ESTIMASI PARAMETER REGRESI MODEL TOBIT BIVARIAT DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

OLEH
MUSTABIROTUN NI'MAH
NIM. 13610053

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

ESTIMASI PARAMETER REGRESI MODEL TOBIT BIVARIAT DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Mustabirotun Ni'mah
NIM. 13610053

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

ESTIMASI PARAMETER REGRESI MODEL TOBIT BIVARIAT DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Oleh
Mustabirotun Ni'mah
NIM. 13610053

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 8 April 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	Ach. Nasichuddin, M.A
NIP. 19571005 198203 1 006	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER REGRESI MODEL TOBIT BIVARIAT
DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Oleh
Mustabirotun Ni'mah
NIM. 13610053

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Mat)
Tanggal 18 juni 2019

Penguji Utama	: Abdul Aziz, M.Si	....
Ketua Penguji	: Angga Dwi Mulyanto, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	....
Anggota Penguji	: Ach. Nasichuddin, M.A	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini

Nama	: Mustabirotun Ni'mah
NIM	: 13610053
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Estimasi Parameter Regresi Model Tobit Bivariat dengan Metode *Maximum Likelihood*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 5 April 2019
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
2AD94AFF706265457
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Mustabirotun Ni'mah
NIM. 13610053

MOTO

"...dan berbuat baiklah, karena sesungguhnya Allah menyukai orang-orang yang berbuat baik". (Q.S Al-Baqarah:159)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Syamsul Qodir dan Ibu Munfarihah
yang tanpa lelah memberikan dukungan, doa, serta limpahan kasih sayangnya.
Dan juga terimakasih kepada kakak Muhammad Shobirin
yang selalu mendukung penulis.
Dan teman-teman seperjuangan yang selalu memberi semangat.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. yang telah melimpahkan nikmat, rahmat serta hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penulis banyak mendapatkan bimbingan serta arahan dari berbagai pihak selama proses penyusunan skripsi ini. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus sebagai pembimbing II yang memberikan arahan, nasihat, dan berbagi ilmunya kepada penulis.
4. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
5. Ach. Nasihuddin, M.A selaku pembimbing II yang senantiasa membimbing dengan sabar hingga terselesaikannya penelitian ini.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah dan ibu tercinta yang telah mencurahkan cinta kasih, doa, bimbingan, dan motivasi hingga selesainya skripsi ini.
8. Saudara-saudara tersayang yang telah memberikan semangat kepada penulis.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika yang berjuang bersama-sama.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 5 April 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$\sum$	: Sigma untuk penjumlahan
$\prod$	: Phi untuk perkalian
μ	: Nilai Tengah (Mean)
e	: Bilangan natural $e = 2{,}718$
σ^2	: Varian untuk populasi
$\boldsymbol{Y}$	: Vektor variabel terikat berukuran $n \times 1$
$\boldsymbol{Y_{ij}}$	: Variabel terikat Y pada baris ke-i dan kolom ke-j
$\boldsymbol{X}$	: Matriks variabel bebas X berukuran $n \times (k+1)$
$\boldsymbol{X_{ij}}$	: Variabel bebas X pada baris ke-i dan kolom ke-j
$\boldsymbol{\beta}$	: Vektor parameter yang diestimasi berukuran $(k+1) \times 1$
$\boldsymbol{\varepsilon}$	: Vektor error berukuran $n \times 1$
N	: Normal
$L(\beta)$	: Fungsi likelihood dengan parameter β
X'	: Transpose matriks X
y_{ij}^*	: Variabel terikat yang tersensor dan berdistribusi normal
$f_x(x)$	: Fungsi padat peluang
$F_x(x)$	: Fungsi distribusi komulatif
E	: Nilai harapan
$f(y_{i1}, y_{i2})$	: Fungsi padat gabungan y_1, y_2
i	: Banyak data, $i = 1,2, \dots, n$
j	: Banyak variabel, $j = 1,2, \dots, k$

ABSTRAK

Ni'mah, Mustabirotun. 2019. **Estimasi Parameter Regresi Model Tobit Bivariat dengan Metode *Maximum Likelihood*.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D
(II) Ach. Nasihuddin, M.A

Kata Kunci: Regresi Tobit, Data Tersensor, Estimasi Parameter *Maximum Likelihood*, Curah Hujan, Hari hujan.

Model regresi tobit adalah salah satu metode yang digunakan untuk menganalisis data tersensor. Data tersensor adalah data yang bernilai nol untuk beberapa pengamatan dan bernilai postitif untuk pengamatan yang lain. Untuk mengestimasi parameter regresi model tobit digunakan metode *maximum likelihood* agar menghasilkan penduga yang konsisten dan efisien untuk sampel yang berukuran besar.

Penelitian ini bertujuan untuk membahas estimasi model tobit bivariat dengan menggunakan metode *maximum likelihood* beserta penerapannya pada kasus curah hujan dan hari hujan di Juanda Kota Surabaya pada tahun 2013-2014.

Estimasi model tobit bivariat tidak cukup dengan menggunakan metode *maximum likelihood*, karena persamaannya nonlinier sehingga dibantu dengan menggunkan iterasi Newton-Raphson dan menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\beta}^{n+1} = \boldsymbol{\beta}^{n} - t_n P_n \gamma_n$$

dengan

$$t_n = 1$$

$$P_n = \frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{x'_{i1}}{\sigma}\right)^2$$

$$\gamma_n = \frac{1}{1-\rho^2}\left(\left(\frac{-x'_{i1}\beta_1}{\sigma_{11}}\right)\left(\frac{-x'_{i1}}{\sigma_{11}}\right) - 2\rho\frac{(-x'_{i1})(-x'_{i2}\beta_2)}{\sigma_{11}\sigma_{22}}\right)$$

ABSTRACT

Ni'mah, Mustabirotun. 2019. **Estimation of Bivariate Tobit Model Regression Parameters with Maximum Likelihood Method.** Thesis, Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang.
Advisor : (I) Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D
(II) Ach. Nasihuddin, M.A

Keyword: Tobit Regression, Censored Data, Parameter Estimation Maximum Likelihood, Rainfall, Rainy Days.

Tobit regression model is one method used to analyze censored data. Censored data is data that is worth zero for some observations and is positive for other observations. To estimate the tobit model regression parameters the maximum likelihood method is used to produce a consistent and efficient estimator for large samples.

This study purpose to discuss the estimation of bivariate tobit model using the maximum likelihood method along with its application in the case of rainfall and rainy days in Juanda City of Surabaya in 2013-2014.

The estimation of bivariate tobit model is not enough to use the maximum likelihood method, because the equation is nonlinear so it is helped by using Newton-Raphson iterations and produces the equation:

$$\boldsymbol{\beta}^{n+1} = \boldsymbol{\beta}^{n} - t_n P_n \gamma_n$$

dengan

$t_n = 1$

$$P_n = \frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{x'_{i1}}{\sigma}\right)^2$$

$$\gamma_n = \frac{1}{1-\rho^2}\left(\left(\frac{-x'_{i1}\beta_1}{\sigma_{11}}\right)\left(\frac{-x'_{i1}}{\sigma_{11}}\right) - 2\rho\frac{(-x'_{i1})(-x'_{i2}\beta_2)}{\sigma_{11}\sigma_{22}}\right)$$

ملخص

نعمة، مستبيرة. 2019. متغير معلمة نموذج الانحدار tobit bivariat متغير مع *maximum likelihood*. مقال. شعبة الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المستشارون: (1) تورمذي الماجستير و (2) احمدنسيح الدين الماجستير

الكلمات المفتاحية: تراجع tobit، البيانات الخاضعة للرقابة، تقدير المعلمة *maximum likelihood*، هطول الأمطار، يوم ممطر.

نموذج انحدار tobit هو أحد الأساليب المستخدمة لتحليل البيانات الخاضعة للرقابة. البيانات الخاضعة للرقابة هي بيانات تساوي صفرًا بالنسبة لبعض الملاحظات وهي إيجابية بالنسبة للملاحظات الأخرى. لتقدير معلمات انحدار نموذج المدار ، تستخدم طريقة الاحتمالية القصوى لإنتاج مقدّر ثابت وفعال للعينات الكبيرة.

تهدف هذه الدراسة إلى مناقشة تقدير النموذج tobit bivariat باستخدام طريقة *maximum likelihood*جنبا إلى جنب مع تطبيقه في حالة هطول الأمطار والأيام الممطرة في مدينة خواندا من سورابايا في 2013−2014.

النموذج المقدر tobit bivariat لا يكفي باستخدام الطريقة *maximum likelihood*، لأن المعادلة غير خطية لذلك يتم مساعدتها باستخدام التكرارات Newton-Raphson وإنتاج المعادلة كما يلي:

$$\boldsymbol{\beta}^{n+1} = \boldsymbol{\beta}^{n} - t_n P_n \gamma_n$$

مع

$$t_n = 1$$

$$P_n = \frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{x'_{i1}}{\sigma}\right)^2$$

$$\gamma_n = \frac{1}{1-\rho^2}\left(\left(\frac{-x'_{i1}\beta_1}{\sigma_{11}}\right)\left(\frac{-x'_{i1}}{\sigma_{11}}\right) - 2\rho\frac{(-x'_{i1})(-x'_{i2}\beta_2)}{\sigma_{11}\sigma_{22}}\right)$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis regresi berkaitan dengan studi ketergantungan dari satu variabel yang disebut variabel terikat, pada satu atau lebih variabel bebas, dengan tujuan untuk memperkirakan atau meramalkan nilai rata-rata dari variabel terikat apabila nilai variabel bebas sudah diketahui (Supranto, 2004:44).

Dalam model regresi, ada kalanya variabel terikat bersifat kualitatif, seperti jenis kelamin, status perkawinan, agama. Variabel kualitatif ini juga sering dikenal sebagai variabel buatan atau variabel *dummy*. Dengan kata lain variabel *dummy* digunakan untuk mengkuantifikasi data kualitatif.

Analisis regresi yang digunakan untuk menganalisis variabel terikat dengan data kulitatif (variabel *dummy*) ada tiga model, yaitu: model Probit, model Logit, dan model Tobit. Pada model Probit dan Logit dapat diperoleh informasi yang sama untuk kedua kelompok data, baik yang nilai variabel dependennya 1 maupun 0. Apabila kita menggunakan contoh lulusan, baik yang lulus (lulus=1) maupun yang tidak lulus (tidak lulus=0), telah memiliki informasi yang sama yaitu IPK, jam belajar dan tinggal dirumah atau tidak (Winarno, 2007:6.23). Tapi dalam kenyataannya, kita tidak selalu mendapatkan informasi yang sama untuk kedua kelompok responden. Misalnya, pengeluaran rumah tangga untuk konsumsi daging. Tidak setiap rumah tangga mengeluarkan pengeluaran untuk konsumsi daging. Sehingga banyak ditemui pengeluaran rumah tangga yang bernilai nol dan yang tidak nol. Dengan demikian, dua kelompok data yang dimiliki tidak setara. Sehingga variabel terikatnya ada yang terbatas. Untuk data seperti ini, model yang digunakan adalah model Tobit (Ekananda, 2015: 285).

Dalam menduga parameter regresi Tobit digunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Menurut Hosmer dan Lemeshow (2000) penggunaan metode MLE menghasilkan penduga yang konsisten dan efisien untuk sampel yang berukuran besar.

Hasil penelitian yang dilakukan oleh Gilang Permana (2013) menyatakan bahwa secara keseluruhan regresi Tobit secara konsisten lebih baik daripada regresi OLS berdasarkan indikator kesamaan tanda, signifikansi, uji serempak, dan model terbaik.

Didalam Al-Qur'an, dapat kita temukan ayat yang menggambarkan peristiwa yang bisa dilihat dari teori estimasi sesuai dengan tema pada tulisan ini, diantaranya terdapat pada surat Yusuf Ayat 47-48 yang artinya:

Yusuf berkata: "Supaya kamu bertanam tujuh tahun (lamanya) sebagaimana biasa; maka apa yang kamu tuai hendaklah kamu biarkan dibulirnya kecuali sedikit untuk kamu makan. Kemudian sesudah itu akan datang tujuh tahun yang amat sulit, yang menghabiskan apa yang kamu simpan untuk menghadapinya (tahun sulit), kecuali sedikit dari (bibit gandum) yang kamu simpan. (Q.S Yusuf:47-48)

Ayat di atas menjelaskan bahwa pada zaman dahulu Nabi Yusuf diperintahkan Allah untuk merencanakan kehidupan ekonomi tujuh tahun kedepan, dikarenakan pada tujuh tahun kedepan akan terjadi musim paceklik atau krisis pangan. Kemudian Nabi Yusuf mengusulkan diadakan perencanaan pembangunan pertanian, dan berkat perencanaan Nabi Yusuf yang matang itulah mesir dan daerah sekitarnya ikut mendapatkan manfaat dan berkahnya (Qardhawi, 1998:137). Termasuk dalam permasalahan penelitian ini akan mengestimasi model dari regresi Tobit.

Pada penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Wardhani (2011) tentang regresi Tobit, peneliti hanya menggunakan satu variabel terikat dan ditribusi probabilitasnya menggunakan distribusi Bernoulli. Dalam penelitian tersebut menyatakan bahwa estimasi model tobit tidak cukup hanya menggunakan *Maximum Likelihood*, karena persamaannya nonlinier sehingga dibantu dengan iterasi *Newton Raphson*.

