SPEKTRUM GRAF SUBGRUP DARI GRUP SIMETRI

SKRIPSI

OLEH
DURROTUN NAFISAH
NIM. 14610069

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

SPEKTRUM GRAF SUBGRUP
DARI GRUP SIMETRI

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Durrotun Nafisah
NIM. 14610069

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

SPEKTRUM GRAF SUBGRUP
DARI GRUP SIMETRI

SKRIPSI

Oleh
Durrotun Nafisah
NIM. 14610069

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 27 Desember 2018

Pembimbing I,

Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D
NIP. 19571005 198203 1 006

Pembimbing II,

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

SPEKTRUM GRAF SUBGRUP
DARI GRUP SIMETRI

SKRIPSI

Oleh
Durrotun Nafisah
NIM. 14610069

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 10 Januari 2019

Penguji Utama	:	H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Ketua Penguji	:	Evawati Alisah, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	:	Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	....
Anggota Penguji	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Durrotun Nafisah

NIM : 14610069

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Spektrum Graf Subgrup dari Grup Simetri

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 27 Desember 2018
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
C51D2AFF488697773
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Durrotun Nafisah
NIM. 14610069

MOTO

Positive Thinking

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Bapak Romli dan ibu Khullatul Lutfiyah.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik dan hidayahNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam semoga tercurah kepada rasulullah Muhammad Saw yang telah membimbing manusia kepada ajaran yang paling benar, yakni ajaran agama Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu, ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan juga doa agar segala sesuatu yang telah diberikan dibalas oleh Allah Swt dengan balasan yang sebaik-baiknya, penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Turmudi, M.Si, Ph.D, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan ilmu, nasihat, motivasi, dan arahan kepada penulis.
5. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan ilmu, nasihat, motivasi, dan arahan kepada penulis.

6. Seluruh dosen Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah ikhlas dan sabar dalam mendidik dan memberikan ilmu kepada penulis.
7. Bapak dan ibu yang dengan ikhlas dan sabar merawat, mendidik, membesarkan penulis dan selalu memberikan doa, nasihat, dan motivasi kepada penulis.
8. KH. Yahya Dja'far dan ibu Syafiah yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk menuntut ilmu dan mendapat banyak pengalaman di PPP. Al-Hikmah Al-Fathimiyyah.
9. Teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2014 dan PPP Al-Hikmah Al-Fathimiyyah yang telah berjuang bersama dalam menuntut ilmu.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Desember 2018

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Nafisah, Durrotun. 2019. **Spektrum Graf Subgrup dari Grup Simetri**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Kata kunci: spektrum, graf subgrup, grup simetri

Misalkan G grup dan H subgrup dari G. Graf subgrup $\Gamma_H(G)$ adalah graf dengan himpunan titik semua unsur di G dan dua titik berbeda a dan b terhubung langsung di G jika dan hanya jika $ab \in H$ dan $ba \in H$. Pada penelitian ini ditentukan spektrum keterhubungan, Laplace, dan *signless* Laplace graf subgrup dari grup simetri S_n, dengan subgrup $H = \{(1)\}$. Hasil penelitian ini berupa spektrum keterhubungan, Laplace, dan *signless* Laplace dari $\Gamma_H(S_n)$ yang berkaitan langsung dengan banyaknya titik terasing pada $\Gamma_H(S_n)$ serta banyaknya sisi pada $\Gamma_H(S_n)$. Spektrum keterhubungan dari $\Gamma_H(S_n)$ adalah $spec_A(\Gamma_H(S_n)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{L_n}{2} & X_n & \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$. Spektrum Laplace dari $\Gamma_H(S_n)$ adalah $spec_L(\Gamma_H(S_n)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{L_n}{2} & X_n + \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$. Spektrum *signless* Laplace dari $\Gamma_H(S_n)$ adalah $spec_{L^+}(\Gamma_H(S_n)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{L_n}{2} & X_n + \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$, dengan X_n adalah banyaknya titik terasing pada $\Gamma_H(S_n)$ dan $\frac{L_n}{2}$ adalah banyaknya sisi pada $\Gamma_H(S_n)$, dengan L_n adalah banyaknya titik ujung.

ABSTRACT

Nafisah, Durrotun. 2019. **Spectra of Subgroup Graph of Symmetry Group**. Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Keyword: spectrum, subgroup graph, symmetry group

Let G be a group and H is subgroup of G. Subgroup graph $\Gamma_H(G)$ is a graph whose it is vertex set is all elements in G and two distinct vertices a and b are adjacent in G if and only if $ab \in H$ and $ba \in H$. This study determined the spectrum of adjacency, Laplacian, and signless Laplacian of subgroup graph of symmetry group S_n, with subgroup $H = \{(1)\}$. The results of this study related to the number of isolated vertices of $\Gamma_H(S_n)$ and the number of edges of $\Gamma_H(S_n)$. The adjacency spectrum of $\Gamma_H(S_n)$ is $spec_A(\Gamma_H(S_n)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{L_n}{2} & X_n & \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$. The Laplacian spectrum of $\Gamma_H(S_n)$ is $spec_L(\Gamma_H(S_n)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{L_n}{2} & X_n + \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$. The signless Laplacian spectrum of $\Gamma_H(S_n)$ is $spec_{L^+}(\Gamma_H(S_n)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{L_n}{2} & X_n + \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$, where X_n is the number of isolated vertices of $\Gamma_H(S_n)$ and $\frac{L_n}{2}$ is the number of edges of $\Gamma_H(S_n)$, and L_n is the number of end vertices.

ملخص

النفيسة، درة. ٢٠١٩. **Spectrum لمخطط زمرة جزئية من زمرة تناظر**. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج .المشرف: (١) الدكتور ترمذي الماجستير .(٢) الدكتور عبد الشاكر الماجستير.

الكلماتالرئيسية: *spectrum*، لمخطط زمرة جزئية، زمرة تناظر

على سبيل المثال G هو زمرة وH نورمل زمرة جزئية منG. **مخطط** زمرة جزئية $\Gamma_H\ (G)$ هو **مخطط** يحتوي على مجموعة من رؤوس لجميع العناصر G ويتم توصيل نقطتين a و b متصل مباشرة إذا **وفقط** إذا $ab \in H$ و $ba\ \in H$. في هذه الدراسة تحديد *spectrum* متجاورة، و *Laplacian* ، و *signless Laplacian* من لمخطط زمرة جزئية من زمرة تناظر S_n، ب زمرة جزئية $H\ =\ \{(1)\}$. نتائج **هذه** الدراسة هي *Spectrum* متجاورة من $\Gamma_H(S_n)$ هو $spec_A\big(\Gamma_H(S_n)\big) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{L_n}{2} & X_n & \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$، *Spectrum Laplacian* من $\Gamma_H(S_n)$ هو $spec_L\big(\Gamma_H(S_n)\big) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{L_n}{2} & X_n + \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$، *Spectrum signless Laplacian* من $\Gamma_H\big(S_n\big)$ هو $spec_{L^+}\big(\Gamma_H(S_n)\big) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{L_n}{2} & X_n + \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$. عدد قمة معزولة من $\Gamma_H(S_n)$ هو X_n، الفردية من $\Gamma_H(S_n)$ هو$\frac{L_n}{2}$، و عدد نقطة النهاية من $\Gamma_H(S_n)$ هو L_n.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sejak zaman rasulullah Saw ilmu pengetahuan telah berkembang secara pesat. Hal ini seimbang dengan ajaran Islam yang mengajarkan akan pentingnya menuntut ilmu, seperti dalam firman Allah dalam surat al-Baqarah ayat 266:

أَيَوَدُّ أَحَدُكُمْ أَن تَكُونَ لَهُ جَنَّةٌ مِّن نَّخِيلٍ وَأَعْنَابٍ تَجْرِي مِن تَحْتِهَا الْأَنْهَارُ لَهُ فِيهَا مِن كُلِّ الثَّمَرَاتِ وَأَصَابَهُ الْكِبَرُ وَلَهُ ذُرِّيَّةٌ ضُعَفَاءُ فَأَصَابَهَا إِعْصَارٌ فِيهِ نَارٌ فَاحْتَرَقَتْ كَذَٰلِكَ يُبَيِّنُ اللَّهُ لَكُمُ الْآيَاتِ لَعَلَّكُمْ تَتَفَكَّرُونَ ﴿٢٦٦﴾

"Apakah salah seorang di antaramu yang ingin mempunyai kebun kurma dan anggur yang mengalir di bawahnya sungai-sungai; dia mempunyai dalam kebun itu segala macam buah-buahan, kemudian datanglah masa tua pada orang itu sedang dia mempunyai keturunan yang masih kecil-kecil. Maka kebun itu ditiup angin keras yang mengandung api, lalu terbakarlah, dengan demikianlah Allah menerangkan ayat-ayat-Nya kepada kamu supaya kamu memikirkannya" (QS. al-Baqarah: 266).

Ayat di atas memerintahkan agar menuntut ilmu dan berpikir, sebagaimana Allah telah memberi keistimewaan akal, dan petunjuk dengan jelas. "Demikianlah Allah menerangkan ayat-ayat-Nya kepada kamu supaya kamu memikirkannya." Dalam tafsir Ibnu Katsir dijelaskan bahwa yang dimaksud dari penggalan ayat tersebut adalah agar mengambil pelajaran dan memahami perumpamaan-perumpamaan serta makna-makna yang tersirat di dalamnya dan memahaminya dengan benar sesuai dengan makna yang dimaksud. Dalam Islam mempelajari ilmu merupakan suatu kewajiban bagi setiap muslim. Ilmu termasuk di dalamnya matematika juga penting untuk dipelajari.

Matematika adalah salah satu ilmu pasti yang mengkaji abstraksi ruang, waktu, dan angka. Matematika juga mendeskripsikan realitas alam semesta dalam bahasa lambang, sehingga suatu permasalahan dalam realitas alam akan lebih mudah dipahami (Aziz dan Abdussakir, 2006). Matematika semakin berkembang dengan adanya beberapa cabang, termasuk teori graf yang di dalamnya membahas mengenai graf dan graf subgrup.

Teori graf banyak diaplikasikan dalam kehidupan sebagai alat bantu untuk menyelesaikan suatu permasalahan. Beberapa situasi yang dapat disajikan sebagai graf di antaranya berkaitan tentang molekul kimia, rencana arsitektur, jaringan listrik, dan masih banyak permasalahan lainnya. Setiap situasi di atas memiliki sistem yang terdiri dari 'objek-objek' yang saling terhubung dengan cara tertentu. Misalnya berkaitan dengan masalah rencana arsitektur, objeknya yaitu ruangan yang saling terhubung. Pada situasi seperti di atas dapat dibuat diagram dengan objek disajikan sebagai noktah dan saling keterhubungannya disajikan sebagai garis. Diagram semacam itu disebut graf. Noktah yang menyajikan objeknya disebut titik, dan garis-garis yang menunjukkan keterhubungannya disebut sisi (Robin dan John, 1992).

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sebagai sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q (Abdussakir, dkk, 2009:4)

Sisi $e = (u, v)$ (dapat ditulis $e = uv$) dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), v dan e serta u dan e disebut terkait langsung (*incident*), dan titik u dan v disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung (*adjacent*), jika terkait langsung pada satu titik yang sama (Abdussakir, dkk, 2009:6).

Misalkan G graf dengan order p $(p \geq 1)$ dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. Matriks keterhubungan titik (atau matriks keterhubungan) dari graf G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}(G)$, adalah matriks $(p \times p)$ dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain matriks keterhubungan dapat ditulis $\boldsymbol{A}(G) = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{, jika } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$ (Abdussakir, dkk, 2009:74).

Jika matriks tersebut dikaitkan dengan konsep nilai eigen dan vektor eigen pada topik aljabar *linear* maka akan menghasilkan konsep spektrum graf. Spektrum dari graf G didefinisikan dengan spektrum dari matriks keterhubungan yang merupakan himpunan dari nilai eigen bersamaan dengan multiplisitas dari nilai eigen tersebut. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari $\boldsymbol{A}(G)$, dan $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$, serta $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah multiplisitas atau banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing λ_i , $i = 1, \dots, n$, maka matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut spektrum G dan dinotasikan dengan $spec_A(G)$ (Bigg, 1994).

Matriks $L(G) = D(G) - A(G)$ dan $L^{+}(G) = D(G) + A(G)$ masing-masing disebut matriks Laplace dan *signless* Laplace dari graf G, dengan $D(G)$ adalah matriks derajat di G (Biyikoglu, dkk, 2007). Spektrum yang diperoleh dari matriks Laplace dari graf G disebut spektrum Laplace dan dinotasikan dengan $spec_L(G)$. Spektrum yang diperoleh dari matriks *signless* Laplace dari graf G disebut spektrum *signless* Laplace dan dinotasikan dengan $spec_{L^+}(G)$ (Akhadiyah, 2018).

Beberapa penelitian yang membahas tentang spektrum pernah dilakukan di antaranya, Ayyaswamy dan Balachandran (2010) meneliti spektrum *detour* pada beberapa graf meliputi graf $K(n,n)$, graf korona G dan K_1, graf perkalian kartesius G dengan K_2, graf perkalian leksikografik G dengan K_2, dan perluasan *double cover* dari graf berarturan. Nurul Faizah (2012) meneliti spektrum keterhubungan, spektrum *detour*, dan spektrum Laplace pada graf T$\ddot{u}$ran. Moh. Zainal Arifandi (2014) meneliti spektrum keterhubungan graf multipartisi komplit $K(n)(n+1)_{\alpha}$. Jog dan Kotambari (2016) meneliti spektrum keterhubungan, Laplace, dan *signless* Laplace dari gabungan graf komplit.

Terdapat juga keterkaitan antara graf dan grup, di antaranya membahas mengenai graf *commuting*, graf konjugasi, graf koset, dan graf subgrup. Penelitian yang terkait graf yang diperoleh dari grup antara lain oleh Anderson (2012) yang meneliti tentang graf subgrup dari grup. Amalia Intifaada (2014) meneliti spektrum Laplace graf *commuting* dari grup dihedral. Irnawati (2016) meneliti graf konjugasi dari subgrup di grup simetri. Vivi Alifia Kanisa (2017) meneliti tentang graf koset dari subgrup normal di grup simetri. Jutirekha Dutta dan Rajat Kanti Nath (2018) meneliti graf *commuting* dari grup berhingga.

Misalkan G grup dan H subgrup G. Misalkan $\Gamma_H(G)$ adalah graf berarah dengan himpunan titik memuat semua unsur di G dan titik x terhubung langsung ke y (atau ada busur dari x ke y) jika dan hanya jika $x \neq y$ dan $xy \in H$. Jika $xy \in H$ dan $yx \in H$ untuk suatu $x, y \in G$ dengan $x \neq y$ maka x dan y dihubungkan langsung oleh suatu sisi tak berarah. Graf $\Gamma_H(G)$ ini disebut graf subgrup dari G (Anderson, dkk, 2012).

Penelitian terkait spektrum graf subgrup pernah dilakukan oleh Kazufumi Kimoto (2017) yang meneliti tentang spektrum graf subgrup dari *pair graph*. Alinul Layali (2018) yang meneliti spektrum graf subgrup dan komplemennya dari grup dihedral. Dinda Akromatul Akhadiyah (2018) meneliti spektrum keterhubungan, Laplace, *signless* Laplace, dan *detour* graf subgrup dan komplemen graf subgrup dari grup dihedral dengan mengambil subgrup yang dibangun oleh $\langle r^2 \rangle$.

Grup simetri merupakan salah satu pokok bahasan penting dalam aljabar abstrak. Grup simetri S_n memiliki unsur sebanyak $n!$ dan bukan merupakan grup komutatif. Berdasarkan uraian di atas, peneliti tertarik untuk meneliti spektrum graf subgrup dengan mengambil grup simetri S_n yang belum pernah dibahas pada penelitian-penelitian sebelumnya. Dengan demikian penulis merumuskan judul "Spektrum Graf Subgrup dari Grup Simetri".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana spektrum keterhubungan graf subgrup dari grup simetri?
2. Bagaimana spektrum Laplace graf subgrup dari grup simetri?

3. Bagaimana spektrum *signless* Laplace graf subgrup dari grup simetri?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Mengetahui spektrum keterhubungan graf subgrup dari grup simetri.
2. Mengetahui spektrum Laplace graf subgrup dari grup simetri.
3. Mengetahui spektrum *signless* Laplace graf subgrup dari grup simetri.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Memberikan informasi mengenai spektrum keterhubungan graf subgrup dari grup simetri.
2. Memberikan informasi mengenai spektrum Laplace graf subgrup dari grup simetri.
3. Memberikan informasi mengenai spektrum *signless* Laplace graf subgrup dari grup simetri.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, spektrum graf subgrup dari grup simetri yang dibahas dibatasi hanya pada subgrup $\{(1)\}$. Dalam pengambilan data hanya diambil data dari S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, dan S_{10}. Pembahasan spektrum hanya pada spektrum keterhubungan, spektrum Laplace, dan spektrum *signless* Laplace.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini termasuk ke dalam jenis penelitian kepustakaan (*library research*). Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf, aljabar *linear*, dan aljabar abstrak. Kajian pada buku teori graf dan jurnal terkait penelitian dikhususkan pada kajian mengenai spektrum graf. Kajian pada buku-buku aljabar *linear* berkaitan dengan topik matriks serta nilai eigen. Kajian pada buku aljabar abstrak berkaitan dengan topik grup dan subgrup.

