ESTIMASI PARAMETER MODEL REGRESI POISSON DIPERUMUM DENGAN METODE MAKSIMUM LIKELIHOOD

SKRIPSI

OLEH
LAILATUL BADRIYAH
NIM. 13610079

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

ESTIMASI PARAMETER MODEL REGRESI POISSON DIPERUMUM DENGAN METODE MAKSIMUM LIKELIHOOD

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Lailatul Badriyah
NIM. 13610079

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

ESTIMASI PARAMETER MODEL REGRESI POISSON DIPERUMUM DENGAN METODE MAKSIMUM LIKELIHOOD

SKRIPSI

Oleh
Lailatul Badriyah
NIM. 13610079

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 18 Oktober 2018

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Imam Sujarwo, M.Pd	Ach. Nasichuddin, M.A
NIP. 19630502 198703 1 005	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER MODEL REGRESI POISSON DIPERUMUM DENGAN METODE MAKSIMUM LIKELIHOOD

SKRIPSI

Oleh
Lailatul Badriyah
NIM. 13610079

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 5 Desember 2018

Penguji Utama	: Dr. Sri Harini, M.Si	....
Ketua Penguji	: Abdul Aziz, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Ach. Nasichuddin, M.A	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini

Nama	:	Lailatul Badriyah
NIM	:	13610079
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Estimasi Parameter Model Regresi Poisson Diperumum dengan Metode Maksimum *Likelihood*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 19 Oktober 2018
Yang membuat pernyataan,

Lailatul Badriyah
NIM. 13610079

MOTO

رِضَى اللهُ فِيْ رِضَى الْوَالِدَيْنِ وَسُخْطُ اللهُ فِيْ سُخْطِ الْوَالِدَيْنِ

"Ridha Allah tergantung kepada ridha kedua orang tua dan murka Allah pun tergantung pada murka kedua orang tua" (HR. Tirmidzi).

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk

Kedua orang tua yang begitu penulis cintai,
Bapak Ali Imron dan Ibu Binti Roisyah.
Terima kasih karena tak pernah lelah memperjuangkan dan memanjatkan doa bagi penulis.

Kedua saudara yang begitu penulis sayangi,
kakak Moh. Luqman Hakim dan adik Moh. Wafiq Athoillah.
Terima kasih telah memberikan semangat, bantuan, dan hiburan serta doa kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang telah melimpahkan nikmat, rahmat serta hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penulis banyak mendapatkan bimbingan serta arahan dari berbagai pihak selama proses penyusunan skripsi ini. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.

5. Ach. Nasichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah dan ibu tercinta yang telah mencurahkan cinta kasih, doa, bimbingan, dan motivasi hingga selesainya skripsi ini.
8. Saudara-saudara tersayang yang telah memberikan semangat kepada penulis.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi dan terima kasih untuk setiap kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang,17 Oktober 2018

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

BAB IV PEMBAHASAN

BAB V PENUTUP

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna sebagai berikut:

db	: derajat bebas
y_i	: variabel terikat pada pengamatan ke- i
x_i	: vektor variabel bebas pada pengamatan ke- i
β	: vektor parameter regresi poisson berukuran $(k+1)$ x1
n	: banyaknya pengamatan
a	: parameter dispersi
χ^2	: nilai *pearson chi-square*
$\beta^{(n)}$	: β pada iterasi ke- n
ε	: Vektor kolom galat yang berukuran $(n+1)$
β	: Penduga dari parameter β
∂	: Dho (turunan parsial)
X	: Matriks dari variabel bebas X (diketahui)

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Badriyah, Lailatul. 2019. **Estimasi Parameter Model Regresi Poisson Diperumum dengan Metode Maksimum Likelihood.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Imam Sujarwo, M.Pd (II) Ach. Nasichuddin, M.A.

Kata Kunci : Regresi Poisson Diperumum, Overdispersi, *Maximum Likelihood Estimation*, Angka Kematian Bayi.

Regresi Poisson adalah suatu bentuk analisis regresi yang digunakan untuk memodelkan data berupa data diskrit (*count data*). Model regresi Poisson merupakan *Generalized Linear Model* (GLM) dengan data responnya diasumsikan berdistribusi Poisson. Namun, terdapat asumsi dalam regresi Poisson yaitu variansi dari variabel dependen Y sama dengan mean, yang disebut equidispersi. Apabila variansi dari variabel dependen Y lebih besar daripada mean, maka data terjadi overdispersi. Overdispersi memiliki akibat yang sama pada pelanggaran homoskedastisitas dalam model regersi linier. Akibatnya, estimasi parameter pada data dengan kondisi yang demikian menjadi tidak tepat. Kasus overdispersi dapat ditangani menggunakan regresi Poisson diperumum. Metode yang digunakan untuk estimasi parameter model regresi Poisson diperumum yaitu *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan diselesaikan menggunakan iterasi Newton Rapshon. Penelitian ini menjelaskan tentang faktor-faktor yang mempengaruhi Angka Kematian Bayi (AKB) di Kabupaten Kediri.

ABSTRACT

Badriyah, Lailatul. 2019. **Estimation Parameters Generalized Poisson Regression Model with Maximum Likelihood Method**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Sains and Technology, Maulana Malik Ibrahim Islamic University State of Malang. Supervisor: (I) Dr. Imam Sujarwo, M. Pd (II) Ach. Nasichuddin, MA

Keywords : *Generalized Poisson Regression, Overdispersion, Maximum Likelihood Estimation, Infant Mortality Rate.*

Poisson regression is a form of regression analysis used to model data in the form of discrete data (data count). The Poisson regression model is a Generalized Linear Model (GLM) with response data assumed to be Poisson distributed. However, there is an assumption in Poisson regression that the variance of the dependent variable Y is equal to the mean, which is called equidispersion. If the variance of the dependent variable Y is greater than the mean, then overdispersion occurs on the data. Overdispersion has the same effect on violations of homoskedasticity in the linear regression model. As a result, parameter estimates on data with such conditions are not correct. Overdispersion cases can be handled using general Poisson regression. The method used for parameter estimation of the Poisson regression model is summarized as Maximum Likelihood Estimation (MLE) and resolved using Newton Rapshon iterations. This study describes the factors that influence the Infant Mortality Rate (IMR) in Kediri Regency.

ملخص

بدريه,ليلتل.٢٠١٩. **يتم تقريب معدل معلمات نموذج انحدار بواسون مع الطريقة القصوى المحتملة المحلية**.أطروحة .قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية دولة مالانج .المستشارون: (١) إمام سوجارو (٢) أح. ناصحدين

كلمات البحث: التعميم بواسون الانحدار,أوفردسفرسي ، الحد الأقصى تقدير احتمالية ، معدل وفيات الرضع

يعد انحدار *Poisson* أحد أشكال تحليل الانحدار المستخدم لنمذجة البيانات في شكل بيانات منفصلة (عدد المعطيات). نموذج *Poisson* الانحداري هو نموذج خطي عام (*GLM*) مع بيانات استجابة يفترض أن تكون *Poisson* موزعة. ومع ذلك ، هناك افتراض في انحدار *Poisson* أن التباين بين المتغير التابع Y يساوي الوسط ، والذي يسمى *equidispersion*. إذا كان تباين المتغير التابع Yأكبر من المتوسط ، فسيحدث فرط زيادة في البيانات. التأثير المفرط له نفس التأثير على انتهاكات المثلية الجنسية في نموذج الانحدار الخطي. نتيجة لذلك ، تقديرات المعلمة على البيانات مع هذه الشروط غير صحيحة. يمكن التعامل مع حالات *overdispersion* باستخدام الانحدار *Poisson*العامة . يتم تلخيص الطريقة المستخدمة لتقدير المعلمة لنموذج انحدار ب*Poisson* على أنها الحد الأقصى لتقدير الاحتمال (*MLE*) وتم حلها باستخدام تكرارات *Newton Raphson*تصف هذه الدراسة العوامل التي تؤثر على معدل وفيات الرضع (*IMR*) في *Kediri* ريجنسي .

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis regresi merupakan suatu metode yang digunakan untuk menentukan hubungan antara variabel satu dengan variabel lainnya. Analisis regresi sering digunakan untuk meramalkan/menduga suatu kejadian atau fenomena tertentu. Sehingga pendugaan ini menjadi penting karena berfungsi untuk mengetahui dampak yang terjadi akibat perubahan suatu variabel terhadap variabel lain.

Pada umumnya, analisis regresi digunakan untuk menganalisis data dengan variabel dependen berupa variabel random kontinu. Namun, ada juga data yang dianalisis tersebut menggunakan variabel dependen berupa variabel data diskrit. Salah satu model regresi yang dapat digunakan untuk menganalisis hubungan variabel dependen Y yang berupa data diskrit dan variabel independen X adalah model regresi Poisson.

Regresi Poisson merupakan bentuk model analisis regresi yang digunakan untuk memodelkan data diskrit (*count data*). Model regresi Poisson merupakan *Generalized Linear Model* (GLM) dengan data responnya (komponen randomnya) diasumsikan berdistribusi Poisson (McCullagh dan Nelder, 1989). Misalnya data tersebut dilambangkan dengan Y yaitu banyaknya kejadian yang terjadi dalam suatu periode waktu dan wilayah tertentu, regresi Poisson termasuk dalam model regresi non linier (Cameron dan Trivedi, 1998). Salah satu asumsi yang harus dipenuhi dalam regresi Poisson adalah variansi dari variabel dependen Y yang diberikan oleh $X = x$ sama dengan mean (*equidispersi*), yaitu

$$Var(Y) = E(Y) = \mu \tag{1.1}$$

Di sisi lain, terdapat pelanggaran asumsi yang kadang dilakukan ketika menganalisis data diskrit menggunakan model regersi Poisson, dimana nilai variansi lebih besar dibanding dengan nilai mean. Hal ini biasa disebut sebagai kasus overdispersi. Selain itu, juga terdapat kasus ketika nilai variansi lebih kecil dibanding nilai mean, yang disebut sebagai kasus underdispersi.

Overdispersi memiliki akibat yang sama pada pelanggaran homoskedastisitas dalam model regersi linier. Homoskedastisitas merupakan salah satu asumsi yang harus dipenuhi pada model regresi linier klasik, dimana Y yang berhubungan dengan nilai X yang berbeda memiliki variansi residual yang sama. Sedangkan variansi dan mean pada regresi Poisson mengalami dispersi (overdispersi/underdispersi). Kasus overdispersi pada regresi Poisson dapat dilihat dari nilai statistik Pearson chi-Square dibagi dengan derajat bebasnya atau dapat pula dengan membagi nilai deviansi dengan derajat bebasnya, apabila hasilnya lebih dari 1 maka terjadi overdispersi pada model regresi Poisson (Cameron dan Trivedi, 1998).

Menurut Yayuk Listiani dan Purhadi (2007), untuk mengatasi kasus overdispersi pada regresi Poisson digunakan model GPR (*Generalized Poisson Regression*). *Generalized Poisson Regression* (GPR) juga dikenal dengan regresi Poisson diperumum. Model regresi Poisson diperumum adalah bentuk umum dari model regresi Poisson. Model tersebut biasanya digunakan untuk menganalisis suatu masalah hubungan variabel dengan respon berupa data *count*.

Model regresi diperumum telah diaplikasikan pada beberapa masalah di berbagai bidang, seperti kesehatan, asuransi, demografi, dan sebagainya. Merujuk penelitian yang telah dilakukan oleh beberapa peneliti tentang model regresi Poisson diperumum, yaitu penelitian yang dilakukan oleh Toha Saifudin (2009) yang membahas tentang metode menduga model regresi apabila respon berdistribusi tertentu, khususnya normal dengan bentuk fungsional regresinya tidak diketahui dengan menerapkan metode *likelihood* lokal. Selain itu, Nurwihda Safrida Umami (2013) mengaplikasikan model regresi Poisson diperumum pada kasus angka kematian bayi di Jawa Tengah tahun 2007. Sehingga dalam penelitian model GPR ini akan diaplikasikan pada data prosentase angka kematian bayi di Kabupaten Kediri tahun 2015. Mengingat bahwa angka kematian bayi menggambarkan kondisi social ekonomi masyarakat setempat karena bayi merupakan kelompok yang paling rentan terkena dampak dari suatu perubahan lingkungan maupun sosial ekonomi. Sehingga penelitian mengenai prosentase angka kematian bayi di Kabupaten Kediri tahun 2015 diharapkan dapat memperkirakan faktor apa saja yang menyebabkan perubahan angka kematian bayi tersebut.

Estimasi adalah suatu metode untuk memperkirakan nilai dari suatu populasi dengan menggunakan nilai dari sampel. Estimator adalah nilai pendugaan dari data statistik, yang digunakan untuk mengisi suatu parameter. Estimasi digambarkan melalui sebuah cerita salah seorang Nabi yang terdapat pada surah ash-Shaffat/37:147, yang memiliki arti sebagai berikut

"Dan kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih"(QS. Ash-Shaffat/37:147).

Ayat di atas menggambarkan tentang estimasi dalam kajian Islam. Ayat tersebut menjelaskan bahwa umat Nabi Yunus AS yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih, dalam ayat tersebut tidak diketahui secara pasti umat Nabi Yunus as, bisa jadi lebih dari 100.000 orang atau kurang dari 100.000 orang.

Terdapat dua pendekatan estimasi fungsi regresi, yaitu pendekatan parametrik dan pendekatan nonparametrik. Suatu pendekatan yang yang dilakukan apabila fungsi regresinya diketahui dan bergantung pada parameter sehingga mengakibatkan pengestimasian fungsi regresi sama dengan pengestimasian parameternya, dinamakan pendekatan parametrik. Sedangakan apabila fungsi regresinya tidak diketahui sehingga pengestimasian fungsi regresinya dilakukan dengan cara mengestimasi fungsi regresi yang tidak diketahui tersebut. Hal tersebut dinamakan pendekatan nonparametrik. Pendekatan nonparametrik biasanya dengan menggunakan estimator *kernel*, *spline*, atau yang lainnya.

Berdasarkan beberapa penelitian yang telah dilakukan oleh beberapa peneliti di atas mengenai model regresi Poisson tergeneralisir, maka penulis menyusun dalam penelitian berjudul "Estimasi Parameter Model Regresi Poisson Diperumum dengan Metode Maksimum Likelihood".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat ditarik rumusan masalah, yaitu

1. Bagaimana bentuk estimasi parameter model regresi Poisson diperumum dengan metode maksimum *likelihood*?
2. Bagaimana aplikasi estimasi parameter model regresi Poisson diperumum dengan metode maksimum *likelihood* pada data jumlah angka kematian bayi (AKB) di Kabupaten Kediri tahun 2015?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan adanya penelitian ini untuk mencapai rumusan masalah di atas, yaitu

1. Mengetahui bentuk estimasi parameter model regresi Poisson diperumum dengan metode maksimum *likelihood*.
2. Mendapatkan model regresi Poisson diperumum dengan metode maksimum *likelihood* pada data jumlah Angka Kematian Bayi (AKB) di Kabupaten Kediri tahun 2015.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini dapat menambah ilmu pengetahuan dan informasi bagi pembaca mengenai estimasi parameter model regresi Poisson diperumum dengan metode maksimum likelihood dan aplikasinya di lingkungan sekitar.

1.5 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitian dengan harapan untuk mendekati sasaran yang diharapkan, yaitu menguji kenormalan data pada setiap variabel yang akan diteliti dan data yang diaplikasikan pada penelitian ini adalah data prosentase angka kematian bayi di Kabupaten Kediri pada tahun 2015. Data pada variabel respon berdistribusi Poisson dan overdispersi.

1.6 Sistematika Penulisan

Penelitian ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari lima bab. Adapun subbab yang akan dibahas dalam penelitian ini, yaitu sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Berisi latar belakang masalah yang akan diteliti, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian pustaka

Berisi teori-teori yang membahas mengenai distribusi Poisson, regresi Poisson, pengujian parameter model regresi Poisson, overdispersi, distribusi Poisson diperumum, *Generalized Linear Model,* estimasi parameter, metode maksimum likelihood, iterasi Newton Raphson, regresi Poisson diperumum, Angka Kematian Bayi, uji *Kolmogrov Smirnov*, pengujian multikolinieritas, contoh estimasi dalam al Qur'an.

Bab III Metode Penelitian

Berisi pendekatan penelitian yang dilakukan, jenis dan sumber data yang digunakan dalam penelitian, variabel yang digunakan dalam penelitian, dan analisis data.

Bab IV Pembahasan

Berisi pembahasan mengenai estimasi parameter model regresi Poisson diperumum dengan metode maksimum *likelihood*, aplikasi model regresi Poisson diperumum dengan metode maksimum *likelihood* pada data Angka Kematian Bayi (AKB) di Kabupaten

Kediri tahun 2015, dan kajian Islam mengenai contoh estimasi dan statistik dalam al Qur’an dan hadits.

