\neq 1$ untuk $j=1,2,\ldots n,\ j\neq i$ dan $d(u_i,u_j)\neq 1$ untuk $j=1,2,\ldots,n, j\neq i, j\neq i+2, i+n-1$. Selain itu, terdapat empat titik yang merupakan titik eksentrik dari u_i yaitu $d\left(u_i,u_{i+\frac{n+1}{2}}\right) = d\left(u_i,u_{i+\frac{n-1}{2}}\right) = d\left(u_i,u_{i+\frac{n+3}{2}}\right) = d\left(u_i,u_{i+\frac{n-3}{2}}\right) = e(u_i) = \frac{n+7}{4}$ (Lemma 3). Sehingga,

$$D(u_i) = d(u_i, v_i) + d(u_i, u_{i+2}) + d(u_i, u_{i+n-1}) + d\left(u_i, u_{i+\frac{n+1}{2}}\right)$$

$$+ d\left(u_i, u_{i+\frac{n-1}{2}}\right) + d\left(u_i, u_{i+\frac{n+3}{2}}\right) + d\left(u_i, u_{i+\frac{n-3}{2}}\right)$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} d(u_i, v_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i \\ j\neq i+2 \\ j\neq i+n-1 \\ j\neq i+\frac{n\pm1}{2} \\ j\neq i+\frac{n\pm3}{2}}}^{n} d(u_i, u_j)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 4\left(\frac{n+7}{4}\right) + \frac{n^2 + 10n - 83}{4}$$

$$= \frac{n^2 + 14n - 43}{4}$$

Jadi untuk $D(u_i)$ pada $GP(n,2)$ dengan $n \equiv 1 (\text{mod } 4)$ adalah $\frac{n^2+14n-43}{4}$ terbukti.

f) Kasus $D(u_i)$ pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 3 (\text{mod } 4)$

Pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 3 (\text{mod } 4)$, titik u_i terhubung langsung dengan titik v_i, titik u_{i+2} dan titik u_{i+n-1}. Artinya $d(u_i, v_i) = 1$, $d(u_i, u_{i+2}) = 1$ dan $d(u_i, u_{i+n-1}) = 1$. Titik u_i tidak terhubung langsung dengan selain titik v_i, titik u_{i+2} dan titik u_{i+n-1}. Artinya $d(u_i, v_j) \neq 1$ untuk $j = 1, 2, \dots n$, $j \neq i$ dan $d(u_i, u_j) \neq 1$ untuk $j = 1, 2, \dots, n, j \neq i, j \neq i+2, i+n-1$. Selain itu, terdapat dua titik yang merupakan titik eksentrik dari u_i yaitu $d\left(u_i, u_{i+\frac{n+1}{2}}\right) = d\left(u_i, u_{i+\frac{n-1}{2}}\right) = e(u_i) = \frac{n+9}{4}$ (Lemma 3). Sehingga,

$$D(u_i) = d(u_i, v_i) + d(u_i, u_{i+2}) + d(u_i, u_{i+n-1}) + d\left(u_i, u_{i+\frac{n+1}{2}}\right) d\left(u_i, u_{i+\frac{n-1}{2}}\right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} d(u_i, v_j)$$

$$+ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i \\ j\neq i+2 \\ j\neq i+n-1 \\ j\neq i+\frac{n\pm1}{2}}}^{n} d(u_i, u_j) + 4\, e(u_i)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 2\left(\frac{n+9}{4}\right) + \frac{n^2 + 12n - 69}{4}$$

$$= \frac{n^2 + 14n - 39}{4}$$

Jadi untuk $D(u_i)$ pada $GP(n,2)$ untuk $n \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$ adalah $\frac{n^2+14n-39}{4}$ terbukti.