Pola pembahasannya dimulai dari hal-hal khusus menuju pada suatu generalisasi yang bersifat deduktif. Langkah-langkah penelitian adalah sebagai berikut:

1. Menentukan spektrum keterhubungan graf subgrup dari grup simetri.
   a. Menentukan unsur dari himpunan sisi pada graf subgrup dari grup simetri S_n.
   b. Menggambar graf subgrup dari grup simetri S_n
   c. Menyatakan keterhubungan titik ke dalam bentuk matriks keterhubungan.
   d. Menentukan polinomial karakteristik.
   e. Menentukan spektrum keterhubungan.
   f. Membuat konjektur tentang spektrum keterhubungan berdasarkan pola yang ditemukan.
   g. Merumuskan konjektur tentang spektrum keterhubungan sebagai suatu teorema.
   h. Menghasilkan suatu teorema tentang spektrum keterhubungan yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.

2. Menentukan spektrum Laplace graf subgrup dari grup simetri.
    a. Menentukan matriks derajat.
    b. Menentukan matriks Laplace.
    c. Menentukan polinomial karakteristik.
    d. Menentukan spektrum Laplace.
    e. Membuat konjektur tentang spektrum Laplace berdasarkan pola yang ditemukan.
    f. Merumuskan konjektur tentang spektrum Laplace sebagai suatu teorema.
    g. Menghasilkan suatu teorema tentang spektrum Laplace yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.
3. Menentukan spektrum *signless* Laplace graf subgrup dari grup simetri.
    a. Menentukan matriks *signless* Laplace.
    b. Menentukan polinomial karakteristik.
    c. Menentukan spektrum matriks *signless* Laplace.
    d. Membuat konjektur tentang spektrum *signless* Laplace berdasarkan pola yang ditemukan.
    e. Merumuskan konjektur tentang spektrum *signless* Laplace sebagai suatu teorema.
    f. Menghasilkan suatu teorema tentang spektrum *signless* Laplace yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi lebih terarah dan mudah dipahami, digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan sistematika sebagai berikut.

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka terdiri dari teori-teori yang dapat digunakan untuk menjawab rumusan masalah sehingga dapat mendukung pembahasan. Pada penelitian ini, teori yang digunakan meliputi grup, subgrup, teori graf, matriks, spektrum graf, dan keteraturan ciptaan Allah.

Bab III Pembahasan

Pembahasan berisi tentang bagaimana spektrum keterhubungan, spektrum Laplace, spektrum *signless* Laplace graf subgrup dari grup simetri dan pembuktian teorema, serta keteraturan spektrum graf.

Bab IV Penutup

Penutup berisi kesimpulan dari pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Grup

2.1.1 Operasi biner

Operasi biner $*$ pada suatu himpunan G adalah suatu fungsi $*: G \times G \to G$. Untuk setiap $a, b \in G$ dapat ditulis $a * b$ untuk $*(a, b)$. Suatu operasi biner $*$ pada himpunan tak kosong G dikatakan bersifat asosiatif jika untuk setiap $a, b, c \in G$ maka berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$. Jika $*$ merupakan operasi biner pada himpunan tak kosong G maka unsur-unsur a dan b dari G dikatakan komutatif jika berlaku $a * b = b * a$. Operasi $*$ di G dikatakan komutatif jika untup setiap $a, b \in G$ maka $a * b = b * a$ (Dummit dan Foote, 1991).

Contoh:

1. Operasi penjumlahan merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$. Operasi penjumlahan memenuhi syarat sebagai fungsi dari $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, yakni untuk setiap $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ maka $a + b \in \mathbb{Z}$, atau hasil penjumlahan dua bilangan bulat adalah bilangan bulat.
2. Operasi penjumlahan merupakan operasi biner yang bersifat asosiatif pada $\mathbb{R}$. Operasi penjumlahan memenuhi syarat sebagai fungsi dari $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, yakni untuk setiap $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ maka $a + b \in \mathbb{R}$ dan untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}$ memenuhi $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. Operasi perkalian merupakan operasi biner yang bersifat komutatif pada $\mathbb{Z}$. Operasi perkalian memenuhi syarat sebagai fungsi dari $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, yakni untuk setiap $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ maka $a \cdot b \in \mathbb{Z}$ dan $a \cdot b = b \cdot a$.

2.1.2 Definisi Grup

Suatu grup merupakan pasangan berurutan $(G, *)$ dengan G merupakan himpunan tak kosong dan $*$ merupakan operasi biner di G yang memenuhi syarat berikut:

1. Operasi $*$ bersifat asosiatif di G, yakni
   $(a * b) * c = a * (b * c), \forall\, a, b, c \in G$
2. Terdapat unsur $e \in G$ yang disebut sebagai unsur identitas dari G, sehingga
   $a * e = e * a = a, \forall\, a \in G$
3. Untuk masing-masing $a \in G$, terdapat suatu unsur $a^{-1} \in G$ yang disebut sebagai unsur invers dari a, sehingga
   $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (Dummit dan Foote, 1991).

Contoh:

1. Misal $\mathbb{Z}$ dan $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ yang didefinisikan $+(a, b) = a + b$ untuk setiap $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Pasangan berurutan $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup. $\mathbb{Z} \neq \emptyset$ dan $+$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$. Operasi $+$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$ dan terdapat $0 \in \mathbb{Z}$ sehingga $0 + a = a = a + 0$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$. Selanjutnya untuk masing-masing $a \in \mathbb{Z}$ terdapat $(-a) \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + (-a) = 0 = (-a) + a$.
2. Misal B bilangan bulat non negatif atau $B = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ dan $+ : B \times B \to B$ yang didefinisikan $+(a, b) = a + b$ untuk setiap $(a, b) \in B \times B$. Terdapat $0 \in B$ sehingga $0 + a = a = a + 0$ untuk setiap $a \in B$. Terdapat $1 \in B$ yang tidak memiliki unsur invers. Karena $(B, +)$ tidak memenuhi definisi grup maka $(B, +)$ bukan grup.

2.1.3 Sifat-sifat Grup

Teorema 2.1

Misalkan $(G, *)$ grup.

1. Unsur identitas di G tunggal
2. Untuk setiap unsur $a \in G$ terdapat a^{-1} (unsur invers) yang tunggal
3. $(a^{-1})^{-1} = a$, untuk setiap $a \in G$
4. Jika $a, b \in G$ dan $a = b$ maka $a^{-1} = b^{-1}$
5. Jika $a, b \in G$ maka $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$
6. $(a^m)^{-1} = (a^{-1})^m$, untuk setiap $a \in G$ dan $m \in \mathbb{Z}^+$ (Dummit dan Foote, 1991:19).

Bukti

Misalkan $(G, *)$ adalah grup maka

1. Jika e_1 dan e_2 keduanya unsur identitas di G, maka berdasarkan definisi grup berlaku $e_1 * e_2 = e_2$, dan $e_1 * e_2 = e_1$, sehingga diperoleh $e_2 = e_1$ atau dapat dikatakan identitas dari G adalah tunggal.
2. Jika a_1^{-1} dan a_2^{-1} keduanya invers dari $a \in G$, dan e unsur identitas di G, maka berdasarkan definisi grup berlaku

   $a_1^{-1} * a = e = a * a_1^{-1}$, dan $a_2^{-1} * a = e = a * a_2^{-1}$, sehingga

   $$\begin{aligned} a_1^{-1} &= a_1^{-1} * e \\ &= a_1^{-1} * (a * a_2^{-1}) \\ &= (a_1^{-1} * a) * a_2^{-1} \\ &= e * a_2^{-1} \\ &= a_2^{-1}. \end{aligned}$$

Jadi diperoleh $a_1^{-1} = a_2^{-1}$ atau dapat dikatakan invers dari $a \in G$ adalah tunggal.

3. Ambil $a \in G$ maka ada $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ dengan e adalah unsur identitas di G. Jika $a^{-1} \in G$ maka ada $(a^{-1})^{-1} \in G$.

$$\begin{aligned}(a^{-1})^{-1} &= (a^{-1})^{-1} * e \\ &= (a^{-1})^{-1} * (a^{-1} * a) \\ &= ((a^{-1})^{-1} * a^{-1}) * a \\ &= e * a \\ &= a\end{aligned}$$

Jadi berlaku $(a^{-1})^{-1} = a$, untuk setiap $a \in G$.

4. Karena $a, b \in G$ maka ada $a^{-1}, b^{-1} \in G$. Sehingga jika $a = b$ maka

$$\begin{aligned}a^{-1} &= a^{-1} * e \\ &= a^{-1} * (b * b^{-1}) \\ &= (a^{-1} * b) * b^{-1} \\ &= (a^{-1} * a) * b^{-1} \\ &= e * b^{-1} \\ &= b^{-1}\end{aligned}$$

Jadi jika $a, b \in G$ dan $a = b$ maka $a^{-1} = b^{-1}$.

5. Jika $a, b \in G$ maka $a * b \in G$ sehingga ada $(a * b)^{-1} \in G$.

$$\begin{aligned}(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) &= a * (b * b^{-1}) * a^{-1} \\ &= (a * e) * a^{-1} \\ &= a * a^{-1} \\ &= e\end{aligned}$$

$$(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = b^{-1} * (a^{-1} * a) * b$$
$$= (b^{-1} * e) * b$$
$$= b^{-1} * b$$
$$= e$$

Sesuai sifat ketunggalan invers, maka $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$.

6. $a^m * (a^{-1})^m = \underbrace{(a * \dots * a)}_{m\ kali} * \underbrace{(a^{-1} * \dots * a^{-1})}_{m\ kali}$

$$= \underbrace{a * \dots * a}_{(m-1)kali} * (a * a^{-1}) * \underbrace{a^{-1} * \dots * a^{-1}}_{(m-1)\ kali}$$
$$= \underbrace{a * \dots * a}_{(m-1)kali} * e * \underbrace{a^{-1} * \dots * a^{-1}}_{(m-1)\ kali}$$
$$= \underbrace{a * \dots * a}_{(m-1)kali} * \underbrace{a^{-1} * \dots * a^{-1}}_{(m-1)\ kali}$$
$$\vdots$$
$$= e$$

$(a^{-1})^m * a^m = \underbrace{(a^{-1} * \dots * a^{-1})}_{m\ kali} * \underbrace{(a * \dots * a)}_{m\ kali}$

$$= \underbrace{a^{-1} * \dots * a^{-1}}_{(m-1)\ kali} * (a * a^{-1}) * \underbrace{a * \dots * a}_{(m-1)kali}$$
$$= \underbrace{a^{-1} * \dots * a^{-1}}_{(m-1)\ kali} * e * \underbrace{a * \dots * a}_{(m-1)kali}$$
$$= \underbrace{a^{-1} * \dots * a^{-1}}_{(m-1)\ kali} * \underbrace{a * \dots * a}_{(m-1)kali}$$
$$\vdots$$
$$= e$$

Sesuai sifat ketunggalan invers, maka $(a^m)^{-1} = (a^{-1})^m$. ■

2.1.4 Order dari Suatu Unsur

Order dari suatu unsur g di grup G adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian hingga memenuhi $g^n = e$, dengan e adalah unsur identitas di G. Jika tidak terdapat bilangan bulat yang memenuhi, dapat dikatakan g memiliki order tak hingga. Order dari suatu unsur g dinotasikan dengan $|g|$ (Gallian, 2013:60).

Contoh:

1. Misalkan $(\mathbb{Z}, +)$ grup, setiap unsur taknol pada $\mathbb{Z}$ memiliki order tak hingga.
2. Misalkan $(\mathbb{Z}_4, +)$ grup bilangan bulat modulo 4 yakni $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Order dari $\bar{0}$ adalah 1, karena 1 adalah bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi $\bar{0}^1 = \bar{0}$. Order dari $\bar{1}$ adalah 4, karena 4 adalah bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi $\bar{1}^4 = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{4} = \bar{0}$. Order dari $\bar{2}$ adalah 2, karena 2 adalah bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi $\bar{2}^2 = \bar{2} + \bar{2} = \bar{4} = \bar{0}$. Order dari $\bar{3}$ adalah 4, karena 4 adalah bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi $\bar{3}^4 = \bar{3} + \bar{3} + \bar{3} + \bar{3} = \overline{12} = \bar{0}$.

Suatu unsur dari grup memiliki order satu jika dan hanya jika unsur itu identitas (Dummit dan Foote, 1991:20). Misalkan G grup, $a \in G$ dan a bukan unsur identitas. Jika $a = a^{-1}$, akibatnya $a^2 = a \circ a = a^{-1} \circ a = e$, dengan e adalah unsur identitas di G. Karena $2 \in \mathbb{Z}^+$ dan $1 < 2$ tidak memenuhi $a^1 = e$, maka diperoleh $2 = |a|$. Jika $|a| = 2$ artinya $a^2 = e$, akibatnya $a \circ a = a^2 = e = a \circ a^{-1}$, maka $a = a^{-1}$. Sehingga dapat diperoleh sifat unsur berorder dua pada grup memiliki unsur invers dirinya sendiri atau dapat ditulis, $a \in G$ dengan $|a| = 2$ jika dan hanya jika $a = a^{-1}$.

Misalkan G grup, $a \in G$. Berdasarkan sifat $|a| = 2$ jika dan hanya jika $a = a^{-1}$ serta sifat ketunggalan dari unsur identitas, maka diperoleh pernyataan bahwa $a \in G$ dengan $|a| \leq 2$ jika dan hanya jika $a = a^{-1}$. Akibatnya diperoleh pernyataan yang ekuivalen sebagai berikut, $|a| > 2$ dan a unsur di G jika dan hanya jika $a \neq a^{-1}$, atau unsur berorder lebih dari dua pada grup memiliki unsur invers yang tidak sama dengan dirinya sendiri.

Teorema 2.2

Misalkan G grup dan $a \in G$ maka $|a| = |a^{-1}|$.

Bukti

Andaikan $|a| = m$ dan $|a^{-1}| = n$ dengan $m \neq n$. $|a| = m$ berarti $a^m = e$ dengan e adalah unsur identitas di G. Jika $a^m = e$ diperoleh $(a^m)^{-1} = e^{-1}$, akibatnya $(a^{-1})^m = e$. Jadi $|a^{-1}| \leq m$ atau $n \leq m$.

Sementara $|a^{-1}| = n$ berarti $(a^{-1})^n = e$. Jika $(a^{-1})^n = e$ maka $(a^n)^{-1} = e$, akibatnya $((a^n)^{-1})^{-1} = e^{-1}$ dan diperoleh $(a^n) = e$. Jadi $|a| \leq n$ atau $m \leq n$. Karena $m \leq n$ dan $n \leq m$ maka $m = n$. Kontradiksi dengan pengandaian. Jadi $|a| = |a^{-1}|$. ■

2.2 Grup Simetri

2.2.1 Definisi Grup Simetri

Misal Ω adalah sebarang himpunan tak kosong dan misal S_Ω adalah himpunan yang memuat semua fungsi-fungsi bijektif dari Ω ke Ω (atau himpunan yang memuat semua permutasi pada Ω). Himpunan S_Ω dengan komposisi fungsi $\circ$ atau $(S_\Omega, \circ)$ merupakan grup. Komposisi fungsi $\circ$ merupakan suatu operasi biner pada S_Ω karena jika $\sigma: \Omega \to \Omega$ dan $\tau: \Omega \to \Omega$ adalah fungsi-fungsi bijektif, maka $\sigma \circ$

τ juga merupakan fungsi bijektif dari Ω ke Ω. Selanjutnya operasi $\circ$ adalah komposisi fungsi yang bersifat asosiatif. Identitas dari S_Ω merupakan permutasi 1 yang didefinisikan dengan $1(a) = a$, untuk setiap $a \in \Omega$. Untuk setiap permutasi $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$ terdapat fungsi invers $\sigma^{-1} : \Omega \rightarrow \Omega$ yang memenuhi $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1$. Dengan demikian semua syarat grup dipenuhi oleh $(S_\Omega, \circ)$. Grup $(S_\Omega, \circ)$ disebut grup simetri pada himpunan Ω (Dummit dan Foote, 1991:28).

Kasus khusus jika $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, grup simetri pada Ω dapat dinotasikan dengan S_n. Suatu sikel adalah deretan bilangan bulat yang merepresentasikan unsur-unsur dari S_n yang mempermutasikan sikelnya dari bilangan bulat. Panjang sikel adalah banyaknya bilangan bulat yang terdapat pada sikel tersebut. Suatu sikel dengan panjang t disebut sikel-t dan dua sikel dikatakan saling asing jika memuat bilangan bulat yang tidak sama (Dummit dan Foote, 1991:30).

Contoh: Misalkan S_3 merupakan himpunan semua fungsi bijektif dari $\{1,2,3\}$ ke $\{1,2,3\}$. Himpunan S_3 dengan komposisi fungsi adalah grup dengan enam unsur, yaitu $(1), (123), (132), (23), (13), (12)$. Pada himpunan S_3 unsur (1) dapat juga ditulis $(1)(2)(3)$ memiliki panjang sikel 1 untuk masing-masing sikelnya. Unsur (123) dan (132) memiliki panjang sikel 3. Unsur (13) dan (23) tidak saling asing, sedangkan unsur (1) dan (23) saling asing. Order dari unsur-unsur di S_3 yakni, untuk (1) maka $|(1)| = 1$ karena (1) adalah identitas di S_3. Untuk (12), $(12)^2 = (12) \circ (12) = (1)$, karena $2 \in \mathbb{Z}^+$ dan $1 < 2$ tidak memenuhi $(12)^1 = (1)$ maka order (12) adalah 2. Untuk (123), $(123)^3 = (123) \circ (123) \circ (123) = (132) \circ (123) = (1)$, karena 3 adalah bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi $(123)^3 = (1)$ maka order (123) adalah 3.