Bab V Penutup

Berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Poisson

Distribusi Poisson meupakan suatu bentuk distribusi untuk peristiwa yang probablitas kejadiannya sangat kecil dan bergantung pada interval waktu tertentu dengan hasil pengamatan berupa variabel diskrit. Menurut Walpole dan Myers (1995), distribusi peluang peubah acak Poisson Y adalah

$$p(y,\mu)=\frac{e^{-\mu}\mu^{y}}{y!} \tag{2.1}$$

dimana :

y : 0,1,2, …

μ : rata-rata banyak sukses yang terjadi dalam selang waktu atau daerah tertentu

e = 2,7183

2.2 Regresi Poisson

Analisis regresi merupakan metode statistika yang populer digunakan untuk menyatakan hubungan antara peubah tak bebas Y dengan peubah-peubah bebas X Dari uraian tersebut maka regresi poisson adalah salah satu regresi yang dapat menggambarkan hubungan antara variabel respon (y) dimana variabel respon berdistribusi poisson dengan variabel bebas (x). Jika μ_i adalah rata-rata banyaknya sukses yang terjadi dalam selang waktu tertentu dan diasumsikan μ_i tidak berubah dari data point yang satu ke data point yang lain secara independen maka μ_i dapat dimodelkan sebagai fungsi dari k variabel prediktor (Myers, 1990). Pada model regresi Poisson, biasanya *link function* yang digunakan adalah log yaitu $\ln(\mu_i) = \eta_i$ sehingga fungsi hubungan untuk model regresi Poisson mempunyai logaritma seperti pada persamaan

$$\ln \mathrm{E}(y_i \mid x_i) = \ln(\mu_i) = \eta_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} \tag{2.2}$$

$$\mu_i = \exp(x_i^T \beta) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik}) \tag{2.3}$$

Khoshgoftaar,dkk (2004) mengatakan bahwa metode regresi Poisson mempunyai kondisi dimana nilai mean dan varians dari variabel respon bernilai sama. Namun, ada kalanya terjadi fenomena *over/under dispersion* dalam data yang dimodelkan dengan distribusi Poisson yaitu varians lebih besar/lebih kecil daripada mean. Taksiran dispersi diukur dengan nilai devians atau Pearson's Chi Square yang dibagi derajat bebas. Data *over dispersi* jika taksiran dispersi lebih besar dari 1 dan *under dispersi* jika taksiran dispersi kurang dari 1. Ada suatu model regresi *count* yang dapat mengatasi masalah *over/under dispersion* dalam keadaan data tidak terlalu banyak nol, yaitu model *Negative Binomial* (NB) dan *Generalized Poisson* (GP). Model regresi GP mirip dengan model regresi Poisson yaitu merupakan suatu model GLM. Akan tetapi pada model regresi GP mengasumsikan bahwa komponen randomnya berdistribusi *generalized* Poisson. Model regresi *generalized* poisson mempunyai bentuk yang sama dengan model regresi poisson.

$$\ln \mathrm{E}(y_i \mid x_i) = \ln(\mu_i) = \eta_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik} \tag{2.4}$$

$$\mu_i = \exp(x_i^T \beta) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_k x_{ik}) \tag{2.5}$$

2.3 Pengujian Parameter Model Regresi Poisson

Metode MLE adalah salah satu metode penaksiran parameter yang dapat digunakan untuk menaksir parameter suatu model yang diketahui distribusinya. Sebagaimana diketahui bahwa estimasi parameter melalui metode MLE adalah melakukan turunan parsial fungsi *ln-likelihood* terhadap parameter yang akan diestimasi. Fungsi *ln-likelihood* untuk regresi Poisson adalah sebagai berikut

$$\ln L(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i \left(x_i^T \beta \right) - \exp\left(x_i^T \beta \right) - \ln\left(y_{i!} \right) \right] \tag{2.6}$$

Kemudian persamaan 2.7 diturunkan terhadap β disamakan dengan nol dan diselesaikan dengan metode iterasi numerik yaitu Newton-Raphson. Untuk menguji kelayakan model regresi Poisson, terlebih dahulu ditentukan dua buah fungsi *likelihood* yang berhubungan dengan model regresi yang diperoleh. Fungsi-fungsi *likelihood* yang dimaksud adalah $L(\hat{\Omega})$ yaitu nilai *likelihood* untuk model lengkap dengan melibatkan variabel prediktor dan $L(\hat{\omega})$ yaitu nilai *likelihood* untuk model sederhana tanpa melibatkan variabel prediktor. Salah satu metode yang digunakan untuk menentukan statistik uji dan pengujian parameter model regresi Poisson adalah dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT) dengan hipotesis:

H_0 : $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_k = 0$
H_1 : paling tidak ada satu $\beta_j \neq 0$, $j = 1, 2, ..., k$

Statistik uji untuk kelayakan model regresi poisson adalah sebagai berikut:

$$G = -2\left[\ln\left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \right) \right] = 2\left(L(\hat{\Omega}) - L(\hat{\omega}) \right) \tag{2.7}$$

Keputusan:

Tolak H_0 jika $G_{hitung} \geq \chi^2_{v,\alpha}$ dengan v adalah banyaknya parameter model di bawah populasi dikurangi dengan banyaknya parameter di bawah H_0. Parameter model regresi Poisson yang telah dihasilkan dari estimasi parameter belum tentu mempunyai pengaruh yang signifikan terhadap model. Untuk itu perlu dilakukan pengujian terhadap parameter model regresi Poisson secara individu. Dengan menggunakan hipotesis sebagai berikut:

H_0 : $\beta_i = 0$ (pengaruh variabel ke-i tidak signifikan)

H_1 : $\beta_i \neq 0$ (pengaruh variabel ke-i signifikan)

Statistik uji yang digunakan adalah sebagai berikut

$$t_i = \frac{\hat{\beta}_i}{SE\left(\hat{\beta}_i\right)} \tag{2.8}$$

Daerah penolakannya adalah H_0 akan ditolak jika $\left|t_{hitung}\right| > t_{\frac{\alpha}{2},v}$, di mana α adalah tingkat signifikansi dan v adalah derajat bebas.

Terdapat beberapa metode dalam menentukan model terbaik pada regresi *generalized* Poisson, salah satunya adalah *Akaike Information Criterion* (AIC). Menurut Bozdogan (2000) *Akaike Information Criterion* (AIC) didefinisikan sebagai berikut

$$AIC = -2\ln \mathrm{L}\left(\hat{\theta}\right) + 2k \tag{2.9}$$

di mana $L\left(\hat{\theta}\right)$ adalah nilai *likelihood*, dan k adalah jumlah parameter. Model terbaik regresi *generalized* Poisson adalah model yang mempunyai nilai *AIC* terkecil (Listiani dan Purhadi, 2007).

2.4 Overdispersi

Menurut Hilbe (2011) overdispersi pada regresi Poisson terjadi ketika varians dari respon lebih besar dari meannya. Beberapa hal yang menyebabkan overdispersi, diantaranya :

1. Terdapat korelasi antar pengamatan.
2. Terdapat pelanggaran asumsi distribusi Poisson, yaitu $Var(Y) > E(Y)$.
3. Terdapat *excess zeros*.
4. Terdapat *outlier* dalam data.

Overdispersi menyebabkan nilai devians model menjadi sangat besar dan mengakibatkan model yang dihasilkan menjadi kurang tepat. Salah satu cara untuk mengatasinya yaitu dengan mengganti asumsi distribusi Poisson dengan distribusi lain yang lebih fleksibel.

Cara lain untuk mendeteksi adanya kasus overdispersi dan underdispersi yaitu dengan melihat nilai *deviance*. Bentuk statistika *deviance* yaitu:

$$D = 2\sum_{i=0}^{n} y_i \log\left(\frac{y_i}{\mu_i}\right) \quad (2.10)$$

Jika hasil bagi antara nilai statistik D terhadap derajat bebasnya atau statistik X^2 terhadap derajat bebasnya lebih dari 1, maka indikasi bahwa telah terjadi overdispersi pada model regresi Poisson. sedangkan jika nilai hasil bagi lebih kecil atau kurang dari 1, maka dinyatakan sebagai kasus underdispersi.

2.5 Distribusi *Generalized Poisson*

Menurut Hosmer dan Lemeshow (2000), distribusi *generalized Poisson* yaitu

$$f\left(y,\mu,\omega\right)=\left(\frac{\mu}{1+\mu\omega}\right)^{y}\frac{\left(1+\omega y\right)^{y-1}}{y!}\exp\left(\frac{-\mu\left(1+\omega y\right)}{1+\mu\omega}\right) \tag{2.11}$$

dimana

y : 0,1,2, …

μ dan ω adalah parameter dispersi

Jika terjadi $\omega=0$ artinya model *generalized Poisson* akan jadi model regresi Poisson biasa. Apabila $\omega>0$ maka model *generalized Poisson* mempresentasikan data cacah/*count* mengalami overdispersi dan underdispersi jika $\omega<0$. Model *generalized Poisson* memiliki model yang sama dengan model regresi Poisson, yaitu:

$$\mu_i=\exp\left[\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1X_{i1}+\hat{\beta}_2X_{i2}+\ldots+\hat{\beta}_pX_{ip}\right]$$

dimana

i :1,2,…,n

$X_i=\begin{bmatrix}1 & x_{1i} & x_{2i} & \ldots & x_{ki}\end{bmatrix}^T$

$\beta_i=\begin{bmatrix}\beta_0 & \beta_{1i} & \beta_{2i} & \ldots & \beta_{ki}\end{bmatrix}^T$

2.6 *Generalized Linear Model*

Generalized Linear Model (GLM) merupakan perluasan dari model regresi umum untuk merespon berdistribusi dalam keluarga eksponensial dan model yang dimiliki merupakan fungsi dari nilai harapannya. Terdapat tiga komponen dalam *Generalized Linear Model* (GLM), antara lain *Random Component* (Komponen acak), *Systematic Component* (komponen sistematik), dan *Link Function* (Agresti, 2002).

Sedangkan menurut Hardle, dkk (2004) dalam penelitian yang dilakukan oleh Zahrotul Ummah (2012) menyatakan bahwa model linier tergenaralisasi adalah model yang melibatkan lebih dari satu variabel prediktor dengan variabel respon diasumsikan berdistribusi eksponensial. Bentuk umum model linier tergenaralisasi yaitu:

$$E(y_i \mid x_i) = G(x_i^T \beta), i = 1, 2, 3, ..., n; j = 1, 2, 3, ..., p \quad (2.12)$$

Dengan y_i adalah variabel respon ke-i, x_i adalah variabel prediktor ke-i pada variabel prediktor ke-j, β adalah vektor parameter yang diestimasi, dan G adalah fungsi *link*. Dalam model linier tergeneralisasi terdapat tiga komponen penting, yaitu:

1. Komponen distribusi, yaitu y_i yang berdistribusi pada keluarga eksponensial.
2. Komponen prediktor linier, yaitu $\eta_i = x_i^T \beta$.
3. Fungsi link adalah fungsi monoton dan diferensiabel sedemikian sehingga $G(\eta_i) = \mu_i$.

2.7 Estimasi Parameter

Penduga *(estimator)* adalah anggota peubah acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan penduga terhadap data dari sesuatu contoh disebut nilai duga *(estimate)*. Terdapat dua jenis nilai duga, yaitu nilai duga titik dan nilai duga selang (Yitnosumarto,1990).

1. Nilai duga titik

   Misalkan kita mempunyai sebuah peubah acak X yang mengikuti sebaran tertentu dengan nilai yang diamati $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$. Jika nilai-nilai pengamatan mempunyai peluang yang sama untuk diperoleh, maka nilai tengahnya:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{2.13}$$

kita namakan penduga titik *(point estimate)* dari nilai tengah populasi $\hat{\mu}$ Penduga titik ini sering kali dicatat dengan $\hat{\mu}$ karena merupan penduga dari μ. Sebenarnya, ada beberapa penduga titik yang potensial sebuah parameter. Misalnya, untuk menduga rata-rata suatu peubah acak, kita dapat menggunakan nilai tengah contoh, median, atau modus. Untuk menentukan penduga mana yang terbaik untuk digunakan, terdapat beberapa sifat penduga, yaitu

a. Tak bias

   Satu hal yang menjadi tujuan dalam pendugaan adalah penduga haruslah "mendekati" nilai sebenarnya dari parameter yang diduga tersebut. Misalkan parameter kita θ (kita gunakan θ agar kita tidak terikat pada parameter μ dan σ^2 misalnya). Jika kita menyatakan, $\hat{\theta}$ merupakan penduga tak bias *(unbiased estimator)* dari parameter θ, maka:

$$E\left(\hat{\theta}\right) = \theta \tag{2.14}$$

   Pernyataan bahwa $\hat{\theta}$ merupakan penduga tak bias dari θ di atas, berarti secara rata-rata (atau dengan mempertimbangkan contoh yang mungkin dapat diambil dari suatu populasi) nilainya sama dengan θ.

b. Efisiensi

Syarat kedua dari pendugaan adalah penduga yang kita pilih harus merupakan penduga yang efisien. Untuk menjelaskan hal ini, misalkan kita mempunyai 2 penduga untuk parameter θ, katakanlah $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$. Untuk tiap-tiap penduga, karena merupakan peubah acak, maka ia mempunyai ragam sendiri-sendiri. Sebagai misal, $\bar{X}$ mempunyai ragam sebesar σ^2 / n, jika $\bar{X}$ tersebut mempunyai nilai tengah yang diambil dari populasi dengan ragam σ^2 dan atas dasar contoh berukuran n.

Jika ragam $\hat{\theta}_1$ dan $\hat{\theta}_2$ masing-masing sebesar $V\left(\hat{\theta}_1\right)$ dan $V\left(\hat{\theta}_2\right)$, maka $\hat{\theta}_1$ dinamakan lebih efisien dari $\hat{\theta}_2$, apabila:

$$\frac{V\left(\hat{\theta}_1\right)}{V\left(\hat{\theta}_2\right)} < 1 \tag{2.15}$$

atau dengan pernyataan lain, bila ragam untuk $\hat{\theta}_1$ lebih kecil dibandingkan ragam $\hat{\theta}_2$.

c. Konsistensi

Bila sesuatu penduga, $\bar{X}$ misalnya, ternyata semakin mendekati parameter yang diduga, maka penduga tersebut dinamakan penduga konsisten. Jelasnya, $\bar{X}$ penduga yang konsisten karena:

$$\bar{X} \to \mu \text{ dengan } n \to \infty$$

atau dengan pernyataan peluang, jika:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\bar{X} - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1 \tag{2.16}$$

Maka $\overline{X}$ merupakan penduga yang konsisten.

2. Nilai duga selang

Terkadang terdapat permasalahan dalam menentukan interval untuk estimasi parameter, yang dalam statistik dikatakan sebagi variansi estimator. Terkadang penentuan interval estimator sangat berguna untuk memberikan *range* toleransi terhadap nilai-nilai estimasi yang mungkin.

Misalkan y adalah sampel random berukuran n dari populasi berdistribusi normal $N\left(\beta,\sigma^2\right)$, dengan parameter variansi yang telah diketahui. Maka estimator *likelihood maximum* untuk σ^2 adalah

$$\hat{\beta}_{ml} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \sim N\left(\beta,\frac{\sigma^2}{n}\right) \tag{2.17}$$

Kita dapat mengunakan distribusi sampel ini untuk membuat pernyataan probabilitas. Karena

$$z = \frac{\hat{\beta}_{ml} - \beta}{\sigma\sqrt{n}} \sim N\left(0,1\right) \tag{2.18}$$

maka

$$P\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} \le z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha \tag{2.19}$$

dimana $z_{\frac{\alpha}{2}}$ adalah $\alpha/2$ persen bagian atas dari distribusi. Substitusi untuk z menghasilkan *interval estimator*,

$$P\left[\hat{\beta}_{ml} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le z \le \hat{\beta}_{ml} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \tag{2.20}$$

(Aziz, 2010).

2.8 Metode Maksimum Likelihood

Salah satu metode estimasi titik yang berperan dalam statistik adalah metode *maximum likelihood*. Pertama kali estimasi secara *maximum likelihood* dikenal pada tahun 1920 oleh R. A. Fisher. Konsep dasar dari estimasi parameter yang terdapat pada metodel *maximum likelihood* yaitu dengan memaksimumkan fungsi *likelihood* untuk menentukan nilai penduga (Wibisono,2009).

Menurut Gujarati dan Porter (2010) metode *maximum likelihood* dikenal sebagai metode sampel besar. Metode *maximum likelihood* ini merupakan aplikasi yang lebih luas dalam hal bahwa dapat diaplikasikan dalam model regresi yang tidak linier dalam suatu parameter.

Diketahui n data pasangan $\{(x_1, y_1),...,(x_n, y_n)\}$ yang saling bebas dan diasumsikan bahwa untuk $X = x$ fungsi kepadatan peluang dari Y adalah

$$Y \mid x \sim f(y \mid \theta) \tag{2.21}$$

Dengan θ adalah parameter yang merupakan fungsi dari x, yaitu $\theta = s(x)$ di mana $s(x)$ adalah fungsi penghalus. Maka fungsi *likelihood* dari $Y \mid x$ adalah

$$L(\theta \mid x, y) = \prod_{i-1}^{n} f(y_i \mid s(x_i)) \tag{2.22}$$

untuk $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ dan $y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$

Kemudian menduga $s(x_i)$ berdasarkan *likelihood* lokal dengan menggunakan pendekatan linier lokal dengan bentuk $s(x_i) = \beta_{0i} + \beta_{1i}x_i$. Sehingga diperoleh penduga *likelihood* lokal untuk $s(x_i)$ yaitu

$$\hat{s}(x_i) = \hat{\beta}_{0i} + \hat{\beta}_{1i}x_i \tag{2.23}$$

dengan $\hat{\beta}_{0i}$ dan $\hat{\beta}_{1i}$ nilai yang memaksimumkan fungsi *ln likelihood* lokal

$$\ell_i\left(\beta_{0i},\beta_{1i} \mid x,y,h\right)=\sum_{i=1}^{n}\left\{\ln\left(f\left(y_j \mid \beta_{0i}+\beta_{1i}x_j\right)\right)\frac{1}{h}K\left(\frac{x_i-x_j}{h}\right)\right\};i=1,2,...,n \qquad (2.24)$$

pada persamaan (2.21) $K(.)$ merupakan fungsi kernel (Saifudin,2009).