Teorema 3

Eccentric distance sum graf Petersen diperumum $GP(n,2)$ dengan n bilangan bulat positif, $n \geq 8$ adalah

$$\xi^{ds}(GP(n,2)) = \begin{cases} \dfrac{n^4 + 20n^3 + 76n^2 - 160n}{8}, & \text{jika } n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4) \\ \dfrac{n^4 + 22n^3 + 100n^2 - 200n}{8}, & \text{jika } n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 4) \\ \dfrac{n^4 + 17n^3 + 35n^2 - 173n}{8}, & \text{jika } n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4) \\ \dfrac{n^4 + 19n^3 + 63n^2 - 203n}{8}, & \text{jika } n \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4) \end{cases}$$

Bukti

a) Kasus $n \equiv 0(\text{mod } 4)$

Dengan definisi *eccentric distance sum*

$$\xi^{ds}(GP(n,2)) = \sum_{v \in V(GP(n,2))} e(v)D(v)$$

Dan berdasarkan Lemma 3 dan Lemma 4, nilai $e(v)$ dan $D(v)$ pada setiap titik di graf $GP(n,2)$ adalah sama maka hasil perkalian keduanya dapat langsung dikalikan dengan banyaknya titik pada graf $GP(n,2)$, yaitu v_i sebanyak n dan u_i sebanyak n. Sehingga

$$\xi^{ds}\big(GP(n,2)\big) = n \sum_{v_i \in V(GP(n,2))} e(v_i)D(v_i) + n \sum_{u_i \in V(GP(n,2))} e(u_i)D(u_i)$$

$$= n\left(\left(\frac{n+8}{4}\right)\left(\frac{n^2+10n}{4}\right)\right) + n\left(\left(\frac{n+8}{4}\right)\left(\frac{n^2+14n-40}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{n^4 + 20n^3 + 76n^2 - 160n}{8}$$

Maka terbukti $\xi^{ds}\big(GP(n,2)\big) = \frac{n^4+20n^3+76n^2-160n}{8}$ untuk $n \equiv 0(\text{mod } 4)$.

b) Kasus $n \equiv 0(\text{mod } 4)$

Dengan definisi *eccentric distance sum*

$$\xi^{ds}(GP(n,2)) = \sum_{v \in V(GP(n,2))} e(v)D(v)$$

Dan berdasarkan Lemma 3 dan Lemma 4, nilai $e(v)$ dan $D(v)$ pada setiap titik di graf $GP(n,2)$ adalah sama maka hasil perkalian keduanya dapat langsung dikalikan dengan banyaknya titik pada graf $GP(n,2)$, yaitu v_i sebanyak n dan u_i sebanyak n. Sehingga

$$\xi^{ds}\big(GP(n,2)\big) = n \sum_{v_i \in V(GP(n,2))} e(v_i)D(v_i) + n \sum_{u_i \in V(GP(n,2))} e(u_i)D(u_i)$$

$$= n\left(\frac{n+10}{4}\right)\left(\frac{n^2+10n}{4}\right) + n\left(\frac{n+10}{4}\right)\left(\frac{n^2+14n-40}{4}\right)$$

$$= \frac{n^4+22n^3+100n^2-200n}{8}$$

Maka terbukti $\xi^{ds}\big(GP(n,2)\big) = \frac{n^4+22n^3+100n^2-200n}{8}$ untuk $n \equiv 0(\text{mod } 4)$.

c) Kasus $n \equiv 1(\text{mod } 4)$

Dengan definisi *eccentric distance sum*

$$\xi^{ds}(GP(n,2)) = \sum_{v\in V(GP(n,2))} e(v)D(v)$$

Dan berdasarkan Lemma 3 dan Lemma 4, nilai $e(v)$ dan $D(v)$ pada setiap titik di graf $GP(n,2)$ adalah sama maka hasil perkalian keduanya dapat langsung dikalikan dengan banyaknya titik pada graf $GP(n,2)$, yaitu v_i sebanyak n dan u_i sebanyak n. Sehingga

$$\xi^{ds}\big(GP(n,2)\big) = n \sum_{v_i\in V(GP(n,2))} e(v_i)D(v_i) + n \sum_{u_i\in V(GP(n,2))} e(u_i)D(u_i)$$

$$= \left(n\left(\frac{n+3}{4}\right)\left(\frac{n^2+10n-15}{4}\right)\right)$$

$$+ \left(n\left(\frac{n+7}{4}\right)\left(\frac{n^2+14n-43}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{n^4+17n^3+35n^2-173n}{8}$$