2.2.2 Sifat-sifat Unsur pada Grup Simetri

Teorema 2.3

Jika $a \in S_n$ dan a merupakan sikel-2 maka a^2 adalah identitas.

Bukti

Ambil $a = (a_1 a_2)$, maka $a^2 = a \circ a = (a_1 a_2) \circ (a_1 a_2) = (a_1)(a_2) = (1)$.

■

Teorema 2.4

Jika $a \in S_n$ dan a merupakan rangkaian sikel-2 maka $|a| = 2$.

Bukti

$a \in S_n$ dengan a merupakan rangkaian sikel-2, a dapat dinyatakan dengan $a = (a_1 a_2)(a_3 a_4) \dots (a_{k-1} a_k)$ dengan $k \leq n$.

$$\begin{aligned} a^2 &= a \circ a \\ &= (a_1 a_2)(a_3 a_4) \dots (a_{k-1} a_k) \circ (a_1 a_2)(a_3 a_4) \dots (a_{k-1} a_k) \\ &= (a_1 a_2) \circ (a_1 a_2)(a_3 a_4) \circ (a_3 a_4) \dots (a_{k-1} a_k) \circ (a_{k-1} a_k) \\ &= (a_1 a_2)^2 (a_3 a_4)^2 \dots (a_{k-1} a_k)^2 \\ &= (1)(1) \dots (1) \\ &= (1) \end{aligned}$$

Jadi $|a| = 2$, untuk a rangkaian sikel-2. ■

Adanya beberapa sifat pada unsur di suatu grup, yang dibedakan antara unsur berorder lebih dari dua dan unsur yang berorder kurang dari tiga. Maka menarik untuk diselidiki banyaknya unsur pada grup simetri S_n yang berorder kurang dari tiga serta yang berorder lebih dari dua.

Teorema 2.5

Banyaknya unsur pada S_n yang memiliki order kurang dari tiga adalah

$$X_n = \begin{cases} 1 + \Sigma_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{n!}{2^m m!(n-2m)!} & , \ n \text{ ganjil} \\ 1 + \Sigma_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{2^m m!\,(n-2m)!} & , \ n \text{ genap} \end{cases}.$$

Bukti

Misal $a \in S_n$, sehingga $|a| < 3$, yaitu $a \in S_n$, dengan $|a| = 1$ atau $|a| = 2$. Untuk $a \in S_n$ dengan $|a| = 1$, maka a adalah unsur identitas. Berdasarkan sifat grup bahwa unsur identitas adalah tunggal maka banyaknya unsur pada S_n yang memiliki order sama dengan satu ada sebanyak 1.

Untuk $a \in S_n$ dengan $|a| = 2$, haruslah unsur tersebut merupakan rangkaian sikel-2. Misalkan $a \in S_n$ dengan banyaknya sikel-2 adalah m maka banyaknya a dapat dicari dengan cara berikut.

$$\frac{\prod_{j=1}^{m} C_2^{n-2(j-1)} \prod_{i=1}^{n-2m} C_1^i}{m!\,(n-2m)!} = \frac{C_2^{n-2(0)} \ldots C_2^{n-2(m-1)} C_1^1 C_1^2 \ldots C_1^{n-2m}}{m!\,(n-2m)!}$$

$$= \frac{C_2^n C_2^{n-2} \ldots C_2^{n-2m+2} C_1^{n-2m} C_1^{n-2m-1} \ldots C_1^1}{m!\,(n-2m)!}$$

$$= \frac{\left(\frac{n!}{2^m\,(1^{n-2m})}\right)}{m!\,(n-2m)!}$$

$$= \frac{n!}{2^m\, m!\,(n-2m)!}.$$

Karena $a \in S_n$ berarti a merupakan permutasi n, maka untuk a yang merupakan rangkaian dari sikel-2, a dapat terdiri dari sikel-2 sebanyak m, dengan $m = 1, 2, \ldots \frac{n}{2}$ untuk n genap dan $m = 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}$ untuk n ganjil.

Sehingga banyaknya $a \in S_n$ yang terdiri dari sikel-2 adalah $\Sigma_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{2^m\, m!\,(n-2m)!}$ untuk n genap dan $\Sigma_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{n!}{2^m\, m!\,(n-2m)!}$ untuk n ganjil.

Jadi diperoleh banyaknya unsur pada S_n yang memiliki order kurang dari tiga,

adalah $X_n = \begin{cases} 1 + \Sigma_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{n!}{2^m\, m!\,(n-2m)!} & , n \text{ ganjil} \\ 1 + \Sigma_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{2^m\, m!\,(n-2m)!} & , n \text{ genap} \end{cases}$. ■

Setelah diperoleh banyaknya unsur pada S_n yang memiliki order kurang dari tiga, maka banyaknya unsur pada S_n yang memiliki order lebih dari dua dapat dicari dengan mengurangkan $|S_n|$ dengan banyaknya unsur pada S_n yang memiliki order kurang dari tiga.

Teorema 2.6

Banyaknya unsur pada S_n yang memiliki order lebih dari dua adalah $L_n = n! - X_n$, dengan X_n adalah banyaknya unsur pada S_n yang memiliki order kurang dari tiga.

Bukti

Banyaknya unsur pada S_n adalah $n!$, karena S_n memuat semua permutasi dari himpunan yang kardinalitasnya sama dengan n. Sesuai definisi order, maka diperoleh untuk setiap $a \in S_n$, maka $|a| \geq 1$. Sehingga diperoleh

$$S_n = A \cup B, \text{ dengan } A = \{a \in S_n \mid |a| < 3\}, B = \{a \in S_n \mid |a| \geq 3\}.$$

Karena $A \cap B = \emptyset$, akibatnya $S_n \backslash A = A^c = B$ sehingga banyaknya unsur pada S_n yang memiliki order lebih dari dua yaitu banyaknya unsur S_n dikurangi banyaknya unsur pada S_n yang memiliki order kurang dari tiga, dapat ditulis banyaknya unsur pada S_n yang memiliki order lebih dari dua adalah $L_n = n! - X_n$. ■

Teorema 2.7

Banyaknya unsur pada S_n yang memiliki order lebih dari dua yaitu L_n adalah genap.

Bukti

Misalkan B adalah himpunan semua anggota S_n yang berorder lebih dari dua. Misalkan $a \in B$ maka $a \neq a^{-1}$, dan $|a| = |a^{-1}| > 2$. Jadi $a^{-1} \in B$. Karena setiap unsur hanya memilki satu invers, maka B memuat pasangan unsur yang saling invers. Jadi $|B| = L_n$ adalah genap. ■

Berdasarkan Teorema 2.7, karena L_n genap dan $|S_n| = n! = 2 \cdot (3 \cdot 4 \cdot ... \cdot n)$ adalah genap, maka $X_n = n! - L_n$ adalah genap.

2.3 Subgrup

2.3.1 Definisi Subgrup

Misal $(G, *)$ adalah grup yang memenuhi operasi biner $*$. Suatu himpunan bagian H dari G disebut subgrup dari G jika H membentuk grup terhadap operasi biner $*$ yang terdefinisi di G (Gilbert dan Gilbert, 2009).

H subgrup dari G dapat dinotasikan oleh $H \leq G$. Jika H subgrup dari G dan $H \neq G$, maka dapat menggunakan notasi $H < G$, dan H disebut subgrup sejati. Subgrup $\{e\}$ dengan e adalah unsur identitas di G dikatakan sebagai subgrup trivial dari G, sementara subgrup yang tidak sama dengan $\{e\}$ dikatakan sebagai subgrup non trivial dari G (Gallian, 2013:61).

Contoh: Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan merupakan suatu grup. Misalkan dibentuk himpunan bagian dari $\mathbb{Z}$ yaitu $2\mathbb{Z}$ yang didefinisikan $2\mathbb{Z} = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$. Himpunan $2\mathbb{Z}$ dengan operasi yang sama dengan operasi pada $\mathbb{Z}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}$.

2.3.2 Subgrup Normal

Misalkan H subgrup dari grup G dengan operasi perkalian, dan a adalah sebarang unsur di G. Himpunan $Ha = \{ha | h \in H\}$ dan $aH = \{ah | h \in H\}$ berturut-turut disebut koset kanan dan koset kiri dari H di G yang dibangkitkan oleh a (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:181).

Subgrup H dari grup G disebut subgrup normal dari G jika $aH = Ha$ untuk semua $a \in G$ dan dinotasikan dengan $H \trianglelefteq G$. Jika G grup komutatif maka semua subgrup di G adalah subgrup normal karena $h = eh = gg^{-1}h = ghg^{-1} \in H$ untuk semua $h \in H$ dan $g \in G$ (Gallian, 2012).

Contoh: Diberikan grup simetri S_3 dan $H = \{(1), (123), (132)\}$ adalah subgrup dari S_3. Koset kanan dari H di S_3 adalah

$$H(1) = H(123) = H(132) = \{(1), (123), (132)\}$$

$$H(12) = H(13) = H(32) = \{(12), (13), (32)\}$$

sedangkan koset kiri dari H di S_3 adalah

$$(1)H = (123)H = (132)H = \{(1), (123), (132)\}$$

$$(12)H = (13)H = (32)H = \{(12), (13), (32)\}.$$

Karena koset kanan sama dengan koset kiri untuk setiap unsur di S_3, maka H adalah subgrup normal dari S_3.

2.4 Graf

2.4.1 Definisi Graf

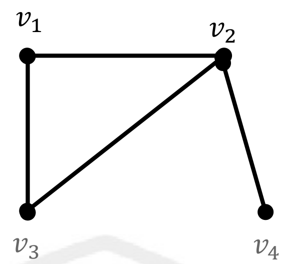
Graf G adalah pasangan $\left(V(G), E(G)\right)$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sebagai sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di G disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q (Abdussakir, dkk, 2009:4).

Sisi $e = (u, v)$ (dapat ditulis $e = uv$) dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), v dan e serta u dan e disebut terkait langsung (*incident*), dan titik u dan v disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung (*adjacent*), jika terkait langsung pada satu titik yang sama (Abdussakir, dkk, 2009:6).

Contoh: Misalkan $G1$ graf yang memuat himpunan titik dan himpunan sisi seperti berikut ini.

$V(G1) = \{v_1, v_2, v_3\}$

$E(G1) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_4)\}$. Graf $G1$ dapat digambar seperti berikut



Gambar 2.1 Graf $G1$

Dari definsi graf, dapat diketahui bahwa order graf $G1$ adalah $p = 5$ dan ukuran graf $G1$ adalah $q = 4$. Berdasarkan gambar graf $G1$, maka titik v_1 dan v_2 terhubung langsung, demikian juga dengan v_1 dan v_3, v_2 dan v_3, serta v_2 dan v_4. Titik v_1 dan v_4 tidak terhubung langsung, demikian juga dengan titik v_3 dan v_4. Sisi (v_1, v_2) terkait langsung dengan titik v_1 dan v_2, tetapi tidak terkait langsung dengan titik v_3 dan v_4. Sisi (v_2, v_3) terkait langsung dengan titik v_2 dan v_3, tetapi tidak terkait langsung dengan titik v_1 dan v_4. Sisi (v_1, v_2) dan (v_2, v_3) terhubung langsung, sementara sisi (v_1, v_3) dan (v_2, v_4) tidak terhubung langsung.

2.4.2 Derajat Titik

Jika v adalah titik pada graf G, maka himpunan semua titik di G yang terhubung langsung dengan v disebut lingkungan dari v dan ditulis $N_G(v)$. Derajat dari titik v di graf G, ditulis $\deg_G(v)$ adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik v di graf G adalah banyaknya anggota dalam $N_G(v)$. Jadi $\deg_G(v) = |N_G(v)|$ (Abdussakir, dkk, 2009:9).

Titik yang berderajat 0 disebut titik terasing atau titik terisolasi. Titik yang berderajat 1 disebut titik ujung atau titik akhir. Titik yang berderajat genap disebut titik genap dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil. Derajat maksimum titik di G dilambangkan dengan $\Delta(G)$ dan derajat minimum titik di G dilambangkan dengan $\delta(G)$ (Abdussakir, dkk, 2009:9).

Teorema 2.8

Misalkan G graf dengan order p dan ukuran q, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Maka $\sum_{i=1}^{p} \deg_G(v_i) = 2q$ (Abdussakir, dkk, 2009).

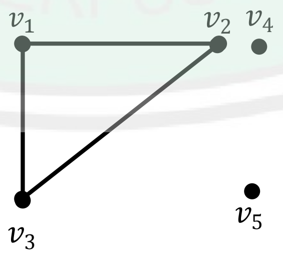
Bukti

Setiap menghitung derajat suatu titik di G, maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di G sama dengan 2 kali jumlah sisi di G. Terbukti bahwa $\sum_{i=1}^{p} \deg_G(v_i) = 2q$. ■

Contoh: Misalkan $G2$ graf yang memuat himpunan titik dan himpunan sisi seperti berikut ini.

$V(G2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(G2) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\}$. Graf $G2$ dapat digambar seperti berikut



Gambar 2.2 Graf $G2$

Dari definsi graf, diperoleh bahwa derajat maksimum di $G2$ adalah $\Delta(G2) = 2$ dan derajat minimum di $G2$ adalah $\delta(G2) = 0$. Semua titik di $G2$ adalah titik genap, karena memiliki derajat genap. Sementara titik v_4

dan v_5 juga dapat disebut sebagai titik terasing karena memiliki derajat 0. Sementara order graf $G2$ adalah $p = 5$, dengan menggunakan Teorema 2.8 dapat diperoleh ukuran graf $G2$ adalah $q = \frac{\sum_{i=1}^{5} \deg_G(v_i)}{2} = \frac{2+2+2+0+0}{2} = 3$, sesuai pada Gambar 2.2.

2.4.3 Graf Terhubung

Misalkan G graf. Misalkan u dan v adalah titik di G (yang tidak harus berbeda). Jalan u-v pada graf G adalah barisan berhingga yang berselang-seling

$$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n = v$$

antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan

$$e_i = v_{i-1}v_i \ , \quad i = 1,2,3, \dots, n$$

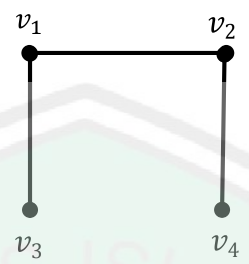
adalah sisi di G. v_0 disebut titik awal, dan v_n disebut titik akhir, titik $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ disebut titik interval, dan n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut jalan terbuka. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut jalan tertutup. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut jalan trivial. Jalan W yang semua sisinya berbeda disebut *trail*. Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut lintasan (Abdussakir, dkk, 2009:49).

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Titik u dan v dikatakan terhubung, jika terdapat lintasan u-v di G. Suatu graf G juga dikatakan terhubung, jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terhubung. Sebaliknya jika ada dua titik u dan v di G, tetapi tidak terdapat lintasan u-v di G, maka G dikatakan tak terhubung (Abdussakir, dkk, 2009:55).

Contoh: Misalkan $G3$ graf yang memuat himpunan titik dan himpunan sisi seperti berikut ini.

$V(G3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E(G3) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_4)\}$. Graf $G3$ dapat digambar seperti berikut



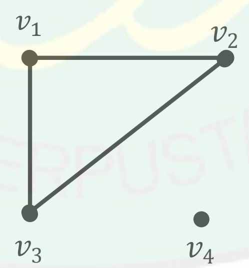
Gambar 2.3 Graf $G3$

Graf $G3$ adalah graf terhubung, karena untuk setiap dua titik berbeda di $G3$ terhubung.

Contoh: Misalkan $G4$ graf yang memuat himpunan titik dan himpunan sisi seperti berikut ini.

$V(G4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$E(G4) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\}$. Graf $G4$ dapat digambar seperti berikut



Gambar 2.4 Graf $G4$

Graf $G4$ adalah graf tak terhubung, karena ada titik v_4 yang tidak terhubung dengan titik lain di $G4$.

2.4.4 Graf Subgrup

Misalkan G grup dan H subgrup G. Misalkan $\Gamma_H(G)$ adalah graf berarah dengan himpunan titik memuat semua unsur di G dan titik x terhubung langsung ke

y (atau ada busur dari x ke y) jika dan hanya jika $x \neq y$ dan $xy \in H$. Jika $xy \in H$ dan $yx \in H$ untuk suatu $x, y \in G$ dengan $x \neq y$ maka x dan y dihubungkan langsung oleh suatu sisi tak berarah. Graf $\Gamma_H(G)$ ini disebut graf subgrup dari G (Anderson, dkk, 2012).