2.8.1 *Maximum Likelihood Uniparameter*

Menurut Aziz (2010) menyatakan bahwa apabila diberikan variabel acak X kontinu dengan ukuran n berdistribusi normal, dengan rata-rata μ dan variansi σ^2, maka fungsi padat peluang gabungannya adalah

$$\begin{aligned} f(X_1,X_2,\cdots,X_n) &= f(X_1)\,f(X_2)\cdots f(X_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right)\right) \qquad (2.25) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right)\right) \end{aligned}$$

Penjelasan selanjutnya menurut Aziz (2010) adalah apabila parameter μ dan σ^2 diketahui, maka fungsi peluang bersyarat dari X_i yakni

$$f(X_1,X_2,\cdots,X_n \mid \mu,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right)\right) \qquad (2.26)$$

Adapula parameter μ yang tidak diketahui, maka fungsi peluang bersyarat dari X_i menjadi

$$l(\mu)=f(\mu \mid X_1,X_2,\cdots,X_n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right)\right) \qquad (2.27)$$

Persamaan (2.27) merupakan fungsi likelihood. Fungsi tersebut merupakan fungsi eksponensial. Oleh karena bentuk fungsi tersebut eksponensial maka untuk mempermudah penyelesaian solusi, fungsi *likelihood* tersebut diubah menjadi fungsi *log-likelihood*. Fungsi tersebut dapat diuraikan menjadi

$$
\begin{aligned}
L(\mu \mid X) &= \ln l(\mu) \\
&= \ln\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right)\right)\right] \\
&= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n + \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right) \\
&= -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Kemudian fungsi tersebut dimaksimumkan dengan cara mencari turunan parsial pertama fungsi tersebut terhadap μ dan disamadengankan nol, sehingga menjadi

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \mu} &= 0 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)(2)(-1)\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu \\
0 &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) \\
0 &= \sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu \\
n\mu &= \sum_{i=1}^{n} X_i \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

Sedangakan untuk memaksimumkan solusi tunggal dari memaksimumkan fungsi *log-likelihood* dapat dilakukan dengan cara melihat turunan kedua yang benilai negatif, yaitu

$$
\frac{\partial^2 L}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2} \tag{2.30}
$$

2.8.2 *Maximum Likelihood Multiparameter*

Menurut Bain (1991), jika X merupakan variabel acak berukuran k dan diberikan fungsi Y berukuran n maka

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \beta_1 + \beta_2 X_{12} + \beta_3 X_{13} + \cdots + \beta_k X_{1k} + \varepsilon_1 \\
Y_2 &= \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{23} + \cdots + \beta_k X_{2k} + \varepsilon_2 \\
&\vdots \\
Y_i &= \beta_1 + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \cdots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Persamaan (2.31) dapat disederhanakan menjadi bentuk matriks yaitu

$$\underset{(n\times 1)}{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}} = \underset{(n\times k)}{\begin{bmatrix} 1 & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ 1 & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix}} \underset{(k\times 1)}{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}} + \underset{(n\times 1)}{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}}$$

Sehingga dapat dinyatakan dalam model sederhana, yaitu

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{2.32}$$

dengan

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ 1 & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{nk} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Apabila $X_i = [1 \quad X_{i1} \quad X_{i2} \quad \dots \quad X_{ik}]$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$, maka Y_i dapat dinyatakan dengan

$$Y_i = X_i \beta + \varepsilon_i \tag{2.33}$$

Selanjutnya Bain (1991) menjelaskan bahwa apabila Y_i berdistribusi normal atau $Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \mu &= E(Y_i) \\ &= E(X_i \beta + \varepsilon_i) \\ &= E(X_i \beta) + E(\varepsilon_i) \\ &= E(X_i \beta) \\ &= X_i \beta \end{aligned} \tag{2.34}$$

Sehingga didapatkan fungsi *likelihood* sebagai berikut

$$\begin{aligned} l(\beta) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{Y_i - X_i \beta}{\sigma} \right)^2 \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (Y - X\beta)^T (Y - X\beta) \right) \end{aligned} \tag{2.35}$$

Aziz (2010) menjelaskan mengenai logaritma natural pada fungsi *likelikhood*, sehingga didapatkan fungsi *log-likelihood* sebagai berikut

$$L(\beta)=\ln\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(Y-X\beta)^T(Y-X\beta)\right)\right)$$

$$=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n+\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(Y-X\beta)^T(Y-X\beta)\right)$$

$$=\ln\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}+\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(Y-X\beta)^T(Y-X\beta)\right) \qquad (2.36)$$

$$=-\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\left(Y^T-\beta^T X^T\right)(Y-X\beta)\right)$$

$$=-\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y^TY-Y^TX\beta-\beta^TX^TY+\beta^TX^TX\beta\right)$$

Kemudian fungsi tersebut dimaksimumkan dengan cara melakukan penurunan parsial pertama fungsi *log likelihood* terhadap β dan menyamadenganken nol

$$\frac{\partial L}{\partial\beta}=\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y^TY-Y^TX\beta-\beta^TX^TY+\beta^TX^TX\beta\right)\right)$$

$$0=0+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(Y^TY-Y^TX\beta-\beta^TX^TY+\beta^TX^TX\beta\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\left(Y^TY\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(Y^TX\beta\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta^TX^TY\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta^TX^TX\beta\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{2\sigma^2}\left(0-X^TY-X^TY+\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\beta^TX^TX\beta\right)+\frac{\partial}{\partial\beta^T}\left(\beta^TX^TX\beta\right)^T\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{2\sigma^2}\left(0-X^TY-X^TY+X^TX\beta+X^TX\beta\right)$$

$$=-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2X^TY+2X^TX\beta\right)$$

$$=-2X^TY+2X^TX\beta$$

$$X^TX\beta=X^TY$$

$$\beta=\left(X^TX\right)^{-1}X^TY$$

Sehingga penduga β dapat ditulis menjadi

$$\beta=\left(X^TX\right)^{-1}X^TY \qquad (2.37)$$

Selain itu, Aziz (2010) juga menjelaskan mengenai solusi tunggal yang secara nyata dari pemaksimuman fungsi *log-likelihood* dapat diperiksa dengan cara kondisi turunan kedua untuk maksimum lokal yaitu turunankedua harus bernilai negatif.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} &= \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial L}{\partial \beta}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \beta}\left(-\frac{1}{\sigma^2}\left(-X^T Y + X^T X \beta\right)\right) \\
&= -\frac{1}{\sigma^2}\left(0 + X^T X\right) \\
&= -\frac{1}{\sigma^2} X^T X
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

2.9 Iterasi Newton Rapshon

Menurut Aziz (2010) iterasi untuk mendapatkan taksiran $\hat{a}$ dengan nonlinier *maximum likelihood* dapat ditulis sebagai berikut

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - t_n P_{n\gamma_n} \tag{2.39}$$

Aziz (2010) juga menjelaskan apabila terdapat fungsi distribusi peluang (pdf) dari y_t diberikan oleh X_t , β , dan σ^2 adalah

$$f\left(y_t \mid X_t, \beta, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_t - f\left(X_t, \beta\right)\right)^2\right) \tag{2.40}$$

Maka fungsi *likelihood* yang diperoleh dari β dan σ^2 dibetika oleh y_t dan X_t adalah

$$l_i\left(\beta, \sigma^2\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_t - f\left(X_t, \beta\right)\right)^2\right) \tag{2.41}$$

Fungsi *log likelihood* dari β dan σ^2 diberikan oleh y_t dan X_t adalah

$$\log l_i = L_i = -\frac{1}{2}\left(\log\left(2\pi\right) + \log\left(\sigma^2\right)\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(y_i - f\left(X_i, \beta\right)\right)^2 \tag{2.42}$$

Fungsi distribusi peluang gabungan dari $\left(y_i, \ldots, y_T\right)$ diberikan oleh $X, \beta,$ dan σ^2 adalah

$$f\left(y_1,...,y_n \mid X,\beta,\sigma^2\right)=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_t-f\left(X_i,\beta\right)\right)^2\right)$$
$$=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y-f\left(X,\beta\right)\right)'\left(y-f\left(X,\beta\right)\right)\right) \quad (2.43)$$

Maka fungsi *likelihood* dari β dan σ^2 diberikan X dan y adalah

$$l\left(\beta,\sigma^2\right)=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2}\exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}\left(y-f\left(X,\beta\right)\right)'\left(y-f\left(X,\beta\right)\right)\right) \quad (2.44)$$

dan fungsi *log likelihood* dari β dan σ^2 diberikan X dan y adalah

$$\begin{aligned}L&=\sum_{i=1}^{n}L_t\\&=\log l\left(\beta,\sigma^2\right)\\&=-\frac{n}{2}\left(\log\left(2\pi\right)+\log\left(\sigma^2\right)\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y-f\left(X,\beta\right)\right)'\left(y-f\left(X,\beta\right)\right)\\&=-\frac{n}{2}\left(\log\left(2\pi\right)+\log\left(\sigma^2\right)\right)-\frac{1}{2\sigma^2}S\left(\beta\right)\end{aligned} \quad (2.45)$$

Maka

$$\frac{\partial L}{\partial\sigma^2}=\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}S\left(\beta\right) \quad (2.46)$$

Kemudian persamaan (2.32) disamadengankan nol sehingga diperoleh

$$\sigma^2=\frac{S\left(\beta\right)}{n} \quad (2.47)$$

Maka persamaan (2.31) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}L\left(\beta\right)=L&=-\frac{n}{2}\left(\log\left(2\pi\right)+\log\left(\frac{S\left(\beta\right)}{n}\right)\right)-\frac{1}{2\left(\frac{S\left(\beta\right)}{n}\right)}S\left(\beta\right)\\&=-\frac{n}{2}\left(\log\left(2\pi\right)+\log\left(\frac{S\left(\beta\right)}{n}\right)\right)-\frac{n}{2}\end{aligned} \quad (2.48)$$

Aproksimasi $L\left(\beta\right)$ di sekitar β^1 dengan deret Taylor orde 2 yaitu

$$L(\beta) = L\left(\beta^{(1)}\right) + \frac{\partial L}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) + \frac{1}{2}\left(\beta - \beta^{(1)}\right)' \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) \tag{2.49}$$

Berdasarkan persamaan (2.35) maka diperoleh persamaan

$$\frac{\partial L(\beta)}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial L}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\right)' + \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) \tag{2.50}$$

Karena

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\right)' = \frac{\partial L}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}}$$

Maka persamaan (2.36) dapat ditulis menjadi

$$\frac{\partial L(\beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial L}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}} + \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) \tag{2.51}$$

Kemudian persamaan (2.37) disamadengankan nol, maka akan diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}} + \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \left(\beta^{(2)} - \beta^{(1)}\right) = 0 \tag{2.52}$$

Atau dapat ditulis sebagai

$$\beta^{(2)} = \beta^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta'}\right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}} \tag{2.53}$$

Sehingga akan diperoleh iterasi Newton Raphson secara umum untuk nonlinier *maximum likelihood* adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\beta^{(n+1)} &= \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}} \\
&= \beta^{(n)} - \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial^2 S}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1} \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial S}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}}\right) \\
&= \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}}\right)
\end{aligned} \tag{2.54}$$

2.10 Regresi Poisson Diperumum

Model regresi *generalized* Poisson mengatasi asumsi pada model regresi Poisson, karena model *generalized* Poisson tidak mengharuskan data berdistribusi Poisson *(equi-dispersion)* (Listiani dan Purhadi, 2007)

Melliana (2014) mengatakan bahwa penanganan pelaggaran asumsi equidispersi pada model regresi Poisson dapat dikembangakan dengan menggunakan model regresi Poisson tergeneralisir. Model regresi Poisson tergeneralisir hampir sama dengan model regresi Poisson tetapi diasumsikan komponen acaknya didistribusikan keumum Poisson, sehingga model regresi Poisson tergeneralisisr dapt digunakan untuk data diskrit yang mempunyai distribusi Poisson tanpa adanya asunsi equidispersi.

Penelitian yang dilakukan oleh Sadia (2013) menyebutkan bahwa model regresi Poisson tergeneralisir memiliki fungsi probabilitas Z_i didefinisikan oleh:

$$f_i\left(z_i,\theta_i,\alpha\right)=\left(\frac{\theta_i}{1+\alpha\theta_i}\right)^{z_i}\frac{\left(1+\alpha z_i\right)^{z_i-1}}{z_i\,!}\exp\left(-\frac{\theta_i\left(1+\alpha z_i\right)}{1+\alpha\theta_i}\right), z_i=0,1,\ldots,\infty \tag{2.55}$$

Dimana $\theta_i=\theta_i\left(x_i\right)=\exp\left(x_i\beta\right)$.

Sedangkan x_i adalah $\left(k-1\right)$ dimensi vektor variabel penjelas dan β adalah k dimensi vektor dari parameter regresi Poisson. Menurut Famoye (2004) rata-rata dan varian dari Z_i didefinisikan oleh:

$$E\left(Z_i \mid X_i\right)=\theta_i \text{ dan } V\left(Z_i \mid X_i\right)=\theta_i\left(1+\alpha\theta_i\right)^2 \tag{2.56}$$

Model regresi Poisson tergeneralisisr mempunya bentuk yang sama dengan model regresi Poisson, yaitu:

$$\mu=e^{\left(\beta_0+\beta_1X_{1i}+\beta_2X_{2i}+\ldots+\beta_pX_{pi}\right)} \tag{2.57}$$

dengan $\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_p$ menyatakan parameter- parameter yang tidak diketahui.

2.11 Angka Kematian Bayi

Masa kehamilan adalah masa yang rawan kesehatan, baik kesehatan ibu maupun kesehatan janin yang berada dalam kandungan, sehingga pada masa itu pemeriksaan secara teratur sangat penting. Hal ini dilakukan bertujuan untuk mengindari gangguan sedini mungkin bagi ibu dan juga janin yang dikandungnya. Diperkirakan, setiap tahunnya kira-kira 4 juta bayi meninggal pada tahun pertama kehidupannya dan dua pertiganya meninggal pada bulan pertama. Penyebab utama kematian pada minggu pertama kehidupan adalah komplikasi kehamilan dan persalinan, seperti asfiksia, sepsis, dan komplikasi berat lahir rendah (Depkes RI, 2008).

Kematian bayi adalah kematian yang terjadi setelah bayi lahir sampai bayi belum berusia tepat satu tahun. Secara garis besar, penyebab kematian bayi dibagi menjadi dua, yaitu endogen dan eksogen. Kematian bayi endogen atau yang umum disebut kematian neonatal. Kematian neonatal adalah kematian bayi yang terjadi pada bulan pertama setelah dilahirkan dan umumnya disebabkan oleh faktor-faktor yang dibawa anak sejak lahir yang diperoleh dari orang tuanya saat konsepsi atau yang didapatkan selama kehamilan.

Sedangkan kematian bayi eksogen atau kematian post neonatal adalah kematian bayi yang terjadi setelah berusia satu bulan sampai menjelang usia satu tahun yang disebabkan oleh faktor-faktor luar. Angka kematian bayi dapat didefinisikan sebagai banyaknya bayi yang meninggal sebelum mencapai satu tahun yang dinyatakan dalam 1.000 kelahiran hidup pada tahun yang sama.(Profil Kesehatan, 2015)

Berikut adalah beberapa faktor yang mempengaruhi angka kematian bayi:

a. Ibu Hamil yang Mendapatkan Tablet Fe

Saat ibu sedang hamil, metabolisme tubuhnya semakin meningkan. Sehingga ibu hamil tersebut membutuhkan asupan energi dan zat gizi yang tinggi. Peningkatan energi dan zat gizi tersebut bertujuan untuk pertumbuhan dan perkembangan janin, pertambahan besarnya organ kandungan, perubahan komposisi dan metabolisme tubuh ibu. Kekurangan zat gizi tertentu yang diperlukan saat hamil dapat menyebabkan janin tumbuh tidak sempurna. Zat gizi yang sering kurangpada ibu hamil adalah energi protein dan mineral, seperti zat besi. Akibat jika kekurangan zat besi selama kehamilan diantaranya terjadinya abortus, persalinan prematuritas, hambatan tumbuh kembang janin dalam rahim, dan mudah terjadi infeksi.(Nurhayati, dkk, 2014)

b. Rumah Tangga yang Berperilaku Hidup Sehat

Menurut Dinas Kesehatan RI (2009) mengatakan bahwa perilaku hidup bersih dan sehat (PHBS) adalah semua perilaku kesehatan yang dilakukan atas kesadaran sehingga anggota keluarga atau keluarga dapat menolong dirinya sendiri di bidang kesehatan dan berperan aktif dalam kegiatan-kegiatan di masyarakat. Tujuan PHBS dalam rumah yaitu untuk membentuk rumah tangga ber-PHBS. Terdapat 10 indikator bahwa rumah tangga telah menerapkan PHBS, yaitu

- Pertolongan persalinan oleh tenaga kesehatan
- Memberi bayi ASI eksklusif
- Menimbang balita setiap bulan
- Menggunakan air bersih

- Mencuci tangan dengan air bersih dan sabun
- Menggunakan jamban sehat
- Memberantas jentik di rumah seminggu sekali
- Makan buah dan sayur setiap hari
- Melakukan aktivitas fisik setiap hari
- Tidak merokok di dalam rumah

c. Rumah Sehat

Rumah sehat merupakan salah satu sarana untuk mencapai derajat kesehatan yang optimal. Persyaratan rumah sehat yang tercantum dalam *Residential Environment* dari WHO (*World Health Organitation*) antara lain:

1. Harus dapat berlindung dari hujan, panas, dingin, dan berfungsi sebagai tempat istrahat.
2. Mempunyai tenpat-tempat untuk tidur, memasak, mandi, mencuci, kakus dan kamar mandi.
3. Dapat melindungi bahaya kebisingan dan bebas dari pencemaran.
4. Bebas dari bahan bangunan berbahaya.
5. Terbuat dari bahan bangunan yang kokoh dan dapat melindungi penghuninya dari gempa, keruntuhan, dan penyakit menular.
6. Memberi rasa aman dan lingkungan tetangga yang serasi.