Maka terbukti $\xi^{ds}\big(GP(n,2)\big) = \frac{n^4+17n^3+35n^2-173n}{8}$ $n \equiv 1(\text{mod } 4)$.

d) Kasus $n \equiv 3(\text{mod } 4)$

Dengan definisi *eccentric distance sum*

$$\xi^{ds}(GP(n,2)) = \sum_{v\in V(GP(n,2))} e(v)D(v)$$

Dan berdasarkan Lemma 3 dan Lemma 4, nilai $e(v)$ dan $D(v)$ pada setiap titik di graf $GP(n,2)$ adalah sama maka hasil perkalian keduanya dapat langsung dikalikan dengan banyaknya titik pada graf $GP(n,2)$, yaitu v_i sebanyak n dan u_i sebanyak n. Sehingga

$$\xi^{ds}\big(GP(n,2)\big) = n \sum_{v_i \in V(GP(n,2))} e(v_i)D(v_i) + n \sum_{u_i \in V(GP(n,2))} e(u_i)D(u_i)$$

$$= \left(n\left(\frac{n+5}{4}\right)\left(\frac{n^2+10n-11}{4}\right)\right)$$

$$+\left(n\left(\frac{n+9}{4}\right)\left(\frac{n^2+14n-39}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{n^4+19n^3+63n^2-203n}{8}$$

Maka terbukti $\xi^{ds}\big(GP(n,2)\big) = \frac{n^4+19n^3+63n^2-203n}{8}$ untuk $n \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4)$.

Teorema 4

Adjacent eccentric distance sum index graf Petersen diperumum $GP(n,2)$ dengan n bilangan bulat positif $n \geq 8$, adalah

$$\xi^{sv}(GP(n,2)) = \begin{cases} \dfrac{n^4+20n^3+76n^2-160n}{24}, & \text{jika } n \equiv 0(\mathrm{mod}\ 4) \\ \dfrac{n^4+22n^3+100n^2-200n}{24}, & \text{jika } n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 4) \\ \dfrac{n^4+17n^3+35n^2-173n}{24}, & \text{jika } n \equiv 1(\mathrm{mod}\ 4) \\ \dfrac{n^4+19n^3+63n^2-203n}{24}, & \text{jika } n \equiv 3(\mathrm{mod}\ 4) \end{cases}$$

Bukti

a) Kasus $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$

Berdasarkan Teorema 3 dan diketahui bahwa semua derajat titik pada tiap titik graf Petersen diperumum adalah 3 atau $deg\ (v) = 3$, sehingga diperoleh

$$\xi^{sv}(GP(n,2)) = \sum_{v \in V(GP(n,2))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)}$$

$$= \frac{1}{3}\ \xi^{ds}(GP(n,2))$$

$$= \frac{n^4 + 20n^3 + 76n^2 - 160n}{24},$$

Maka terbukti $\xi^{sv}(GP(n,2)) = \frac{n^4+20n^3+76n^2-160n}{24}$ untuk $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$.

b) Kasus $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$

Berdasarkan Teorema 3 dan diketahui bahwa semua derajat titik pada tiap titik graf Petersen diperumum adalah 3 atau $deg\ (v) = 3$, sehingga diperoleh

$$\xi^{sv}(GP(n,2)) = \sum_{v \in V(GP(n,2))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)}$$

$$= \frac{1}{3}\ \xi^{ds}(GP(n,2))$$

$$= \frac{n^4 + 22n^3 + 100n^2 - 200n}{24}$$

Maka terbukti $\xi^{sv}(GP(n,2)) = \frac{n^4+22n^3+100n^2-200n}{24}$ untuk $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$.