Contoh: Misalkan $S = \{(1), (123), (132)\}$. S dengan operasi komposisi fungsi $\circ$ adalah grup. $A = \{(1)\}$ merupakan subgrup dari S. Dua unsur di S jika dioperasikan menggunakan komposisi fungsi dapat dilihat seperti pada Tabel 2.1 berikut

Tabel 2.1 Tabel Cayley Grup S

$\circ$	(1)	(123)	(132)
(1)	(1)	(123)	(132)
(123)	(123)	(132)	(1)
(132)	(132)	(1)	(123)

Titik graf subgrup A dari grup S adalah $V(\Gamma_A(S)) = S = \{(1), (123), (132)\}$. Dari Tabel 2.1, warna hijau menunjukkan unsur-unsur di S sedemikian sehingga jika dioperasikan hasil operasinya di A. Sehingga dapat digambarkan graf subgrup berikut

Gambar 2.5 Graf $\Gamma_A(S)$

2.5 Graf Subgrup dari Grup Simetri

2.5.1 Sisi pada Graf Subgrup dari Grup Simetri

Teorema 2.9

Misalkan a unsur di grup simetri S_n dan $H = \{(1)\}$ subgrup dari S_n. $|a| > 2$ jika dan hanya jika $(a, a^{-1}) \in E(\Gamma_H(S_n))$.

Bukti

($\Longrightarrow$) Akan dibuktikan pernyataan jika $a \in S_n$ dengan $|a| > 2$ maka $(a, a^{-1}) \in E(\Gamma_H(S_n))$. Berdasarkan sifat unsur yang berorder lebih dari dua pada grup, dapat dinyatakan bahwa jika $a \in S_n$ dengan $|a| > 2$ maka $a \neq a^{-1}$. Jika $a \neq a^{-1}$ dengan a termuat pada grup simetri S_n yang memenuhi $a \circ a^{-1} = (1) = a^{-1} \circ a$ dan $H = \{(1)\}$, akibatnya $(a, a^{-1}) \in E(\Gamma_H(S_n))$. Sehingga terbukti bahwa jika $a \in S_n$ dengan $|a| > 2$ maka $(a, a^{-1}) \in E(\Gamma_H(S_n))$.

($\Longleftarrow$) Akan dibuktikan pernyataan jika $(a, a^{-1}) \in E(\Gamma_H(S_n))$ maka $|a| > 2$. Karena $(a, a^{-1}) \in E(\Gamma_H(S_n))$ maka $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a \in H$. Jadi $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = (1)$. Karena sisi di graf memasangkan titik berbeda berarti $a \neq a^{-1}$. Jadi $|a| > 2$.

Terbukti pernyataan pada teorema adalah benar. ■

2.5.2 Titik pada Graf Subgrup dari Grup Simetri

Teorema 2.10

Misalkan S_n grup simetri orde $n!$ dan $H = \{(1)\}$ subgrup di S_n. Jika $(a, a^{-1}) \in E(\Gamma_H(S_n))$ maka $\deg_{(\Gamma_H(S_n))}(a) = 1$.

Bukti

Karena $(a, a^{-1}) \in E(\Gamma_H(S_n))$ berarti titik a terhubung langsung ke titik a^{-1} di $\Gamma_H(S_n)$. Jadi $\deg_{(\Gamma_H(S_n))}(a) \geq 1$. Andaikan $\deg_{(\Gamma_H(S_n))}(a) > 1$ artinya ada titik lain $b \neq a^{-1}$ sehingga $a \circ b \in H$ dan $b \circ a \in H$. Karena $H = \{(1)\}$ maka $a \circ b = b \circ a = (1)$. Berarti $b \neq a^{-1}$ adalah invers dari a. Kontradiksi dengan sifat grup, bahwa untuk setiap unsur hanya memiliki satu invers. Jadi pengandaian $\deg_{(\Gamma_H(S_n))}(a) > 1$ salah.

Terbukti $\deg_{(\Gamma_H(S_n))}(a) = 1$. ■

Corollary 2.11

Misalkan S_n grup simetri orde $n!$ dan $H = \{(1)\}$ subgrup di S_n. Misal $a \in V(\Gamma_H(S_n))$, jika $|a| > 2$ maka $\deg_{(\Gamma_H(S_n))}(a) = 1$.

Bukti

Jika $|a| > 2$ maka $(a, a^{-1}) \in E(\Gamma_H(S_n))$, akibatnya $\deg_{(\Gamma_H(S_n))}(a) = 1$.

Terbukti jika $|a| > 2$ maka $\deg_{(\Gamma_H(S_n))}(a) = 1$. ■

Corollary 2.12

Misalkan S_n grup simetri orde $n!$ dan $H = \{(1)\}$ subgrup di S_n. Misal $a \in V(\Gamma_H(S_n))$, jika $|a| < 3$ maka $\deg_{(\Gamma_H(S_n))}(a) = 0$.

Bukti

Misal $a \in V(\Gamma_H(S_n))$, artinya $a \in S_n$. Jika $a \in S_n$ dengan $|a| < 3$, berarti $|a| = 2$ atau $|a| = 1$.

$|a| = 2$ berarti $a = a^{-1}$, dan $|a| = 1$ berarti $a = (1)$ dengan (1) unsur identitas di S_n. Karena sisi pada graf hanya menghubungkan langsung dua titik yang berbeda, maka tidak ada sisi (a, a) dan $((1), (1))$ pada $\Gamma_H\,(S_n)$. Jadi $\deg_{(\Gamma_H\,(S_n))}(a) = 0$ untuk $|a| < 3$. ■

Corollary 2.13

Misalkan S_n grup simetri orde $n!$ dan $H = \{(1)\}$ subgrup di S_n. Banyaknya titik ujung pada $\Gamma_H\,(S_n)$ adalah L_n dan banyaknya titik terasing pada $\Gamma_H\,(S_n)$ adalah X_n.

Bukti

Karena $\Gamma_H\,(S_n)$ graf subgrup, akibatnya $V(\Gamma_H\,(S_n)) = S_n$, dengan S_n memuat unsur yang berorder kurang dari tiga serta memuat unsur yang beroder lebih dari dua. Berdasarkan Teorema 2.5 dan Teorena 2.6 maka banyaknya unsur berorder kurang dari tiga sebanyak X_n dan banyaknya unsur yang berorder lebih dari dua sebanyak L_n. Sesuai *Corollary 2.11* dan *Corollary 2.12* maka banyaknya titik yang berderajat satu pada $\Gamma_H\,(S_n)$ adalah L_n dan banyaknya titik yang berderajat nol pada $\Gamma_H\,(S_n)$ adalah X_n. ■

2.5.3 Ukuran pada Graf Subgrup dari Grup Simetri

Corollary 2.14

Misalkan S_n grup simetri dan $H = \{(1)\}$ subgrup dari S_n. Banyaknya sisi pada $\Gamma_H(S_n)$ adalah $\frac{L_n}{2}$.

Bukti

Berdasarkan *Corollary 2.13* maka titik berderajat satu di $\Gamma_H\,(S_n)$ sebanyak L_n dan lainnya berderajat 0. Karena sisi hanya memasangkan dua titik di $\Gamma_H\,(S_n)$ dan L_n genap maka $q(\Gamma_H\,(S_n)) = \frac{L_n}{2}$. ■

2.6 Graf dan Matriks

2.6.1 Matriks Keterhubungan dari Graf

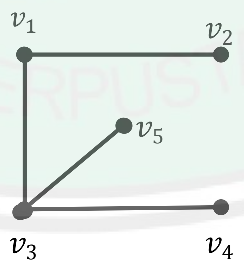
Misalkan G graf dengan order p $(p \geq 1)$ dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Matriks keterhubungan titik (atau matriks keterhubungan) dari graf G dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}(G)$, adalah matriks $(p \times p)$ dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain matriks keterhubungan dapat ditulis $\boldsymbol{A}(G) = [a_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & \text{, jika } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$ (Abdussakir, dkk, 2009:74).

Contoh: Misalkan $G5$ graf yang memuat himpunan titik dan himpunan sisi seperti berikut ini.

$V(G5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(G5) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_5)\}$. Graf $G5$ dapat digambar seperti berikut



Gambar 2.6 Graf $G5$

Matriks keterhubungan dari graf $G5$ adalah

$$\boldsymbol{A}(G5) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

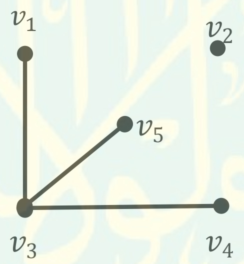
2.6.2 Matriks Derajat

Misalkan graf G dengan order p serta $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. Matriks derajat dari graf G dinotasikan dengan $\boldsymbol{D}(G)$, merupakan matriks $(p \times p)$ dengan unsur baris ke-i dan kolom ke-i merupakan derajat dari $v_i, i = 1, 2, \dots, p$ (Biyikoglu, dkk, 2007).

Contoh: Misalkan $G6$ graf yang memuat himpunan titik dan himpunan sisi seperti berikut ini.

$V(G6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(G6) = \{(v_1, v_3), (v_3, v_4), (v_3, v_5)\}$. Graf $G6$ dapat digambar seperti berikut



Gambar 2.7 Graf $G6$

Matriks derajat dari graf $G6$ adalah $\boldsymbol{D}(G6) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$

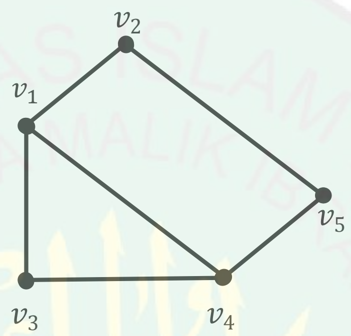
2.6.3 Matriks Laplace dari Graf

Misal $G(V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik V dan himpuan sisi E. Matriks Laplace dari G adalah matriks $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G)$, dengan $\boldsymbol{D}(G)$ adalah matriks derajat dari G dan $\boldsymbol{A}(G)$ adalah matriks keterhubungan dari G (Biyikoglu, dkk, 2007).

Contoh: Misalkan $G7$ graf yang memuat himpunan titik dan himpunan sisi seperti berikut ini.

$V(G7) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(G7) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_4), (v_4, v_5)\}$. Graf $G7$ dapat digambar seperti berikut



Gambar 2.8 Graf $G7$

Dari Gambar 2.8 dapat diperoleh matriks derajat dan matriks keterhubungan dari $G7$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{D}(G7) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{A}(G7) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Berdasarkan matriks derajat dan matriks keterhubungan, maka diperoleh matriks Laplace dari graf $G7$ adalah sebagai berikut

$\boldsymbol{L}(G7) = \boldsymbol{D}(G7) - \boldsymbol{A}(G7)$

$$= \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} - \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

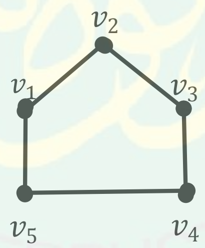
2.6.4 Matriks *Signless* Laplace dari Graf

Misal G adalah graf. Matriks *signless* Laplace dari G adalah matriks $\boldsymbol{L}^{+}(G) = \boldsymbol{D}(G) + \boldsymbol{A}(G)$, dengan $\boldsymbol{D}(G)$ adalah matriks derajat dari G dan $\boldsymbol{A}(G)$ adalah matriks keterhubungan dari G (Biyikoglu, dkk, 2007).

Contoh: Misalkan $G8$ graf yang memuat himpunan titik dan himpunan sisi seperti berikut ini.

$V(G8) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(G8) = \{(v_1, v_5), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5)\}$. Graf $G8$ dapat digambar seperti berikut



Gambar 2.9 Graf $G8$

Dari Gambar 2.9 dapat diperoleh matriks derajat dan matriks keterhubungan dari $G8$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{D}(G8) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{A}(G8) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Berdasarkan matriks derajat dan matriks keterhubungan, maka diperoleh matriks *signless* Laplace dari graf $G8$ adalah sebagai berikut

$$\boldsymbol{L}(G8) = \boldsymbol{D}(G8) + \boldsymbol{A}(G8)$$

$$= \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

2.7 Spektrum Graf

Misalkan G adalah graf berorder n dan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks keterhubungan dari graf G. Suatu vektor taknol x disebut suatu vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$, jika $\boldsymbol{A}x$ adalah suatu kelipatan skalar dari x yaitu, $\boldsymbol{A}x = \lambda x$ untuk skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$, dan x disebut vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan λ (Anton, 2000).

Untuk mencari nilai eigen dari suatu matriks $\boldsymbol{A}$ yang berukuran $(n \times n)$ dapat ditulis ulang $\boldsymbol{A}x = \lambda x$ sebagai $\boldsymbol{A}x = \lambda \boldsymbol{I}x$ atau ekuivalen dengan $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})x = 0$, dengan $\boldsymbol{I}$ merupakan matriks identitas berukuran $(n \times n)$. Persamaan tersebut akan mempunyai selesaian taknol jika dan hanya jika matriks $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$ tidak punya invers, akibatnya $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$.

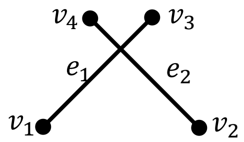
Persamaan $\det(\boldsymbol{A} - \lambda I) = 0$ disebut persamaan karateristik matriks $\boldsymbol{A}$ dan skalar yang memenuhi persamaan ini disebut nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$. $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$ adalah suatu polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai polinomial karakteristik matriks $\boldsymbol{A}$. Jika $\boldsymbol{A}$ adalah suatu matriks $(n \times n)$, maka polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}$ memiliki derajat n dan koefisien variabel λ^n adalah 1. Polinomial karakteristik dari suatu matriks $(n \times n)$ memiliki bentuk $p(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$. Vektor-vektor eigen matriks $\boldsymbol{A}$ yang terkait dengan nilai eigen λ adalah vektor-vektor taknol dalam ruang solusi $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})x = 0$ (Anton, 2000).

Misalkan G graf berorder n dan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks keterhubungan dari graf G. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ $(r \leq n)$ adalah nilai eigen berbeda dari $\boldsymbol{A}$, dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_r$, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_r)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing λ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$. Maka matriks berordo $(2 \times r)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1)$, $m(\lambda_2), \ldots, m(\lambda_r)$ pada baris kedua disebut spektrum keterhubungan graf G, dan dinotasikan dengan $spec_A(G)$. Jadi, spektrum keterhubungan graf G dapat ditulis dengan $spec_A(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_r \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \ldots & m(\lambda_r) \end{bmatrix}$ (Bigg, 1994).

Spektrum yang diperoleh dari matriks Laplace dari graf G disebut spektrum Laplace dan dinotasikan dengan $spec_L(G)$. Spektrum yang diperoleh dari matriks *signless* Laplace dari graf G disebut spektrum *signless* Laplace dan dinotasikan dengan $spec_{L^+}(G)$ (Akhadiyah, 2018).

Contoh:

Didefinisikan graf G sebagai $\big(V(G), E(G)\big)$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{(v_1, v_3), (v_2, v_4)\} = \{e_1, e_2\}$, seperti pada Gambar 2.10.



Gambar 2.10 Graf G

Dari gambar diperoleh matriks keterhubungan dari graf G, dan matriks derajat dari G seperti berikut,

$$\boldsymbol{A}(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \boldsymbol{D}(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka dapat diperoleh matriks Laplace dan matriks *signless* laplace dengan cara berikut,

$$\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{D}(G) - \boldsymbol{A}(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}^{+}(G) = \boldsymbol{D}(G) + \boldsymbol{A}(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}(G)-\lambda\boldsymbol{I})=\left(\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}-\lambda&0&1&0\\0&-\lambda&0&1\\1&0&-\lambda&0\\0&1&0&-\lambda\end{bmatrix}$$

Selanjutnya $(\boldsymbol{A}(G)-\lambda\boldsymbol{I})$ direduksi menggunakan eliminasi Gauss, dan diperoleh

$$\begin{bmatrix}-\lambda&0&1&0\\0&-\lambda&0&1\\0&0&-\lambda+1\left(\frac{1}{\lambda}\right)&0\\0&0&0&-\lambda+1\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{bmatrix}$$

Selanjutnya ditentukan polinomial karakteristik dengan cara mengalikan diagonal matriks segitiga atas, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}p(\lambda)&=(-\lambda)^2\left(-\lambda+1\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^2\\&=(-\lambda)^2\left(-\left(\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)\right)^2\\&=(\lambda^2-1)^2\\&=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2\end{aligned}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=1$ dan $\lambda_2=-1$. Kemudian dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i=1,2$.

Untuk $\lambda_1=1$ disubstitusikan ke dalam $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix}-1&0&1&0\\0&-1&0&1\\1&0&-1&0\\0&1&0&-1\end{bmatrix}.$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi, dan diperoleh

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, sehingga $m(\lambda_1) = 2$.

Untuk $\lambda_2 = -1$ disubstitusikan ke dalam $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut direduksi, dan diperoleh $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

sehingga $m(\lambda_2) = 2$.

Jadi diperoleh $spec_A(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

$$(\boldsymbol{L}(G) - \lambda\boldsymbol{I}) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Selanjutnya $(\boldsymbol{L}(G) - \lambda\boldsymbol{I})$ direduksi menggunakan eliminasi Gauss, dan diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda+\dfrac{-1}{1-\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda+\dfrac{-1}{1-\lambda} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya ditentukan polinomial karakteristik dengan cara mengalikan diagonal matriks segitiga atas, sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= (1-\lambda)^2\left(1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}\right)^2\\
&= (1-\lambda)^2\left(\frac{1-2\lambda+\lambda^2-1}{1-\lambda}\right)^2\\
&= (-2\lambda+\lambda^2)^2\\
&= \left(\lambda(-2+\lambda)\right)^2\\
&= (\lambda)^2(-2+\lambda)^2
\end{aligned}
$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 2$. Kemudian dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2$.