Sebagai pengembangan dari penulisan sebelumnya, maka penulisan skripsi ini menggunakan regresi model Tobit Bivariat dengan metode *Maximum Likelihood*.

Dari latar belakang tersebut maka penulis tertarik untuk mengambil judul "Estimasi Parameter Regresi Model Tobit Bivariat Dengan Metode *Maximum Likelihood*"

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang didapat adalah:

1. Bagaimana bentuk estimasi parameter regresi model tobit bivariat dengan metode *maximum likelihood*?
2. Bagaimana hasil implementasi model tobit bivariat dengan metode *maximum likelihood* pada data curah hujan dan hari hujan di Juanda untuk tahun 2013-2014?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka didapat tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui bentuk estimasi parameter regresi model tobit bivariat dengan metode *maximum likelihood*.
2. Untuk mengetahui hasil implementasi model tobit bivariat dengan metode *maximum likelihood* pada data curah hujan dan hari hujan di Juanda untuk tahun 2013-2014.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Dengan mengetahui bentuk estimasi parameter regresi model tobit bivariat dengan metode *maximum likelihood* maka pembaca akan memahami proses perolehan bentuk *maximum likelihood* dengan menggunakan model regresi tobit bivariat.
2. Dengan mengetahui implementasi model tobit bivariat dengan metode *maximum likelihood* pada data curah hujan dan hari hujan maka pembaca akan memahami hasil implementasi data curah hujan dan hari hujan menggunakan aplikasi e-Views.

1.5 Batasan Masalah

Agar penelitian ini menjadi terarah dan jelas, maka penulis membatasi masalah pada penelitian ini, yaitu:

1. Variabel terikat bernilai 0 dan 1
2. Data yang digunakan adalah data yang diambil dari Badan Pusat Statistik (BPS) Kota Surabaya pada Tahun 2013-2014

1.6 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan skripsi ini, sistematika penulisan yang digunakan oleh penulis terdiri dari empat bab, yaitu

BAB I Pendahuluan

Adapun pendahuluan berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah dan sistematika penulisan.

BAB II Kajian Pustaka

Adapun kajian pustaka berisi materi-materi yang mendukung pembahasan meliputi: Model Regresi Linier, Model Regresi Nonlinier, Fungsi Distribusi Komulatif, Distribusi Normal Multivariat, Distribusi Normal Bivariat, Distribusi Normal tersensor, Regresi *Dummy* Variabel, Regresi Tobit, Pendiferensialan Matriks, Estimasi Parameter, Metode *Maximum Likelihood*, Iterasi Newton Raphson, Uji Hipotesis, Curah Hujan dan kelembaban, Hasil Penelitian Sebelumnya, dan Kisah Nabi Yusuf dalam Al-Qur'an.

BAB III Metode Penelitian

Adapun metode penelitian berisi pendekatan penelitian, jenis dan sumber data, variabel penelitian, dan langkah-langkah penelitian.

BAB IV Hasil dan Pembahasan

Adapun pembahasan bab ini tentang hasil estimasi parameter model Tobit Bivariat, analisis data, dan memahami Al-Qur'an dengan teori estimasi.

BAB V Penutup

Adapun penutup berisi kesimpulan hasil penulisan skripsi dan saran bagi penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Model Regresi Linier

Menurut Hasan (2002) regresi linier adalah regresi dimana variabel-variabelnya (variabel bebas X dan variabel terikat Y) berpangkat paling tinggi satu dan saling berhubungan secara linier. Menurut Sembiring (1995) Model regresi linier sederhana terdiri dari satu variabel bebas x dan satu variabel terikat y. Model regresi umum yang mengandung k peubah bebas dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k X_k + \varepsilon_i, i = 1,2, \dots, n \qquad (2.1)$$

Bila pengamatan mengenai $\boldsymbol{Y}, x_1, \dots, x_k$ dinyatakan masing-masing dengan $Y_i, x_{i1}, \dots, x_{ik}$ dan *error*nya ε_i, maka dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y}_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i,\ i = 1,2, \dots, n \qquad (2.2)$$

sehingga persamaan (2.2) dapat dituliskan menjadi:

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \cdots + \beta_k x_{1k} + \varepsilon_1$$

$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \cdots + \beta_k x_{2k} + \varepsilon_2$$

$$\vdots$$

$$y_n = \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \cdots + \beta_k x_{nk} + \varepsilon_n$$

Jika persamaan (2.2) dinotasikan dalam bentuk matriks, menjadi:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

Misalkan lagi:

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Menurut Sembiring (1995:113) persamaan (2.2) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.4}$$

di mana:

$\boldsymbol{Y}$ = vektor variabel terikat berukuran $n \times 1$

$\boldsymbol{X}$ = matriks variabel bebas berukuran $n \times (k+1)$

$\boldsymbol{\beta}$ = vektor parameter berukuran $(k+1) \times 1$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ = vektor *error* berukuran $n \times 1$

2.2 Model Regresi Nonlinier

Menurut Sudjana (1996: 337), beberapa bentuk persamaan regresi non linier, yaitu:

1. Polinomial

$$\boldsymbol{Y}_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2}^2 + \beta_3 X_{i3}^3 + \cdots + \varepsilon_i \tag{2.5}$$

Bentuk parabola Kuadraditk

$$\boldsymbol{Y}_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2}^2 + \varepsilon_i \tag{2.6}$$

Bentuk parabola Kubik

$$\boldsymbol{Y}_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2}^2 + \beta_3 X_{i3}^3 + \varepsilon_i \tag{2.7}$$

2. Eksponensial

$$\boldsymbol{Y}_i = e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_k X_{ik}} \varepsilon_i \tag{2.8}$$

dengan transformasi logaritma, persamaan (2.8) diperoleh:

$$\ln(\boldsymbol{Y}_i) = \ln(e^{\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\cdots+\beta_k X_{ik}}\ \varepsilon_i)$$

$$= \ln e^{\beta_0+\beta_1 X_{i1}+\cdots+\beta_k X_{ik}} + \ln \varepsilon_i$$

$$= (\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_k X_{ik}) \ln e + \ln \varepsilon_i$$

$$= (\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_k X_{ik})(1) + \ln \varepsilon_i$$

$$= (\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_k X_{ik}) + \ln \varepsilon_i$$

3. Logistik (logit)

$$\boldsymbol{Y}_i = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0+\beta_1 Xi)}} \qquad (2.9)$$

bentuk lain dari logit

$$\boldsymbol{Y}_i = \frac{e^{(\beta_0+\beta_1 Xi)}}{1 + e^{(\beta_0+\beta_1 Xi)}} \qquad (2.10)$$

4. Respirokal

$$\boldsymbol{Y}_i = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i} \qquad (2.11)$$

transformasi modelnya adalah

$$\frac{1}{\boldsymbol{Y}_i} = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i \qquad (2.12)$$

bentuk respirokal yang lain adalah

$$\boldsymbol{Y}_i = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{X_i}\right) + \varepsilon_i \qquad (2.13)$$

2.3 Fungsi Distribusi Komulatif

Menurut Dudewicz dan Mishra (1995) definisi fungsi distribusi komulatif atau *Commulative Distribution Function* sebagai berikut:

Fungsi distribusi komulatif atau probabilitas komulatif sering disebut fungsi distribusi saja. Fungsi distribusi variabel acak kontinu x yang dinotasikan $F_x(x) = P(X \leq x)$ untuk semua bilangan riil x.

Salah satu distribusi yang penting dalam statistik adalah distribusi normal. Menurut Gujarati (2007) variabel acak x yang berdistribusi normal biasanya dinotasikan dengan $x \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$. Dengan x merupakan variabel acak yang bersifat kontinu dan dapat memiliki nilai rata-rata $-\infty$ sampai ∞. Sedangkan Dudewicz dan Mishra (1995) mendefinisikan distribusi normal sebagai berikut:

Suatu peubah acak x dikatakan berdistribusi normal $N(\mu_x, \sigma_x^2)$ bila (untuk suatu $\sigma^2 < 0$ dan $-\infty < \mu < \infty$) berlaku

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2, -\infty < \mu < \infty \tag{2.14}$$

fungsi $f_x(x)$ (2.14) menunjukkan nilai *Probability Density Function* (*PDF*) dari distribusi normal. Sehingga fungsi distribusi komulatif atau *Commulative Distribution Function (CDF)* dari distribusi normal dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 dx \tag{2.15}$$

Untuk menghitung probabilitas $P(a \leq x \leq b)$ dari suatu variabel acak kontinu x yang terdistribusi secara normal dengan parameter μ_x dan σ_x maka persamaan (2.14) harus diintegralkan mulai dari $x = a$ sampai $x = b$. Namun, tidak ada satupun dari teknik-teknik pengintegralan biasa yang bisa digunakan untuk menentukan integral tersebut. Untuk itu para ahli statistik telah membuat sebuah penyederhanaan dengan memperkenalkan sebuah fungsi kepadatan probabilitas normal khusus dengan nilai mean $\mu = 0$ dan deviasi standar $\sigma = 1$. Distribusi khusus ini dikenal dengan *distribusi normal standard*. Variabel acak dari distribusi normal standard ini biasanya dinotasikan dengan Z.

Dengan menerapkan ketentuan di atas pada persamaan (2.14) maka fungsi kepadatan probabilitas dari distribusi normal standart variabel acak kontinu z adalah:

$$f_N(z;0,1) = \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right), -\infty < z < \infty \tag{2.16}$$

(Harinaldi, 2005:93-94).

Persamaan (2.15) dapat ditransformasikan ke dalam normal baku yang dinyatakan dengan z. Dalam teorema, Bain dan Engelhard (1991:121) menyatakan:

Jika $x \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$, maka:

1. $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
2. $F_x = \Phi\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$

Bukti:

$$\begin{aligned} F_z(z) &= P[Z \leq z] \\ &= P\left[\frac{x-\mu}{\sigma} \leq z\right] \\ &= P[x \leq \mu + z\sigma] \\ &= \int_{-\infty}^{\mu+z\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx \end{aligned}$$

Kemudian substitusikan $w = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} F_z(z) &= \int_{-\infty}^{\mu+z\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(w)^2\right] dw \\ &= \Phi(z) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Simbol $\Phi(z)$ dinotasikan untuk standar normal komulatif atau *Commulative Distribution Function (CDF)* yang berdistribusi normal.

2.4 Distribusi Normal Multivariat

Jika y berdistribusi normal multivariat dengan rata-rata μ dan matriks covariansi Σ, maka fungsi kepadatannya diberikan sebagai berikut:

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\,|\Sigma|^{1/2}} \exp(-(y-\mu)'\Sigma^{-1}(y-\mu)/2) \qquad (2.18)$$

dimana k adalah jumlah variabel. y berdistribusi normal $N_k(\mu, \Sigma)$. Istilah $(y-\mu)'\Sigma^{-1}(y-\mu)$ dalam eksponen kepadatan normal multivariat (2.18) adalah jarak kuadrat dari y ke μ (Rencher & William, 2012:92).

2.5 Distribusi Normal Bivariat

Sembiring (1995) menyatakan bahwa jika y_1 dan y dua peubah yang berdistribusi normal, masing-masing $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ dan $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, dan ρ koefisien korelasi antara y_1 dan y_2, maka fungsi padat gabungan Y_1 dan Y_2 adalah

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} Q(y_1, y_2)\right] \qquad (2.19)$$

untuk

$$Q(y_1, y_2) = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\left(\frac{y_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2\rho\frac{(y_1-\mu_1)(y_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]$$

bila y_1 dan y_2 bebas satu sama lain, maka $\rho = 0$ dan bentuk fungsi padat gabungannya menjadi lebih sederhana:

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]$$

$$= f(y_1)f(y_2) \qquad (2.20)$$

dalam hal normal, pengertian tidak berkorelasi dan bebas adalah identik. Umumnya korelasi yang nol tidak mengakibatkan kebebasan, tetapi sebaliknya, dua peubah yang saling bebas mempunyai korelasi yang nol.

2.6 Distribusi Normal Tersensor

Seandainya variabel terikat yang tersensor berdistribusi normal dan disimbolkan sebagai y^*, maka untuk mendapatkan distribusi dari variabel tersensor y^* ditansformasikan menjadi y dimana:

$$y = a \text{ jika } y^* \leq a$$

$$y = y^* \text{ jika } y^* > a$$

Dan berdasarkan asumsi sebelumnya bahwa y^* mengikuti distribusi normal maka didapatkan nilai harapan dari variabel tersensor adalah:

$$prob(y = a) = prob(y^* \leq a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \tag{2.21}$$

Sedangkan probabilitas $y = y^*$ adalah

$$\begin{aligned} prob(y = y^*) &= prob(y^* > a) \\ &= 1 - prob(y^* \leq a) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Menurut Greene (2003:763) momen untuk variabel normal tersensor jika $y^* \sim N[\mu_x, \sigma^2]$ dan $y = a$ jika $y^* \leq a$ lainnya $y = y^*$, maka

$$E[y] = \Phi a + 1(1 - \Phi)(\mu + a\lambda) \tag{2.23}$$

dan

$$var[y] = \sigma^2(1 - \Phi)[(1 - \delta) + (\alpha - \lambda)^2\Phi]$$

dengan

$$\Phi\left[\frac{(a-\mu)}{\sigma}\right] = \Phi(a) = prob(y^* \leq a) = \Phi$$

$$\phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \phi(a) = \phi, \lambda = \frac{\phi}{(1-\Phi)} \tag{2.24}$$

dan

$$\delta = \lambda^2 - \lambda\alpha$$

Untuk bentuk khusus $a = 0$, sederhananya

$$E[y|a=0] = \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{\mu}{\sigma\lambda}\right), \text{dimana } \lambda = \frac{\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)} \tag{2.25}$$

2.7 Regresi Model *Dummy* Variabel

Menurut Supranto (2004) variabel yang sering digunakan dalam permasalahan regresi hanya variabel kuntitatif saja atau variabel yang hanya berupa angka. Padahal dalam beberapa hal kita juga sering menjumpai variabel regresi yang bersifat kulitatif yang berpengaruh terhadap variabel ekonomi yang lain, misalnya tingkat pendidikan (TK, SD, SMP, SMA, PT) memiliki pengaruh terhadap tingkat pendapatan dan masih banyak lagi yang lainnya.