Salah satu Instrumen Penilaian Rumah Sehat mengacu pada Pedoman Teknis Penilaian Rumah Sehat Departemen Kesehatan RI Tahun 2007, dengan pembagian bobot penilaian meliputi bobot komponen rumah, bobot sarana sanitasi, serta bobot pada perilaku penghuni. Sesuai dengan pedoman ini, secara umum rumah dikatakan sehat apabila memenuhi kriteria sebagai berikut:

a. Memenuhi kebutuhan psikologis antara lain privasi yang cukup, komunikasi yang sehat antar anggota keluarga dan penghuni rumah, adanya ruangan khusus untuk istirahat (ruang tidur), bagi masing-masing penghuni.

b. Memenuhi persyaratan pencegahan penularan penyakit antar penghuni rumah dengan penyediaan air bersih, pengelolaan tinja dan limbah rumah tangga, bebas vektor penyakit dan tikus, kepadatan hunian yang tidak berlebihan, cukup sinar matahari pagi, terlindungnya makanan dan minuman dari pencemaran, disamping pencahayaan dan penghawaan yang cukup.

c. Memenuhi persyaratan pencegahan terjadinya kecelakaan baik yang timbul karena pengaruh luar dan dalam rumah, antara lain persyaratan garis sempadan jalan, konstruksi bangunan rumah, bahaya kebakaran dan kecelakaan di dalam rumah (Kemenkes RI, 2017).

d. Posyandu Aktif

Posyandu merupakan salah satu bentuk Upaya Kesehatan Bersumberdaya Masayarakat (UKBM) yang dikelola dari, oleh untuk, dan bersama masyarakat, guna memberdayakan masyarakat dan memberikan kemudahan kepada masyarakat dalam memperoleh pelayanan kesehatan dasar.

Upaya peningkatan peran dan fungsi Posyandu bukan semata-mata tanggungjawab pemerintah saja, namun semua komponen yang ada di masyarakat, termasuk kader. Peran kader dalam penyelenggaraan Posyandu sangat besar karena selain sebagai pemberi informasi kesehatan kepada masyarakat juga sebagai penggerak masyarakat untuk datang ke Posyandu dan melaksanakan perilaku hidup bersih dan sehat (Kemenkes RI, 2012).

e. Bayi dengan Berat Badan Lahir Rendah

Berat badan merupakan ukuran antrometri yang sangat penting dan paling sering digunakan pada bayi baru lahir (neonatus). Berat badan digunakan untuk mendiagnosa bayi normal atau BBLR. Bayi Berat Lahir Rendah (BBLR) adalah bayi yang baru lahir dengan berat badan saat lahir kurang dari 2500 gram. BBLR dibedakan dalam dua kategori, yaitu bayi berat lahir rendah karena premature (umur kandungan kurang dari 37 minggu) atau BBLR karena Intrauterine Growth Retardation (IUGR) yaitu bayi cukup bulan tetapi berat badan kurang untuk umurnya (Depkes RI, 2003).

BBLR adalah bayi yang lahir dengan berat badan kurang dari 2500 gram tanpa memandang masa kehamilan. Berat lahir adalah berat bayi yang ditimbang dalam waktu satu jam setelah lahir. Penyebab BBLR sangt kompleks. Penyebab BBLR diantaranya umur kehamilan yang kurang, bayi kecil untuk masa kehamilan atau kombinasi keduanya. Bayi kurang bulan adalah bayi yang lahir sebelum umur kehamilan 37 minggu. Sebagian bayi kurang bulan belum siap hidup di luar kandungan dan mendapatkan kesulitan untuk mulai bernapas, menghisap, melawan infeksi, dan menjaga tubuhnya agar tetap hangat (Dinkes, 2009).

f. Bayi yang Diberi ASI (Air Susu Ibu) Eksklusif

Air Susu Ibu (ASI) eksklusif berdasarkan Peraturan Pemerintah Nomor 33 Tahun 2012 adalah ASi yang diberikan kepada bayi sejak dilahirkan selama enam bulan, tanpa menambahkan dan/atau mengganti dengan makanan atau minuman lain (kecuali obat, vitamin, dan mineral). ASI mengandung kolostrum yang kaya akan antibodi karena mengandung protein untuk daya tahan tubuh dan pembunuh kuman dalam jumlah tinggi. Sehingga pemberian ASI eksklusif dapat mengurangi risiko kematian pada bayi. Kolostrum berwarna kekuningan dihasilkan pada hari pertama sampai hari ketiga. Hari keempat sampai hari kesepuluh ASI mengandung immuglobin, protein, dan laktosa lebih sedikit dibandng kolostrum tetapi lemak dan kalori lebih tinggi dengan warna susu lebih putih. Selain mengandung zat-zat makanan, ASI juga mengandung zat penyerap berupa enzim tersendiri yang tidak akan mengganggu enzim di usus. Susu formula tidak mengandung enzim sehingga penyerapan makanan tergantung pada enzim yang terdapat di usus bayi. Persentase bayi 0-5 bulan yang masih mendapat ASI eksklusif sebesar 54,0%, sedangkan bayi yang telah mendapat ASI eksklusif sampai usia enam bulan adalah sebesar 29,5% (Kemenkes RI, 2017).

g. Pemberian Vitamin A pada Bayi

Vitamin A merupakan salah satu zat gizi penting yang larut dalam lemak, disimpan dalam hati, dan tidak dapat diproduksi oleh tubuh sehingga harus dipenuhi dari luar tubuh. Akibat jika Kekurangan Vitamin A (KVA) adalah menurunnya sistem kekebalan tubuh balita serta meningkatkan risiko kesakitan dan kematian. Kekurangan Vitamin A juga merupakan penyebab utama kebutaan pada anak yang dapat dicegah.

Peraturan Menteri Kesehatan Nomor 21 Tahun 2015, menyatakan bahwa untuk mengurangi risiko kesakitan dan kematian pada balita dengan kekurangan Vitamin A, pemerintah menyelenggarakan kegiatan pemberian Vitamin A dalam bentuk kapsul vitamin A biru 100.000 IU bagi bayi usia enam sampai dengan sebelas bulan. Sedangkan pemberian kapsul vitamin A merah 200.000 IU untuk anak balita usia dua belas sampai dengan lima puluh sembilan bulan, dan ibu nifas.

Menurut Panduan Manajemen Suplementasi Vitamin A, pemberian suplementasi Vitamin A diberikan kepada seluruh balita umur 6-59 bulan secara serentak melalui posyandu. Pemberian suplemasi Vitamin A biasanya dilakukan pada bulan Februari atau Agustus pada bayi umur 6-11 bulan serta bulan Februari dan Agustus pada anak balita 12-59 bulan (Kemenkes RI, 2017).

2.12 Uji Kolmogrov Smirnov

Menurut Suciptawati (2010) uji dua sampel Kolmogrov Smirnov adalah suatu uji untuk melihat apakah dua sampel bebas/independen telah ditarik dari populasi yang sama(atau dari populasi-populasi yang memiliki sebaran yang sama). Uji dua sampel ini memperhatikan kesesuaian antara dua sebaran kumulatif dan diharapkan sebaran kumulatif kedua sampel tersebut cukup berdekatan satu dengan yang lain. Karena keduanya hanya menunjukkan deviasi-deviasi acak dari sebaran populasi tersebut. Jika kedua sebaran kumulatif kedua sampel tersebut terlalu jauh maka dapat diartikan bahwa kedua sampel itu berasal dari populasi yang berbeda. Dengan demikian, H_0 ditolak jika anta sebaran kumulatif kedua sampel tersebut mempunyai deviasi yang cukup besar. Nilai deviasi dirumuskan sebagai berikut

$$D = maksimum\left|S_{n1}(x) - S_{n2}(x)\right|$$

dimana D adalah nilai deviasi.

2.13 Pengujian Multikolinieritas

Pengujian multikolinieritas bertujuan untuk apakah model regresi ditemukan adanya korelasi antara variabel bebas. Cara untuk menguji multikolinieritas dengan melihat nilai *variance inflation factor* (VIF) atau *tolance value*. Nilai VIF dapat didapatkan melalui rumus berikut:

$$VIF = \frac{1}{Tolerance} \qquad (2.58)$$

Batas *tolerance value* adalah 0,10 atau nilai VIF adalah 10. Jika VIF > 10 dan *tolerance value* < 0,10, maka terjadi multikolinieritas tinggi antar variabel bebas dengan variabel bebas lainnya. Jika VIF < 10 dan *tolerance value* 0,10, maka dapat diartikan tidak terdapat multikolinieritas pada penelitian tersebut (Eriza,2016).

2.14 Contoh Estimasi dalam Al Qur'an

Estimasi merupakan salah satu kegiatan yang dilakukan dalam ilmu statistika. Estimasi biasanya diartikan sebagai pendugaan atau penaksiran. Estimasi dicontohkan dalam Al Qur'an yang terdapat pada surah ash-Shaffat/37:147, yang memiliki arti sebagai berikut

"Dan kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih"(QS. Ash-Shaffat/37:147).

Ayat di atas menerangkan tentang estimasi dalam kajian Islam. Ayat tersebut menjelaskan bahwa umat Nabi Yunus AS yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih, dalam ayat tersebut tidak diketahui secara pasti umat Nabi Yunus AS, bisa jadi lebih dari 100.000 orang atau kurang dari 100.000 orang.

Surat ash-Shaffat adalah surat Makiyyah, yaitu turun sebelum Nabi hijrah ke Madinah. Ash-Shaffat artinya adalah yang berbaris-baris itu adalah malaikat-malaikat Tuhan yang ada di alam malakut, yaitu berapa jutakah bilangannya, kecuali Allah Swt. sendiri. Sedangkan bintang di langit yang dapat dilihat oleh mata. Sedangkan pasir di pantai yang ditampung tangan. Sedangkan daun rimba yang dapat dilihat ketika berpucuk, berdaun dan tanggal dari tangkainya, lagi manusia tidak dapat menghitungnya (Depag RI, 2010).

Menurut tafsir Ibnu Katsir, Syahr ibnu Hausyab telah meriwayatkan dari Abbas r.a. bahwa sesungguhnya diutusnya Nabi Yunus a.s. hanya ketika sesudah dimuntahkan oleh ikan besar yang telah menelannya. Sedangkan Ibnu Abu Najih telah meriwayatkan dari Mujahid, bahwa Nabi Yunus a.s. diutus kepada mereka sebelum ditelan oleh ikan besar. Al-Bagawi menatakan dalam riwayatnya, bahwa Nabi Yunus a.s. diutus kepada umat lainnya sesudah dikeluarkan dari perut ikan besar, jumlah mereka seribu orang atau lebih.

Menurut Abdusysyakir (2007), pada surat ash-Shaffat ayat 147 tersebut dijelaskan bahwa Nabi Yunus diutus kepada umatnya yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih. Jika membaca ayat tersebut secara seksama, maka terdapat rasa takut atau kesan ketidakpastian dalam menentukan jumlah umat nabi Yunus. Di mana jumlah umat nabi Yunus dinyatakan dengan jumlah 100.000 orang atau lebih. Tidak ada kepastian berapa jumlah umat nabi Yunus sebenarnya. Bukankah Allah Swt. mengetahui yang ghaib dan yang nyata. Bukankah Allah Swt. mengetahui segala sesuatu, termasuk jumlah umat nabi Yunus.

Kata أَوْ pada firman-Nya أَوْ يَزِيْدُوْنَ , lebih dipahami oleh para ulama dalam arti *bahkan*, ada juga yang memahaminya dalam arti *dan*. Jika dipahami dalam arti *atau*, maka ayat ini bagaikan menyatakan jumlah mereka banyak, menurut perhitungan, menyatakan seratus atau lebih. Jika dipahami dengan arti *dan* atau *bahkan*, maka itu berarti beliau diutus kepada dua kelompok. Yang pertama berjumlah seratus ribu dan yang satu lagi adalah yang lebih itu. Dalam suatu riwayat dinyatakan jumlah mereka sebanyak dua puluh ribu. Yang seratus ribu adalah orang-orang Yahudi penduduk negeri Nainawa, yang ketika itu berada dalam tawanan kerajaan Asyur, sedang yang lebih adalah selain orang Yahudi yang bermukim juga di negeri itu (Shihab, 2002).

Menurut tafsir Ibnu Katsir mengenai potongan ayat أَوْ يَزِيدُونَ mengatakan bahwa dalam riwayat Ibnu Abbas menyebutkan bahwa terdapat lebih dari seratus ribu orang, jumlah mereka adalah seratus tiga puluh ribu orang. Namun, terdapat riwayat lain yang menyebutkan bahwa jumlah umat Nabi Yunus a.s. yaitu seratus tiga puluh ribu orang atau lebih beberapa ribu. Ada pula suatu riwayat yang mengatakan bahwa jumlah mereka adalah seratus empat puluh ribu lebih beberapa ribu orang, hanya Allah-lah Yang Maha Mengetahui. Sa'id ibnu Jubair menyebutkan lebih dari tujuh ribu orang, yakni seratus tujuh puluh ribu orang.

Makhul mengatakan bahwa jumlah mereka seratus sepuluh ribu orang, menurut apa yang diriwayatkan oleh Ibnu Abu Hatim yang memiliki arti:

"Ibnu Jarir mengatakan bahwa telah menceritakkan kepada Muhammad ibnu Abdur Rahim Al-Barqi, telah menceritakan kepada kami Amr ibnu Abu Salamah yang mengatakan bahwa ia pernah mendengar Zuhair menceritakan dari seseorang yang mendengar dari Abul Aliyah; ia mengatakan bahwa telah menceritakan kepada Ubay ibnu Ka'ab r.a. bahwa ia pernah bertanya kepada Rasulullah Saw. Tentang makna firman-Nya: Dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih. (Ash-Shaffat:147). Maka beliau bersabda, bahwa mereka lebih dari dua puluh ribu (dari seratus ribu itu)."

Imam Turmuzi meriwayatkan hadis ini melalui Ali ibn Hujr, dari Al-Walid ibnu Muslim, dari Zuhair, dari seorang lelaki, dari Abdul Aliyah, dari Ubay ibnu Ka'ab dengan lafadz yang sama. Lalu Imam Turmuzi mengatakan bahwa hadis ini garib. Ibnu Abu Hatim meriwayatkan hadis ini melalui hadis Zuhair dengan sanad yang sama. Ibnu Jarir mengatakan bahwa sebagian ahli bahasa Arab dan kalangan penduduk Basrah mengatakan sehubungan dengan ini bahwa yang dimaksud ialah sampai seratus ribu orang, atau jumlah mereka lebih dari itu.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Pendekatan Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan penelitian deskriptif kuantitatif. Pendekatan penelitian deskriptif kuantitatif yaitu dengan menganalisis data dan menyusun data yang tersedia sesuai dengan kebutuhan peneliti. Selain itu, penelitian ini juga menggunakan pendekatan studi literatur. Studi literatur yaitu mengumpulkan bahan-bahan rujukan yang sesuai dengan kebutuhan penelitian sebagai acuan untuk menyelesaikan penelitian ini.

3.2 Jenis dan Sumber Data

Penelitian ini menggunakan data sekunder, karena peneliti tidak mendapatkan data observasi secara langsung dari narasumber melainkan dari sebuah instansi/lembaga yang berwenang untuk mengambil data dari narasumber. Data sekunder pada penelitian ini bersumber dari data profil kesehatan Kabupaten Kediri tahun 2015. Publikasi tersebut dapat diakses melalui *website* resmi dari Dinas Kesehatan Kabupaten Kediri.

3.3 Variabel Penelitian

Variabel penelitian ini dibedakan menjadi dua, yaitu variabel respon dan variabel prediktor. Variabel respon pada penelitian ini yaitu jumlah angka kematian bayi (AKB) di Kabupaten Kediri tahun 2015 (Y). Sedangkan variabel prediktor pada penelitian ini diantaranya: prosentase ibu hamil yang mendaparkan tablet Fe (X_1), prosentase rumah tangga yang berperilaku hidup bersih dan sehat (PHBS) (X_2), prosentase rumah sehat (X_3), prosentase Posyandu aktif (X_4), prosentase berat badan lahir rendah (BBLR) menurut jenis kelamin (X_5), prosentase bayi yang diberi Air Susu Ibu (ASI) eksklusif (X_6), dan prosentase pemberian vitamin A pada bayi (X_7).