Sehingga diperoleh $spec_L(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

$$
(\boldsymbol{L}^+(G) - \lambda\boldsymbol{I}) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}
$$

Selanjutnya $(\boldsymbol{L}^+(G) - \lambda\boldsymbol{I})$ direduksi menggunakan eliminasi Gauss, dan diperoleh

$$
\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda+\left(-\frac{1}{1-\lambda}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda+\left(-\frac{1}{1-\lambda}\right) \end{bmatrix}
$$

Selanjutnya ditentukan polinomial karakteristik dengan cara mengalikan diagonal matriks segitiga atas, sehingga diperoleh

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^2\left(1-\lambda-\frac{1}{1-\lambda}\right)^2$$
$$= (1-\lambda)^2\left(\frac{1-2\lambda+\lambda^2-1}{1-\lambda}\right)^2$$
$$= (-2\lambda+\lambda^2)^2$$
$$= \left(\lambda(-2+\lambda)\right)^2$$
$$= (\lambda)^2(-2+\lambda)^2$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 2$. Kemudian dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2$.

Sehingga diperoleh $spec_{L^+}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

2.8 Keteraturan Ciptaan Allah

Matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama, semua itu kebenarannya dapat dilihat dalam al-Quran. Alam semesta ini banyak mengandung rahasia tentang fenomena-fenomena alam. Namun keberadaan fenomena-fenomena itu sendiri hanya dapat diketahui oleh orang yang benar-benar mengerti arti kebesaran Allah (Rahman, 2007).

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007:79). Allah berfirman dalam al-Quran dalam surat al-Furqan ayat 2.

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

"yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (QS. al-Furqan: 2).

Dalam tafsir Ibnu Katsir dijelaskan *"Yang kepunyaan-Nyalah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan-Nya,"* Allah sucikan diri-Nya dari memiliki anak dan sekutu. Lalu Dia mengabarkan bahwa Dia, *"Telah menciptakan segala sesuatu dan menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya."* Artinya, segala sesuatu selain Dia adalah makhluk (yang diciptakan) dan *marbub* (yang berada di bawah kekuasaan-Nya). Dia-lah pencipta sesuatu. Sedangkan segala sesuatu berada di bawah kekuasaan, aturan, tatanan dan takdir-Nya (Katsir, 2007).

"Dan Dia menetapkan ukuran-ukuran dengan serapi-rapinya," maksudnya adalah, menetapkan segala sesuatu dari apa yang diciptakan-Nya sesuai dengan hikmah yang diinginkan-Nya, dan bukan karena nafsu dan kelalaian, melainkan segala sesuatu berjalan sesuai dengan ketentuan-Nya hingga hari kiamat dan setelah kiamat. Karena Dia-lah Sang Pencipta Yang Maha Kuasa, dan untuk itulah makhluk beribadah kepada-Nya (Al-Qurtubi, 2009).

Matematika telah diciptakan dan sengaja disediakan untuk menuntun manusia memahami kebesaran. Matematika tidak lain adalah *makhluq*, dan Allah adalah *khaliq*nya (Abdusysyakir, 2007:88). Dijelaskan bahwa dalam al-Quran surat al-Furqan ayat 2, bahwa sesungguhnya Allah menciptakan segala sesuatu dengan menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya. Hal ini menunjukkan bahwa adanya rumus (keteraturan) pada segala ciptaan Allah, termasuk dalam ilmu matematika.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Spektrum Keterhubungan Graf Subgrup dari Grup Simetri S_n

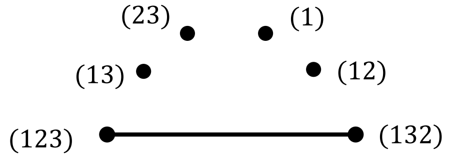
3.1.1 Grup Simetri S_3

Sesuai batasan masalah maka subgrup yang diambil hanyalah subgrup $\{(1)\}$ dari grup simetri, atau $H = \{(1)\}$. Titik graf subgrup dari grup simetri S_3 untuk subgrup H adalah $V(\Gamma_H(S_3)) = \{(1), (123), (132), (23), (13), (12)\} = S_3$. Dua unsur di S_3 jika dioperasikan menggunakan komposisi fungsi dapat dilihat pada Tabel 3.1 berikut

Tabel 3.1 Tabel Cayley Grup Simetri S_3

$\circ$	(1)	(123)	(132)	(23)	(13)	(12)
(1)	(1)	(123)	(132)	(23)	(13)	(12)
(123)	(123)	(132)	(1)	(12)	(23)	(13)
(132)	(132)	(1)	(123)	(13)	(12)	(23)
(23)	(23)	(13)	(12)	(1)	(123)	(132)
(13)	(13)	(12)	(23)	(132)	(1)	(123)
(12)	(12)	(23)	(13)	(123)	(132)	(1)

Dari Tabel 3.1, warna hijau menunjukkan unsur-unsur di S_3 sedemikian sehingga jika dioperasikan, hasil operasinya di H. Sehingga dapat digambarkan graf subgrup dari grup simetri S_3 untuk subgrup H seperti pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Graf $\Gamma_H(S_3)$

Dari Gambar 3.1 dapat diperoleh matriks keterhubungan dari $\Gamma_H(S_3)$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}(\Gamma_H\,(S_3)\,) = \begin{array}{c} \\ (1)\\(12)\\(13)\\(23)\\(123)\\(132)\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}(1) & (12) & (13) & (23) & (123) & (132)\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

$$det(\boldsymbol{A}(\Gamma_H\,(S_3)\,) - \lambda\boldsymbol{I}) = det\left(\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda&0&0&0&0&0\\0&\lambda&0&0&0&0\\0&0&\lambda&0&0&0\\0&0&0&\lambda&0&0\\0&0&0&0&\lambda&0\\0&0&0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix}-\lambda&0&0&0&0&0\\0&-\lambda&0&0&0&0\\0&0&-\lambda&0&0&0\\0&0&0&-\lambda&0&0\\0&0&0&0&-\lambda&1\\0&0&0&0&1&-\lambda\end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas menggunakan metode eliminasi Gauss, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix}-\lambda&0&0&0&0&0\\0&-\lambda&0&0&0&0\\0&0&-\lambda&0&0&0\\0&0&0&-\lambda&0&0\\0&0&0&0&-\lambda&1\\0&0&0&0&0&-\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda}\end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}\big(\Gamma_H\,(S_3)\big)$ diperoleh dari perkalian unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, sebagai berikut

$$p(\lambda) = (-\lambda)^5\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)$$

$$= (\lambda)^4\left(\lambda^2 - 1\right)$$

$$= (\lambda)^4(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda)^4(\lambda + 1)$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 0$ dan $\lambda_3 = -1$. Kemudian akan dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2, 3$.

Untuk $\lambda_1 = 1$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\Gamma_H\,(S_3)\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi menggunakan metode eliminasi Gauss, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_1) = 1$.

Untuk $\lambda_2 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\Gamma_H\,(S_3)\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi menggunakan metode eliminasi Gauss, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_2) = 4$.

Untuk $\lambda_3 = -1$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\Gamma_H\,(S_3)\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi menggunakan metode eliminasi Gauss, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_3) = 1$.

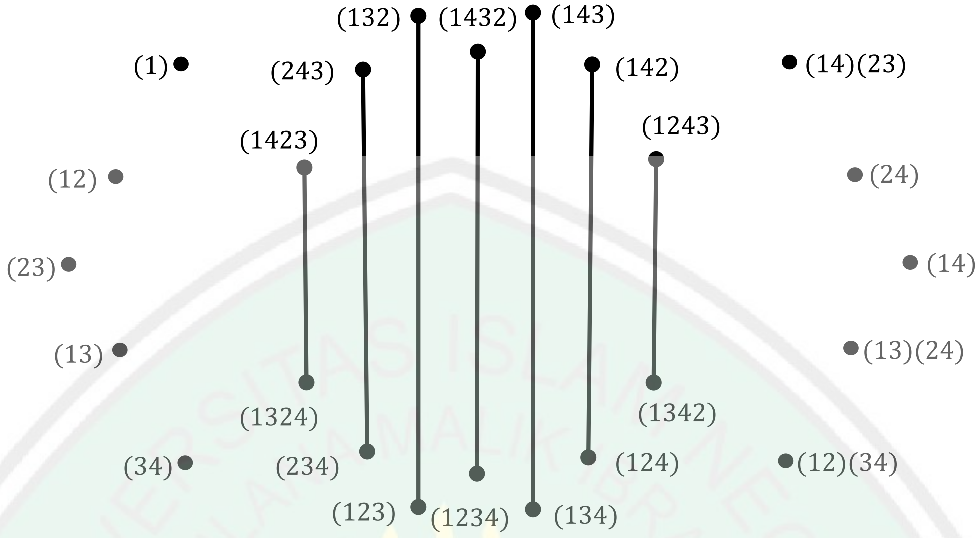
Dengan demikian spektrum keterhubungan graf subgrup $\Gamma_H(S_3)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_A(\Gamma_H(S_3)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

3.1.2 Grup Simetri S_4

Sesuai batasan masalah maka subgrup yang diambil hanyalah subgrup $\{(1)\}$ dari grup simetri, atau $H = \{(1)\}$. Titik graf subgrup dari grup simetri S_4 untuk subgrup H adalah

$$\begin{aligned} V(\Gamma_H(S_4)) = \; & \{(1),(12),(23),(132),(123),(13),(34),(12)(34),(243),(1432), \\ & (1243),(143),(234),(1342),(24),(142),(13)(24),(1423),(1234), \\ & (134),(124),(14),(1324),(14)(23)\} = S_4. \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama seperti pada pembahasan 3.1.1. Graf subgrup dari grup simetri S_4 untuk subgrup H dapat dilihat pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Graf $\Gamma_H\,(S_4)$

Dari Gambar 3.2 dapat diperoleh matriks keterhubungan dari $\Gamma_H(S_4)$ sebagai berikut

$A(\Gamma_H(S_4))$

$$
= \begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\mathbf{1}&0
\end{bmatrix}
$$

$det(\boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_4)) - \lambda\boldsymbol{I}) =$

$$
det\left(\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0
\end{bmatrix}\right.
$$

$$
\left.-\begin{bmatrix}
\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{bmatrix}\right) =
$$

$$
det\begin{pmatrix}
-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda
\end{pmatrix}
$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas menggunakan metode eliminasi Gauss, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$
\begin{bmatrix}
-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda}-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda}-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda}-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda}-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda}-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda}-\lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda}-\lambda
\end{bmatrix}
$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_H\left(S_4\right)\right)$ diperoleh dari perkalian unsur diagonal matriks utama segitiga atas tersebut sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= (-\lambda)^{17}\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^7 \\
&= (\lambda)^{10}\left(\lambda^2-1\right)^7 \\
&= (\lambda)^{10}(\lambda-1)^7(\lambda+1)^7 \\
&= (\lambda-1)^7(\lambda)^{10}(\lambda+1)^7
\end{aligned}
$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 0$ dan $\lambda_3 = -1$. Kemudian akan dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2, 3$.

Untuk $\lambda_1 = 1$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\Gamma_H\left(S_4\right)\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$
\begin{bmatrix}
-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1
\end{bmatrix}
$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi menggunakan metode eliminasi Gauss, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix}
-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut diperoleh banyaknya baris yang nol pada matriks yaitu $m(\lambda_1) = 7$.

Untuk $\lambda_2 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\Gamma_H\,(S_4)\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0
\end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi menggunakan metode eliminasi Gauss, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut diperoleh banyaknya baris nol pada matriks yaitu $m(\lambda_2) = 10$.

Untuk $\lambda_3 = -1$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{A}\left(\Gamma_H\,(S_4)\right) - \lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1
\end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi menggunakan metode eliminasi Gauss, sehingga diperoleh sebagai berikut

$$
\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut diperoleh banyaknya baris nol pada matriks yaitu $m(\lambda_3) = 7$.

Dengan demikian spektrum keterhubungan graf subgrup $\Gamma_H\,(S_4)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_A(\Gamma_H\,(S_4)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 10 & 7 \end{bmatrix}$.

3.1.3 Grup Simetri S_5

Sesuai batasan masalah maka subgrup yang diambil hanyalah subgrup $\{(1)\}$ dari grup simetri, atau $H = \{(1)\}$. Berdasarkan definisi graf subgrup maka diperoleh titik graf subgrup dari grup simetri S_5 untuk subgrup H adalah $V\left(\Gamma_{A_5}\,(S_5)\right) = S_5$. Sisi graf subgrup $\{(1)\}$ dari grup simetri S_5 dapat diperoleh dengan menggunakan cara yang sama seperti pada pembahasan 3.1.1.

Matriks keterhubungan dari $\Gamma_H(S_5)$ dapat diketahui setelah didapat $V(\Gamma_H(S_5))$ dan $E(\Gamma_H(S_5))$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_5))$ adalah

$$p(\lambda) = (-\lambda)^{73}\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^{47}$$

$$= (\lambda)^{26}\left(\lambda^2-1\right)^{47}$$

$$= (\lambda)^{26}(\lambda-1)^{47}(\lambda+1)^{47}$$

$$= (\lambda-1)^{47}(\lambda)^{26}(\lambda+1)^{47}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ dan $\lambda_3 = -1$. Kemudian akan dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2, 3$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 47$, $m(\lambda_2) = 26$ dan $m(\lambda_3) = 47$. Sehingga diperoleh spektrum keterhubungan graf subgrup $\Gamma_H(S_5)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_A(\Gamma_H(S_5)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 47 & 26 & 47 \end{bmatrix}$.

3.1.4 Grup Simetri S_6

Sesuai batasan masalah maka subgrup yang diambil hanyalah subgrup $\{(1)\}$ dari grup simetri, atau $H = \{(1)\}$. Berdasarkan definisi graf subgrup maka diperoleh titik graf subgrup dari grup simetri S_6 untuk subgrup H adalah $V(\Gamma_H(S_6)) = S_6$. Sisi graf subgrup $\{(1)\}$ dari grup simetri S_6 dapat diperoleh dengan menggunakan cara yang sama seperti pada pembahasan 3.1.1.

Matriks keterhubungan dari $\Gamma_H(S_6)$ dapat diketahui setelah didapat $V(\Gamma_H(S_6))$ dan $E(\Gamma_H(S_6))$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}(\Gamma_H\,(S_6))$ adalah

$$p(\lambda) = (-\lambda)^{398}\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^{322}$$

$$= (\lambda)^{76}\left(\lambda^2-1\right)^{322}$$

$$= (\lambda)^{76}(\lambda-1)^{322}(\lambda+1)^{322}$$

$$= (\lambda-1)^{322}(\lambda)^{76}(\lambda+1)^{322}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ dan $\lambda_3 = -1$. Kemudian akan dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2, 3$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 322$, $m(\lambda_2) = 76$ dan $m(\lambda_3) = 322$. Sehingga diperoleh spektrum keterhubungan graf subgrup $\Gamma_H(S_6)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_A(\,\Gamma_H\,(S_6)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 322 & 76 & 322 \end{bmatrix}$.

3.1.5 Grup Simetri S_7

Sesuai batasan masalah maka subgrup yang diambil hanyalah subgrup $\{(1)\}$ dari grup simetri, atau $H = \{(1)\}$. Berdasarkan definisi graf subgrup maka diperoleh titik graf subgrup dari grup simetri S_7 untuk subgrup H adalah $V(\Gamma_H\,(S_7)) = S_7$. Sisi graf subgrup $\{(1)\}$ dari grup simetri S_7 dapat diperoleh dengan menggunakan cara yang sama seperti pada pembahasan 3.1.1.

Matriks keterhubungan dari $\Gamma_H\,(S_7)$ dapat diketahui setelah didapat $V(\Gamma_H\,(S_7))$ dan $E(\Gamma_H\,(S_7))$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_7))$ adalah

$$p(\lambda) = (-\lambda)^{2636}\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^{2404}$$

$$= (\lambda)^{232}\left(\lambda^2-1\right)^{2404}$$

$$= (\lambda)^{232}(\lambda-1)^{2404}(\lambda+1)^{2404}$$

$$= (\lambda-1)^{2404}(\lambda)^{232}(\lambda+1)^{2404}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ dan $\lambda_3 = -1$. Kemudian akan dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2, 3$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 2404$, $m(\lambda_2) = 232$ dan $m(\lambda_3) = 2404$. Sehingga diperoleh spektrum keterhubungan graf subgrup $\Gamma_H(S_7)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_A\left(\Gamma_H(S_7)\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2404 & 232 & 2404 \end{bmatrix}$.

3.1.6 Grup Simetri S_8

Sesuai batasan masalah maka subgrup yang diambil hanyalah subgrup $\{(1)\}$ dari grup simetri, atau $H = \{(1)\}$. Berdasarkan definisi graf subgrup maka diperoleh titik graf subgrup dari grup simetri S_8 untuk subgrup H adalah $V(\Gamma_H(S_8)) = S_8$. Sisi graf subgrup $\{(1)\}$ dari grup simetri S_8 dapat diperoleh dengan menggunakan cara yang sama seperti pada pembahasan 3.1.1.