Variabel dalam persamaan regresi yang memiliki sifat kualitatif tersebut biasanya menunjukkan ada tidaknya suatu "*quality*" atau "*attribute*", misalnya laki-laki atau perempuan, islam atau bukan, jawa atau luar jawa, sarjana atau bukan, dan lain sebagainya. Salah satu cara untuk membuat kuantifikasi (berbentuk angka) dari data kualitatif (tidak berbentuk angka) adalah dengan membentuk variabel-variabel *artificial* yang memperhitungkan nilai 1 atau 0. Nilai 0 untuk atribut yang tidak ada (tidak terjadi) dan angka 1 untuk atribut yang ada (terjadi). Misalnya, seseorang diberi nilai 1 jika dia islam dan diberi nilai 0 jika dia bukan islam, diberi nilai 1 jika dia perempuan dan 0 jika dia laki-laki. Variabel-variabel perumpamaan inilah yang disebut dengan variabel buatan (*Dummy Variable*) (Gujarati, 2009:1).

Variabel *dummy* adalah variabel yang digunakan untuk membuat kategori data yang bersifat kualitatif (Djalal, 2004:171). Menurut Supranto (2004) variabel *dummy* disebut juga variabel indikator, biner, kategorik, kualitatif, boneka atau variabel dikotomi. Suatu persamaan regresi tidak hanya menggunakan variabel kategorik sebagai variabel bebas, tetapi dapat pula idsertai oleh variabel bebas lain yang numerik. Persamaan regresi dengan variabel terikat berupa *dummy* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon \qquad (2.26)$$

Model persamaan (2.26) terlihat seperti regresi linier sederhana pada umumnya, tapi ternyata bukan, karena koefisien kemiringan β_2 yang menunjukkan tingkat perubahan Y untuk setiap perubahan unit x tidak dapat ditafsirkan, karena y hanya menggunakan dua nilai, 0 dan 1. Maka persamaan tersebut disebut dengan model probabilitas linier karena ekpektasi bersyarat y bila x diketahui, $E(y|x)$, bisa ditafsirkan sebagai probabilitas bersyarat, mengingat kejadian tersebut akan terjadi bila x diketahui, yakni $P(y = 1|x)$(Gujarati, 2009:21).

2.8 Regresi Tobit

Pada bidang mikro ekonomi banyak ditemukan masalah dengan data yang tersensor untuk variabel terikat. Ketika variabel terikat tersensor, nilai dari suatu rentang tertentu ditransformasikan sebagai suatu nilai tunggal (Green, 2003:761).

Menurut Supranto (2004) "*censored sample*" adalah apabila suatu sampel dimana informasi pada variabel bergantung tersedia hanya untuk beberapa observasi.

Censoring terjadi ketika data variabel terikat hilang atau terbatas. Misalnya dalam kepemilikan mobil, bisa saja tidak didapatkan data pendapatan orang yang tidak memiliki mobil. Demikian juga untuk lulusan yang tepat waktu, mungkin tidak didapatkan informasi dari lulusan yang lulusnya tidak tepat waktu. Dengan demikian, dua kelompok data yang dimiliki tidak setara (Wahyu, 2007:6.23-6.24). Contoh lain, seumpama sebuah peluru ditembakan dibawah kondisi yang terkendali pada sasaran sirkular vertical pada radius R. Jarak tembakan dari pusat, variabel acak yang dinyatakan akan jadi tak tampak jika tembakan meleset dari sasaran. Susunan variabel acak yang tampak akan terbatas pada susunan $[0. R]$ dan tidak ada observasi bisa tercatat untuk beberapa penelitian cobaan (George, 1985:609).

Model Tobit ini merupakan pengembangan dari model Probit. Perbedaan utamanya, bahwa pada model probit data yang digunakan benar-benar diskrit (kategorik), sedangkan pada model Tobit menggunakan data tersensor (Ekananda, 2015:28). Model tobit pertama kali dikemukakan oleh James Tobin (1958) yang digunakan untuk menganalisis pengeluaran para rumah tangga di Amerika Serikat untuk membeli mobil.

Menurut Green (2002:764) dalam referensi Tobin (1958), di mana model pertama kali diusulkan. Regresi tobit diperoleh dengan membuat mean dalam korespondensi sebelumnya dengan model regresi klasik. Formulasi umum biasanya diberikan dalam fungsi indeks,

$$\boldsymbol{Y}_i^* = \boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad i = 1,2,\dots,n \tag{2.27}$$

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{jika} \quad y_i^* \leq 0 \\ y_i^* & \text{jika} \quad y_i^* > 0 \end{cases}$$

ada tiga kondisi potensial yang perlu dipertimbangkan, tergantung pada tujuan penelitian. Untuk variabel indeks, kadang-kadang disebut variabel laten, $E[y_i^*|x_i]$ adalah $x_i'\beta$. Sesuai dengan momen untuk variabel normal tersensor, untuk pengamatan yang diambil secara acak dari populasi, yang mungkin atau mungkin tidak disensor,

$$E[y_i|x_i] = \Phi\left(\frac{x_i{}'\beta}{\sigma}\right)(x_i'\beta + \sigma\lambda_i)$$

dimana,

$$\lambda_i = \frac{\phi[(0 - x_i'\beta)/\sigma]}{1 - \Phi[(0 - x_i'\beta)/\sigma]} = \frac{\phi(x_i'\beta/\sigma)}{\Phi(x_i'\beta/\sigma)}$$

Regresi model Tobit multivariat dinyatakan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y}_{ij}^* = \boldsymbol{X}_{ij}'\boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \tag{2.28}$$

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{jika} \quad y_i^* \leq 0 \\ y_i^* & \text{jika} \quad y_i^* > 0 \end{cases}$$

dengan $i = 1,2, \ldots, n$ dan $j = 1,2, \ldots, k$

2.9 Pendiferensialan Matriks

Dumairy (1999) mengatakan matriks adalah kumpulan bilangan yang disajikan secara teratur dalam susunan baris dan kolom yang membentuk suatu persegi panjang, serta termuat di antara sepasang tanda kurung. Secara umum suatu matriks $\boldsymbol{A}_{m \times n}$ dituliskan sebagai

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Menurut Gujarati (2004), jika $\boldsymbol{a}$ adalah vektor kolom berukuran $(n \times 1)$ yang menyatakan angka-angka atau konstanta dan $\boldsymbol{x}$ suatu vektor kolom berukuran $(n \times 1)$ yang menyatakan variabel-variabel $x_1,\ x_2, \dots,\ x_n$

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

maka didapatkan

$$\frac{\partial\left[a'x\right]}{\partial x} = a$$

$$\left(\frac{\partial\left[a'x\right]}{\partial x'}\right)' = a \tag{2.29}$$

Adapun pembuktiannya sebagai berikut

$$\frac{\partial\left[a'x\right]}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n\right]$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\left[a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n\right]}{\partial x_1} \\ \dots \\ \dfrac{\partial\left[a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n\right]}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{a}$$

Didapatkan juga

$$\left(\frac{\partial\left[a'x\right]}{\partial x'}\right)' = \left(\frac{\partial}{\partial x'}\left(\left[a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right)\right)'$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x'}\left[a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n\right]\right)'$$

$$= \left[\frac{\partial\left(a_1x_1 + \dots + a_nx_n\right)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial\left(a_1x_1 + \dots + a_nx_n\right)}{\partial x_n}\right]' \tag{2.31}$$

$$= \left[a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n\right]'$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a$$

Gujarati (2004) juga menjelaskan, jika x suatu vektor kolom berukuran $(n \times 1)$ yang menyatakan variabel-variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ serta $\boldsymbol{A}$ menyatakan suatu matriks diagonal berukuran $(n \times n)$ berisi elemen konstanta a_{ij} untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, n,$ maka

$$\frac{\partial[x'\boldsymbol{A}x]}{\partial x} = \frac{\partial[x'\boldsymbol{A}x]}{\partial x} + \left(\frac{\partial[x'\boldsymbol{A}x]}{\partial x}\right)'$$

$$= (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}')x \tag{2.32}$$

Adapun pembuktian dari persamaan (2.31) sebagai berikut:

$$x'Ax = \left[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n\right]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \ldots + x_n a_{1n} \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \ldots + x_n a_{2n} \\ \vdots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \ldots + x_n a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \left(x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \ldots + x_n a_{1n} \right) x_1 + \\ \left(x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \ldots + x_n a_{2n} \right) x_2 + \\ \ldots \quad + \\ \left(x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \ldots + x_n a_{nn} \right) x_n \end{bmatrix} \tag{2.33}
$$

Selanjutnya dilakukan penurunan sebagaimana pada persamaan (2.32)

$$
\frac{\partial \left[x^{'} A x \right]}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \left(x^{'} A x \right)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \left(x^{'} A x \right)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \left(x^{'} A x \right)}{\partial x_n} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \left(2a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \right) + \left(a_{21} x_2 + \ldots + a_{n1} x_n \right) \\ \left(a_{21} x_1 + 2a_{22} x_2 + \ldots + a_2 x_n \right) + \left(a_{12} x_1 + \ldots + a_{n2} x_n \right) \\ \vdots \\ \left(a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 x + \ldots + 2a_{nn} x_n \right) + \left(a_{1n} x_1 + a_{2n} x_n \right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \right) + \left(a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{n1} x_n \right) \\ \left(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \right) + \left(a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{n2} x_n \right) \\ \vdots \\ \left(a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 x + \ldots + a_{nn} x_n \right) + \left(a_{1n} x_1 + a_{2n} x_n + \ldots a_{nn} x_n \right) \end{bmatrix} \\
&= \left[Ax + A^{'} x \right] \\
&= \left[A + A^{'} \right] x
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

Karena ***A*** matriks persegi maka dapat diperoleh

$$
\frac{\partial \left(x^{'} A x \right)}{\partial x} = (A + A^{'}) x \tag{2.35}
$$

2.10 Estimasi Parameter

2.10.1 Pengertian Estimasi

Raymond dan Myers (1995) mengatakan bahwa statistika inferensi adalah suatu metode statistika yang digunakan untuk menarik inferensi atau kesimpulan dari suatu populasi dengan informasi sampel yang diambil dari populasi tersebut. Dalam metode klasik, inferensi didasarkan sepenuhnya pada informasi yang diperoleh melalui sampel acak yang diambil dari populasi. Secara garis besar statistika inferensi dibedakan menjadi dua, yaitu penaksiran/estimasi dan pengujian hipotesis.

Secara umum estimasi (perkiraan) adalah dugaan atas sesuatu yang akan terjadi dalam kondisi tidak pasti. Estimasi merupakan proses yang digunakan untuk menghasilkan suatu nilai tertentu terhadap suatu parameter. Penduga (*estimator*) adalah suatu nilai statistik yang digunakan untuk menduga suatu parameter (Sarwoko, 2007).

Adiningsih (2009) menyebutkan bahwa ada dua kemungkinan dalam pembahasan estimasi parameter yang tidak diketahui. Pertama, dapat menghitung nilai tunggal dari sampel sebagai wakil atau paling mewakili. Alternatif lain, dapat mencari interval (*range*) yang berisi parameter yang sebenarnya. Estimasi dalam statistik dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu

a. Estimasi titik

Estimasi titik adalah nilai tunggal dari suatu statistik yang digunakan untuk memperkirakan taksiran parameter.

b. Estimasi interval

Estimasi interval adalah nilai-nilai statistik dalam suatu interval atau jarak yang diharapkan taksiran parameter itu berada.

2.10.2 Sifat-sifat Estimasi

Terdapat banyak alternatif yang dapat digunakan untuk mengestimasi parameter. Misalnya, untuk mengestimasi rata-rata populasi, maka dapat menggunakan *mean*, *median*, atau *modus*. Namun, dalam melakukan estimasi harus berhati-hati karena tidak semua penduga itu baik (Adiningsih, 2009).