3.4 Analisis Data

3.4.1 Estimasi Parameter Model Regresi Poisson Diperumum dengan Metode Maksimum *Likelihood*

Langkah-langkah untuk mengestimasi regresi Poisson diperumum dengan metode maksimum likelihood yaitu

1. Mengasumsikan data y_i berdistribusi *Generalized Poisson.*
2. Menentukan fungsi *likelihood* dari distribusi *generalized Poisson*.
3. Menentukan fungsi *ln-likelihood.*
4. Mendeferensialkan fungsi *ln-likelihood* terhadap parameter-parameternya kemudian turunannya disamadengankan 0.
5. Menyusun algoritma Newton Raphson untuk mendapatkan nilai parameter.
   a. Menentukan nilai awal estimasi parameter.
   b. Menentukan vektor gradien.
   c. Menentukan matriks Hessian.
   d. Menentukan persamaan Newton-Raphson.
   e. Memperoleh nilai estimator untuk iterasi pertama hingga iterasi ke- p .
   f. Memperoleh estimasi model regresi Poisson diperumum.

$$Y_i = \exp\left(X_i^T \beta\right)$$

3.4.2 Aplikasi Estimasi Parameter Model Regresi Poisson Diperumum dengan Metode Maksimum Likelihood pada Data Jumlah Angka Kematian Bayi (AKB) di Kabupaten Kediri Tahun 2015

Langkah-langkah untuk mengaplikasikan model regresi Poisson tergeneralisasi dengan metode maksimum likelihood pada suatu data yaitu

1. Memeriksa kenormalan data.
2. Memeriksa hubungan antar variabel prediktor (kolinearitas).
3. Memeriksa model regresi Poisson.
4. Memeriksa kasus overdispersi/underdispersi.
5. Menentukan model regresi Poisson diperumum.
6. Menentukan parameter model regersi dengan menggunakan metode Newton Raphson.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Estimasi Parameter Model Regresi Poisson Diperumum dengan Metode Maksimum *Likelihood*

Regresi Poisson memiliki fungsi g yang linier, yang menghubungkan mean dari variabel respon dengan variabel prediktor, yaitu

$$g(\mu_i) = \eta_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_p x_{pi} \tag{4.1}$$

Sehingga hubungan antara mean dan predictor adalah sebagai berikut:

$$\mu_i = g^{-1}(\eta_i) = g^{-1}(x_i^T \beta) \tag{4.2}$$

Fungsi penghubung pada regresi Poisson yaitu fungsi penghubung log, karena rata-rata pada variabel respon berbentuk fungsi eksponensial dan menjamin bahwa nilai variabel yang ditaksir dari variabel respon akan benilai non-negatif. Bentuk fungsi penghubung log, yaitu

$$g(\mu_i) = \log(\mu_i) = x_i^T \beta \tag{4.3}$$

atau dapat ditulis

$$\log(\mu_i) = x_i^T \beta$$

kemudian kedua ruas diambil fungsi eksponensialnya, sehingga diperoleh:

$$\log(\mu_i) = x_i^T \beta$$
$$e^{\log(\mu_i)} = e^{x_i^T \beta}$$
$$\mu_i = e^{x_i^T \beta}$$

sehingga diperoleh fungsi penghubung untuk model regresi Poisson sebagai berikut

$$\mu_i = \exp\left(x_i^T \beta\right) = \exp\left(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_p x_{pi}\right) \tag{4.4}$$

dan fungsi massa peluang distribusi Poisson adalah

$$P\left(y_i;\beta\right) = \frac{\left[\mu\left(x_i;\beta\right)\right]^{y_i} e^{-\left[\mu\left(x_i;\beta\right)\right]}}{y_i!} \tag{4.5}$$

μ : mean Poisson

vektor β : parameter model

maka diperoleh

mean : $\mu_i = \exp\left(x_i;\beta\right) = \exp\left(x_i^T \beta\right) = \exp\left(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_p x_{pi}\right)$

varians : $\mathrm{var}\left(y_i\right) = \exp\left(x_i;\beta\right) = \exp\left(x_i^T \beta\right) = \exp\left(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_p x_{pi}\right)$

Sehingga diperoleh model regresi Poisson dengan penghubung log, yaitu

$$\begin{aligned} y_i &= \mu_i + \varepsilon_i \\ &= \exp\left(x_i^T \beta\right) + \varepsilon_i \\ &= \exp\left(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_p x_{pi}\right) + \varepsilon_i \end{aligned} \tag{4.6}$$

4.1.1 Persamaan Model Regresi Poisson Diperumum

Sesuai dengan (2.55), maka model regresi Poisson diperumum memiliki fungsi probabilitas bersyarat Y_i diberikan nilai $x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{pi}$ yaitu

$$P\left(y_i \mid x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{pi}; \mu_i; a\right) = \left(\frac{\mu_i}{1 + a\mu_i}\right)^{y_i} \frac{\left(1 + ay_i\right)^{y_i - 1}}{y_i!} \exp\left(-\frac{\mu_i\left(1 + ay_i\right)}{1 + a\mu_i}\right); y_i = 0, 1, \cdots, n \tag{4.7}$$

Fungsi probabilitas regresi Poisson diperumum memiliki parameter tambahan yaitu a, yang merupakan parameter dispersi. Sehingga model regresi Poisson diperumum dapat dituliskan sebagai berikut

$$\mu = e^{\left(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_p X_{pi}\right)}$$

Dimana $\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_p$ adalah parameter-parameter yang tidak diketahui.

Adapun rata-rata dan variansi untuk regresi Poisson diperumum, yaitu

$$E\left(Y_i \mid X_{1i} = x_{1i}, X_{2i} = x_{2i}, \cdots X_{pi} = x_{pi}\right) = \mu_i$$

$$Var\left(Y_i \mid X_{1i} = x_{1i}, X_{2i} = x_{2i}, \cdots X_{pi} = x_{pi}\right) = \mu_i \left(1 + a\mu_i\right)^2$$

Nilai rata-rata dan variansi pada model regresi Poisson diperumum dapat dikondisikan, apabila nilai variansi sama dengan nilai rata-rata $E\left(Y_i\right) = Var\left(Y_i\right)$ E maka nilai parameter dispersi $a = 0$, sehingga fungsi densitas peluang regresi Poisson diperumum diturunkan ke dalam model regresi Poisson. Jika nilai variansi lebih besar dari rata-rata, $E\left(Y_i\right) < Var\left(Y_i\right)$, maka nilai parameter dispersi $a > 0$, sehingga hal ini dinamakan data terjadi overdispersi. Namun, apabila nilai variansi lebih kecil dari rata-rata, $E\left(Y_i\right) > Var\left(Y_i\right)$, maka nilai parameter dispersi menjadi $a < 0$,kasus tersebut disebut data terjadi underdispersi.

4.1.2 Estimasi Parameter Model Regresi Poisson Diperumum dengan Metode MLE

Dengan mensubstitusikan (4.4) ke dalam persamaan (4.7), diperoleh:

$$f\left(Y_i \mid x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{pi}; \beta; a\right) = \left(\frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} \right)^{y_i} \frac{\left(1 + ay_i\right)^{y_i - 1}}{y_i!} \exp\left(- \frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\left(1 + ay_i\right)}{1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} \right) \quad (4.8)$$

dengan $y_i = 0, 1, 2, \cdots, n$. Sedangkan $\beta = \left[\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p\right]^T$ merupakan vektor dari parameter-parameter yang tidak diketahui. Karena parameter-parameter tersebut nilainya tidak diketahui, maka parameter tersebut harus ditaksir. Penaksiran parameter-parameter regresi Poisson diperumum menggunakan metode *maximum likelihood*.

Apabila n pasangan pengamatan $\{(X_{1i}, X_{2i}, \cdots, X_{pi}, Y_i), i = 1, 2, \cdots, n\}$ diasusmsikan saling bebas, maka fungsi *likelihood* didapat dengan cara mengalikan semua fungsi probabilitas bersyarat dari Y_i diberikan nilai $x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{pi}$ pada persamaan (4.8), yaitu

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} f\left(Y_i \mid x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{pi}; \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_p, a\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} \right)^{y_i} \frac{(1+ay_i)^{y_i-1}}{y_i!} \exp\left(-\frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)(1+ay_i)}{1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} \right) \right)$$

Sehingga fungsi *log likelihood* adalah

$$l(\beta) = \log L(\beta)$$

$$= \log\left\{ \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} \right)^{y_i} \frac{(1+ay_i)^{y_i-1}}{y_i!} \exp\left(-\frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)(1+ay_i)}{1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} \right) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} \right)^{y_i} \frac{(1+ay_i)^{y_i-1}}{y_i!} \exp\left(-\frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)(1+ay_i)}{1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} \right) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \log \left(\frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} \right)^{y_i} + \log\left((1+ay_i)^{y_i-1}\right) \right.$$

$$+\log\left(\exp\left(-\frac{\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)(1+ay_i)}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right)\right)-\log(y_i!)\Bigg\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i\log\left(\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)-y_i\log\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)\right.$$

$$\left.+(y_i-1)\log(1+ay_i)-\frac{\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)(1+ay_i)}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}-\log(y_i!)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)-y_i\log\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)\right.$$

$$\left.+(y_i-1)\log(1+ay_i)-\frac{\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)(1+ay_i)}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}-\log(y_i!)\right\} \quad (4.9)$$

Persamaan (4.9) diturunkan secara parsial terhadap parameter $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_p$ dan parameter a untuk mendapatkan taksiran parameter-parameter tersebut, yaitu sebagai berikut:

1. Turunan parsial pertama terhadap β_0

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_0}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i-y_i\frac{a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}-\right.$$

$$\left.\frac{(1+ay_i)\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)-a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)(1+ay_i)\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i\left(1-\frac{a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right)-\left(\frac{(1+ay_i)\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i\left(\frac{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)-a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right)-\left(\frac{(1+ay_i)\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i\left(\frac{1}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right)-\left(\frac{(1+ay_i)\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{y_i}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}-\frac{(1+ay_i)\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{y_i\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)-(1+ay_i)\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right)=0$$

2. Turunan parsial pertama terhadap β_1

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i x_{i1}-y_i x_{i1}\frac{a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right.$$

$$\left.\frac{(1+ay_i)x_{1i}\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)-ax_{1i}\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)(1+ay_i)\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i x_{1i}\left(1-\frac{a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}\right)-\left(\frac{(1+ay_i)\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{y_i x_{1i}}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}-\frac{(1+ay_i)\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{y_i x_{1i}\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)-(1+ay_i)\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_{1i}\left(y_i-\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)}{\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right)$$

3. Turunan parsial pertama terhadap $\beta_j, j=2,3,...,p$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_j}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_{ji}\left(y_i-\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)}{\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right)=0$$

untuk $j=2,3,\cdots,p$

4. Turunan parsial pertama terhadap a

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial a}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{-\frac{y_i\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}+\frac{y_i(y_i-1)}{1+ay_i}\right.$$

$$-\frac{y_i \exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)-\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)(1+ay_i)}{\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\Bigg\}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left\{-\frac{y_i \exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}+\frac{y_i\left(y_i-1\right)}{1+ay_i}-\frac{\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)y_i-\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right\}$$

Turunan-turunan parsial pertama di atas membentuk matriks, sebagai berikut:

$$g(\beta_i,a)=\begin{bmatrix}\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_0}\\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_j}\\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial a}\end{bmatrix}$$

Selanjutnya membentuk matriks Hessian, dengan elemen matriks berupa turunan parsial kedua dari $l(\beta)$ yang diturunkan terhadap parameter-parameternya. Yaitu

$$H(\beta_i,a)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0^{\,2}} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_k\partial\beta_0} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial a\partial\beta_0}\\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1^{\,2}} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_k\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial a\partial\beta_1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_k} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_k} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_k^{\,2}} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial a\partial\beta_k}\\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial a} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial a} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_k\partial a} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial a^2}\end{bmatrix}$$

$$H(\beta_i, a) = \begin{bmatrix} H_{00} & H_{01} & \dots & H_{0k} & H_{0a} \\ H_{10} & H_{11} & \dots & H_{1k} & H_{1a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ H_{k0} & H_{k1} & \cdots & H_{kk} & H_{ka} \\ H_{a0} & H_{a1} & \cdots & H_{ak} & H_{aa} \end{bmatrix}$$

Turunan-turunan parsial kedua dari fungsi dari $l(\beta)$ terhadap parameter-parameternya adalah sebagai berikut

1. Untuk H_{00}

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0{}^2} = \frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{\left(1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)^2} \right)}{\partial \beta_0}$$

Misal

$$u = y_i - \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right) = y_i - \mu_i$$

$$v = \left(1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)^2 = (1 + a\mu_i)^2$$

$$u' = -\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right) = -\mu_i$$

$$v' = 2\left(1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right) a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)$$
$$= 2(1 + a\mu_i) a\mu_i$$

dengan $\mu_i = \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)$

sehingga

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0{}^2}=\frac{-\mu_i\left(\left(1+a\mu_i\right)^2\right)-\left(y_i-\mu_i\right)\left(2\left(1+a\mu_i\right)a\mu_i\right)}{\left(\left(1+a\mu_i\right)^2\right)^2}$$

$$=-\frac{y_i a\mu_i}{1+a\mu_i}+\frac{ya^2\left(\mu_i\right)^2}{\left(\left(1+a\mu_i\right)^2\right)^2}-\frac{\mu_i\left(ay_i+1\right)}{a}-a\mu_i$$

2. Untuk H_{0j}, di mana $j=1,2,\ldots,p$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_0}=\frac{\partial}{\partial \beta_j}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_{ki}\left(y_i-\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)}{\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right)$$

Misal

$$u=x_{ji}\left(y_i-\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)=x_{ji}\left(y_i-\mu_i\right)$$

$$v=\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2=\left(1+a\mu_i\right)^2$$

$$u'=-x_{ji}{}^2\exp\left(\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)=-x_{ji}{}^2\mu_i$$

$$v'=2\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)ax_{ji}\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)=2\left(1+a\mu_i\right)ax_{ji}\mu_i$$

sehingga

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_0}=\frac{\left(-x_{ji}{}^2\mu_i\right)\left(\left(1+a\mu_i\right)^2\right)-\left(x_{ji}\left(y_i-\mu_i\right)\right)\left(2\left(1+a\mu_i\right)ax_{ji}\mu_i\right)}{\left(\left(1+a\mu_i\right)^2\right)^2}$$

$$=-\frac{y_i a x_{ji}\mu_i}{1+a\mu_i}+\frac{ya^2 x_{ji}\left(\mu_i\right)^2}{\left(\left(1+a\mu_i\right)^2\right)}-\frac{x_{ji}\mu_i\left(ay_i+1\right)}{a}-ax_{ji}\mu_i$$

3. Untuk H_{0a}

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i-\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right)$$

Misal

$$u=y_i-\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)=y_i-\mu_i$$

$$v=\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2=(1+a\mu_i)^2$$

$$u'=\frac{\partial u}{\partial a}=0$$

$$v'=\frac{\partial v}{\partial a}=2\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)=2(1+a\mu_i)\mu_i$$

sehingga

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial a}&=\frac{0\left((1+a\mu_i)^2\right)-(y_i-\mu_i)\left(2(1+a\mu_i)\mu_i\right)}{\left((1+a\mu_i)^2\right)^2}\\&=\frac{-(y_i-\mu_i)\left(2(1+a\mu_i)\mu_i\right)}{\left((1+a\mu_i)^2\right)^2}\\&=\frac{-y_i\mu_i}{1+a\mu_i}+\frac{y_i a(\mu_i)^2}{(1+a\mu_i)^2}-\frac{\mu_i y_i}{a}+\frac{\mu_i(ay_i+1)}{a^2}-\mu_i\end{aligned}$$

4. Untuk H_{kr} dimana $k=1,2,\ldots,p$ dan $r=0,1,2,\ldots,p$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_k \partial\beta_r} = \frac{\partial}{\partial\beta_r}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_{ki}\left(y_i - \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)}{\left(1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right)$$

Misal

$$u = x_{ki}\left(y_i - \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right) = x_{ki}\left(y_i - \mu_i\right)$$

$$v = \left(1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2 = \left(1 + a\mu_i\right)^2$$

$$u' = \frac{\partial u}{\partial\beta_r} = -x_{ri}x_{ki}\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right) = -x_{ri}x_{ki}\mu_i$$

$$v' = \frac{\partial v}{\partial\beta_r} = 2\left(1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)ax_{ri}\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right) = 2\left(1 + a\mu_i\right)ax_{ri}\mu_i$$

sehingga

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_k \partial\beta_r} = \frac{\left(-x_{ri}x_{ki}\mu_i\right)\left(\left(1 + a\mu_i\right)^2\right) - \left(x_{ki}\left(y_i - \mu_i\right)\right)\left(2\left(1 + a\mu_i\right)ax_{ri}\mu_i\right)}{\left(\left(1 + a\mu_i\right)^2\right)^2}$$

$$= -\frac{x_{ki}\left(y_i - \mu_i\right)x_{ri}\mu_i}{\left(1 + a\mu_i\right)^2} - \frac{2x_{ki}\left(y_i - \mu_i\right)ax_{ri}\mu_i}{\left(1 + a\mu_i\right)^3}$$