Matriks keterhubungan dari $\Gamma_H(S_8)$ dapat diketahui setelah didapat $V(\Gamma_H(S_8))$ dan $E(\Gamma_H(S_8))$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_8))$ adalah

$$p(\lambda) = (-\lambda)^{20542} \left(-\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} \right)^{19778}$$

$$= (\lambda)^{764} \left(\lambda^2 - 1 \right)^{19778}$$

$$= (\lambda)^{764} (\lambda - 1)^{19778} (\lambda + 1)^{19778}$$

$$= (\lambda - 1)^{19778} (\lambda)^{764} (\lambda + 1)^{19778}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ dan $\lambda_3 = -1$. Kemudian akan dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2, 3$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 19778$, $m(\lambda_2) = 764$ dan $m(\lambda_3) = 19778$. Sehingga diperoleh spektrum keterhubungan graf subgrup $\Gamma_H(S_8)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_A(\Gamma_H(S_8)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 19778 & 764 & 19778 \end{bmatrix}$.

3.1.7 Grup Simetri S_9

Sesuai batasan masalah maka subgrup yang diambil hanyalah subgrup $\{(1)\}$ dari grup simetri, atau $H = \{(1)\}$. Berdasarkan definisi graf subgrup maka diperoleh titik graf subgrup dari grup simetri S_9 untuk subgrup H adalah $V(\Gamma_H(S_9)) = S_9$. Sisi graf subgrup $\{(1)\}$ dari grup simetri S_9 dapat diperoleh dengan menggunakan cara yang sama seperti pada pembahasan 3.1.1.

Matriks keterhubungan dari $\Gamma_H(S_9)$ dapat diketahui setelah didapat $V(\Gamma_H(S_9))$ dan $E(\Gamma_H(S_9))$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_9))$ adalah

$$p(\lambda) = (-\lambda)^{182750}\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^{180130}$$

$$= (\lambda)^{2620}\left(\lambda^2-1\right)^{180130}$$

$$= (\lambda)^{2620}(\lambda-1)^{180130}(\lambda+1)^{180130}$$

$$= (\lambda-1)^{180130}(\lambda)^{2620}(\lambda+1)^{180130}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ dan $\lambda_3 = -1$. Kemudian akan dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2, 3$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 180130$, $m(\lambda_2) = 2620$ dan $m(\lambda_3) = 180130$. Sehingga diperoleh spektrum keterhubungan graf subgrup $\Gamma_H(S_9)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_A(\Gamma_H(S_9)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 180130 & 2620 & 180130 \end{bmatrix}$.

3.1.8 Grup Simetri S_{10}

Sesuai batasan masalah maka subgrup yang diambil hanyalah subgrup $\{(1)\}$ dari grup simetri, atau $H = \{(1)\}$. Berdasarkan definisi graf subgrup maka diperoleh titik graf subgrup dari grup simetri S_{10} untuk subgrup H adalah $V(\Gamma_H(S_{10})) = S_{10}$. Sisi graf subgrup $\{(1)\}$ dari grup simetri S_{10} dapat diperoleh dengan menggunakan cara yang sama seperti pada pembahasan 3.1.1.

Matriks keterhubungan dari $\Gamma_H(S_{10})$ dapat diketahui setelah didapat $V(\Gamma_H(S_{10}))$ dan $E(\Gamma_H(S_{10}))$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_{10}))$ adalah

$$p(\lambda) = (-\lambda)^{1819148}\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^{1809652}$$

$$= (\lambda)^{9496}\left(\lambda^2-1\right)^{1809652}$$

$$= (\lambda)^{9496}(\lambda-1)^{1809652}(\lambda+1)^{1809652}$$

$$= (\lambda-1)^{1809652}(\lambda)^{9496}(\lambda+1)^{1809652}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ dan $\lambda_3 = -1$. Kemudian akan dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2, 3$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 1809652$, $m(\lambda_2) = 9496$ dan $m(\lambda_3) = 1809652$. Sehingga diperoleh spektrum keterhubungan graf subgrup $\Gamma_H(S_{10})$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_A(\Gamma_H(S_{10})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1809652 & 9496 & 1809652 \end{bmatrix}$.

Dari spektrum yang telah diteliti, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum keterhubungan graf subgrup $\{(1)\}$ dari grup simetri, yang dapat dilihat pada Tabel 3.2 dan Tabel 3.3, dengan X_n adalah banyaknya titik terasing pada $\Gamma_H(S_n)$ dan $\frac{L_n}{2}$ adalah banyaknya banyaknya sisi pada $\Gamma_H(S_n)$.

Tabel 3.2 Polinomial Karakteristik Matriks Keterhubungan dari Graf Subgrup dari Grup Simetri S_n

Grup Simetri S_n	X_n	$\frac{L_n}{2}$	Polinomial Karakteristik Matriks Keterhubungan
Grup Simetri S_3	4	1	$(\lambda)^4(\lambda-1)(\lambda+1)$
Grup Simetri S_4	10	7	$(\lambda)^{10}(\lambda-1)^7(\lambda+1)^7$
Grup Simetri S_5	26	47	$(\lambda)^{26}(\lambda-1)^{47}(\lambda+1)^{47}$
Grup Simetri S_6	76	322	$(\lambda)^{76}(\lambda-1)^{322}(\lambda+1)^{322}$
Grup Simetri S_7	232	2404	$(\lambda)^{232}(\lambda-1)^{2404}(\lambda+1)^{2404}$
Grup Simetri S_8	2764	19778	$(\lambda)^{764}(\lambda-1)^{19778}(\lambda+1)^{19778}$
Grup Simetri S_9	2620	180130	$(\lambda)^{2620}(\lambda-1)^{180130}(\lambda+1)^{180130}$
Grup Simetri S_{10}	9496	1809652	$(\lambda)^{9496}(\lambda-1)^{1809652}(\lambda+1)^{1809652}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Grup Simetri S_n	X_n	$\frac{L_n}{2}$	$(\lambda)^{X_n}(\lambda-1)^{\frac{L_n}{2}}(\lambda+1)^{\frac{L_n}{2}}$

Tabel 3.3 Spektrum keterhubungan
dari Graf Subgrup dari Grup Simetri S_n

Grup Simetri S_n	X_n	$\frac{L_n}{2}$	Spektrum Keterhubungan
Grup Simetri S_3	4	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_4	10	7	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 10 & 7 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_5	26	47	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 47 & 26 & 47 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_6	76	322	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 322 & 76 & 322 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_7	232	2404	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2404 & 232 & 2404 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_8	2764	19778	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 19778 & 764 & 19778 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_9	2620	180130	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 180130 & 2620 & 180130 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_{10}	9496	1809652	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1809652 & 9496 & 1809652 \end{bmatrix}$
⋮	⋮	⋮	⋮
Grup Simetri S_n	X_n	$\frac{L_n}{2}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{L_n}{2} & X_n & \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$

Teorema 3.1

Misalkan S_n grup simetri dan $H = \{(1)\}$ subgrup dari S_n. Polinomial karakteristik matriks keterhubungan graf subgrup $\Gamma_H(S_n)$ adalah $p(\lambda) = (\lambda)^{X_n}(\lambda - 1)^{\frac{L_n}{2}}(\lambda + 1)^{\frac{L_n}{2}}$, dengan

$$X_n = \begin{cases} 1 + \Sigma_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{n!}{2^m(m!)(n-2(m))!} & , n \text{ ganjil} \\ 1 + \Sigma_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{2^m(m!)(n-2(m))!} & , n \text{ genap} \end{cases}$$

yang merupakan banyaknya titik terasing di $\Gamma_H(S_n)$ dan $\frac{L_n}{2}$ merupakan banyaknya sisi di $\Gamma_H(S_n)$ dengan $L_n = n! - X_n$.

Bukti

Diberikan grup simetri $S_n = A \cup B$, dengan $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{X_n}\}$ menyatakan himpunan unsur pada S_n yang memiliki order kurang dari tiga, dan $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{L_n}\}$ menyatakan himpunan unsur pada S_n yang memiliki order lebih dari dua, $H = \{(1)\}$.

Sesuai definisi graf subgrup, maka diperoleh matriks keterhubungan dari $\Gamma_H(S_n)$ adalah sebagai berikut

$$
\boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_n)) = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{X_n} \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{L_n-1} \\ b_{L_n} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & a_2 & \dots & a_{X_n} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{L_n-1} & b_{L_n} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_n))$ diperoleh dari $det(\boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_n) - \lambda \boldsymbol{I})$. Dengan eliminasi Gauss pada $(\boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_n) - \lambda \boldsymbol{I})$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$
\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{X_n} \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{L_n-1} \\ b_{L_n} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & a_2 & \dots & a_{X_n} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{L_n-1} & b_{L_n} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
-\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Maka $det(\boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_n) - \lambda \boldsymbol{I})$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_n)$ adalah

$$p(\lambda) = (-\lambda)^{X_n+\frac{L_n}{2}}\left(-\frac{\lambda^2-1}{\lambda}\right)^{\frac{L_n}{2}}$$

$$= (\lambda)^{X_n}\left(\lambda^2-1\right)^{\frac{L_n}{2}}$$

$$= (\lambda)^{X_n}(\lambda-1)^{\frac{L_n}{2}}(\lambda+1)^{\frac{L_n}{2}}$$

■

Corollary 3.2

Misalkan S_n grup simetri dan $H = \{(1)\}$ subgrup dari S_n. Spektrum keterhubungan graf subgrup $\Gamma_H(S_n)$ adalah $spec_A\left(\Gamma_H(S_n)\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{L_n}{2} & X_n & \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$, dengan $X_n = \begin{cases} 1 + \sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{n!}{2^m(m!)(n-2(m))!} & , n \text{ ganjil} \\ 1 + \sum_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{2^m(m!)(n-2(m))!} & , n \text{ genap} \end{cases}$

yang merupakan banyaknya titik terasing di $\Gamma_H(S_n)$ dan $\frac{L_n}{2}$ merupakan banyaknya sisi di $\Gamma_H(S_n)$ dengan $L_n = n! - X_n$.

Bukti

Berdasarkan Teorema 3.1, polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{A}\left(\Gamma_H(S_n)\right)$ adalah $p(\lambda) = (\lambda)^{X_n}(\lambda-1)^{\frac{L_n}{2}}(\lambda+1)^{\frac{L_n}{2}} = (\lambda-1)^{\frac{L_n}{2}}(\lambda)^{X_n}(\lambda+1)^{\frac{L_n}{2}}$. Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ dan $\lambda_3 = -1$, dan diperoleh $m(\lambda_1) = \frac{L_n}{2}$, $m(\lambda_2) = X_n$ dan $m(\lambda_3) = \frac{L_n}{2}$. Sehingga diperoleh spektrum keterhubungan graf subgrup $\Gamma_H(S_n)$ adalah $spec_A\left(\Gamma_H(S_n)\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{L_n}{2} & X_n & \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$. ■

3.2 Spektrum Laplace Graf Subgrup dari Grup Simetri S_n

3.2.1 Grup Simetri S_3

Dari Gambar 3.1 dapat diperoleh matriks derajat dari $\Gamma_H(S_3)$ adalah

$$\boldsymbol{D}(\Gamma_H(S_3)) = \begin{array}{c} \\ (1) \\ (12) \\ (13) \\ (23) \\ (123) \\ (132) \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} (1) & (12) & (13) & (23) & (123) & (132) \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dengan demikian diperoleh matriks Laplace dari $\Gamma_H(S_3)$

$$\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_3)) = \boldsymbol{D}(\Gamma_H(S_3)) - \boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_3))$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_3)) - \lambda\boldsymbol{I}) = det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas menggunakan metode eliminasi Gauss, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda+\dfrac{-1}{1-\lambda} \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_3))$ diperoleh dari perkalian unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut sebagai berikut

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-\lambda)^4(1-\lambda)\left(1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}\right) \\ &= (-\lambda)^4(1-\lambda)\left(\frac{1-2\lambda+\lambda^2-1}{1-\lambda}\right) \\ &= (-\lambda)^4(-2\lambda+\lambda^2) \\ &= (\lambda)^5(-2+\lambda) \end{aligned}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=1$ dan $\lambda_2=0$. Kemudian akan dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i=1,2$.

Untuk $\lambda_1=2$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_3))-\lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_1)=1$.

Untuk $\lambda_2=0$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_3))-\lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang treduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_2) = 5$.

Dengan demikian diperoleh spektrum Laplace graf subgrup $\Gamma_H(S_3)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_L(\Gamma_H\,(S_3)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

3.2.2 Grup Simetri S_4

Dari Gambar 3.2 dapat diperoleh matriks derajat dari $\Gamma_H(S_4)$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{D(\Gamma_H(S_4))}$$

$$= \begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}$$

Matriks Laplace dari $\Gamma_H\,(S_4)$ adalah $\boldsymbol{L}(\Gamma_H\,(S_4)) = \boldsymbol{D}(\Gamma_H\,(S_4)) - \boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_4))$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_4))$ adalah

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= (-\lambda)^{10}(\lambda-1)^7\left(1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}\right)^7 \\
&= (-\lambda)^{10}(\lambda-1)^7\left(\frac{1-\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda-1}\right)^7 \\
&= (-\lambda)^{10}(-\lambda^2+2\lambda)^7 \\
&= (\lambda)^{17}(-\lambda+2)^7
\end{aligned}
$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$. Kemudian dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 7$ dan $m(\lambda_2) = 17$. Sehingga diperoleh spektrum Laplace graf subgrup $\Gamma_H\,(S_4)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_L(\Gamma_H\,(S_4)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 17 \end{bmatrix}$.

3.2.3 Grup Simetri S_5

Matriks derajat dari $\Gamma_H(S_5)$ dapat diketahui dari matriks $\boldsymbol{A}(\Gamma_H\,(S_5))$, matriks Laplace dari $\Gamma_H\,(S_5)$ adalah $\boldsymbol{L}(\Gamma_H\,(S_5)) = \boldsymbol{D}(\Gamma_H\,(S_5)) - \boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_5))$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_5))$ adalah

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= (-\lambda)^{26}(1-\lambda)^{47}\left(1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}\right)^{47} \\
&= (-\lambda)^{26}(1-\lambda)^{47}\left(\frac{1-2\lambda+\lambda^2-1}{1-\lambda}\right)^{47} \\
&= (-\lambda)^{26}(-2\lambda+\lambda^2)^{47} \\
&= (\lambda)^{73}(-2+\lambda)^{47}
\end{aligned}
$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$. Kemudian dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 47$ dan $m(\lambda_2) = 73$. Sehingga diperoleh spektrum Laplace graf subgrup $\Gamma_H\,(S_5)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_L(\Gamma_H(S_5)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 47 & 73 \end{bmatrix}$.

3.2.4 Grup Simetri S_6

Matriks derajat dari $\Gamma_H(S_6)$ dapat diketahui dari matriks $\boldsymbol{A}(\Gamma_H\,(S_6))$, matriks Laplace dari $\Gamma_H\,(S_6)$ adalah $\boldsymbol{L}(\Gamma_H\,(S_6)) = \boldsymbol{D}(\Gamma_H\,(S_6)) - \boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_6))$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_6))$ adalah

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-\lambda)^{76}(1-\lambda)^{322}\left(1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}\right)^{322} \\ &= (-\lambda)^{76}(1-\lambda)^{322}\left(\frac{1-2\lambda+\lambda^2-1}{1-\lambda}\right)^{322} \\ &= (-\lambda)^{76}(-2\lambda+\lambda^2)^{322} \\ &= (\lambda)^{398}(-2+\lambda)^{322} \end{aligned}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$. Kemudian dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 322$ dan $m(\lambda_2) = 398$. Sehingga diperoleh spektrum Laplace graf subgrup $\Gamma_H(S_6)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_L(\Gamma_H(S_6)\,) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 322 & 398 \end{bmatrix}$.

3.2.5 Grup Simetri S_7

Matriks derajat dari $\Gamma_H(S_7)$ dapat diketahui dari matriks $\boldsymbol{A}(\Gamma_H\,(S_7))$, matriks Laplace dari $\Gamma_H\,(S_7)$ adalah $\boldsymbol{L}(\Gamma_H\,(S_7)) = \boldsymbol{D}(\Gamma_H\,(S_7)) - \boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_7))$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_7))$ adalah

$$p(\lambda) = (-\lambda)^{232}(1-\lambda)^{2404}\left(1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}\right)^{2404}$$

$$= (-\lambda)^{232}(1-\lambda)^{2404}\left(\frac{1-2\lambda+\lambda^2-1}{1-\lambda}\right)^{2404}$$

$$= (-\lambda)^{232}(-2\lambda+\lambda^2)^{2404}$$

$$= (\lambda)^{2636}(-2+\lambda)^{2404}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$. Kemudian dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 2404$ dan $m(\lambda_2) = 2636$. Sehingga diperoleh spektrum Laplace graf subgrup $\Gamma_H(S_7)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_L(\Gamma_H(S_7)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2404 & 2636 \end{bmatrix}$.

3.2.6 Grup Simetri S_8

Matriks derajat dari $\Gamma_H(S_8)$ dapat diketahui dari matriks $\boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_8))$, matriks Laplace dari $\Gamma_H(S_8)$ adalah $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_8)) = \boldsymbol{D}(\Gamma_H(S_8)) - \boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_8))$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_8))$ adalah

$$p(\lambda) = (-\lambda)^{764}(1-\lambda)^{19778}\left(1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}\right)^{19778}$$

$$= (-\lambda)^{764}(1-\lambda)^{19778}\left(\frac{1-2\lambda+\lambda^2-1}{1-\lambda}\right)^{19778}$$

$$= (-\lambda)^{764}(-2\lambda+\lambda^2)^{19778}$$

$$= (\lambda)^{20542}(-2+\lambda)^{19778}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$. Kemudian dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 19778$ dan $m(\lambda_2) = 20542$. Sehingga diperoleh spektrum Laplace graf subgrup $\Gamma_H(S_8)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah sebagai berikut $spec_L(\Gamma_H(S_8)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 19778 & 20542 \end{bmatrix}$.