Suatu penduga dikatakan baik jika telah memenuhi kriteria-kriteria tertentu. Adapun beberapa kriteria yang harus dipenuhi agar suatu penduga dikatakan sebagai penduga yang baik, yaitu

1. Tidak bias

Penduga $\hat{\beta}$ dikatakan sebagai penduga tak bias apabila rata-rata nilai yang diharapkan sama dengan nilai yang sesungguhnya, $E(\hat{\beta}\ ) = \beta$. Sebaliknya, suatu penduga $\hat{\beta}$ dikatakan bias apabila nilai penduga tersebut tidak sama dengan nilai parameternya. Sifat tidak bias adalah sifat yang sangat diinginkan, yaitu ketika tidak ada penyimpangan penduga terhadap parameter sesungguhnya. Pada umumnya orang akan menyukai penduga yang tidak bias sekaligus variansi yang sangat kecil (minimum) terhadap nilai rata-ratanya (Adiningsih, 2009).

2. Efisiensi

Dalam penerapan teori terkadang diperoleh beberapa penduga tak bias yang berbeda. Oleh karena itu, untuk melakukan estimasi lebih disukai penduga yang distribusinya terkonsentrasi paling mendekati di sekitar parameter populasi yang diestimasi. Misalkan $\hat{\beta}_1$ dan $\hat{\beta}_2$ adalah penduga-penduga tak bias dari parameter β, suatu penduga $\hat{\beta}_1$ dikatakan lebih efisien dibandingkan $\hat{\beta}_2$ jika memenuhi

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right) < Var\left(\hat{\beta}_2\right) \quad (2.36)$$

Jika $\hat{\beta}$ adalah penduga tak bias parameter β dan tidak ada penduga tak bias lain yang memiliki variansi lebih kecil, maka $\hat{\beta}$ dikatakan paling efisien (Adiningsih, 2009).

3. Konsistensi

Menurut Wibisono (2009), suatu penduga parameter $\hat{\beta}$ dikatakan konsisten (*ajeg*) bila nilai dugaan akan sama dengan parameter yang diduga dengan bertambahnya ukuran contoh sampai tak terhingga. Secara matematis, penduga $\hat{\beta}$ dikatakan konsisten jika untuk nilai positif sebarang δ (tidak peduli seberapa kecilnya) maka probabilitas mendekati satu

$$\lim_{n \to \infty} \left(\left|\hat{\beta} - \beta\right| < \delta\right) = 1 \quad (2.37)$$

Persamaan (2.37) memperlihatkan bahwa untuk nilai limit $n \to \infty$ titik akhir pada saat distribusi penduga $\hat{\beta}$ akan menghampiri titik tertentu yaitu parameter populasi β dengan δ sekecil mungkin.

Jika ukuran sampel bertambah tak berhingga maka distribusi sampling penduga akan mengecil menjadi suatu garis tegak lurus di atas parameter yang sebenarnya dengan nilai probabilitas sama dengan satu. Perlu diperhatikan bahwa suatu penduga konsisten belum tentu merupakan penduga yang baik, karena konsisten hanya merupakan salah satu dari syarat (Wibisono, 2009).

2.11 Metode Maximum Likelihood

Metode *maximum likelihood* adalah suatu estimasi titik yang mempunyai sifat teoritis yang lebih kuat dibandingkan dengan metode penaksiran kuadrat terkecil. Metode *maximum likelihood* merupakan salah satu cara untuk estimasi parameter yang tidak diketahui. Prosedur estimasi *maximum likelihood* menguji apakah estimasi maksimum yang tidak diketahui dari fungsi likelihood suatu sampel nilainya sudah memaksimumkan fungsi likelihood (Gujarati, 2004:112).

Menurut Aziz (2010:32) suatu metode yang bersifat umum dari penasiran titik dengan beberapa sifat teoritis yang lebih kuat dibandingkan dengan metode penaksiran kuadrat terkecil adalah metode kemungkinan terbesar. Misalkan X_i vektor $i \times k$, untuk $i = 1,2,\dots,n$. Maka $y_i = X_i\beta + \varepsilon_i$ sehingga $y_i \sim N(X_i'\beta, \sigma^2)$. Fungsi distribusi peluang dari y_i jika diberikan X_i, β, dan σ^2 adalah

$$f(y_i|X_i,\beta,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - x_i'\beta}{\sigma}\right)^2\right] \quad (2.38)$$

$$l(\beta,\sigma^2|X,y) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y - X\beta)'(y - X\beta)\right] \quad (2.39)$$

Sedangkan fungsi *log-likelihood*nya adalah

$$L = \ln l = \frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y - X\beta)'(y - X\beta)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y' - \beta'X')(y - X\beta)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - y'X\beta - \beta'X'y + \beta'X'X\beta)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - (y'X\beta)' - \beta'X'y + \beta'X'X\beta)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - \beta'X'y - \beta'X'y + \beta'X'X\beta)$$

$$= -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta) \tag{2.40}$$

Kemudian diturunkan terhadap β

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X'y + X'X\beta + \beta'X'X)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X'y + X'X\beta + (\beta'X'X)')$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X'y + X'X\beta + X'X\beta)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X'y + 2X'X\beta)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}(X'y - X'X\beta) \tag{2.41}$$

Selanjutnya, persamaan (2.41) disamakan dengan nol.

2.12 Iterasi Newton Raphson

Iterasi *Newton Raphson* menggunakan deret taylor orde 2 menggunakan model seperti berikut (Rochmad,2013):

$$Y = f(X, \beta) \tag{2.42}$$

dengan diketahui Y dan X sedangkan yang dicari parameter β dan σ^2, maka diperoleh:

$$L(\beta) = f(\beta.\sigma^2 | Y, X)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\big(Y - f(X,\beta)\big)'\big(Y - f(X,\beta)\big)\right] \tag{2.43}$$

yang dinamakan sebagai fungsi *likelihood.* Untuk menyelesaikan fungsi *likelihood*-nya akan lebih mudah jika ditransformasikan kedalam bentuk *ln* (*logaritma natural*), sehingga dapat ditulis menjadi:

$$\ln L(\beta) = \ln\big(l(\beta, \sigma^2 | Y, X)\big)$$

$$= \ln\left((2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\big(Y - f(X,\beta)\big)'\big(Y - f(X,\beta)\big)\right)\right) \tag{2.44}$$

Dalam hal aproximasi $L(\beta)$ dengan nilai-nilai awal ditentukan dari iterasi pertama $(\hat{\beta}^{(0)})$, secara deret taylor orde 2, yaitu (Rochmad,2013):

$$L(\beta) \approx L(\beta^{(0)}) + \frac{\left(L'(\beta^{(0)})\right)'(\beta - \beta^{(0)})}{1!} + \frac{(\beta - \beta^{(0)})' L"(\beta^{(0)})(\beta - \beta^{(0)})}{2!}$$

$$= L(\beta^{(0)}) + \left(L'(\beta^{(0)})\right)'(\beta - \beta^{(0)}) + \frac{1}{2}(\beta - \beta^{(0)})' L"(\beta^{(0)})(\beta - \beta^{(0)}) \tag{2.45}$$

dengan

$$L'(\beta^{(0)}) = \left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}$$

$$L"(\beta^{(0)}) = \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \tag{2.46}$$

Sehingga persamaan (2.45) menjadi:

$$L(\beta) = L(\beta^{(0)}) + \left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)' \beta - \left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)' + \frac{1}{2}(\beta' \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \beta$$

$$-\beta' \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)} - (\beta^{(0)})' \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \beta + (\beta^{(0)})' \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)}) \tag{2.47}$$

Dengan turunan pertama terhadap β yang diproses dari persamaan (2.47) tersebut maka (Rochmad,2013):

$$\frac{\partial L(\beta)}{\partial \beta} = 0 + \left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)' 0 - \left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)' + \frac{1}{2}(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \beta$$

$$+ \left(\beta' \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right) - \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)} - \left((\beta^{(0)})' \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)' + 0)$$

$$= \left(\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}}\right)' + \frac{1}{2}(2)\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta}\right|_{\beta^{(0)}} (\beta - \beta^{(0)})\right)$$

$$= \left(\left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right)' + \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \left(\beta - \beta^{(0)} \right) \right) \tag{2.48}$$

Karena

$$\left(\left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right)' = \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}}$$

Persamaan (2.48) menjadi:

$$\frac{\partial L(\beta)}{\partial \beta} = \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} + \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \left(\beta - \beta^{(0)} \right) \right) \tag{2.49}$$

Untuk memaksimumkan fungsi *likelihood* maka persamaan (2.49) disamadengankan nol, sehingga diperoleh:

$$0 = \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} + \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \left(\beta - \beta^{(0)} \right) \right)$$

$$= \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} + \left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \beta - \left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)}$$

$$\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \beta = \left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)} - \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}}$$

$$\beta = \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right)^{-1} \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)} - \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right)$$

$$= \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right)^{-1} \left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \beta^{(0)} - \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right)^{-1} \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}}$$

$$= \beta^{(0)} - \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right)^{-1} \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \tag{2.50}$$

Persamaan (2.50) merupakan hasil aproksimasi untuk iterasi pertama diperoleh:

$$\beta^{(1)} = \beta^{(0)} - \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right)^{-1} \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \tag{2.51}$$

Nilai-nilai aproksimasi pada iterasi pertama digunakan untuk mecari nilai-nilai pada aproksimasi iterasi kedua:

$$\beta^{(2)} = \beta^{(2)} - \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right)^{-1} \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \quad (2.52)$$

Sehingga diperoleh untuk selanjutnya diperoleh bentuk iterasi umum yaitu (Rochmad,2013):

$$\boldsymbol{\beta}^{(n+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(n)} - \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \right)^{-1} \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(0)}} \quad (2.53)$$

Menurut George G (1985:497) iterasi untuk mendapatkan taksiran β dengan nonlinier *maximum likelihood* dapat ditulis dengan:

$$\boldsymbol{\beta}^{n+1} = \boldsymbol{\beta}^{n} - t_n P_n \gamma_n \quad (2.54)$$

dimana

$$t_n = 1, P_n = \left(\left. \frac{\partial^2 L}{\partial \beta' \partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1}, \gamma_n = \left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\beta^{(n)}} \quad (2.55)$$

t_n adalah koefisien pengali.

2.13 Uji Hipotesis

2.13.1 Pengertian Uji Hipotesis

Pengujian hipotesis adalah salah satu cara dalam statistik untuk menguji parameter populasi berdasarkan statistik sampelnya, untuk dapat diterima atau ditolak pada tingkat signifikansi tertentu. Pada dasarnya pengujian hipotesis ini adalah untuk membuat kesimpulan sementara dari permasalahan yang telah ditelaah. Sebagai wahana untuk menetapkan kesimpulan sementara tersebut kemudian ditetapkan hipotesis nol dan hipotesis alternatifnya (Supangat, 2008:293).

Hipotesis nol (H_0) untuk memprediksi bahwa variabel bebas tidak memiliki efek pada variabel terikat dalam populasi, atau untuk memprediksi tidak adanya perbedaan antara suatu kondisi satu dengan kondisi yang lain. Sedangkan hipotesis alternative (H_1) untuk memprediksi bahwa variabel bebas mempunyai efek pada variabel terikat dalam populasi, atau untuk memprediksi adanya perbedaan suatu kondisi dengan kondisi yang lainnya (Irianto, 2006:97-98).

Prosedur dalam pengujian hipotesis dibuat untuk menguji kredibilitas H_0. Hal ini berarti bahwa pengujian hipotesis akan menguji H_0, bukan menguji H_1 walaupun hipotesis yang dikembangkan melalui kajian toritis adalah H_1. Oleh karena itu, jika H_0 ternyata terbukti kebenarannya, maka H_1 ditolak. Sebaliknya, apabila ternyata H_0 tidak terbukti kebenarannya, maka H_0 ditolak dan H_1 diterima.

Dalam statistik memiliki dua macam hipotesis, yaitu hipotesis matematis dan hipotesis verbal. Kedua hipotesis ini hanya berbeda bentuknya saja, tetapi memiliki makna yang sama. Hipotesis matematis misalnya:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad (2.56)$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

Hipotesis matematis pada persamaan (2.56) dapat diverbalkan menjadi:

H_0 : rata-rata/nilai populasi pertama tidak berbeda secara signifikan dengan rata-rata/ nilai populasi kedua.

H_1 : rata-rata/nilai populasi pertama berbeda secara signifikan dengan rata-rata/nilai populasi kedua.

2.13.2 Uji Wald

Salah satu metode uji hipotesis yang dapat dilakukan adalah uji wald, yaitu uji signifikansi tiap-tiap parameter:

$H_0: \hat{\beta}_j = 0$ untuk suatu $j = 0,1,2, \dots, k$

$H_1: \hat{\beta}_j \neq 0$

Statistik uji yang digunakan adalah

$$W_j = \left(\frac{\hat{\beta}_j}{SE(\hat{\beta}_j)}\right)^2 \;;j = 0,1,2, \dots, k \tag{2.57}$$

Statistik uji ini berdistribusi Khi-kuadrat dengan derajat bebas 1 atau ditulis $W_j \sim \chi^2$. H_0 ditolak jika $W_j \sim \chi^2_{\alpha,1}$; dengan α adalah tingkat signifikansi yang dipilih. Jika H_0 ditolak, artinya parameter tersebut signifikan secara statistik pada tingkat signifikansi α (Nahrowi & Hardius, 2008:256).