5. Untuk H_{ka}

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial a \partial\beta_k} = \frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_{ki}\left(y_i - \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)}{\left(1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right)$$

Misal

$$u = x_{ki}\left(y_i - \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right) = x_{ki}\left(y_i - \mu_i\right)$$

$$v = \left(1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2 = \left(1 + a\mu_i\right)^2$$

$$u' = \frac{\partial u}{\partial a} = 0$$

$$v' = \frac{\partial v}{\partial a} = 2\left(1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right) = 2\left(1 + a\mu_i\right)\mu_i$$

Sehingga

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial a \partial \beta_k} = \frac{0\left(\left(1 + a\mu_i\right)^2\right) - \left(x_{ki}\left(y_i - \mu_i\right)\right)\left(2\left(1 + a\mu_i\right)\mu_i\right)}{\left(\left(1 + a\mu_i\right)^2\right)^2}$$

$$= \frac{-\left(x_{ki}\left(y_i - \mu_i\right)\right)\left(2\left(1 + a\mu_i\right)\mu_i\right)}{\left(\left(1 + a\mu_i\right)^2\right)^2}$$

$$= -\frac{2x_{ki}\left(y_i - \mu_i\right)\mu_i}{\left(\left(1 + a\mu_i\right)^2\right)^3}$$

6. Untuk H_{ar} untuk $r = 1, 2, \ldots, p$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial a \partial \beta_r} = \frac{\partial}{\partial \beta_r}\sum_{i=1}^{n}\left\{-\frac{y_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)} + \frac{y_i\left(y_i - 1\right)}{1 + ay_i}\right.$$

$$\left. - \frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right) y_i - \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1 + a\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}\right\}$$

Misal

$$c=-\frac{y_i\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}$$

$$d=\frac{y_i\left(y_i-1\right)}{1+ay_i}$$

$$e=\frac{\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)y_i-\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial\beta_r}=-\frac{y_i x_{ri}\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}+\frac{y_i\left(\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2 ax_{ri}}{\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}=-\frac{y_i x_{ri}\mu_i}{1+a\mu_i}+\frac{y_i\left(\mu_i\right)^2 ax_{ri}}{\left(1+a\mu_i\right)^2}$$

$$\frac{\partial d}{\partial\beta_r}=0$$

$$\frac{\partial e}{\partial\beta_r}=\frac{y_i x_{ri}\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)-x_{ri}\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+ay\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)-\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}$$

$$-\frac{2\left(y_i\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)-\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)\left(ay_i x_{ri}\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)-x_{ri}\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)}{\left(1+ay_i\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)-\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^3}$$

$$=\frac{y_i x_{ri}\mu_i-x_{ri}\mu_i}{\left(1+ay\mu_i-\mu_i\right)^2}-\frac{2\left(y_i\mu_i-\mu_i\right)\left(ay_i x_{ri}\mu_i-x_{ri}\mu_i\right)}{\left(1+ay_i\mu_i-\mu_i\right)^3}$$

sehingga

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial a \partial \beta_r} = \frac{\partial}{\partial \beta_r} \sum_{i=1}^{n} (-c + d - e)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{y_i x_{ri} \mu_i}{1 + a\mu_i} + \frac{y_i (\mu_i)^2 a x_{ri}}{(1 + a\mu_i)^2} + 0 - \left(\frac{y_i x_{ri} \mu_i - x_{ri} \mu_i}{(1 + a y \mu_i - \mu_i)^2} - \frac{2(y_i \mu_i - \mu_i)(a y_i x_{ri} \mu_i - x_{ri} \mu_i)}{(1 + a y_i \mu_i - \mu_i)^3} \right) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{y_i x_{ri} \mu_i}{1 + a\mu_i} + \frac{y_i (\mu_i)^2 a x_{ri}}{(1 + a\mu_i)^2} + 0 - \frac{y_i x_{ri} \mu_i - x_{ri} \mu_i}{(1 + a y \mu_i - \mu_i)^2} + \frac{2(y_i \mu_i - \mu_i)(a y_i x_{ri} \mu_i - x_{ri} \mu_i)}{(1 + a y_i \mu_i - \mu_i)^3} \right)$$

7. Untuk H_{aa}

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial a^2} = \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^{n} \left\{ -\frac{y_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{1 + a \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)} + \frac{y_i (y_i - 1)}{1 + a y_i} \right.$$

$$\left. - \frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right) y_i - \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{\left(1 + a \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)^2} \right\}$$

Misal

$$c = -\frac{y_i \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{1 + a \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}$$

$$d = \frac{y_i (y_i - 1)}{1 + a y_i}$$

$$e = \frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right) y_i - \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)}{\left(1 + a \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=i}^{p} \beta_j x_{ji}\right)\right)^2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial a}=\frac{y_i\left(\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}{\left(1+a\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^2}=\frac{y_i\left(\mu_i\right)^2}{\left(1+a\mu_i\right)^2}$$

$$\frac{\partial d}{\partial a}=-\frac{y_i^2\left(y_i-1\right)}{\left(1+ay_i\right)^2}$$

$$\frac{\partial e}{\partial a}=-\frac{2\left(y_i\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)-\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)y_i\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)}{\left(1+ay_i\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)-\exp\left(\beta_0+\sum_{j=i}^{p}\beta_j x_{ji}\right)\right)^3}$$

$$=-\frac{2\left(y_i\mu_i-\mu_i\right)y_i\mu_i}{\left(1+ay_i\mu_i-\mu_i\right)^3}$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial a^2}=\frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n}(-c+d-e)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i\left(\mu_i\right)^2}{\left(1+a\mu_i\right)^2}-\frac{y_i^2\left(y_i-1\right)}{\left(1+ay_i\right)^2}+\frac{2\left(y_i\mu_i-\mu_i\right)y_i\mu_i}{\left(1+ay_i\mu_i-\mu_i\right)^3}\right)$$

4.1.3 Estimasi Parameter Model Regresi Poisson Diperumum dengan Metode Newton Raphson

Persamaan-persamaan tersebut memiliki parameter yang tidak linier, sehingga perlu dilakukan pendekatan secara numerik. Yaitu dengan menggunakan metode Newton Raphson. Metode Newton Raphson berguna untuk menemukan solusi dari fungsi ln likelihood sehingga didapatkan nilai yang cukup konvergen yang dapat dijadikan sebagai taksiran untuk masing-masing parameter. Bentuk umum persamaan iterasi Newton-Raphson yang telah dinyatakan pada persamaan (2.54) yaitu

$$\begin{aligned}\beta^{(n+1)} &= \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial\beta}|_{\beta^{(n)}} \\ &= \beta^{(n)} - H^{-1}\left(\beta^{(n)}\right) g\left(\beta^{(n)}\right)\end{aligned} \tag{4.10}$$

dimana

$\beta^{(n)}$: Taksiran dari β pada iterasi ke-n.

H^{-1} : Matriks berukuran $(k+2)\text{x}(k+2)$, yang elemennya merupakan turunan parsial kedua dari fungsi ln likelihood, saat $\beta \approx \beta^{(n)}$.

g : Suatu vektor yang elemennya merupakan turunan pertama dari fungsi ln likelihood yang dihitung pada $\beta \approx \beta^{(n)}$. Vektor ini berukuran $(k+2)\text{x}1$

Persamaan (4.10) digunakan untuk menaksir β pada iterasi ke-n $(n = 0,1,2,\ldots)$ yaitu $\beta^{(n+1)}$. Sebelum menentukan $\beta^{(n+1)}$, langkah pertama yang akan dilakukan yaitu memilih nilai taksiran awal β, yaitu

$$\hat{\beta}^{(0)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_i \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \\ a \end{bmatrix}^{(0)}$$

Nilai taksiran awal $\hat{\beta}^{(0)}$ ditentukan berdasar pada nilai esimasi regresi Poisson diperumum. Langkah selanjutnya yaitu mensubstitusikan nilai $\beta^{(0)}$ ke vektor g dan matriks H sebagai berikut

$$g\left(\beta_i^{(0)}\right)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_0} \\ \dfrac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_k} \\ \dfrac{\partial l(\beta)}{\partial a} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

$$H\left(\beta_i^{(0)}\right)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 l(\beta)}{\partial {\beta_0}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 l(\beta)}{\partial a \partial \beta_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial a} & \cdots & \dfrac{\partial^2 l(\beta)}{\partial a^2} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Kemudian melakukan iterasi berdasarkan persamaan (4.10). Proses iterasi dapat dihentikan apabila telah menemukan nilai taksiran yang konvergen pada suatu nilai yaitu

$$\beta^{(n+1)} \approx \beta^n$$

atau

$$\left\|\beta^{(n+1)} - \beta^n\right\| < \varepsilon$$

dimana ε merupakan bilangan yang sangat kecil. Selanjutnya pilih $\beta^{(n+1)}$ sebagai taksiran untuk β .

4.2 Aplikasi Estimasi Parameter Model Regresi Poisson Diperumum dengan Metode Maksimum *Likelihood* pada Data Jumlah Angka Kematian Bayi (AKB) di Kabupaten Kediri Tahun 2015

4.2.1 Deskripsi Data

Kesehatan merupakan hal yang sangat penting untuk mendukung kesejahteraan suatu wilayah. Selain itu, dapat juga mengetahui kualitas wilayah untuk mendorong potensi suatu wilayah tertentu agar berkembang. Sering kali, masalah kesehatan menyebabkan kematian pada pelaku kesehatan. Sehingga potensi wilayah menjadi menurun. Adapun faktor-faktor yang menyebabkan kematian, salah satunya adalah faktor lingkungan di sekitar wilayah tersebut. Mulai dari faktor internal yang ada di dalam diri pelaku kesehatan hingga faktor eksternal yang terdapat di sekitar pelaku kesehatan. Misalnya, keadaan rumah, kekebalan daya tubuh, dan sebagainya.

Penelitian ini memodelkan tingkat Angka Kematian Bayi (AKB) di Kabupaten Kediri tahun 2015 menggunakan model regresi Poisson diperumum. Adapun faktor yang digunakan, diantaranya prosentase ibu hamil yang mendapatkan tablet Fe (X_1), prosentase rumah tangga yang Berperilaku Hidup Bersih dan Sehat (PHBS) (X_2), prosentase rumah sehat (X_3), prosentase Posyandu aktif (X_4), prosentase Berat Badan Lahir Rendah (BBLR) menurut jenis kelamin (X_5), prosentase bayi yang diberi Air Susu Ibu (ASI) eksklusif (X_6), dan prosentase pemberian vitamin A pada bayi (X_7). Sebelum melakukan pemodelan pada faktor-faktor tersebut, perlu dilakukan analisis secara statistik deskriptif, untuk mengetahui karakteristik setiap variabel. Analisis statistik deskripstif tingkat Angka

Kematian Bayi (AKB) di Kabupaten Kediri tahun 2015 beserta variabel yang mempengaruhinya disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 4.1 Statistik Deskripstif

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
Y	26	2.00	15.00	7.2308	3.96290
X_1	26	82.94	97.27	91.7423	3.86721
X_2	26	.00	84.30	48.1488	21.07764
X_3	26	6.46	94.11	55.3142	20.35228
X_4	26	38.71	100.00	85.4654	17.00282
X_5	26	.00	44.00	4.2508	8.19028
X_6	26	58.20	90.90	76.5204	8.74386
X_7	26	72.28	112.96	93.6577	9.64025
Valid *N* (listwise)	26				

Berdasarkan Tabel 4.1 diketahui bahwa rata-rata tingkat Angka Kematian bayi (AKB) di Kabupaten Kediri tahun 2015 sebesar7,2308%. Hal ini menunjukkan bahwa AKB di Kabupaten Kediri tergolong rendah. Namun, dibandingkan dengan wilayah lain, tingkat AKB di Kabupaten Kediri tergolong tinggi. Sehingga tingkat kesehatan di wilayah Kabupaten Kediri masih tergolong kurang.

Rata-rata rumah tangga yang Berperilaku Hidup Bersih dan Sehat (PHBS) (X_2) adalah 48.1488%, rata-rata rumah sehat (X_3) sebesar 55.3142%, dan rata-rata Posyandu aktif (X_4) sebesar 85,4654%, ketig afaktor tersebut dapat digolongkan sebagai faktor eksternal yang mempengaruhi Angka Kematian Bayi (AKB) di Kabupaten Kediri tahu 2015. Sedangkan faktor internal yang mempengaruhi Angka Kematian Bayi (AKB) diantaranya pemberian Tablet Fe

(X_1) yang memiliki rata-rata sebesar 91,7423%, Berat Badan Lahir Rendah (BBLR) menurut jenis kelamin (X_5) memiliki rata-rata sebesar 4,2508%, pemberian ASI eksklusif memiliki rata-rata sebesar 76,5205%, dan pemberian vitamin A memiliki rata-rata sebesar 93,6577%. Antara faktor eksternal dan faktor internal memiliki hubungan yang sangat erat dalam mempengaruhi Angka Kematian Bayi (AKB) di Kabupaten Kediri tahun 2015.

4.2.2 Uji Kesesuaian Distribusi Poisson

Uji kesesuaian distribusi Poisson dilakukan pada data variabel dependen, yaitu variabel jumlah Angka Kematian Bayi (AKB) di Kabupaten Kediri tahun 2015 (Lampiran 1). Pengujian kesesuaian distribusi Poisson pada variabel dependen menggunkan Uji Kolmogorov Smirnov. Sebelum melakukan pengujian, hipotesis dari pengujian ini adalah

H_0 : Data angka kematian bayi di Kabupaten Kediri tahun 2015 berdistribusi Poisson

H_1 : Data angka kematian bayi di Kabupaten Kediri tahun 2015 tidak berdistribusi Poisson

Hasil pengujian kesesuaian distribusi Poisson dapat ditunjukkan pada Tabel 4.2 berikut

Tabel 4.2 Uji Kolmogorov Smirnov

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Y
N		26
Poisson Parameter[a]	Mean	7.2308
Most Extreme Differences	Absolute	.193
	Positive	.193
	Negative	-.128
Kolmogorov-Smirnov Z		.985
Asymp. Sig. (2-tailed)		.286

Berdasarkan hasil uji Kolmogorov Smirnov yang ditunjukkan oleh Tabel 4.1, diperoleh nilai signifikansi sebesar 0.285, dimana nilai signifikansi tersebut lebih besar dari $\alpha = 0.05$. Sehingga keputusan hipotesisnya yaitu menerima H_0, yaitu data angka kematian bayi di Kabupaten Kediri berdistibusi Poisson.

4.2.3 Uji Multikolinieritas

Langkah berikutnya yaitu uji multikolinieritas, yang bertujuan untuk mengetahui ada atau tidaknya penyimpangan asumsi klasik multikolinieritas yaitu adanya hubungan linier antara variabel independen dalam model regresi. Pengujian ada atau tidaknya gejala multikolinieritas dilakukan dengan melihat nilai VIF (*Variance Inflation Factor*) dan *Tolerance*. Rumus yang digunakan untuk mendapatkan nilai VIF sesuai persamaan (2.58).

$$VIF = \frac{1}{0.878} = 1.139$$

Tabel 4.3 menunjukkan hasil uji multikolinieritas terhadap variabel satu dengan variabel yang lainnya

Tabel 4.3 Multikolinieritas

Coefficients[a]

Model		Collinearity Statistics	
		Tolerance	VIF
1	X_1	.878	1.139
	X_2	.733	1.364
	X_3	.615	1.627
	X_4	.849	1.178
	X_5	.808	1.238
	X_6	.587	1.705
	X_7	.839	1.193

Model regresi dikatakan tidak mengandung multikolinieritas apabila nilai VIF berada di bawah 10 dan nilai *Tolerance* lebih dari 0,1. Berdasarkan uji multikolinieritas pada Tabel 4.3, diperoleh nilai VIF pada masing-masing variabel kurang dari 10 dan memiliki nilai *Tolerance* lebih dari 0,1. Sehingga dapat disimpulkan bahwa tidak terjadi korelasi yang cukup tinggi pada variabel prediktor tersebut.