3.2.7 Grup Simetri S_9

Matriks derajat dari $\Gamma_H(S_9)$ dapat diketahui dari matriks $\boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_9))$, matriks Laplace dari $\Gamma_H(S_9)$ adalah $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_9)) = \boldsymbol{D}(\Gamma_H(S_9)) - \boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_9))$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_9))$ adalah

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-\lambda)^{2620}(1-\lambda)^{180130}\left(1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}\right)^{180130} \\ &= (-\lambda)^{2620}(1-\lambda)^{180130}\left(\frac{1-2\lambda+\lambda^2-1}{1-\lambda}\right)^{180130} \\ &= (-\lambda)^{2620}(-2\lambda+\lambda^2)^{180130} \\ &= (\lambda)^{182750}(-2+\lambda)^{180130} \end{aligned}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$. Kemudian dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 180130$ dan $m(\lambda_2) = 182750$. Sehingga diperoleh spektrum Laplace graf subgrup $\Gamma_H(S_9)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_L(\Gamma_H(S_9)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 180130 & 182750 \end{bmatrix}$.

3.2.8 Grup Simetri S_{10}

Matriks derajat dari $\Gamma_H(S_{10})$ dapat diketahui dari matriks $\boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_{10}))$, matriks Laplace dari $\Gamma_H(S_{10})$ adalah $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_{10})) = \boldsymbol{D}(\Gamma_H(S_{10})) - \boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_{10}))$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_{10}))$ adalah

$$p(\lambda) = (-\lambda)^{9496}(1-\lambda)^{1809652}\left(1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}\right)^{1809652}$$

$$= (-\lambda)^{9496}(1-\lambda)^{1809652}\left(\frac{1-2\lambda+\lambda^2-1}{1-\lambda}\right)^{1809652}$$

$$= (-\lambda)^{9496}(-2\lambda+\lambda^2)^{1809652}$$

$$= (\lambda)^{1819148}(-2+\lambda)^{1809652}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$. Kemudian dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 1809652$ dan $m(\lambda_2) = 1819148$. Sehingga diperoleh spektrum Laplace graf subgrup $\Gamma_H(S_{10})$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_L(\Gamma_H(S_{10})) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1809652 & 1819148 \end{bmatrix}$.

Dari spektrum yang telah diteliti, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum Laplace graf subgrup dari beberapa grup simetri, yang dapat dilihat pada Tabel 3.4 dan Tabel 3.5, dengan X_n merupakan banyaknya titik terasing pada $\Gamma_H(S_n)$, dan $\frac{L_n}{2}$ merupakan banyaknya sisi pada $\Gamma_H(S_n)$.

Tabel 3.4 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace
dari Graf Subgrup dari Grup Simetri S_n

Grup Simetri S_n	X_n	$\frac{L_n}{2}$	Polinomial Karakteristik Matriks Laplace
Grup Simetri S_3	4	1	$(\lambda)^5(-2+\lambda)^1$
Grup Simetri S_4	10	7	$(\lambda)^{17}(-2+\lambda)^7$
Grup Simetri S_5	26	47	$(\lambda)^{73}(-2+\lambda)^{47}$
Grup Simetri S_6	76	322	$(\lambda)^{398}(-2+\lambda)^{322}$
Grup Simetri S_7	232	2404	$(\lambda)^{2636}(-2+\lambda)^{2404}$
Grup Simetri S_8	2764	19778	$(\lambda)^{20542}(-2+\lambda)^{19778}$
Grup Simetri S_9	2620	180130	$(\lambda)^{182750}(-2+\lambda)^{180130}$
Grup Simetri S_{10}	9496	1809652	$(\lambda)^{1819148}(-2+\lambda)^{1809652}$
⋮	⋮	⋮	⋮
Grup Simetri S_n	X_n	$\frac{L_n}{2}$	$(\lambda)^{X_n+\frac{L_n}{2}}(-2+\lambda)^{\frac{L_n}{2}}$

Tabel 3.5 Spektrum Laplace
dari Graf Subgrup dari Grup Simetri S_n

Grup Simetri S_n	X_n	$\frac{L_n}{2}$	Spektrum Laplace
Grup Simetri S_3	4	1	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_4	10	7	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 17 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_5	26	47	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 47 & 73 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_6	76	322	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 322 & 398 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_7	232	2404	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2404 & 2636 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_8	2764	19778	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 19778 & 20542 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_9	2620	180130	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 180130 & 182750 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_{10}	9496	1809652	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1809652 & 1819148 \end{bmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Grup Simetri S_n	X_n	$\frac{L_n}{2}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{L_n}{2} & X_n + \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$

Teorema 3.3

Misalkan S_n grup simetri dan $H = \{(1)\}$ subgrup dari S_n. Polinomial karakteristik matriks Laplace graf subgrup $\Gamma_H(S_n)$, adalah $p(\lambda) = (\lambda)^{X_n + \frac{L_n}{2}}(-2+\lambda)^{\frac{L_n}{2}}$, dengan X_n merupakan banyaknya titik terasing, dan $\frac{L_n}{2}$ merupakan banyaknya sisi pada $\Gamma_H(S_n)$.

Bukti

Berdasarkan pembuktian Teorema 3.1, telah diperoleh matriks keterhubungan dari $\Gamma_H(S_n)$. Misalkan $A = \{a \in S_n \mid |a| < 3\} = \{a_1, a_2, \dots, a_{X_n}\}$. Misalkan $B = \{a \in S_n \mid |a| > 2\} = \{b_1, b_2, \dots, b_{L_n}\}$. Diperoleh matriks derajat dari $\Gamma_H(S_n)$ adalah

$$
\boldsymbol{D}(\Gamma_H(S_n)) = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{x_n} \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{L_n-1} \\ b_{L_n} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & a_2 & \dots & a_{x_n} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{L_{n-1}} & b_{L_n} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

matriks Laplace dari $\Gamma_H(S_n)$ adalah $\boldsymbol{L}\big(\Gamma_H(S_n)\big) = \boldsymbol{D}\big(\Gamma_H(S_n)\big) - \boldsymbol{A}\big(\Gamma_H(S_n)\big)$

$$
\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_n)) = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1
\end{bmatrix}
$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_n))$ diperoleh dari $det(\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_n) - \lambda\boldsymbol{I})$.

$det(\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_n)) - \lambda\boldsymbol{I}) =$

$$
det\left(\begin{bmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1
\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}
\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda
\end{bmatrix}\right)
$$

$$
= det \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & a_2 & \dots & a_{x_n} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{L_{n-1}} & b_{L_n} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1-\lambda & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\lambda & -1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-\lambda
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Dengan eliminasi Gauss pada $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_n) - \lambda \boldsymbol{I})$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$
\begin{array}{c}
\\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{X_n} \\ b_1 \\ \dots \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_4 \\ \vdots \\ b_{L_n-1} \\ \dots \\ b_{L_n}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc}
a_1 & a_2 & \dots & a_{X_n} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{L_n-1} & b_{L_n}
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
-\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1-\lambda & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\lambda & -1 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Maka $det(\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_n) - \lambda \boldsymbol{I})$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_n)$ adalah

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= (-\lambda)^{X_n}(1-\lambda)^{\frac{L_n}{2}}\left(1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}\right)^{\frac{L_n}{2}} \\
&= (-\lambda)^{X_n}(1-\lambda)^{\frac{L_n}{2}}\left(\frac{1-2\lambda+\lambda^2-1}{1-\lambda}\right)^{\frac{L_n}{2}} \\
&= (-\lambda)^{X_n}(-2\lambda+\lambda^2)^{\frac{L_n}{2}}
\end{aligned}
$$

Karena X_n genap maka

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= (\lambda)^{X_n}(\lambda)^{\frac{L_n}{2}}(-2+\lambda)^{\frac{L_n}{2}} \\
&= (\lambda)^{X_n+\frac{L_n}{2}}(-2+\lambda)^{\frac{L_n}{2}}.
\end{aligned}
$$

■

Corollary 3.4

Misalkan S_n grup simetri dan $H = \{(1)\}$ subgrup dari S_n. Spektrum Laplace graf subgrup $\Gamma_H(S_n)$ adalah $spec_L\big(\Gamma_H(S_n)\big) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{L_n}{2} & X_n + \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$, dengan X_n

merupakan banyaknya titik terasing, dan $\frac{L_n}{2}$ merupakan banyaknya sisi pada $\Gamma_H(S_n)$.

Bukti

Berdasarkan Teorema 3.3, polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}(\Gamma_H(S_n))$ adalah $p(\lambda) = (-2+\lambda)^{\frac{L_n}{2}}(\lambda)^{X_n+\frac{L_n}{2}}$. Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$, dan diperoleh $m(\lambda_1) = \frac{L_n}{2}$ dan $m(\lambda_2) = X_n + \frac{L_n}{2}$. Sehingga diperoleh spektrum Laplace graf subgrup $\Gamma_H(S_n)$ adalah

$$spec_L(\Gamma_H(S_n)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{L_n}{2} & X_n + \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

3.3 Spektrum *Signless* Laplace Graf Subgrup dari Grup Simetri S_n

3.3.1 Grup Simetri S_3

Matriks *signless* Laplace dari $\Gamma_H(S_3)$ dapat ditentukan dengan menggunakan cara berikut

$$\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H(S_3)) = \boldsymbol{D}(\Gamma_H(S_3)) + \boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_3))$$

$$= \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix}$$

$$det(\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H(S_3)) - \lambda\boldsymbol{I}) = det\left(\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda&0&0&0&0&0\\ 0&\lambda&0&0&0&0\\ 0&0&\lambda&0&0&0\\ 0&0&0&\lambda&0&0\\ 0&0&0&0&\lambda&0\\ 0&0&0&0&0&\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas menggunakan metode eliminasi Gauss, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda+\left(-\frac{1}{1-\lambda}\right) \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^{+}(\Gamma_H(S_3))$ diperoleh dari perkalian unsur diagonal utama matriks segitiga sebagai berikut

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-\lambda)^4(1-\lambda)\left(1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}\right) \\ &= (-\lambda)^4(1-\lambda)\left(\frac{1-2\lambda+\lambda^2-1}{1-\lambda}\right) \\ &= (-\lambda)^4(-2\lambda+\lambda^2) \\ &= (\lambda)^5(-2+\lambda) \end{aligned}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda)=0$ maka diperoleh $\lambda_1=2$ dan $\lambda_2=0$. Kemudian akan dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i=1,2$.

Untuk $\lambda_1=2$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_H(S_3)\right)-\lambda\boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang tereduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_1) = 1$.

Untuk $\lambda_2 = 0$ disubstitusikan ke dalam $\left(\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_H\,(S_3)\right) - \lambda \boldsymbol{I}\right)$, sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya hasil matriks tersebut akan direduksi dengan menggunakan metode eliminasi Gauss, sehingga diperoleh hasil sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks yang treduksi tersebut dapat diperoleh $m(\lambda_2) = 5$.

Dengan demikian diperoleh spektrum Laplace graf subgrup $\Gamma_H(S_3)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_{L^+}\left(\Gamma_H(S_3)\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$.

3.3.2 Grup Simetri S_4

Matriks *signless* Laplace dari $\Gamma_H\,(S_4)$ adalah $\boldsymbol{L}^{+}\left(\Gamma_H\,(S_4)\right) = \boldsymbol{D}\left(\Gamma_H\,(S_4)\right) + \boldsymbol{A}\left(\Gamma_H(S_4)\right)$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^{+}(\Gamma_H\,(S_4)\,)$ adalah

$$p(\lambda) = (-\lambda)^{10}(\lambda-1)^7\left(\frac{1}{\lambda-1} - \lambda + 1\right)^7$$

$$= (-\lambda)^{10}(\lambda-1)^7\left(\frac{1-\lambda^2+2\lambda-1}{\lambda-1}\right)^7$$

$$= (-\lambda)^{10}(-\lambda^2+2\lambda)^7$$

$$= (\lambda)^{17}(-\lambda+2)^7$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$. Kemudian dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 7$ dan $m(\lambda_2) = 17$. Sehingga diperoleh spektrum *signless* Laplace graf subgrup $\Gamma_H\,(S_4)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_{L^+}(\Gamma_H\,(S_4)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 17 \end{bmatrix}$.

3.3.3 Grup Simetri S_5

Matriks *signless* Laplace dari $\Gamma_H\,(S_5)$ adalah $\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H\,(S_5)) = \boldsymbol{D}(\Gamma_H\,(S_5)) + \boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_5))$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H\,(S_5))$ adalah

$$p(\lambda) = (-\lambda)^{26}(1-\lambda)^{47}\left(1 - \lambda + \frac{-1}{1-\lambda}\right)^{47}$$

$$= (-\lambda)^{26}(1-\lambda)^{47}\left(\frac{1-2\lambda+\lambda^2-1}{1-\lambda}\right)^{47}$$

$$= (-\lambda)^{26}(-2\lambda+\lambda^2)^{47}$$

$$= (\lambda)^{73}(-2+\lambda)^{47}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$. Kemudian dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 47$ dan $m(\lambda_2) = 73$. Sehingga diperoleh spektrum *signless* Laplace graf subgrup $\Gamma_H\,(S_5)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_{L^+}(\Gamma_H(S_5)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 47 & 73 \end{bmatrix}$.

3.3.4 Grup Simetri $\boldsymbol{S_6}$

Matriks *signless* Laplace dari $\Gamma_H(S_6)$ adalah $\boldsymbol{L}^+\big(\Gamma_H\,(S_6)\big) = \boldsymbol{D}\big(\Gamma_H\,(S_6)\big) + \boldsymbol{A}\big(\Gamma_H(S_6)\big)$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^+\big(\Gamma_H(S_6)\big)$ adalah

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-\lambda)^{76}(1-\lambda)^{322}\left(1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}\right)^{322} \\ &= (-\lambda)^{76}(1-\lambda)^{322}\left(\frac{1-2\lambda+\lambda^2-1}{1-\lambda}\right)^{322} \\ &= (-\lambda)^{76}(-2\lambda+\lambda^2)^{322} \\ &= (\lambda)^{398}(-2+\lambda)^{322} \end{aligned}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$. Kemudian dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 322$ dan $m(\lambda_2) = 398$. Sehingga diperoleh spektrum *signless* Laplace graf subgrup $\Gamma_H(S_6)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_{L^+}(\Gamma_H(S_6)\,) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 322 & 398 \end{bmatrix}$.

3.3.5 Grup Simetri $\boldsymbol{S_7}$

Matriks *signless* Laplace dari $\Gamma_H\,(S_7)$ adalah $\boldsymbol{L}^+\big(\Gamma_H\,(S_7)\big) = \boldsymbol{D}\big(\Gamma_H\,(S_7)\big) + \boldsymbol{A}\big(\Gamma_H(S_7)\big)$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^+\big(\Gamma_H\,(S_7)\big)$ adalah

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-\lambda)^{232}(1-\lambda)^{2404}\left(1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}\right)^{2404} \\ &= (-\lambda)^{232}(1-\lambda)^{2404}\left(\frac{1-2\lambda+\lambda^2-1}{1-\lambda}\right)^{2404} \\ &= (-\lambda)^{232}(-2\lambda+\lambda^2)^{2404} \\ &= (\lambda)^{2636}(-2+\lambda)^{2404} \end{aligned}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$. Kemudian dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 2404$ dan $m(\lambda_2) = 2636$. Sehingga diperoleh spektrum *signless* Laplace graf subgrup $\Gamma_H\,(S_7)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_{L^+}(\Gamma_H(S_7)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2404 & 2636 \end{bmatrix}$.

3.3.6 Grup Simetri S_8

Matriks *signless* Laplace dari $\Gamma_H(S_8)$ adalah $\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H\,(S_8)) = \boldsymbol{D}(\Gamma_H\,(S_8)) + \boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_8))$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H(S_8))$ adalah

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-\lambda)^{764}(1-\lambda)^{19778}\left(1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}\right)^{19778} \\ &= (-\lambda)^{764}(1-\lambda)^{19778}\left(\frac{1-2\lambda+\lambda^2-1}{1-\lambda}\right)^{19778} \\ &= (-\lambda)^{764}(-2\lambda+\lambda^2)^{19778} \\ &= (\lambda)^{20542}(-2+\lambda)^{19778} \end{aligned}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$. Kemudian dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 19778$ dan $m(\lambda_2) = 20542$. Sehingga diperoleh spektrum *signless* Laplace graf subgrup $\Gamma_H(S_8)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_{L^+}(\Gamma_H(S_8)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 19778 & 20542 \end{bmatrix}$.