2.13.3 Uji Model AIC

Seorang ahli statistic dari jepang bernama professor Hirotugu Akaike, pada tahun 1974 mengusulkan suatu metode untuk menguji ketepatan suatu model. Metode tersebut yang kemudian dinamakan sebagai *Akaike Information Criterion* (AIC) dengan rumus:

$$AIC = \frac{RSS}{n} \exp\left(\frac{2k}{n}\right) \tag{2.58}$$

Persamaan (2.58) mengandung bilangan e dan *Residual Sum Square* (RSS) sehingga dapat diubah ke dalam bentuk logaritma sebagai berikut:

$$\ln AIC = \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i^2\right) + \left(\frac{2k}{n}\right) \tag{2.59}$$

dimana k adalah banyaknya variabel independen dan n adalah banyaknya observasi (Wing Wahyu, 2007:4.6).

2.14 Curah Hujan dan Kelembaban

Curah Hujan

Hujan adalah jumlah air yang turun pada suatu daerah dalam waktu tertentu. Curah hujan normalnya berkisar 150 milimeter (Siwi Tri, 2010). Alat untuk mengukur banyaknya curah hujan dinamakan Rain Gauge. Curah hujan diukur dalam harian, bulanan dan tahunan.

Curah hujan yang turun diwilayah Indonesia dipengaruhi oleh beberapa faktor antara lain:

1. Bentuk medan atau topografi,
2. Arah lereng medan,
3. Arah angin yang sejajar dengan garis pantai, dan
4. Jarak perjalanan angina di atas medan datar.

Hujan adalah butiran-butiran air yang dicurahkan dari atmosfer turun ke permukaan (Soko, 2009).

Kelembaban Udara

Kelembaban udara adalah banyaknya uap air yang terkandung dalam massa udara pada saat dan tempat tertentu. Alat untuk mengukur kelembaban udara dinamakan psychrometer atau hypgrometer. Kelembaban udara dapat dinyatakan dalam beberapa cara, yaitu:

1. kelembaban absolut adalah bilangan yang menunjukkan berat uap air tiap kesatuan volume udara. Biasanya dinyatakan dengan gram uap air/m^3.
2. Kelembaban spesifik adalah besarnya tekanan yang diberikan oleh uap air sebagai bagian dari udara. Tekanan uap air dinyatakan dalam mb atau mm air raksa.

3. Kelembaban nisbi adalah perbandingan antara banyaknya air yang terdapat di udara dengan banyaknya uap air maksimum yang dikandung oleh udara pada suhu dan tekanan yang sama . kelembaban relative dinyatakan dengan persen (%) (Waryono, 1987:58).

2.15 Hasil Penelitian Sebelumnya

Penelitian sebelumnya dilakukan oleh wardhani (2011) tentang estimasi regresi Tobit Univariat.

Misalkan terdapat model linier sebagai berikut:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i \tag{2.60}$$

untuk $i = 1,2, \dots, n$ dan $j = 0,1,2, \dots, k$

atau ditulis sebagai

$$y_i = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}_i^T \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \varepsilon_i \tag{2.61}$$

maka persamaan (2.61) dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$y_i = x_i^T \beta + \varepsilon_i, \text{ dengan } i = 1,2, \dots, n \tag{2.62}$$

Pada model regresi, Gauss telah membuat asumsi mengenai variabel ε bahwa nilai rata-rata atau harapan variabel ε adalah sama dengan nol atau

$$E(\varepsilon) = 0$$

yang berarti nilai bersyarat ε yang diharapkan adalah sama dengan nol. Sehingga nilai harapan persamaan (2.60) dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned} E(y_i|x_i) &= 1.P(y_i = 1|x_i) + 0.P(y_i = 0|x_i) \\ &= P(y_i = 1|x_i) + 0 \\ &= P(y_i = 1|x_i) \end{aligned}$$

$$= p_i \tag{2.63}$$

dimana $x_i = \begin{bmatrix} 1 \\ x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ki} \end{bmatrix}_{(k+1)\times 1}$

Bila p_i adalah probabilitas bahwa $y_i = 1$ dan $q_i = 1 - p_i$, adalah probabilitas bahwa $y_i = 0$, maka variabel y_i memiliki probabilitas $p_i + 1 - p_i = 1$. Jika probabilitas p_i harus berada antara 0 dan 1, dan y_i harus bernilai 0 atau 1, maka y_i mengikuti distribusi probabilitas Bernoulli dengan syarat

$$0 \leq E(y_i|x_i) \leq 1$$

Model Tobit dibentuk dengan mengaitkan *mean* yang sudah diperoleh sebelumnya dengan model regresi linier. Persamaan umum model Tobit adalah:

$$y_i^* = x_i^T\beta + \varepsilon_i, i = 1,2, \dots, n \tag{2.64}$$

dan

$$y_i = \begin{cases} a & \text{, jika } y_i^* \leq a \\ y_i^* & \text{, jika } y_i^* > a \end{cases} \tag{2.65}$$

dimana:

y_i^* : variabel terikat laten/ variabel indeks

y_i : variabel terikat yang diamati

$x_i^T = [1 \quad x_{i1} \quad \dots \quad x_{ki}]_{1x(k+1)}$: *transpose* vektor variabel bebas

$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}_{(k+1)x1}$: vektor koefisien parameter

a : titik sensor

Dalam model Tobit, kita asumsikan bahwa $a = 0$ yaitu menunjukkan bahwa data disensor pada nilai 0. Densitas bersyarat untuk variabel tersensor dapat ditulis

$$f(y|x) = f^*(y|x)^d F^*(a|x)^{1-d} \tag{2.66}$$

dimana

$$d = \begin{cases} 1 & jika\ y > a \\ 0 & jika\ y = a \end{cases} \tag{2.67}$$

Dari persamaan (2.66) dapat diketahui densitas tersensor dengan $f^*(y_i)$ merupakan fungsi densitas normal, $N(x_i^T, \beta, \sigma^2)$, yaitu

$$\begin{aligned} f^*(y_i) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - x_i^T \beta_i)\right) \\ &= \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i - x_i^T \beta_i}{\sigma}\right) \end{aligned} \tag{2.68}$$

Dan untuk $F^*(a|x)$ dengan $a = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} F^*(0) &= P(y_i^* \leq 0) \\ &= P(x_i^T \beta + \varepsilon_i \leq 0) \\ &= P(\varepsilon_i \leq -x_i^T \beta) \\ &= \mathrm{P}\left(\frac{\varepsilon_\mathrm{i}}{\sigma} \leq -\frac{x_i^T \beta}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(-\frac{x_i^T \beta}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{x_i^T \beta}{\sigma}\right) \end{aligned} \tag{2.69}$$

Untuk mengestimasi parameter model Tobit dengan menggunakan metode *maximum likelihood*, harus menemukan fungsi *likelihood* dahulu. Fungsi *likelihood* merupakan fungsi padat peluang gabungan. Fungsi kepadatan peluang y adalah:

$$f(y_i) = f^*(y_i)^d F^*(y_i)^{1-d}$$

$$= \left[\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma}\right)\right]^d \left[1 - \Phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)\right]^{1-d} \quad (2.70)$$

Sehingga fungsi padat peluang gabungan dari n observasi, yang merupakan fungsi *likelihood*, adalah:

$$f(y_i) = f(y_1, y_2, ..., y_n)$$

$$= f(y_1) f(y_2)... f(y_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(y_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i - x_i^T\beta}{\sigma}\right)\right]^{d_i}\left[1-\Phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)\right]^{1-d_i}\right) \quad (2.71)$$

$$= l(\beta, \sigma | x_i)$$

Kemudian persamaan (2.71) dilogaritmakan untuk memudahkan proses penurunan pertamanya guna mendapatkan nilai parameter yang memaksimalkan fungsi, sehingga diperoleh fungsi *log likelihood*,

$l(\beta, \sigma|x_i)$

$$= \ln\left\{\prod_{i=1}^{n}\left[\left[\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma}\right)\right]^{d_i}\left[1 - \Phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)\right]^{1-d_i}\right]\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\ln\left[\left[\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma}\right)\right]^{d_i}\left[1 - \Phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)\right]^{1-d_i}\right]\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\ln\left[\left[\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y_i - x_i^T\beta_i}{\sigma}\right)\right]^{d_i} + \left[1 - \Phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)\right]^{1-d_i}\right]\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \ln \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (y_i - x_i^T \beta_i) \right\} \right]^{d_i} + \ln \left[1 - \Phi\left(\frac{x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right]^{1-d_i} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ d_i \left[-\tfrac{1}{2} \ln 2\pi - \tfrac{1}{2} \ln \sigma^2 - \tfrac{1}{2\sigma^2} (y_i - x_i^T \beta)^2 \right] + (1 - d_i) \ln \left[1 - \Phi\left(\tfrac{x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right] \right\}$$

$$= \sum_{\{i;y_i>0\}} \left[-\tfrac{1}{2} \ln 2\pi - \tfrac{1}{2} \ln \sigma^2 - \tfrac{1}{2\sigma^2} (y_i - x_i^T \beta)^2 \right] + \sum_{\{i;y_i=0\}} \ln \left[1 - \Phi\left(\tfrac{x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right]$$

$$= L(\beta, \sigma | x_i) \tag{2.72}$$

Untuk memaksimumkan fungsi *log likelihood* dan untuk mendapatkan estimasi parameter β, maka persamaan (2.72) diturunkan terhadap β dan disamakan dengan nol,

$$\frac{\partial L(\beta, \sigma^2 | x_i)}{\partial \beta}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{\{i;y_i>0\}} \left[-\frac{1}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} (y_i - x_i^T \beta)^2 \right] + \sum_{\{i;y_i=0\}} \ln \left[1 - \Phi\left(\frac{x_i^T \beta}{\sigma} \right) \right]$$

$$= \sum_{\{i;y_i>0\}} \left[-0 - 0 - \frac{1}{2\sigma^2} (2) (y_i - x_i^T \beta)(-x_i) \right] + \sum_{\{i;y_i=0\}} \left[\frac{-\phi\left(\frac{x_i^T \beta}{\sigma} \right)\left(\frac{x_i}{\sigma} \right)}{1 - \Phi\left(\frac{x_i^T \beta}{\sigma} \right)} \right]$$

$$= \sum_{\{i;y_i>0\}} \left[\frac{1}{\sigma^2} (y_i - x_i^T \beta) x_i \right] + \sum_{\{i;y_i=0\}} \left[\frac{-\phi\left(\frac{x_i^T \beta}{\sigma} \right)\left(\frac{x_i}{\sigma} \right)}{1 - \Phi\left(\frac{x_i^T \beta}{\sigma} \right)} \right]$$

$$= \sum_{\{i;y_i>0\}} \left[\frac{1}{\sigma^2} (y_i - x_i^T \beta) x_i \right] - \sum_{\{i;y_i=0\}} \left[\left(\frac{x_i}{\sigma} \right) \frac{\phi\left(\frac{x_i^T \beta}{\sigma} \right)}{1 - \Phi\left(\frac{x_i^T \beta}{\sigma} \right)} \right] \tag{2.73}$$

Kemudian persamaan (2.73) disamakan dengan nol,

$$0 = \sum_{\{i;y_i>0\}} \left[\frac{1}{\sigma^2} (y_i - x_i^T \beta) x_i \right] - \sum_{\{i;y_i=0\}} \left[\left(\frac{x_i}{\sigma} \right) \frac{\phi\left(\frac{x_i^T \beta}{\sigma} \right)}{1 - \Phi\left(\frac{x_i^T \beta}{\sigma} \right)} \right]$$

$$\sum_{\{i;y_i=0\}}\left[\left(\frac{x_i}{\sigma}\right)\frac{\phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)}{1-\Phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)}\right]=\sum_{\{i;y_i>0\}}\left[\frac{1}{\sigma^2}(y_i-x_i^T\beta)x_i\right] \tag{2.74}$$

Persamaan (2.74) adalah fungsi yang nonlinier sehingga perlu dilakukan iterasi yaitu dengan metode *Newton Raphson* untuk mempermudah mendapatkan taksiran dari model Tobit. Bentuk iterasi *Newton Raphson* sebagai berikut:

$$\beta^{n+1}=\beta^n-t_nP_n\gamma_n \tag{2.75}$$

dimana

$$t_n=1, P_n=\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|\beta^n\right)^{-1}, \gamma_n=\frac{\partial L}{\partial\beta}|\beta^n \tag{2.76}$$

t_n adalah koefisien pengali.

$$\frac{\partial^2 L(\beta,\sigma|x_i)}{\partial\beta\partial\beta^T}$$

$$=\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_{\{i;y_i>0\}}\left[\frac{1}{\sigma^2}(y_i-x_i^T\beta)x_i\right]-\sum_{\{i;y_i=0\}}\left[\left(\frac{x_i}{\sigma}\right)\frac{\phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)}{1-\Phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)}\right]$$

$$=\sum_{\{i;y_i>0\}}\left(\frac{x_i}{\sigma^2}(-x_i^T)\right)-\sum_{\{i;y_i=0\}}\left(\frac{x_i}{\sigma}\right)\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)}{1-\Phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)}\right)$$

$$=\sum_{\{i;y_i>0\}}\left(\frac{x_i}{\sigma^2}(-x_i^T)\right)+\sum_{\{i;y_i=0\}}\left(\frac{x_ix_i^T}{\sigma^2}\right)\left(\frac{\phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)}{1-\Phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)}\right)$$

$$\left(\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)-\frac{\phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)}{1-\Phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)}\right) \tag{2.77}$$

Kemudian dimasukkan kedalam rumus *Newton Raphson* sehingga diperoleh:

$$\beta^{n+1}=\beta^n-t_nP_n\gamma_n$$

$$= \beta^{n}_{(k+1)x1} - 1\left(\sum_{\{i;y_i>0\}}\left(\frac{x_i}{\sigma^2}(-x_i^T)\right) + \sum_{\{i;y_i=0\}}\left(\frac{x_i x_i^T}{\sigma^2}\right)\left(\frac{\phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)}{1-\Phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)}\right)\right)^{-1}_{(k+1)(k+1)}$$

$$\left(\sum_{\{i;y_i>0\}}\left[\frac{1}{\sigma^2}(y_i - x_i^T\beta)x_i\right] - \sum_{\{i;y_i=0\}}\left[\left(\frac{x_i}{\sigma}\right)\frac{\phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)}{1-\Phi\left(\frac{x_i^T\beta}{\sigma}\right)}\right]\right) \quad (2.78)$$

Sehingga didapatkan

$$\beta^{n+1}_{(k+1)x1} = \beta^{n}_{(k+1)x1} - t_n\left[\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta^T}|\beta^n\right]^{-1}_{(k+1)x(k+1)}\left[\frac{\partial L}{\partial\beta}|\beta^n\right]_{(k+1)x1}$$

2.16 Kisah Nabi Yusuf AS dalam Al-Qur’an

Didalam Al-Qur’an telah dijelaskan berbagai ilmu pengetahuan termasuk cerita yang bisa dibaca dengan estimasi. Salah satu ayat Al-Qur’an yang menjelaskan tentang estimasi ada dalam Q.S Yusuf. Nabi yusuf dikenal dengan kemampuannya menafsirkan mimpi yang juga akan berguna untuk memperkirakan apa yang akan terjadi di masa depan. Salah satunya terdapat dalam ayat 36 dan 41 yang artinya:.