c) Kasus $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$

Berdasarkan Teorema 5 dan diketahui bahwa semua derajat titik pada tiap titik graf Petersen diperumum adalah 3 atau $deg\ (v) = 3$, sehingga diperoleh

$$\xi^{sv}(GP(n,2)) = \sum_{v \in V(GP(n,2))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)}$$

$$= \frac{1}{3}\,\xi^{ds}(GP(n,2))$$

$$= \frac{n^4 + 17n^3 + 35n^2 - 173n}{24}$$

Maka terbukti $\xi^{sv}(GP(n,2)) = \frac{n^4+17n^3+35n^2-173n}{24}$ untuk $n \equiv 1(\text{mod } 4)$.

d) Kasus $n \equiv 3(\text{mod } 4)$

Berdasarkan Teorema 5 dan diketahui bahwa semua derajat titik pada tiap titik graf Petersen diperumum adalah 3 atau $deg\,(v) = 3$, sehingga diperoleh

$$\xi^{sv}(GP(n,2)) = \sum_{v \in V(GP(n,2))} \frac{e(v)D(v)}{\deg(v)}$$

$$= \frac{1}{3}\,\xi^{ds}(GP(n,2))$$

$$= \frac{n^4 + 19n^3 + 63n^2 - 203n}{24}$$

Maka terbukti $\xi^{sv}(GP(n,2)) = \frac{n^4+19n^3+63n^2-203n}{24}$ untuk $n \equiv 3(\text{mod } 4)$.

3.3 Kajian Agama Islam tentang Konsep Keteraturan

Gambaran keteraturan ciptaan Allah telah dijelaskan pada bab II, QS. Al-Mu'minun ayat 12-14 . Pada ayat tersebut menjelaskan proses penciptaan manusia. Allah menciptakan manusia dari tidak ada menjadi ada. Kemudian dari yang sudah ada seperti nutfah berproses menjadi 'alaqah, mudghah, 'idham, dan lahm. Selanjutnya Allah menjadikan makhluk dalam bentuk lain yaitu embrio. Proses penciptaan manusia seperti yang telah dijelaskan al-Qur'an telah dibuktikan oleh para ahli termasuk ahli kedokteran atau medis, yaitu percampuran sperma dengan ovum akan terjadi pembuahan yang kemudian akan berproses seperti yang dijelaskan al-Qur'an. Dari penjelasan tersebut tampak bahwa Allah menciptakan manusia dengan proses yang urut, dan teratur. Langkah demi langkah dilakukan dengan urutan yang sangat jelas. Tanpa ada satu langkah pun yang terlewati atau tertukar dengan langkah yang lain.

Dengan demikian, berdasarkan penjelasan tafsir surat Al-Mu'minun ayat 12-14 tentang gambaran keteraturan ciptaan Allah, kita bisa melihat bagaimana Allah memberikan contoh kepada hambaNya melalui firmanNya tersebut. Sebagai seorang hamba yang tidak luput dari kesalahan, maka sepatutnya contoh tersebut diteladani dan diamalkan, termasuk oleh matematikawan dalam melakukan perhitungan. Hal ini dimaksudkan untuk memperkecil kesalahan dalam menghasilkan teorema-teorema baru beserta pembuktiannya.