4.2.4 Pemodelan Jumlah Kasus Angka Kematian Bayi (AKB) dengan Regresi Poisson

Setelah dilakukan pengujian kasus multikolinieritas antar variabel, diketahui bahwa hasil pengujian menunjukkan tidak ada kasus multikolinieritas. Sehingga dapat dilanjutkan pada pemodelan melalui regresi Poisson. Hasil dari pemodelan menggunakan regresi Poisson dengan bantuan *software R*, yaitu

Tabel 4.4 Hasil Estimasi Model Regresi Poisson

Parameter	Koefisien	Z value	Signifikansi
β_0	-0,05450	-0,024	Tidak Signifikan
β_1	-0,00016	-0,007	Tidak Signifikan
β_2	0,00808	1,833	Signifikan
β_3	-0,01102	-2,366	Signifikan
β_4	-0,00343	-0,758	Tidak Signifikan
β_5	-0,03126	-2,039	Signifikan
β_6	0,01327	1,164	Tidak Signifikan
β_7	0,01740	2,060	Signifikan

Setelah mengetahui nilai estimasi parameter model regresi Poisson, kemudian dilakukan pengujian secara serentak dan parsial. Pengujian serentak signifikansi parameter model regresi Poisson bertujuan untuk mengetahui pengaruh secara serentak variabel bebas terhadap variabel terikat. Hasil pengujian dengan signifikansi 10% diperoleh $\chi_{(7;0,1)}$ sebesar 18,475. Sedangkan nilai deviansi sebesar 39,261 (lampiran 4), yang artinya bahwa $\chi_{(7;0,1)}$ lebih kecil dari nilai deviansi. Sehingga dapat dikatakan bahwa seluruh parameter secara bersama-sama memiliki pengaruh yang signifikan dalam model. Dilanjutkan dengan pengujian secara parsial, dengan taraf signifikansi 10% diperoleh $Z_{0,1/2}$ sebesar 1,64. Nilai $Z_{0,1/2}$ jika dibandingkan dengan $|Z_{value}|$ setiap parameter pada tabel di atas diperoleh bahwa parameter $\beta_2, \beta_3, \beta_5$, dan β_7 memiliki nilai $|Z_{value}|$ lebih dari 1,64 sehingga tolak H_0, yang artinya bahwa variabel rumah tangga yang Berperilaku Hidup Bersih dan

Sehat (PHBS) (X_2), prosentase rumah sehat (X_3), Berat Badan Lahir Rendah (BBLR) menurut jenis kelamin (X_5), dan pemberian vitamin A pada bayi (X_7) berpengaruh signifikan terhadap jumlah kasus Angka Kematian Bayi (AKB) di Kabupaten Kediri tahun 2015. Model regresi Poisson yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$\mu = \exp\left(-0,05450 - 0,00016X_1 + 0,00808X_2 - 0,01102X_3 - 0,00343X_4 \right.$$
$$\left. -0,03126X_5 + 0,01327X_6 + 0,01740X_7\right)$$

4.2.5 Overdispersi

Ciri dari variabel respon yang mengalami overdispersi adalah nilai rata-rata lebih dari nilai variansinya. Hal tersebut telah ditunjukkan pada Tabel 4.5 berikut

Tabel 4.5 Overdispersi

Statistics

N	Valid	26
	Missing	0
Mean		7.2308
Variance		15.705

Selain melihat perbandingan nilai rata-rata dan nilai variansinya, kasus overdispersi dapat ditunjukkan dengan menghitung nilai deviansi dibagi dengan derajat bebas. Sehingga diperoleh

Tabel 4. 6 Nilai Deviansi

Goodness of Fit[b]

	Value	df	Value/df
Deviance	39.260	18	2.181
Scaled Deviance	39.260	18	
Pearson Chi-Square	39.072	18	2.171
Scaled Pearson Chi-Square	39.072	18	
Log Likelihood[a]	-67.447		

Berdasarkan Tabel 4.6, menunjukkan hasil pembagian antara nilai deviansi dan derajat bebas (db) sebesar 2,181 yang lebih besar dari 1. Sehingga dapat dikatakan bahwa variabel respon pada penelitian ini termasuk dalam kasus overdispersi.

4.2.6 Uji Signifikansi Parameter Model Regresi Poisson Diperumum

Pengujian signifikansi parameter model regresi Poisson diperumum dilakukan secara simultan dan parsial. Pengujian parameter secara simultan dan parsial data angka kematian bayi di Kabupaten Kediri tahun 2015 dengan menggunakan uji G dan uji *Wald.*

Hasil pengujian menunjukkan nilai statistik uji G adalah 39,072 dengan derajat bebas (*db*) 18 dan nilai $\chi_{(0,05;18)} = 37,156$. Pada taraf signifikansi $\alpha = 0,05$ diperoleh $G > \chi^2_{(0.05,10)}$ sehingga dapat diambil keputusan bahwa H_0 ditolak. Dari keputusan yang diambil tersebut, dapat disimpulkan bahwa prosentase ibu hamil yang mendaparkan tablet Fe, prosentase rumah tangga yang berperilaku hidup bersih dan sehat (PHBS), prosentase rumah sehat, prosentase Posyandu aktif, prosentase berat badan lahir rendah (BBLR) menurut jenis kelamin, prosentase bayi yang diberi Air Susu Ibu (ASI) eksklusif, dan prosentase pemberian vitamin A pada bayi secara bersama-sama memberikan pengaruh terhadap jumlah kasus Angka Kematian Bayi (AKB) di Kabupaten Kediri tahun 2015.

Uji signifikansi secara parsial pada model regresi Poisson diperumum menggunakan uji *Wald*. Uji *Wald* merupakan salah satu statistik uji yang sering digunakan untuk menguji signifikansi parameter regresi secara individual pada masing-masing variabel prediktor. Uji *Wald* yang terdapat pada lampiran 5 akan dibandingkan dengan t tabel, yaitu 2,093. Sehingga tolak H_0 jika statistik uji $W > t_{0.025}$ atau peubah prediktor berpengaruh terhadap jumlah kasus Angka Kematian Bayi (AKB) di Kabupaten Kediri tahun 2015. Dari tujuh variabel yang terinci di atas, terdapat tiga variabel yang signifikan, diantaranya prosentase rumah sehat (X_3), prosentase berat badan lahir rendah (BBLR) menurut jenis kelamin (X_5), dan prosentase pemberian vitamin A pada bayi (X_7). Hasil signifikansi parameter ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 4.7 Hasil Signifikansi Parameter Model Regresi Poisson Diperumum

Parameter	**Signifikansi**
β_0	Tidak Signifikan
β_1	Tidak Signifikan
β_2	Tidak Signifikan
β_3	Signifikan
β_4	Tidak Signifikan
β_5	Signifikan
β_6	Tidak Signifikan
β_7	Signifikan

4.2.7 Pemodelan Regresi Poisson Diperumum

Pemodelan regresi Poisson diperumum diperoleh dari uji signifikansi secara parsial yang telah ditunjukkan pada langkah sebelumnya. Berdasarkan uji signifikansi secara parsial, tidak semua variabel signifikan. Variabel yang signifikan diantaranya prosentase rumah sehat (X_3), prosentase berat badan lahir rendah (BBLR) menurut jenis kelamin (X_5), dan prosentase pemberian vitamin A pada bayi (X_7).

Karena terdapat kasus overdispersi pada data kasus Angka Kematian Bayi (AKB) di Kabupaten Kediri tahun 2015, maka dilakukan pemodelan regresi Poisson diperumum untuk mengatasi kasus overdispersi tersebut. Langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan nilai awal estimasi parameter dari hasil Tabel 4.4, yaitu

$$\beta^{(0)} = \begin{bmatrix} -0,5450 \\ -0,00016 \\ 0,00808 \\ -0,01102 \\ -0,00343 \\ -0,03126 \\ 0,01327 \\ 0,01740 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (4.11) diperoleh vektor gradien sebagai berikut:

$$g\left(\beta_i^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} -0,723697 \\ -0,269992 \\ \vdots \\ -0,205337 \\ -0,006335 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (4.12) diperoleh matriks Hessian sebagai berikut:

$$H^{-1}\left(\beta_i^{(0)}\right)=\begin{bmatrix}-3,69092 & \cdots & 0,57031\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0,00575 & \cdots & -0,00079\end{bmatrix}$$

Setelah vektor gradien dan matriks Hessian diketahui, maka berdasarkan persamaan (4.10) diperoleh nilai-nilai estimasi parameter pada iterasi pertama sebagai berikut:

$$\beta^{(1)}=\beta^{(0)}-H^{-1}\left(\beta^{(0)}\right)g\left(\beta^{(0)}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}-0,5450\\ -0,00016\\ 0,00808\\ -0,01102\\ -0,00343\\ -0,03126\\ 0,01327\\ 0,01740\\ 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3,69092 & \cdots & 0,57031\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0,00575 & \cdots & -0,00079\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0,723697\\ -0,269992\\ \vdots\\ -0,205337\\ -0,006335\end{bmatrix}$$

Iterasi Newton Raphson dilakukan hingga mencapai nilai parameter yang konvergen. Hasil iterasi parameter β dan a mencapai konvergen pada iterasi ke-7 yang ditunjukkan pada Tabel 4.8 berikut:

Tabel 4.8 Hasil Estimasi Parameter Model Regresi Poisson Diperumum

Parameter	Signifikansi
β_0	0,38744
β_1	-0,00646
β_2	0,00799
β_3	-0,01016
β_4	-0,00363
β_5	-0,02961
β_6	0,01411
β_7	0,01851

Sehingga model regresi Poisson diperumum pada kasus jumlah Angka Kematian Bayi (AKB) di Kabupaten Kediri tahun 2015 berdasarkan persamaan (2.57) adalah:

$$\mu_i = \exp\big(0,38744 - 0,00646x_1 + 0,00799x_2 - 0,01016x_3 - 0,00636x_4 \\ -0,2961x_5 + 0,01411x_6 + 0,018510x_7\big)$$

Berdasarkan model di atas, dapat diartikan bahwa tingkat kenaikan Angka Kematian Bayi (AKB) di Kabupaten Kediri tahun 2015 dipengaruji oleh kurangnya faktor adanya rumah sehat dan adanya bayi yang memiliki berat badan lahir rendah (BBLR), serta kenaikan pada pemberian vitamin A pada bayi.

4.3 Kajian Islam Contoh Estimasi dan Statistik dalam Al Quran dan Hadits

Contoh estimasi telah dijelaskan di dalam al Quran, yaitu surat Ash Shaffat ayat 147. Di dalamnya telah dijelaskan bahwa terdapat perumpamaan adanya jumlah orang yang diutus Nabi Muhammad yang diperkiraan jumlah. Perkiraan ini tidak ada yang tau berapa jumlah tepat dari orang-orang tersebut. Arti dari ayat tersebut yakni

"Dan kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih"(QS. Ash-Shaffat/37:147).

Menurut tafsir Ibnu Katsir mengenai potongan ayat أَوْ يَزِيدُونَ mengatakan bahwa dalam riwayat Ibnu Abbas menyebutkan bahwa terdapat lebih dari seratus ribu orang, jumlah mereka adalah seratus tiga puluh ribu orang. Namun, terdapat riwayat lain yang menyebutkan bahwa jumlah umat Nab Yunus a.s. yaitu seratus tiga puluh ribu orang atau lebih beberapa ribu. Ada pula suatu riwayat yang mengatakan bahwa jumlah mereka adalah seratus empat puluh ribu lebih beberapa ribu orang, hanya Allah-lah Yang Maha Mengetahui. Sa'id ibnu Jubair menyebutkan lebih dari tujuh ribu orang, yakni seratus tujuh puluh ribu orang.

Makhul mengatakan bahwa jumlah mereka seratus sepuluh ribu orang, menurut apa yang diriwayatkan oleh Ibnu Abu Hatim, yang memiliki arti sebagai berikut

"Ibnu Jarir mengatakan bahwa telah menceritakkan kepada Muhammad ibnu Abdur Rahim Al-Barqi, telah menceritakan kepada kami Amr ibnu Abu Salamah yang mengatakan bahwa ia pernah mendengar Zuhair menceritakan dari seseorang yang mendengar dari Abul Aliyah; ia mengatakan bahwa telah menceritakan kepada Ubay ibnu Ka'ab r.a. bahwa ia pernah bertanya kepada Rasulullah Saw. Tentang makna firman-Nya: Dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih. (Ash-Shaffat:147). Maka beliau bersabda, bahwa mereka lebih dari dua puluh ribu (dari seratus ribu itu)."

Imam Turmuzi meriwayatkan hadis ini melalui Ali ibn Hujr, dari Al-Walid ibnu Muslim, dari Zuhair, dari seorang lelaki, dari Abdul Aliyah, dari Ubay ibnu Ka'ab dengan lafadz yang sama. Lalu Imam Turmuzi mengatakan bahwa hadis ini garib. Ibnu Abu Hatim meriwayatkan hadis ini melalui hadis Zuhair dengan sanad yang sama. Ibnu Jarir mengatakan bahwa sebagian ahli bahasa Arab dan kalangan penduduk Basrah mengatakan sehubungan dengan ini bahwa yang dimaksud ialah sampai seratus ribu orang, atau jumlah mereka lebih dari itu.

Adapun kisah Nabi Muhammad Saw. mengenai estimasi, yaitu tentang informasi penting berupa jumlah tentara Mekah (tentara Quraisy). Awal dari kisah tersebut yaituketika Rasulullah mengutus para sahabatnya, yakni Ali, Zubair, dan Sa'ad Ibn Abi Waqqash untuk mengetahui informasi mengenai gerakan dan keadaan musuh (Quraisy). Kemudian mereka bertemu dengan dua pemuda yang bertugas untuk menyediakan air minum pasukan Mekah (Quraisy). Setelah itu, dua orang pasukan Mekah tersebut dibawa untuk menghadap Rasulullah.

Setelah bertemu Rasulullah, kedua pasukan Mekah berbincang dengan Rasulullah, yaitu

Nabi Muhammad Saw bertanya, “Berapakah jumlah mereka?”

Kedua pasukan tersebut menjawab, “Banyak.”

Kemudian Nabi Saw bertanya lagi, “Berapa kekuatan mereka?”

Setelah itu, keduanya mengaku bahwa mereka tidak informasi mengenai kekuatan tersebut. Lalu, Rasulullah bertanya lagi, “Berapa ekor unta yang mereka sembelih setiap hari?”

Keduanya menjawab, “(kadang-kadang) sehari Sembilan dan (kadang-kadang) sepuluh ekor.”

Kemudian Rasulullah berkata, “Kalau begitu, jumlah mereka antara 900 sampai 1000 orang.”

Berdasarkan gambaran percakapan Rasulullah dan dua pasukan tentara Mekah tersebut, dapat disimpulkan bahwa percakapan tersebut berisi gambaran dari estimasi. Karena jika memperhatikan ukuran punuk unta yang memiliki tinggi 2,1 meter dan berat mancapai 726 kilogram. Maka satu punuk unta dapat menyimpan lemak seberat 36 kilogram. Dengan demikian, dapat diperkirakan bahwa satu ekor unta setara dengan konsumsi untuk 100 orang.

Bidang statistika terdapat membahasan mengenai estimasi, yang berarti bahwa terdapat perkiraan terhadap sebuah masalah yang memiliki hasil belum pasti. Berdasarkan beberapa cuplikan kisah para Nabi yang telah dicontohkan, seperti kisah nabi Yunus sebelumnya, apabila dikaitkan dengan metode Maksimum Likelihood, maka jumlah pasukan nabi Yunus dapat diasumsikan sebagai estimasi dalam jumlah sampel yang digunakan pada penelitian ini. Dimana estimasi dalam penelitian ini belum diketahui secara pasti hasilnya, seperti halnya pasukan nabi

Yunus yang berjumlah 100.000 orang atau lebih, yang tidak diketahui pasti jumlah pasukan yang ikut dengan nabi Yunus.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Model regresi Poisson diperumum dituliskan sebagai berikut

$$\mu = e^{\left(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_p X_{pi}\right)}$$

dengan estimasi parameter model regresi Poisson diperumum dengan metode Newton Raphson yaitu

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{n} - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \beta'} |_{\beta^{(n)}} \right)^{-1} \frac{\partial L}{\partial \beta} |_{\beta^{(n)}}$$

Nilai estimasi parameter akan berhenti ketika mencapai nilai yang cukup konvergen pada suatu nilai

$$\left\| \beta^{(n+1)} - \beta^{(n)} \right\| < \varepsilon$$

dimana ε merupakan bilangan yang sangat kecil. Selanjutnya dipilih $\beta^{(n+1)}$ sebagai taksiran untuk β.

2. Model regresi Poisson diperumum yang telah diaplikasikan pada data kasus angka kematian bayi (AKB) di Kabupaten Kediri tahun 2015 yaitu

$$\begin{aligned} \mu_i &= \exp\left(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_p x_{pi}\right) \\ &= \exp\left(0,387442 - 0,010159 x_3 - 0,29608 x_5 + 0,018510 x_7\right) \end{aligned}$$

Dari tujuh variabel prediktor yang telah diujikan pada model regresi Poisson diperumum, terdapat tiga variabel prediktor yang signifikan terhadap model tersebut. Yaitu prosentase rumah sehat (X_3), prosentase berat badan lahir rendah (BBLR) menurut jenis kelamin (X_5), dan prosentase pemberian vitamin A pada bayi (X_7).

5.2 Saran

Penelitian ini masih terdapat beberapa kekurangan yaitu pembahasan mengenai faktor-faktor secara spesifik pada daerah tertentu dengan luas wilayah tertentu, karena pada wilayah tertentu terdapat faktor yang belum tentu mendukung pada wilayah lain. Sehingga disarankan untuk peneliti selanjutnya dapat menambahkan faktor spesifik wilayah tertentu pada model regresi Poisson diperumum. Selain itu, pengaplikasian model regresi Poisson diperumum dapat dikembangkan tidak hanya pada bidang kesehatan, namun dapat diaplikasikan pada bidang lainnya yang mengikutri model regresi Poisson diperumum.

DAFTAR RUJUKAN

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Agresti, A. 2002. *Categorical Data Analysis, Second Edition*. John Wiley & Sons., New York.

Aini, D. N. 2016. *Estimasi Parameter Model GWPRS pada Data yang Mengandung Outlier*. Malang:UIN Maliki Malang.

Aziz, A. 2010. *Ekonometrika Teori dan Praktik Eksperimen dengan MATLAB*. Malang: UIN-Maliki Press.

Cameron, A. C & Trivedi, P. K. 1998. *Regression Analysis of Count Data*. United Kingdom: Cambridge University.

Departemen Agama RI. 2010. Al-Qur'an dan Tafsirnya Jilid II. Jakarta:Lentera Abadi.