“*Dan bersama dengan dia masuk pula ke dalam penjara dua orang pemuda. Berkatalah salah seorang diantara keduanya: "Sesungguhnya aku bermimpi, bahwa aku memeras anggur". Dan yang lainnya berkata: "Sesungguhnya aku bermimpi, bahwa aku membawa roti di atas kepalaku, sebahagiannya dimakan burung”. Berikanlah kepada kami ta´birnya; sesungguhnya kami memandang kamu termasuk orang-orang yang pandai (mena´birkan mimpi) (36). Hai kedua penghuni penjara: "Adapun salah seorang diantara kamu berdua, akan memberi minuman tuannya dengan khamar; adapun yang seorang lagi maka ia akan disalib, lalu burung memakan sebagian dari kepalanya. Telah diputuskan perkara yang kamu berdua menanyakannya (kepadaku)"(41)”. (Q.S Yusuf: 36 dan 41)*

Diceritakan sebelumnya, pada Q.S Yusuf ayat 33 bahwa Nabi Yusuf berdoa kepada Allah dan meminta untuk dipenjara daripada memenuhi ajakan para wanita untuk memenuhi keinginan mereka dan berbuat dosa. Kemudian

Allah mengabulkan doa Nabi Yusuf dan akhirnya beliau dipenjara sampai waktu yang tidak ditetapkan.

Beberapa hari setelah Nabi Yusuf dipenjara, ada dua orang yang dimasukkan kedalam penjara juga. Dalam tafsir ibnu katsir (1988), Qatadah mengatakan bahwa dua orang yang dipenjara itu adalah pengawal raja dan tukang pembuat roti. Mereka di penjara karena dituduh bersekongkol untuk meracuni raja. Setelah beberapa hari berada di penjara, mereka datang kepada Nabi Yusuf untuk memberi tabir mimpinya masing-masing. Di dalam penjara Nabi Yusuf terkenal dengan kejujuran, kebaikan, serta kepandaiannya menabir mimpi.

Menurut Al-Qurthubi (2008) diceritakan bahwa ada dua orang yang dimasukkan kedalam penjara dengan waktu yang hampir bersamaan dengan Nabi Yusuf. Ibnu Abbas RA berkata, "Setelah bermimpi, keduanya bersedih. Yusuf AS kemudian bertanya kepada keduanya, 'Aku melihat kalian berdua bersedih , mengapa? Keduanya menjawab, 'Hai tuan kami, kami bermimpi buruk'. Yusuf AS berkata, 'Kisahkan kepadaku'.

Nabi yusuf bertanya, "Apa yang kalian lihat dalam mimpi?". Kemudian mereka berdua menceritakan tentang mimpinya. Pembuat roti bercerita bahwa dia bermimpi membakar roti di tiga tempat pembakaran roti, kemudian dia menaruh di dalam tiga buah keranjang dan meletakkan keranjang itu di atas kepala. Tak lama kemudian seekor burung datang memakan sebagian dari roti tersebut. Dan penyampur minuman berkata bahwa dalam mimpinya itu dia memetik tiga tangkai anggur putih, lalu memerasnya di dalam tiga wadah untuk dijadikan khamr. Setelah menyaringnya, dia memberikannya kepada raja sebagaimana pekerjaannya Setelah mereka berdua bercerita, mereka meminta Nabi Yusuf untuk menafsirkan mimpi mereka (Al Qurthubi, 2008: 425-431).

Dalam Tafsir Al-Maraghi (1993) menurut sebuah riwayat, Nabi Yusuf berkata kepada juru minum raja mengenai tabir mimpi yang dia alami. Adapun pohon anggur yang dimaksud adalah keindahan nasib di sisi raja. Sedangkan tiga cabangnya adalah tiga hari di dalam penjara yang kemudian kamu akan keluar dan kembali kepada pekerjaanmu semula. Adapun mimpi seorang lagi, yaitu yang bermimpi bahwa dia membawa roti yang dimakan oleh burung-burung. Maka, dia akan disalib, lalu burung akan memakan sebagian kepalanya. Diriwayatkan bahwa Nabi Yusuf berkata kepadanya, “Sedangkan tiga keranjang yang kamu lihat dalam mimpi itu maksudnya adalah tiga hari yang kamu alami di dalam penjara, kemudian kamu keluar dan disalib.”

Kepercayaan dua orang tersebut kepada Nabi Yusuf mengenai ilmu dan akalnya dipergunakan Nabi Yusuf untuk memulai ajakannya kepada tauhid dan meninggalkan penyembahan terhadap berhala. Hal ini menambah penegasan bahwa awalnya Nabi Yusuf mendapat wahyu di dalam penjara untuk mengajak rakyat fakir dan teraniaya kepada agama Allah.

Ibnu Jarir meriwayatkan dari Abdullah bin Mas’ud, ia mengatakan bahwa kedua orang tersebut sebenarnya tidak bermimpi, tetapi mereka hanya berpura-pura mimpi untuk mencoba mengetahui kepandaian Nabi Yusuf tentang tabir mimpi (Bahreisy, 1988: 374).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Pendekatan Penelitian

Pendekatan yang dilakukan oleh penulis pada skripsi ini yaitu pendekatan studi kepustakaan, karena penelitian ini didasarkan pada buku-buku yang berkaitan dan dibutuhkan selama melakukan penelitian. Selain itu, sebagai bahan pertimbangan penelitian ini juga merujuk pada jurnal atau referensi lain yang dapat mendukung penelitian.

3.2 Jenis dan Sumber Data

Adapun jenis data yang digunakan oleh penulis dalam skripsi ini adalah jenis data sekunder yang berasal dari Badan Pusat Statistik. Data yang digunakan yaitu data curah hujan dan hari hujan setiap bulan pada tahun 2013-2014 di Juanda Kota Surabaya.

3.3 Variabel Penelitian

Variabel yang digunakan penulis pada skripsi ini sebanyak lima variabel, dengan dua variabel terikat dan tiga variabel bebas. Adapun variabel terikatnya yaitu Y_1 curah hujan dan Y_2 hari hujan, sedangkan variabel bebasnya kelembaban, tekanan udara dan temperatur.

3.4 Langkah-langkah Penelitian

Langkah-langkah estimasi parameter regresi model tobit bivariat dengan metode *maximum likelihood* adalah sebagai berikut:

1. Menentukan bentuk estimasi *maximum likelihood* pada model regresi Tobit Bivariat. Uraian langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Menentukan fungsi distribusi peluang pada model Tobit Bivariat
   b. Menentukan fungsi *likelihood* dari fungsi distribusi peluang pada model Tobit Bivariat
   c. Menentukan fungsi *log likelihood* dari fungsi *likelihood*
   d. Memaksimumkan fungsi *log likelihood* dengan mendeferesialkan fungsi *log likelihood* terhadap parameter β
   e. Mencari estimasi parameter dengan menggunakan iterasi *Newton Raphson*
2. Mengimplementasikan model Tobit Bivariat pada kasus curah hujan dan hari hujan di Juanda dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Mengaplikasikan data dengan regresi model tobit menggunakan e-views
   b. Menginterpretasikan output e-views
   c. Menguji parameter regresi menggunakan uji wald
   d. Menguji kebaikan model dengan melihat nilai AIC

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Bentuk Estimasi Parameter Model Tobit Bivariat dengan Metode *Maximum Likelihood*

Misalkan terdapat dua variabel respon yang tersensor, dinotasikan dengan Y_1 dan Y_2. Berdasarkan persamaan (2.28), dapat dituliskan bentuk persamaan regresi tobit multivariat sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y}_{ij}^{*} = \boldsymbol{X'}_{ij}\boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \tag{4.1}$$

untuk $i = 1,2, \dots, n$ dan $j = 1,2, \dots, k$

Kerena pada penelitian ini menggunakan regresi tobit bivariat, jadi hanya memiliki dua variabel bebas, yaitu:

$$y_{i1}^{*} = x'_{i1}\beta_1 + \varepsilon_{i1} \tag{4.2}$$

$$y_{i2}^{*} = x'_{i2}\beta_2 + \varepsilon_{i2} \tag{4.3}$$

Dalam hal regresi bivariat dengan dua variabel respon, maka akan ada dua variabel respon yaitu Y_1 dan Y_2 dengan masing-masing n observasi. Karena Y_i kemungkinan nilainya adalah dua, yaitu akan bernilai Y_i^* atau nol, maka untuk dua variabel Y_i, akan ada sebanyak empat kombinasi yang mungkin, yaitu:

i) $y_1 = 0$ dan $y_2 = 0$ jika $y_1^* \leq 0$ dan $y_2^* \leq 0$

ii) $y_1 = 0$ dan $y_2 = y_2^*$ jika $y_1^* \leq 0$ dan $y_2^* > 0$

iii) $y_1 = y_1^*$ dan $y_2 = 0$ jika $y_1^* > 0$ dan $y_2^* \leq 0$

iv) $y_1 = y_1^*$ dan $y_2 = y_2^*$ jika $y_1 > 0$ dan $y_2 > 0$

Berdasarkan persamaan (2.19), dengan asumsi Y_{ij}^* berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan variansi σ^2, maka *probability density function* (p.d.f) untuk Y_{i1} dan Y_{i2} dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(y_{i1,}y_{i2} \mid x_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\{Q(y_1, y_2)\} \quad (4.4)$$

dengan

$$Q(y_1, y_2) = -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y_{i1} - x'_{i1}\beta_1}{\sigma_{11}}\right)^2 + \left(\frac{y_{i2} - x'_{i2}\beta_2}{\sigma_{22}}\right)^2 - 2\rho\frac{(y_{i1} - x'_{i1}\beta_1)(y_{i2} - x'_{i2}\beta_2)}{\sigma_{11}\sigma_{22}}\right]$$

Jadi untuk keempat kasus yang mungkin terjadi, p.d.f nya adalah:

1. Pdf untuk kemungkinan kejadian pertama $Y_{i1} = 0$ dan $Y_{i2} = 0$

$$P(Y_{i1} = 0, Y_{i2} = 0|X_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp(R(y_1, y_2))$$

dengan

$$R(y_1, y_2) = -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{-x'_{i1}\beta_1}{\sigma_{11}}\right)^2 + \left(\frac{-x'_{i2}\beta_2}{\sigma_{22}}\right)^2 - 2\rho\frac{(-x'_{i1}\beta_1)(-x'_{i2}\beta_2)}{\sigma_{11}\sigma_{22}}\right] \quad (4.5)$$

2. Pdf untuk kemungkinan kejadian kedua $Y_{i1} = 0$ dan $Y_{i2} = Y_{i2}^*$ atau $Y_{i1} = 0$ dan $Y_{i2} > 0$

$$P\left(Y_{i1} = 0, Y_{i2} = Y^*_{i2}\right) = P\left(Y_{i1} = 0, Y_{i2} > 0\right)$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp(S(y_1, y_2)) dy_{i2} \quad (4.6)$$

dengan

$$S(y_1, y_2) = -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{-x'_{i1}\beta_1}{\sigma_{11}}\right)^2 + \left(\frac{y_{i2} - x'_{i2}\beta_2}{\sigma_{22}}\right)^2 - 2\rho\frac{(-x'_{i1}\beta_1)(y_{i2} - x'_{i2}\beta_2)}{\sigma_{11}\sigma_{22}}\right]$$