Dengan meneladani gambaran keteraturan ciptaan Allah dalam firmanNya tersebut, maka dalam penelitian ini untuk menentukan *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* graf Petersen diperumum digunakan langkah-langkah yang urut dan teratur. Langkah pertama adalah dengan menggambar graf Petersen diperumum $GP(n,k)$. Langkah kedua, dengan melihat gambar yang diperoleh dari langkah pertama, dapat ditentukan jarak tiap titik dengan titik lainnya pada graf tersebut. Setelah diperoleh jarak pada tiap titik, langkah ketiga yaitu menentukan eksentrisitas dan jumlah jarak. Langkah ke empat menentukan *eccentric distance sum* dari graf tersebut. Langkah ke lima yaitu menentukan derajat tiap titik pada graf tersebut dan kemudian menentukan *adjacent eccentric distance sum index* graf tersebut. Dengan memperhatikan urutan langkah-langkah di atas dengan benar, tanpa ada langkah yang tertukar atau terlewati maka dapat diperoleh hasil yang akurat. Sehingga dibutuhkan keteraturan dalam menentukan *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* graf Petersen diperumum.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan rumusan masalah, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. *Eccentric distance sum* dan *Adjacent eccentric distance sum index* graf Petersen diperumum $GP(n,1)$ dengan n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$ masing-masing adalah

$$\xi^{ds}(GP(n,1)) = \begin{cases} \dfrac{n^4+4n^3+4n^2}{2}, \text{jika } n \text{ genap} \\ \dfrac{n^4+3n^3+n^2-n}{2}, \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

dan

$$\xi^{sv}(GP(n,1)) = \begin{cases} \dfrac{n^4+4n^3+4n^2}{6}, \text{jika } n \text{ genap} \\ \dfrac{n^4+3n^3+n^2-n}{6}, \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

2. *Eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* graf Petersen diperumum $GP(n,2)$ dengan $n \geq 8$ masing-masing adalah

$$\xi^{ds}(GP(n,2)) = \begin{cases} \dfrac{n^4+20n^3+76n^2-160n}{8}, & \text{jika } n \equiv 0 (\text{mod } 4) \\ \dfrac{n^4+22n^3+100n^2-200n}{8}, & \text{jika } n \equiv 2 (\text{mod } 4) \\ \dfrac{n^4+17n^3+35n^2-173n}{8}, & \text{jika } n \equiv 1 (\text{mod } 4) \\ \dfrac{n^4+22n^3+100n^2-200n}{8}, & \text{jika } n \equiv 3 (\text{mod } 4) \end{cases}$$

dan

$$\xi^{sv}(GP(n,2)) = \begin{cases} \dfrac{n^4 + 20n^3 + 76n^2 - 160n}{24}, & \text{jika } n \equiv 0 (\text{mod } 4) \\ \dfrac{n^4 + 22n^3 + 100n^2 - 200n}{24}, & \text{jika } n \equiv 2 (\text{mod } 4) \\ \dfrac{n^4 + 17n^3 + 35n^2 - 173n}{24}, & \text{jika } n \equiv 1 (\text{mod } 4) \\ \dfrac{n^4 + 22n^3 + 100n^2 - 200n}{24}, & \text{jika } n \equiv 3 (\text{mod } 4) \end{cases}$$

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis menfokuskan pada permasalahan *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* graf Petersen diperumum $GP(n,k)$ dengan $k = 1$ dan $k = 2$. Sehingga disarankan untuk penelitian selanjutnya, pembaca membahas *eccentric distance sum* dan *adjacent eccentric distance sum index* graf Petersen diperumum $GP(n,k)$ dengan $k \notin \{1,2\}$.

DAFTAR RUJUKAN

Abdusssakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Press.

Abdussakir, Azizah, N.N. & Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Press.

Al-Maraghi, Ahmad Musthafa. 1974. Terjemah Tafsir Al-Maraghi. Semarang: Toha Putra.

Baca, Martin. 2000. Consecutive-magic Labeling of Generalized Petersen Graph. *Utilitas Mathematica*, 58: 237-241.

Bahreisy, Salim. 1990. Terjemah Ringkas Tafsir Ibnu Katsir Jilid 5. Surabaya : Bina Ilmu.

Bielak, H dan Wolska, K. 2014. On The Adjacent Eccentric Distance Sum of Graphs. *Annales UMCS Mathematica*, LXVIII (2): 1-10.