Depkes RI. 2003. *Penyakit Penyebab Kematian Bayi Baru Lahir (Neonatal) dan Sistem Pelayanan Kesehatan Berkaitan di Indonesia*. Jakarta: Departemen Kesehatan Republik Indonesia.

Dinas Kesehatan RI. 2009. *Rumah Tangga Sehat dengan Berperilaku Hidup Bersih dan Sehat*. Jakarta:Departemen Kesehatan RI.

Dinkes Kabupaten Kediri. 2015. *Profil Kesehatan Kabupaten Kediri Tahun 2015*. Kediri:Dinkes.

Eriza, V. T. 2016. *Uji Multikolinieritas dan Kesesuaian Model Dalam Model Struktural*. Bandar Lampung:Universitas Lampung.

Gujarati, D. N. dan Porter, D. C. 2010. Dasar-Dasar Ekonometrika edisi 5. Jakarta:Salemba Empat.

Hilbe, J. 2011. *Negative Binomial Regression*, *Second Edition*. New York: Cambridge University Press.

Hosmer, D.W dan Lemeshow, S. 2000. *Applied Logistic Regression Second Edition*. United States of America.

Kementerian Kesehatan RI. 2012. *Ayo ke Posyandu setiap Bulan*. Jakarta:Departemen Kesehatan RI.

Kemenkes RI. 2017. *Profil Kesehatan Indonesia Thun 2016*. Jakarta:Kementerian Kesehatan RI.

Khoshgoftaar, T.M., Gao, K, Szabo, R. M. 2004. *Comparing Software Fault Predictions of Pure and Zero-Inflated Poisson Regression Models*. International Journal of System Science 36,11: 705715.

Listiani, Y. dan Purhadi. 2007. *Pemodelan Generalized Regresi Poisson pada Faktor-Faktor yang Mempengaruhi Angka Kematian Bayi di Provinsi Jawa Timur Tahun 2007*. ____. ITS.

McCullagh, P dan Nelder, A. 1989. *Generalized Linear Models Second Edition*. London: Chapman & Hall.

Myers, R.H. 1990. *Classical and Modern Regression with Aplication, Second Edition*. Boston: PWSKENT Publishing Company.

Nurhayati, dkk. 2014. *Pengaruh asupan Tablet Zat Besi (Fe) terhadap Kadar Hemoglobin (Hb) pada Ibu Hamil di Puskesmas Kopelma Darussalam Athun 2014*. Banda Aceh:Poltekkes Kemenkes Aceh.

Ruliana, dkk. 2016. *Pemodelan Generalized Poisson Regression (GPR) untuk Mengatasi Pelanggaran Equidispersi pada Regresi Poisson Kasus Campak di Kota Semarang Tahun 2013*. Semarang:Universitas Negeri Semarang.

Saifudin, T. 2009. *Metode Likelihood Lokal dengan Pembobot Kernel pada Regresi Nonparametrik dengan Respon Normal*. Surabaya:Universitas Airlangga.

Sary, S. A dan Latra, N. I. 2013. *Pemodelan Jumlah Kematian Bayi di Provinsi Jawa Timur Tahun 2011 dengan Pendekatan Regresi Binomial Negatif. Jurnal Sains dan Seni Pomits Vol.2 No. 2*. Surabaya:Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Shihab, M. Q. 2002. *Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an Vol 12*. Jakarta: Lentera Hati.

Umami, N. S. 2013. *Aplikasi Model Regresi Poisson Tergeneralisasi pada Kasus Angka Kematian Bayi di Jawa Tengah Tahun 2007*. Skripsi tidak dipublikasikan. Semarang: Universitas Diponegoro.

Suciptawati, N. L. P. 2010. *Metode Statistika Nonparametrik*. Denpasar:Udayana University Press.

Ummah, Z. 2012. *Estimasi Parameter Linier Tergeneralisasi Gaussian Berdasarkan Maximum Likelihood Estimator dengan Menggunakan Algoritma Fisher-Scoring*. Surabaya: Universitas Airlangga.

Walpole, R.E dan Myers R.H. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insyinyur dan* Ilmuan Edisi Keempat. ITB:Bandung.

Wibisono, Y. 2009. *Metode Statistika (Edisi 2).* Yogyakarta: UGM Press.

Yitnosumarto, S. 1990. *Dasar-Dasar Statistika*. Jakarta:Rajawali.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Data

NO	KECAMATAN	Y	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
1	SEMEN	3	92.14	35.7	53.55	83.33	44	88.6	105.4
2	MOJO	4	95.36	39.25	51.41	100	3.25	82.55	107.49
3	KRAS	3	95.39	18.45	38.45	58.25	2.45	73.1	87.63
4	NGADILUWIH	6	91.28	60.95	43.41	97.56	3.3	58.2	85.32
5	KANDAT	5	92.26	35.6	68.27	80.3	1.1	90.1	85.16
6	WATES	8	91.99	46.1	64.88	77.61	1.9	90.9	84.48
7	NGANCAR	4	84.92	66	80.5	100	3	83.5	90.43
8	PUNCU	9	90.56	64	62.15	38.71	4.1	70.6	103.28
9	PLOSOKLATEN	9	86.76	35.8	21.66	96.59	3.1	61.5	96.95
10	GURAH	13	93.73	66	45.3	100	2.8	77.05	104.13
11	PAGU	8	89.93	70.1	69.71	100	4.1	79.9	97.03
12	GAMPENGREJO	2	97.27	48.3	94.11	100	1.4	83.4	84.22
13	GROGOL	2	94.24	75	71.54	76.92	2	76.2	72.28
14	PAPAR	9	95.69	37.3	69.28	56.92	1.7	78.2	97.56
15	PURWOASRI	12	88.78	56.65	15.89	84.22	2.45	73.8	91.21
16	PLEMAHAN	12	89.21	84.3	62.65	100	2.1	72.1	100.22
17	PARE	15	95.47	58.97	52.67	98.81	1.27	71.13	85.52
18	KEPUNG	8	91.84	31.8	46.41	84.79	0	87.75	83.42
19	KANDANGAN	9	95.73	76	77.37	88.71	4.2	72.1	112.96
20	TAROKAN	2	96.01	69	45.28	100	3.5	71.1	88.94
21	KUNJANG	6	82.94	45.9	6.46	76.92	5	64.6	102.26
22	BANYAKAN	8	86.77	33.9	60.55	100	2.4	84.4	88.75
23	RINGINREJO	9	91.04	58.1	55.55	100	3.7	65.5	88.52
24	KAYEN KIDUL	4	96.57	24.1	62.09	83.53	1.4	71.55	105.12
25	NGASEM	3	86.8	0	79.39	83.05	2.3	81.3	87.72
26	BADAS	15	92.62	14.6	39.64	55.88	4	80.4	99.1

Keterangan:

Y : Jumlah kasus Angka Kematian Bayi (AKB) di Kabupaten Kediri tahun 2015 (orang)

X_1 : Prosentase ibu hamil yang mendaparkan tablet Fe (%)

X_2 : Prosentase rumah tangga yang berperilaku hidup bersih dan sehat (PHBS) (%)

X_3 : Prosentase rumah sehat (%)

X_4 : Prosentase Posyandu aktif (%)

X_5 : Prosentase berat badan lahir rendah (BBLR) menurut jenis kelamin (%)

X_6 : Prosentase bayi yang diberi Air Susu Ibu (ASI) eksklusif (%)

X_7 : Prosentase pemberian vitamin A pada bayi (%)

Lampiran 2. Uji Kolmogoov Smirnov Untuk Pemeriksaan Sebaran

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		Y
N		26
Poisson Parameter[a]	Mean	7.2308
Most Extreme Differences	Absolute	.193
	Positive	.193
	Negative	-.128
Kolmogorov-Smirnov Z		.985
Asymp. Sig. (2-tailed)		.286

a. Test distribution is Poisson.

Lampiran 3. Pemeriksaan Multikolinieritas dengan VIF

Coefficients[a]

Model		Collinearity Statistics	
		Tolerance	VIF
1	X1	.878	1.139
	X2	.733	1.364
	X3	.615	1.627
	X4	.849	1.178
	X5	.808	1.238
	X6	.587	1.705
	X7	.839	1.193

a. Dependent Variable: Y

Lampiran 4. Pemeriksaan Overdispersi

Statistics

Y

N	Valid	26
	Missing	0
Mean		7.2308
Variance		15.705

Goodness of Fit[b]

	Value	df	Value/df
Deviance	39.260	18	2.181
Scaled Deviance	39.260	18	
Pearson Chi-Square	39.072	18	2.171
Scaled Pearson Chi-Square	39.072	18	
Log Likelihood[a]	-67.447		
Akaike's Information Criterion (AIC)	150.893		
Finite Sample Corrected AIC (AICC)	159.364		
Bayesian Information Criterion (BIC)	160.958		
Consistent AIC (CAIC)	168.958		

Dependent Variable: Y

Model: (Intercept), X1, X2, X3, X4, X5, X6, X7

a. The full log likelihood function is displayed and used in computing information criteria.

b. Information criteria are in small-is-better form.

Lampiran 5. Hasil Pengujian Parameter

Tests of Model Effects

Source	Type III		
	Wald Chi-Square	df	Sig.
(Intercept)	.001	1	.980
X1	.000	1	.994
X2	3.359	1	.067
X3	5.598	1	.018
X4	.575	1	.448
X5	4.157	1	.041
X6	1.356	1	.244
X7	4.243	1	.039

Dependent Variable: Y

Model: (Intercept), X1, X2, X3, X4, X5, X6, X7

Parameter Estimates

Parameter	B	Std. Error	95% Wald Confidence Interval		Hypothesis Test		
			Lower	Upper	Wald Chi-Square	df	Sig.
(Intercept)	-.055	2.2289	-4.423	4.314	.001	1	.980
X1	.000	.0210	-.041	.041	.000	1	.994
X2	.008	.0044	.000	.017	3.359	1	.067
X3	-.011	.0047	-.020	-.002	5.598	1	.018
X4	-.003	.0045	-.012	.005	.575	1	.448
X5	-.031	.0153	-.061	-.001	4.157	1	.041
X6	.013	.0114	-.009	.036	1.356	1	.244
X7	.017	.0084	.001	.034	4.243	1	.039
(Scale)	1[a]						

Dependent Variable: Y

Model: (Intercept), X1, X2, X3, X4, X5, X6, X7

a. Fixed at the displayed value.

Lampiran 6. *Script* dengan *Software* R

```
data<-read.table(file.choose(),sep=",",header=TRUE)
attach(data)


##Generalized Poisson Regression##


library(MASS)
library(GPseq)
library(VGAM)
library(COMPoissonReg)


genp=vglm(Y~X1+X2+X3+X4+X5+X6+X7,genpoisson,trace=TRUE)


gen=summary(genp)
gen
AIC(gen)
```

Lampiran 7. Hasil Estimasi Model Regresi Poisson dan Regresi Poisson Diperumum

Regresi Poisson

```
Deviance = 42.74128 Iterations - 1
Deviance = 39.28693 Iterations - 2
Deviance = 39.26048 Iterations - 3
Deviance = 39.26048 Iterations - 4
Deviance = 39.26048 Iterations - 5
```

```
Call:
glm(formula = Y ~ X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 + X7, family = poisson,
    data = data)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.4209  -1.0595   0.1331   0.6150   2.8179

Coefficients:
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -0.0545025  2.2288866  -0.024   0.9805
X1          -0.0001551  0.0209811  -0.007   0.9941
X2           0.0080847  0.0044112   1.833   0.0668 .
X3          -0.0110177  0.0046568  -2.366   0.0180 *
X4          -0.0034260  0.0045201  -0.758   0.4485
X5          -0.0312564  0.0153301  -2.039   0.0415 *
X6           0.0132703  0.0113971   1.164   0.2443
X7           0.0173952  0.0084447   2.060   0.0394 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

    Null deviance: 55.884  on 25  degrees of freedom
Residual deviance: 39.260  on 18  degrees of freedom
AIC: 150.89

Number of Fisher Scoring iterations: 5
```

Regresi Poisson Diperumum

```
VGLM    linear loop  1 :  loglikelihood = -69.385202
VGLM    linear loop  2 :  loglikelihood = -66.615648
VGLM    linear loop  3 :  loglikelihood = -66.189144
VGLM    linear loop  4 :  loglikelihood = -66.167092
VGLM    linear loop  5 :  loglikelihood = -66.166404
VGLM    linear loop  6 :  loglikelihood = -66.166384
VGLM    linear loop  7 :  loglikelihood = -66.166383
```

```
Call:
vglm(formula = Y ~ X1 + X2 + X3 + X4 + X5 + X6 + X7, family = genpoisson,
    trace = TRUE)


Pearson residuals:
                    Min      1Q  Median     3Q   Max
rhobit(lambda) -0.6678 -0.5943 -0.3190 0.0977 4.189
loge(theta)    -2.2762 -0.7305  0.4285 0.7841 1.114

Coefficients:
               Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept):1  0.387442   0.242876   1.595   0.1107
(Intercept):2  0.112878   2.726456   0.041   0.9670
X1            -0.006465   0.025584  -0.253   0.8005
X2             0.007988   0.005392   1.482   0.1385
X3            -0.010159   0.005699  -1.783   0.0746 .
X4            -0.003632   0.005527  -0.657   0.5112
X5            -0.029608   0.017976  -1.647   0.0996 .
X6             0.014113   0.014055   1.004   0.3153
X7             0.018510   0.010441   1.773   0.0763 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Number of linear predictors:  2

Names of linear predictors: rhobit(lambda), loge(theta)

Log-likelihood: -66.1664 on 43 degrees of freedom

Number of iterations: 7

No Hauck-Donner effect found in any of the estimates
```

Vektor gradien

```
> gt1
               Y
   -0.02962467
   -0.00633512
X1 -0.72369661
X2 -0.26999178
X3 -1.67225720
X4 -0.38718159
X5  0.17450564
X6 -0.76858707
X7 -0.20533693
```

Matriks Hessian

```
> H11
             [,1]          [,2]          [,3]          [,4]
[1,] -3.6909221574 -3.234154e+02  2.420809e+00 -0.0093354154
[2,]  0.0276382371  2.421527e+00 -2.611699e-02  0.0003439449
[3,] -0.0001068246 -9.356188e-03  3.440796e-04 -0.0010099805
[4,] -0.0021514713 -1.885308e-01  1.438659e-03  0.0003223770
[5,]  0.0029779255  2.609673e-01 -1.080148e-03  0.0004625007
[6,] -0.0032685128 -2.864673e-01  5.295645e-05 -0.0001117560
[7,]  0.0065062669  5.702090e-01 -6.487580e-04 -0.0009058640
[8,]  0.0057483968  5.038542e-01  2.113375e-04  0.0004152383
```

[,5]	[,6]	[,7]	[,8]
-1.890883e-01	2.611372e-01	-2.863878e-01	0.5703138881
1.443251e-03	-1.082000e-03	5.299614e-05	-0.0006508078
3.223487e-04	4.625224e-04	-1.117721e-04	-0.0009058244
-1.241707e-03	6.715704e-05	-3.434512e-04	0.0013540533
6.750776e-05	-1.241372e-03	3.052304e-04	-0.0002249195
-3.439913e-04	3.054450e-04	-4.945620e-03	0.0016121256
1.354975e-03	-2.251344e-04	1.611893e-03	-0.0059430891
1.376741e-05	-7.015847e-04	1.895164e-03	-0.0007974256

RIWAYAT HIDUP

Lailatul Badriyah, lahir di Kediri pada tanggal 15 Juni 1995, biasa dipanggil Laila, tinggal di Desa Putih Kecamatan Gampengrejo Kabupaten Kediri. Anak kedua dari tiga bersaudara, puteri Bapak Ali Imron dan Ibu Binti Roisyah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Putih, lulus pada tahun 2007. Setelah itu melanjutkan ke MTs Negeri 2 Kediri dan lulus pada tahun 2010. Kemudian dia melanjutkan pendidikan ke SMAN 7 Kediri dan lulus pada tahun 2013. Selanjutnya, pada tahun 2013 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Malana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, dia berperan aktif pada organisadi intra dan ekstra kampus dalam rangka mengembangkan akademiknya. Organisasi intra yang diikutinya adalah Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika. Sedangkan organisasi ekstra kampus yang pernah diikuti yaitu HMI (Himpunan Mahasiswa Islam) serta pernah berkegiatan sebagai anggota Serambi Matematika di Jurusan Matematika dan MEC (Mathematic English Course).

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang
Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lailatul Badriyah
Nim : 13610079
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Estimasi Parameter Model Regresi Poisson Diperumum dengan Metode *Maximum Likelihood*
Pembimbing I : Dr. Imam Sujarwo, M.Pd
Pembimbing II : Ach. Nasichuddin, M.A

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	16 Februari 2017	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2.	20 Maret 2017	Konsultasi Bab I, II, III, dan IV	2.
3.	02 Mei 2017	Konsultasi Agama Bab I dan II	3.
4.	14 Juni 2017	ACC Bab I, II, III, dan IV	4.
5.	15 Juni 2017	ACC Agama Bab I dan II	5.
6.	4 Oktober 2018	Konsultasi Bab IV dan V	6.
7.	15 Oktober 2018	Konsultasi Agama Bab IV	7.
8.	18 Oktober 2018	ACC Keseluruhan	8.
9.	18 Oktober 2018	ACC Agama Keselurhan	9.

Malang, 18 Oktober 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001