3. Pdf untuk kemungkinan kejadian ketiga $Y_{i1} = Y_{i1}^*$ dan $Y_{i2} = 0$ atau $Y_{i1} > 0$ dan $Y_{i2} = 0$

$$P\left(Y_{i1} = Y^*_{i1}, Y_{i2} = 0\right) = P\left(Y_{i1} > 0, Y_{i2} = 0\right)$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left(T(y_1, y_2)\right) dy_{i1} \tag{4.7}$$

dengan

$$T(y_1, y_2) = -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{y_{i1} - x'_{i1}\beta_1}{\sigma_{11}}\right)^2 + \left(\frac{-x'_{i2}\beta_2}{\sigma_{22}}\right)^2 - 2\rho\frac{(y_{i1} - x'_{i1}\beta_1)(-x'_{i2}\beta_2)}{\sigma_{11}\sigma_{22}}\right)$$

4. Pdf untuk kemungkinan kejadian keempat $Y_{i1} = Y_{i1}^*$ dan $Y_{i2} = Y_{i2}^*$ atau $Y_{i1} > 0$ dan $Y_{i2} > 0$

$$P\left(Y_{i1} = Y_{i1}^*, Y_{i2} = Y_{i2}^*\right) = P\left(Y_{i1} > 0, Y_{i2} > 0\right)$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left(U(y_1, y_2)\right) dy_{i1} dy_{i2} \tag{4.8}$$

dengan

$$U(y_1, y_2) = -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{y_{i1} - x'_{i1}\beta_1}{\sigma_{11}}\right)^2 + \left(\frac{y_{i2} - x'_{i2}\beta_2}{\sigma_{22}}\right)^2 - 2\rho\frac{(y_{i1} - x'_{i1}\beta_1)(y_{i2} - x'_{i2}\beta_2)}{\sigma_{11}\sigma_{22}}\right)$$

Dari keempat p.d.f di atas, maka kita dapatkan fungsi *likelihood* dari regresi tobit bivariat. Fungsi *likelihood* merupakan fungsi padat peluang gabungan. Bentuk fungsi likelihoodnya merupakan perkalian dari keempat p.d.f di atas:

$$L(\beta) = \frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left(R(y_1, y_2)\right) \times \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left(S(y_1, y_2)\right)$$
$$\times \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left(T(y_1, y_2)\right) \times \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left(U(y_1, y_2)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp(R(y_1, y_2)) \tag{4.9}$$

Kemudian persamaan fungsi *likelihood* pada persamaan (4.9) dilogaritmakan untuk memudahkan proses penurunan fungsi pertamanya, sehingga akan diperoleh fungsi *log likelihood*.

$$L(\beta)=\frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho^2)}}\exp\left(R(y_1,y_2)\right)$$

$$\ln L\left(\beta\right)=\ln\frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho^2)}}\exp\left(R(y_1,y_2)\right)$$

$$=\ln\frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho^2)}}+\ln\exp\left(R(y_1,y_2)\right)$$

$$=\ln\frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho^2)}}+\left(R(y_1,y_2)\right) \tag{4.10}$$

Untuk langkah selanjutnya adalah menurunkan fungsi *Likelihood* terhadap parameter β_1 dan β_2

$$\frac{\partial\ln L(\beta)}{\partial\beta_1}=\frac{\partial\ln}{\partial\beta_1}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho^2)}}+\left(R(y_1,y_2)\right)\right)$$

$$=\frac{\partial\ln}{\partial\beta_1}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho^2)}}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(R(y_1,y_2)\right)$$

$$=0-\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(R(y_1,y_2)\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial\beta_1}\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{-x'_{i1}\beta_1}{\sigma_{11}}\right)^2+\left(\frac{-x'_{i2}\beta_2}{\sigma_{22}}\right)^2-2\rho\frac{(-x'_{i1}\beta_1)(-x'_{i2}\beta_2)}{\sigma_{11}\sigma_{22}}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(2\left(\frac{-x'_{i1}\beta_1}{\sigma_{11}}\right)\left(\frac{-x'_{i1}}{\sigma_{11}}\right)\right)-2\rho\frac{\left(-x'_{i1}\right)\left(-x'_{i2}\beta_2\right)}{\sigma_{11}\sigma_{22}}\right)$$

$$=\frac{1}{1-\rho^2}\left(\left(\frac{-x'_{i1}\beta_1}{\sigma_{11}}\right)\left(\frac{-x'_{i1}}{\sigma_{11}}\right)-2\rho\frac{\left(-x'_{i1}\right)\left(-x'_{i2}\beta_2\right)}{\sigma_{11}\sigma_{22}}\right) \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial \ln L(\beta)}{\partial \beta_2} = \frac{\partial \ln}{\partial \beta_2}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho^2)}} + \left(R(y_1, y_2)\right) \right)$$

$$= \frac{\partial \ln}{\partial \beta_2}\left(\frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho^2)}} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta_2}\left(R(y_1, y_2)\right)$$

$$= 0 - \frac{\partial}{\partial \beta_2}\left(R(y_1, y_2)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \beta_2}\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{-x'_{i1}\beta_1}{\sigma_{11}} \right)^2 + \left(\frac{-x'_{i2}\beta_2}{\sigma_{22}} \right)^2 - 2\rho \frac{(-x'_{i1}\beta_1)(-x'_{i2}\beta_2)}{\sigma_{11}\sigma_{22}} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(2\left(\frac{-x'_{i2}\beta_2}{\sigma_{22}} \right)\left(\frac{-x'_{i2}}{\sigma_{22}} \right) \right) - 2\rho \frac{(-x'_{i1}\beta_1)(-x'_{i2})}{\sigma_{11}\sigma_{22}} \right)$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2}\left(\left(\frac{-x'_{i2}\beta_2}{\sigma_{22}} \right)\left(\frac{-x'_{i2}}{\sigma_{22}} \right) - 2\rho \frac{(-x'_{i1}\beta_1)(-x'_{i2})}{\sigma_{11}\sigma_{22}} \right) \tag{4.12}$$

Untuk mengestimasi β_1 dan β_2 dengan menggunkan metode Newton Raphson dengan persamaan sebagai berikut:

$$\beta^{n+1} = \beta^n - t_n P_n \gamma_n$$

P_n adalah turunan kedua dari $\ln L(\beta)$ dan γ_n adalah turunan pertama dari $\ln L(\beta)$.

$$\frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial \beta_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial \beta_1^2}\left(\frac{1}{1-\rho^2}\left(\left(\frac{-x'_{i1}\beta_1}{\sigma_{11}} \right)\left(\frac{-x'_{i1}}{\sigma_{11}} \right) - 2\rho \frac{(-x'_{i1})(-x'_{i2}\beta_2)}{\sigma_{11}\sigma_{22}} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{x'_{i1}}{\sigma} \right)^2 \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\beta)}{\partial \beta_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial \beta_2^2}\left(\frac{1}{1-\rho^2}\left(\left(\frac{-x'_{i2}\beta_2}{\sigma_{22}} \right)\left(\frac{-x'_{i2}}{\sigma_{22}} \right) - 2\rho \frac{(-x'_{i1}\beta_1)(-x'_{i2})}{\sigma_{11}\sigma_{22}} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{x'_{i2}}{\sigma}\right)^2 \quad (4.14)$$

Setelah diperoleh turunan pertama dan turunan kedua, kemudian dimasukkan kedalam rumus iterasi *Newton-Raphson Nonlinier Maximum Likelihood* seperti pada persamaan (2.54) dan (2.55), sehingga diperoleh:

$\boldsymbol{\beta}^{n+1} = \boldsymbol{\beta}^{n} - t_n P_n \gamma_n$

dimana:

$t_n = 1$

$$P_n = \frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{x'_{i1}}{\sigma}\right)^2$$

$$\gamma_n = \frac{1}{1-\rho^2}\left(\left(\frac{-x'_{i1}\beta_1}{\sigma_{11}}\right)\left(\frac{-x'_{i1}}{\sigma_{11}}\right) - 2\rho\frac{(-x'_{i1})(-x'_{i2}\beta_2)}{\sigma_{11}\sigma_{22}}\right) \quad (4.15)$$

4.2 Aplikasi Data

Dalam penelitian ini, model tobit bivariat digunakan untuk mengetahui kemungkinan hujan dan hari hujan berdasarkan kelembaban, tekanan udara, dan temperatur. Dimana curah hujan dan hari hujan sebagai variabel terikat, sedangkan kelembaban sebagai variabel bebas.

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data bulanan pada tahun 2013-2014 di Juanda Kota Surabaya. Dengan ketentuan: variabel terikat (Y_1) disimbolkan dengan angka 0 untuk bulan yang memiliki curah hujan kurang dari 150 mm, dan disimbolkan 1 untuk bulan yang memiliki curah hujan lebih dari 150 mm. Untuk variabel terikat (Y_2) disimbolkan dengan angka 0 untuk bulan yang memiliki jumlah hari hujan kurang dari 10, dan disimbolkan 1 untuk bulan yang memiliki jumlah hari hujan lebih dari 10. Data curah hujan dan hari hujan dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 4.1 Data Curah Hujan dan Hari Hujan di Juanda tahun 2013-2014

No.	Bulan	tahun	Curah Hujan (mm)	Hari Hujan (hari)	Kelembaban (%)
1	Januari	2013	364,9	25	92
2	Februari		287	20	82
3	Maret		461,1	28	83
4	April		140,8	19	82
5	Mei		195,8	21	83
6	Juni		239,5	21	85
7	Juli		109,2	10	79
8	Agustus		0,6	1	72
9	September		0,2	1	69
10	Oktober		3,6	2	66
11	November		108	14	75
12	Desember		359,3	20	82
13	Januari	2014	259	24	81
14	Februari		247	22	82
15	Maret		455	22	81
16	April		273	22	81
17	Mei		105	16	77
18	Juni		202	9	77
19	Juli		48	6	76
20	Agustus		0	0	72
21	September		0	0	66
22	Oktober		0	0	65
23	November		72	11	69
24	Desember		22	22	81

Data curah hujan setelah diubah menjadi data *dummy* aadalah sebagai berikut:

Tabel 4.2 Data *dummy* Curah Hujan dan Hari Hujan di Juanda tahun 2013-2014

No.	Bulan	tahun	Curah Hujan (mm)	Hari Hujan (hari)	Kelembaban (%)
1	Januari		1	1	92
2	Februari		1	1	82
3	Maret		1	1	83
4	April		0	1	82
5	Mei		1	1	83

6	Juni	2013	1	1	85
7	Juli		0	0	79
8	Agustus		0	0	72
9	September		0	0	69
10	Oktober		0	0	66
11	November		0	1	75
12	Desember		1	1	82
13	Januari	2014	1	1	81
14	Februari		1	1	82
15	Maret		1	1	81
16	April		1	1	81
17	Mei		0	1	77
18	Juni		1	0	77
19	Juli		0	0	76
20	Agustus		0	0	72
21	September		0	0	66
22	Oktober		0	0	65
23	November		0	1	69
24	Desember		1	1	81

Uji Hipotesis

H_1 = terdapat pengaruh yang signifikan antara kelembaban (X) terhadap curah hujan (Y_1) dan hari hujan (Y_2)

H_0 = tidak terdapat pengaruh yang signifikan antara kelembaban (X) terhadap curah hujan (Y_1) dan hari hujan (Y_2)

- **Output E-Views untuk Y_1**

Dengan bantuan e-Views diperoleh output dari variabel terikat Y_1 sebagai berikut:

Dependent Variable: CURAH_HUJAN
Method: ML - Censored Normal (TOBIT) (Newton-Raphson / Marquardt
steps)
Date: 06/14/19 Time: 08:33
Sample: 1 24
Included observations: 24
Left censoring (value) at zero
Convergence achieved after 4 iterations
Coefficient covariance computed using observed Hessian

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
KELEMBABAN	20.26090	3.017533	6.714392	0.0000
C	-1402.673	236.5659	-5.929313	0.0000
	Error Distribution			
SCALE:C(3)	90.44159	13.96584	6.475914	0.0000
Mean dependent var	177.1250	S.D. dependent var		149.6021
S.E. of regression	89.96264	Akaike info criterion		10.75667
Sum squared resid	169958.8	Schwarz criterion		10.90392
Log likelihood	-126.0800	Hannan-Quinn criter.		10.79573
Avg. log likelihood	-5.253333			
Left censored obs	3	Right censored obs		0
Uncensored obs	21	Total obs		24

Gambar 4.1 output analisis regresi tobit untuk Y_1

Interpretasi output

Hasil analisis model tobit pada gambar 4.1 dapat diketahui bahwa nilai β_0 adalah $-1402{,}673$, β_1 adalah $20{,}26090$. Dapat dituliskan dalam persamaan sebagai berikut:

$$\text{Curah Hujan} = -1402{,}673 + 20{,}26090 \times \text{kelembaban} \quad (4.21)$$

Statistik uji dari parameter β

Uji parameter yang digunakan adalah uji wald. Dengan nilai α yang ditetepkan adalah $5\% = 0.05$

Hipotetsis:

$H_0: \beta_j = 0$ untuk $j = 1,2,3, ..$

$H_1: \beta_j \neq 0$

Statistik uji yang digunakan seperti pada persamaan (2.57). dengan daerah penolakan jika $W_t > \chi^2_{\alpha,1}$: menolak H_0. Untuk $\chi^2_{\alpha,1}$ dapat dilihat pada tabel sebaran chi-square diperoleh 3,841. Bila H_0 ditolak, artinya parameter tersebut signifikan secara statistik pada tingkat signifikasi α.