Bielak, H dan Broniszewska, K. 2017. Eccentric Distance Sum Index for some Classes of Connected Graphs. *Annales UMCS Mathematica*, LXXI (2): 25-32.

Chartrand, G and Lesniak L. *1986. Graphs and Digraphs Second Edition.* California: a Division of Wadsworth, Inc.

Chartrand, G., Lesniak, L. dan Zhang, P. 2016. *Graph and Digraph 6th Edition*. New York: CRC Press.

Coxeter, H. S. M. 1950. Self-dual Configurations and Regular Graphs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 56: 413–455.

D'Angelo, J. P. dan West, D. B. 2000. *Mathematical Thinking: Problem-Solving and Proofs, 2nd ed.* Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

Gupta, S., Singh, M., Madan, A. K. 2002. Eccentric Distance Sum: A Novel Graph Invariant for Predicting Biological and Physical Properties, *J. Math. Anal. Appl.* 275: 386–401.

Harary. 1969. *Graph Theory, Reading Mass*. Boston: Addison-Wesley Publishing Company.

Holton, D. A. dan Sheehan, J. 1993. *The Petersen Graph*. Cambridge: Cambridge University Press.

Katsir, Ibnu. 2003. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 4*. Bogor: Pustaka Imam asy-Syafi’i.

Mas'ud, Muhammad. 2008. *Subhanalloh Quantum Bilangan-bilangan Al-Quran*. Jogjakarta: Diva Press.

Padmapriya. 2017. The Eccentric-distance Sum of Some Graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications* 5: 51-62.

Potanka, Karen. S. 1998. *Groups, Graphs, and Symmetry-Breaking*. Blacksburg, Virginia: Thesis submitted to the Faculty of The Virginia Polytechnic Institute and State University.

S. Sardana, A. K. Madan. 2002. Predicting Anti-HIV Activity of TIBO Derivatives: a computational approach using a novel topological descriptor. *J. Mol. Model.* 8: 258–265.

Watkins, Mark E. 1969. A Theorem on Tait Colorings with an Application to the Generalized Petersen Graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 6: 152–164.

Wiener, H. 1947. Structural Determination of Paraffin Boiling Points, *J. Amer. Chem. Soc*. 69 : 17–20.

RIWAYAT HIDUP

Rafenda Mundi Widya Zalicha, lahir di Kota Surabaya pada tanggal 2 Februari 1994 dan biasa dipanggil Rafenda. Penulis tinggal di Ketintang Selatan, Surabaya. Penulis merupakan anak ketiga dari empat bersaudara pasangan Widajat Setyono dan ibu Sri Suprihatin (Alm.).

Pendidikan dasarnya ditempuh di SD Negeri Karang Tanjung, Sidoarjo. Setelah itu melanjutkan ke SMP Negeri 2 Candi, Sidoarjo. Kemudian penulis melanjutkan Pendidikan ke SMA Negeri 1 Porong, Sidoarjo. Pada tahun 2015, penulis mulai menempuh pendidikan di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada jurusan Matematika.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Rafenda Mundi Widya Zalicha
NIM : 15610102
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : *Eccentric Distance Sum* dan *Adjacent Eccentric Distance Sum Index* Graf Petersen Diperumum
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	8 Februari 2019	Konsultasi Bab I & Bab II	1.
2.	8 Februari 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	2.
3.	13 Maret 2019	ACC Bab I & Bab II	3.
4.	14 April 2019	Konsultasi Bab III	4.
5.	30 April 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	5.
6.	30 April 2019	ACC Bab III	6.
7.	2 Mei 2019	Konsultasi Bab IV & Abstrak	7.
8.	3 Mei 2019	ACC Bab IV & Abstrak	8.
9.	4 Mei 2019	ACC Kajian Keagamaan	9.
10.	7 Mei 2019	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 7 Mei 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001