3.3.7 Grup Simetri S_9

Matriks *signless* Laplace dari $\Gamma_H(S_9)$ adalah $\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H\,(S_9)) = \boldsymbol{D}(\Gamma_H\,(S_9)) + \boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_9))$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H(S_9))$ adalah

$$p(\lambda) = (-\lambda)^{2620}(1-\lambda)^{180130}\left(1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}\right)^{180130}$$

$$= (-\lambda)^{2620}(1-\lambda)^{180130}\left(\frac{1-2\lambda+\lambda^2-1}{1-\lambda}\right)^{180130}$$

$$= (-\lambda)^{2620}(-2\lambda+\lambda^2)^{180130}$$

$$= (\lambda)^{182750}(-2+\lambda)^{180130}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$. Kemudian dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 180130$ dan $m(\lambda_2) = 182750$. Sehingga diperoleh spektrum *signless* Laplace graf subgrup $\Gamma_H(S_9)$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_{L^+}(\Gamma_H(S_9)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 180130 & 182750 \end{bmatrix}$.

3.3.8 Grup Simetri S_{10}

Matriks *signless* Laplace dari $\Gamma_H(S_{10})$ adalah $\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H(S_{10})) = \boldsymbol{D}(\Gamma_H(S_{10})) + \boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_{10}))$, kemudian matriks tersebut direduksi untuk memperoleh matriks segitiga atas. Sehingga diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H(S_{10}))$ adalah

$$p(\lambda) = (-\lambda)^{9496}(1-\lambda)^{1809652}\left(1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}\right)^{1809652}$$

$$= (-\lambda)^{9496}(1-\lambda)^{1809652}\left(\frac{1-2\lambda+\lambda^2-1}{1-\lambda}\right)^{1809652}$$

$$= (-\lambda)^{9496}(-2\lambda+\lambda^2)^{1809652}$$

$$= (\lambda)^{1819148}(-2+\lambda)^{1809652}$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$. Kemudian dicari $m(\lambda_i)$ untuk setiap i, dengan $i = 1, 2$ dan diperoleh $m(\lambda_1) = 1809652$ dan $m(\lambda_2) = 1819148$. Sehingga diperoleh spektrum *signless* Laplace graf subgrup $\Gamma_H(S_{10})$, dengan $H = \{(1)\}$ adalah $spec_{L^+}(\Gamma_H(S_{10})) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1809652 & 1819148 \end{bmatrix}$.

Dari spektrum yang telah diteliti, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum *signless* Laplace, yang dapat dilihat pada Tabel 3.6 dan Tabel 3.7, dengan X_n merupakan banyaknya titik terasing pada $\Gamma_H(S_n)$ dan $\frac{L_n}{2}$ merupakan banyaknya sisi pada $\Gamma_H(S_n)$.

Tabel 3.6 Polinomial Karakteristik Matriks *signless* Laplace
dari Graf Subgrup dari Grup Simetri S_n

Grup Simetri S_n	X_n	$\frac{L_n}{2}$	Polinomial Karakteristik Matriks *signless* Laplace
Grup Simetri S_3	4	1	$(\lambda)^5(-2+\lambda)^1$
Grup Simetri S_4	10	7	$(\lambda)^{17}(-2+\lambda)^7$
Grup Simetri S_5	26	47	$(\lambda)^{73}(-2+\lambda)^{47}$
Grup Simetri S_6	76	322	$(\lambda)^{398}(-2+\lambda)^{322}$
Grup Simetri S_7	232	2404	$(\lambda)^{2636}(-2+\lambda)^{2404}$
Grup Simetri S_8	2764	19778	$(\lambda)^{20542}(-2+\lambda)^{19778}$
Grup Simetri S_9	2620	180130	$(\lambda)^{182750}(-2+\lambda)^{180130}$
Grup Simetri S_{10}	9496	1809652	$(\lambda)^{1819148}(-2+\lambda)^{1809652}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Grup Simetri S_n	X_n	$\frac{L_n}{2}$	$(\lambda)^{X_n+\frac{L_n}{2}}(-2+\lambda)^{\frac{L_n}{2}}$

Tabel 3.7 Spektrum *signless* Laplace
dari Graf Subgrup dari Grup Simetri S_n

Grup Simetri S_n	X_n	$\frac{L_n}{2}$	Spektrum Laplace
Grup Simetri S_3	4	1	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_4	10	7	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 17 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_5	26	47	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 47 & 73 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_6	76	322	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 322 & 398 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_7	232	2404	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2404 & 2636 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_8	2764	19778	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 19778 & 20542 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_9	2620	180130	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 180130 & 182750 \end{bmatrix}$
Grup Simetri S_{10}	9496	1809652	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1809652 & 1819148 \end{bmatrix}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Grup Simetri S_n	X_n	$\frac{L_n}{2}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{L_n}{2} & X_n+\frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$

Teorema 3.5

Misalkan S_n grup simetri dan $H = \{(1)\}$ subgrup dari S_n. Polinomial karakteristik matriks *signless* Laplace grup subgrup $\Gamma_H(S_n)$ adalah $p(\lambda) = (\lambda)^{X_n + \frac{L_n}{2}}(-2+\lambda)^{\frac{L_n}{2}}$, dengan X_n merupakan banyaknya titik terasing dan $\frac{L_n}{2}$ merupakan banyaknya sisi pada $\Gamma_H(S_n)$.

Bukti

Berdasarkan pembuktian Teorema 3.1, telah diperoleh matriks keterhubungan dari $\Gamma_H(S_n)$. Berdasarkan pembuktian Teorema 3.3, telah diperoleh matriks derajat dari $\Gamma_H(S_n)$. Matriks *signless* Laplace dari $\Gamma_H(S_n)$ adalah

$$\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H(S_n)) = \boldsymbol{D}(\Gamma_H(S_n)) + \boldsymbol{A}(\Gamma_H(S_n)).$$

$$\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H(S_n)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H(S_n))$ diperoleh dari $det(\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H(S_n) - \lambda \boldsymbol{I})$.

$det(\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H(S_n) - \lambda \boldsymbol{I}) =$

$$det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$
det\;\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} a_1 & a_2 & \dots & a_{X_n} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{L_n-1} & b_{L_n} \end{array}\\
\begin{pmatrix}
-\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 1-\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1-\lambda & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\lambda & 1\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1-\lambda
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Dengan eliminasi Gauss pada $(\boldsymbol{L}^{+}(\Gamma_H(S_n)) - \lambda\boldsymbol{I})$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccccccc} a_1 & a_2 & \dots & a_{X_n} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_{L_n-1} & b_{L_n} \end{array}\\
\begin{array}{c} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_{X_n}\\ b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\\ \vdots\\ b_{L_n-1}\\ b_{L_n} \end{array} &
\begin{bmatrix}
-\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 1-\lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda} & \dots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\lambda & 1\\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Maka $det(\boldsymbol{L}^{+}(\Gamma_H(S_n)) - \lambda\boldsymbol{I})$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}^{+}(\Gamma_H(S_n))$ adalah

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= (-\lambda)^{X_n}(1-\lambda)^{\frac{L_n}{2}}\left(1-\lambda+\frac{-1}{1-\lambda}\right)^{\frac{L_n}{2}}\\
&= (-\lambda)^{X_n}(1-\lambda)^{\frac{L_n}{2}}\left(\frac{1-2\lambda+\lambda^2-1}{1-\lambda}\right)^{\frac{L_n}{2}}\\
&= (-\lambda)^{X_n}(-2\lambda+\lambda^2)^{\frac{L_n}{2}}
\end{aligned}
$$

Karena X_n genap maka

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= (\lambda)^{X_n}(\lambda)^{\frac{L_n}{2}}(-2+\lambda)^{\frac{L_n}{2}}\\
&= (\lambda)^{X_n+\frac{L_n}{2}}(-2+\lambda)^{\frac{L_n}{2}}.
\end{aligned}
$$

■

Corollary 3.6

Misalkan S_n grup simetri dan $H = \{(1)\}$ subgrup dari S_n. Spektrum *signless* Laplace graf subgrup $\Gamma_H(S_n)$ adalah $spec_{L^+}(\Gamma_H(S_n)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{L_n}{2} & X_n + \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$, dengan X_n merupakan banyaknya titik terasing dan $\frac{L_n}{2}$ merupakan banyaknya sisi pada $\Gamma_H(S_n)$.

Bukti

Berdasarkan Teorema 3.5, polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{L}^+(\Gamma_H(S_n))$ adalah $p(\lambda) = (\lambda)^{X_n + \frac{L_n}{2}}(-2+\lambda)^{\frac{L_n}{2}} = (-2+\lambda)^{\frac{L_n}{2}}(\lambda)^{X_n+\frac{L_n}{2}}$. Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 0$, dan diperoleh $m(\lambda_1) = \frac{L_n}{2}$ dan $m(\lambda_2) = X_n + \frac{L_n}{2}$. Spektrum *signless* Laplace graf subgrup $\Gamma_H(S_n)$ adalah $spec_{L^+}(\Gamma_H(S_n)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{L_n}{2} & X_n + \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$. ■

3.4 Keteraturan Spektrum Graf

Dalam al-Quran surat al-Furqan ayat 2 yang telah dibahas pada bab II, dijelaskan bahwa segala sesuatu yang diciptakan Allah, telah Allah tetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya. Sehingga segala sesuatu pada ciptaan Allah terdapat aturan atau tatanan sesuai dengan hikmah yang Allah berikan. Hal ini dijelaskan dalan tafsir Ibnu Katsir bahwa *"Telah menciptakan segala sesuatu dan menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya."* Artinya, segala sesuatu selain Dia adalah makhluk (yang diciptakan) dan *marbub* (yang berada di bawah kekuasaan-Nya), dan berada di bawah kekuasaan, aturan, tatanan dan takdir-Nya (Katsir, 2007). Sementara Al-Qurtubi menjelaskan *"Dan Dia* *menetapkan ukuran-ukuran dengan serapi-rapinya,"* maksudnya adalah, menetapkan segala sesuatu dari apa yang diciptakan-Nya sesuai dengan hikmah yang diinginkan-Nya, dan segala sesuatu berjalan sesuai dengan ketentuan-Nya (Al-Qurtubi, 2009).

Dalam penentuan spektrum graf juga terdapat beberapa aturan-aturan dalam penentuannya. Terdapat beberapa langkah-langkah yang perlu diikuti. Sehingga setelah diperoleh hasilnya yang berupa spektrum graf, maka terbentuklah keteraturan atau pola yang dapat dianalisis. Hal ini menunjukkan bahwa spektrum graf memiliki keteraturan-keteraturan sebagaimana yang telah Allah jelaskan.

Spektrum graf yang tidak lain adalah sebagian dari ilmu Allah yakni termasuk makhluk ciptaan Allah. Sebagai seorang hamba yang berkewajiban menuntut ilmu dan berpikir. Dengan mempelajari ilmu-Nya ini untuk meneladani bahwa dengan memikirkan ilmu-Nya, salah satunya yakni spektrum graf agar dapat mengambil hikmah dan memperkuat keimanannya bahwa yang dijelaskan pada QS al-Furqan ayat 2 mengenai Allah telah menciptakan segala sesuatu dan menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya adalah benar adanya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan maka dapat diperoleh kesimpulan berkaitan dengan graf subgrup dari grup simetri S_n dengan subgrup $H = \{(1)\}$ adalah sebagai berikut:

1. Spektrum keterhubungan graf subgrup $\Gamma_H(S_n)$ adalah $spec_A(\Gamma_H(S_n)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{L_n}{2} & X_n & \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$, dengan $X_n = \begin{cases} 1 + \Sigma_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{n!}{2^m(m!)(n-2(m))!} & , n \text{ ganjil} \\ 1 + \Sigma_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{2^m(m!)(n-2(m))!} & , n \text{ genap} \end{cases}$

   yang merupakan banyaknya titik terasing pada $\Gamma_H(S_n)$ dan $\frac{L_n}{2}$ merupakan banyaknya sisi pada $\Gamma_H(S_n)$ dengan $L_n = n! - X_n$.

2. Spektrum Laplace graf subgrup $\Gamma_H(S_n)$ adalah $spec_L(\Gamma_H(S_n)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{L_n}{2} & X_n + \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$.

3. Spektrum *signless* Laplace graf sungrup $\Gamma_H(S_n)$ adalah $spec_{L^+}(\Gamma_H(S_n)) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{L_n}{2} & X_n + \frac{L_n}{2} \end{bmatrix}$.

4.2 Saran

Penelitian ini dilakukan pada graf subgrup dari grup simetri dengan subgrup yang hanya memuat identitas. Penelitian selanjutnya diharapkan dapat menemukan teorema terkait spektrum yang diperoleh dari graf subgrup yang berbeda, dengan mengambil subgrup lain dari grup simetri. Juga diharapkan dapat mengembangkan dan mencari sifat-sifat dari graf subgrup dari grup simetri dengan subgrup yang hanya memuat identitas itu sendiri.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir, Azizah, N.N., dan Nofandika, F.F.. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Akhadiyah, D.A.. 2018. *Spektrum Keterhubungan, Laplace, Signless Laplace, dan Detour Graf Subgrup dan Komplemen Graf Subgrup dari Grup Dihedral*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Al-Qurthubi, S.I.. 2007. *Tafsir Al-Qurthubi*. Terjemahan Rana Mengala, Ahmad Athaillah Mansur. Jakarta: Pustaka Azzam.

Anderson, D.F., Fasteen, J. dan LaGrange, J.D. 2012. The Subgroup Graphs of a Group. *Arab J Math.*1:17–27. DOI 10.1007/s40065-012-0018-1.

Anton, H. 2000. *Dasar-dasar Aljabar Linear, Jilid 1*. Terjemahan Hari Suminto. Batam: Interaksara.

Arifandi, M.Z.. 2014. *Spektrum dari Graf Multipartisi Komplit* $K(n)(n+1)_{\alpha}$. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Ayyaswamy, S.K. dan Balachandran, S. 2010. On Detour Spectra of Some Graphs. *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*. 4(7): 1038-1040.

Aziz, A., dan Abdussakir. 2006. *Analisis Matematis Terhadap Filsafat Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Bigg, N. 1994. *Algebraic Graph Theory*. London: Cambridge University Press.

Biyikoglu, T., Leytold, J., Stadler, P.F.. 2007. *Laplacian Eigenvectors of Graphs*. New York: Springer.

Dummit, D.S. dan Foote, R.M. 1991. *Abstract Algebra*. New York: Prentice Hall, Inc.

Faizah, N. 2012. *Spektrum Adjacency, Spektrum Detour dan Spektrum Laplace pada Graf Turan*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Gallian, J.A.. 2013. *Contemporary Abstract Algebra*. Boston: University of Minnesota Duluth.

Gilbert, L. dan Gilbert, J. 2009. *Elements of Modern Algebra*. Canada: Nelson Education, Ltd.

Intifaada, A. 2016. *Spektrum Laplace Graf Commuting dari Grup Dihedral*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Irnawati. 2016. *Graf Konjugasi dari Subgrup di Grup Simetri*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Jog, S.R., dan Kotambari, R.. 2016. On the Adjacency, Laplacian, and signless Laplacian Spectrum of Coalescence of Complete Graphs. *J. Math*. 2016 1–11.

Kanisa, V.A.. 2017. *Graf Koset dari Subgrup Normal di Grup Simetri*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Katsir, I.I.. 2007. *Mukhtasor Tafsir Ibnu Katsir*. Libanon: Dar El-Marefah.

Layali, A. 2018. *Spektrum Graf Subgrup dan Komplemennya dari Grup Dihedral*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Rahman, H. 2007. *Indahnya Matematika dalam Al-Quran.* Malang: UIN Malang Press.

Raisinghania, M.D. dan Aggarwal, R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand dan Company Ltd.

Robin, J. dan John, J. 1992. *Graf Pengantar*. Terjemahan Theresia M.H Tirta. Surabaya: University Press IKIP Surabaya.

RIWAYAT HIDUP

Durrotun Nafisah, lahir di Malang pada tanggal 12 September 1996. Anak pertama dari tiga bersaudara. Ia tinggal di Jalan Apus Kidul RT 01 / RW 01 Gadungsari Tirtoyudo Kabupaten Malang.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Fathul Ulum Gadungsari lulus pada tahun 2008, kemudian melanjutkan studi di MTsN Malang III lulus pada tahun 2011, setelah itu menempuh jenjang berikutnya di MAN Gondanglegi lulus pada tahun 2014. Studi berikutnya berlanjut di Universitas Islan Negeri Maulana Malik Ibrahin Malang.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Durrotun Nafisah
NIM : 14610069
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Spektrum Graf Subgrup dari Grup Simetri
Pembimbing I : Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D
Pembimbing II : Dr. Abdussakir, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	9 Oktober 2018	Konsultasi BAB I & II	1.	
2	16 Oktober 2018	Konsultasi BAB III		2.
3	17 Oktober 2018	Konsultasi Agama Bab I	3.	
4	24 Oktober 2018	Konsultasi dan Revisi BAB III		4.
5	29 Oktober 2018	Konsultasi Agama Bab III	5.	
6	31 Oktober 2018	ACC Keagamaan		6.
7	31 Oktober 2018	ACC BAB I, II & III	7.	
8	23 November 2018	Revisi Keagamaan Bab II		8.
9	26 November 2018	Konsultasi & Revisi Bab III	9.	
10	27 November 2018	Konsultasi Keagamaan BAB III		10.
11	28 November 2018	Revisi Keagamaan BAB III	11.	
12	30 November 2018	Konsultasi BAB III & IV		12.
13	3 Desember 2018	Konsultasi & Revisi Bab IV	13.	
14	3 Desember 2018	ACC Keagamaan		14.
15	3 Desember 2018	ACC Keseluruhan	15.	

Malang, 17 Desember 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001