Untuk β_0:

$$W_0 = \left(\frac{\beta_0}{SE(\beta_0)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{-1402,673}{236,5659}\right)^2$$

$$= (-5,9293119)^2$$

$$= 35,1567396$$

Diperoleh $W_0 > \chi^2_{0.05,1}$ yaitu $35,1567398 > 3,841$, sehingga menolak H_0. artinyaβ_0 signifikan secara statistic pada tingkat signifikansi 0,05.

Untuk β_1

$$W_1 = \left(\frac{\beta_1}{SE(\beta_1)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{20,26090}{3,017533}\right)^2$$

$$= (6,71439219)^2$$

$$= 45,0821186$$

Diperoleh $W_1 > \chi^2_{0.05,1}$ yaitu $45,0821186 > 3,841$, sehingga menolak H_0. artinyaβ_1 signifikan secara statistic pada tingkat signifikansi 0,05.

Uji Kebaikan Model

Untuk uji kebaikan model dapat dilihat dari nilai AIC, semakin kecil AIC maka model yang digunakan semakin bagus. Pada hasil analisis model tobit dengan menggunakan aplikasi e-Views (lihat gambar 4.1), nilai *Akaike Information Criterion* (AIC) adalah 10,75667.

- **Output E-views untuk Y_2**

Dengan bantuan e-Views diperoleh output dari variabel terikat Y_2 sebagai berikut:

Dependent Variable: HARI_HUJAN
Method: ML - Censored Normal (TOBIT) (Newton-Raphson / Marquardt
steps)
Date: 06/14/19 Time: 08:55
Sample: 1 24
Included observations: 24
Left censoring (value) at zero
Convergence achieved after 4 iterations
Coefficient covariance computed using observed Hessian

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
KELEMBABAN	1.325072	0.153810	8.615021	0.0000
C	-89.06584	12.03953	-7.397787	0.0000
	Error Distribution			
SCALE:C(3)	4.693560	0.732691	6.405919	0.0000

Mean dependent var	14.00000	S.D. dependent var	9.454697
S.E. of regression	4.587248	Akaike info criterion	5.622933
Sum squared resid	441.8998	Schwarz criterion	5.770190
Log likelihood	-64.47520	Hannan-Quinn criter.	5.662000
Avg. log likelihood	-2.686467		

Left censored obs	3	Right censored obs	0
Uncensored obs	21	Total obs	24

Gambar 4.2 output analisis regresi tobit untuk Y_2

Interpretasi output untuk Y_2

Hasil analisis model tobit pada gambar 4.2 dapat diketahui bahwa nilai β_0 adalah $-89{,}06584$, β_1 adalah $1{,}325072$. Dapat dituliskan dalam persamaan sebagai berikut:

$$\text{Hari Hujan} = -89{,}06584 + 1{,}325072 \times \text{kelembaban} \qquad (4.22)$$

Statistik uji dari parameter $\boldsymbol{\beta}$

Uji parameter yang digunakan adalah uji wald. Dengan nilai α yang ditetepkan adalah $5\% = 0.05$

Hipotetsis:

$H_0: \beta_j = 0$ untuk $j = 1,2,3, ..$

$H_1: \beta_j \neq 0$

Statistik uji yang digunakan seperti pada persamaan (2.57). dengan daerah penolakan jika $W_t > \chi^2_{\alpha,1}$: menolak H_0. Untuk $\chi^2_{\alpha,1}$ dapat dilihat pada tabel sebaran chi-square diperoleh 3,841. Bila H_0 ditolak, artinya parameter tersebut signifikan secara statistik pada tingkat signifikasi α.

Untuk β_0:

$$W_0 = \left(\frac{\beta_0}{SE(\beta_0)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{-89{,}06584}{12{,}03953}\right)^2$$

$$= (-7{,}3977838)^2$$

$$= 54{,}7272052$$

Diperoleh $W_0 > \chi^2_{0.05,1}$ yaitu $54{,}7272052 > 3{,}841$, sehingga menolak H_0. Artinya β_0 signifikan secara statistic pada tingkat signifikansi $0{,}05$.

Untuk β_1

$$W_1 = \left(\frac{\beta_1}{SE(\beta_1)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1{,}325072}{0{,}153810}\right)^2$$

$$= (8{,}61499252)^2$$

$$= 74{,}2180961$$

Diperoleh $W_1 > \chi^2_{0.05,1}$ yaitu $74{,}2180961 > 3{,}841$, sehingga menolak H_0. Artinya β_1 signifikan secara statistik pada tingkat signifikansi $0{,}05$.

Uji Kebaikan Model

Untuk uji kebaikan model dapat dilihat dari nilai AIC, semakin kecil AIC maka model yang digunakan semakin bagus. Pada hasil analisis model tobit dengan menggunakan aplikasi e-Views (lihat gambar 4.2), nilai *Akaike Information Criterion* (AIC) adalah $5{,}622933$.

4.3 Memahami Al-Qur'an dengan Teori Estimasi

Estimasi atau yang biasa disebut dnegan perkiraan dalam bidang ilmiah bukan merupakan nilai yang pasti sehingga hasilnya bisa benar dan bisa juga salah, tergantung seberapa akurat data-data yang diolah sebelum akhirnya menjadi sebuah perkiraan. Dalam Q.S Yusuf ayat 47-48 Nabi Yusuf memprediksi bahwa perencanaan pembangunan pertanian yang saat itu beliau lakukan dapat menghadapi krisis pangan menyeluruh atau musim paceklik yang sangat lama yang akan terjadi pada masyarakat mesir dan daerah di sekitarnya pada masa depan. Nabi Yusuf menggunakan jumlah panen dan jumlah konsumsi sebagai variabel bebas untuk mengetahui peluang masyarakat bisa menghadapi kemarau panjang.

Estimasi yang dilakukan manusia adalah upaya untuk mencari pegangan dalam pengambilan suatu keputusan untuk masa depan, hal ini juga tersirat dalam firman Allah dalam Surat Al Hasyr ayat 18 yang artinya:

Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan hendaklah setiap diri memperhatikan apa yang telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat); dan bertakwalah kepada Allah, sesungguhnya Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan.(Q.S Al Hasyr:18)

Dalam ayat di atas menjelaskan bahwa dengan kita melaksanakan perintah-perintah Allah dan menjauhi larangan Allah, setiap orang hendaknya memperhatiakna apa yang telah diamalkan untuk menyongsong masa depan dan bertakwalah kepada Allah (Syaikh Abu Bakar, 2009:377). Dari penjelasan tersebut dapat kita simpulkan bahwa dengan kita memperhatikan hasil prediksi yang didapat, maka kita bisa menata dan memutuskan apa yang harus dilakukan untuk mendapatkan hasil yang lebih baik di masa depan. Teori estimasi dipakai untuk memahami Al-Qur’an.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisa dan pembahasan pada bab IV dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Bentuk estimasi dari regresi model tobit bivariat adalah sebagai berikut:

$$L(\beta)=\frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho^2)}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{-x'_{i1}\beta_1}{\sigma_{11}}\right)^2+\left(\frac{-x'_{i2}\beta_2}{\sigma_{22}}\right)^2-2\rho\frac{(-x'_{i1}\beta_1)(-x'_{i2}\beta_2)}{\sigma_{11}\sigma_{22}}\right)\right)$$

karena menghasilkan persamaan yang nonlinier sehingga dibantu dengan iterasi Newton-Raphson dan menghasilkan persamaan berikut:

$$\boldsymbol{\beta}^{n+1}=\boldsymbol{\beta}^{n}-t_nP_n\gamma_n$$

dimana

$$t_n=1$$

$$P_n=\frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{x'_{i1}}{\sigma}\right)^2$$

$$\gamma_n=\frac{1}{1-\rho^2}\left(\left(\frac{-x'_{i1}\beta_1}{\sigma_{11}}\right)\left(\frac{-x'_{i1}}{\sigma_{11}}\right)-2\rho\frac{(-x'_{i1})(-x'_{i2}\beta_2)}{\sigma_{11}\sigma_{22}}\right)$$

2. Hasil implementasi estimasi regresi tobit menggunakan metode *maximum likelihood* pada data curah hujan dan hari hujan di Juanda Kota Malang menghasilkan:

$$\text{Curah Hujan}=-1402{,}673+20{,}26090\times\text{kelembaban}$$

$$\text{Hari Hujan}=-89{,}06584+1{,}325072\times\text{kelembaban}$$

5.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan agar menganalisis regresi model tobit menggunakan metode yang berbeda.

DAFTAR RUJUKAN

Adiningsih, Sri. 2009. *Statistika.* Yogyakarta: BPFE-Yogyakarta

Ali, Abdullah Yusuf. 2009. *Tafsir Yusuf Ali*. Bogor: Pustaka Litera AntarNusa

Al-Maraghi, Ahmad Musthafa. 1993. *Terjemah Tafsir Al-Maraghi*. Semarang: Toha Putra

Al-Qurthubi, Syaikh Imam. 2008. *Tafsir Al Qurthubi*. Jakarta: Pustaka Azzam

Ash-Shiddieqy, Teungku Muhammad Hasbi. 2000. *Tafsir Al-Qur'anul Majid An-Nuur 3*. Semarang: PT Pustaka Rizki Putra

Ath-Thabari, Abu Ja'far Muhammad bin Jarir. 2009. *Tafsir Ath-Thabari*. Jakarta: Pustaka Azzam

Aziz, Abdul. 2010. *EKONOMETRIKA (Teori & Praktik Eksperimen dengan Matlab*. UIN-Maliki Press

A. Soko. 2009. *Cuaca dan Iklim*. Http://thehyposentrum.blogspot.com/2009/12/cuaca-iklim-apakah-yang-dimaksud.html. diakses pada tanggal 5 April 2019

Bahreisy, H Salim & Bahreisy, H Salim. 1988. *Terjemah Singkat Tafsir Ibnu Katsier Jilid 4*. Surabaya: PT Bina Ilmu Offset

Davidson, Russel & Mackinnon, James G. 1999. *Econometric Theory and Method*

Djalal, Nachrowi. 2004. *Teknik Pengambilan Keputusan*. Jakarta: Gasindo

Dudewicz, J. Edward dan Mishra N. Satya. 1995. *Statistika Matematika Modern*. Bandung: Penerbit ITB

Ekananda, Mahyus. 2015. *Ekonometrika Dasar untuk Penelitian Ekonomi, Sosial dan Bisnis*. Jakarta: Mitra Wacana Media

Engelhard, Max dan Lee J. Bain. 1991. *Introduction To Probability and Mathematical Statistics*. California: Duxbury Press

Faidah, D.Y., Pontoh, R.S.. 2016. *Penggunaan Model Regresi Tobit Pada Data Tersensor (pdf),* (Online), diakses pada 14 Desember 2016

George, G. 1985. *The Theory and Practice of Econometrics*. John wiley & sons. inc

Gujarati, Damodar N. 2004. *Basic Econometrics*. Nourth Amerika: Mc Graw Hill

Gujarati, Damodar N. 2007. *Dasar-Dasar Ekonometrika Jilid 1 dan 2*. Jakarta: Erlangga

Gujarati, Damodar N. 2009. *Dasar-Dasar Ekonometrika (terjemahan Eugenia Mardanugraha, Sita Wardani, dan Carlos Mangunsong)*. Jakarta: Salemba Empat

Greene, William. H. 2002. *Econometric Analysis Fifth Edition*. New Jersey: Prantice Hall

Harinaldi. 2005. *Prinsip-Prinsip Statistik untuk Teknik dan Sains*. Jakarta: Erlangga

Harini, Sri. 2010. *Teori Peluang*. Malang: UIN-Maliki Press.

Hasan, Iqbal. 2002. *Pokok-Pokok Materi Statistik 1 (Statistik Deskriptif)*. Jakarta: Bumi Aksara

Hasanah, Ulfatun. 2015. *Pemilihan Model Regresi Tobit dan Model Regresi Heckit (Study Kasus Data Konsumsi Rokok Rumah Tangga Kota Malang Tahun 2013) (pdf)*, (Online), diakses pada 14 Desember 2016

Hosmer, D.W., and Lemeshow, S. 1989. *Applied Logistic Regression*. John Willey, New York.

https://surabayakota.bps.go.id/statictable/2015/02/10/19/rata-rata-kelembaban-tekanan-udara-temperatur-dan-penyinaran-matahari-di-juanda-surabaya-per-bulan.html. Diakses pada tanggal 1 April 2019.

https://surabayakota.bps.go.id/statictable/2015/01/08/202/banyaknya-hari-hujan-dan-curah-hujan-di-juanda-per-bulan-2010---2014.html. Diakses pada tanggal 1 April 2019.

Imani, F Kamal. 2006. *Tafsir Nurul Quran*. Jakarta: Al Huda

Irianto, Agus. 2006. *Statistik Konsep Dasar dan Aplikasinya*. Jakarta: Kencana Prenada Media

Murray dan Larry. 2007. *Statistik Edisi Ke 3*. Jakarta: Erlangga

Nachrowi, Djalal N. dan Hardius Usman. 2008. *Penggunaan Teknik Ekonometri*. Jakarta: PT Raja Grafindo Persada

Noviyani, D.A.. 2014. *Regresi Tersensor (Tobit) Pada Data Amatan Nol Yang Mengandung Multikolinieritas (pdf)*, (Online), diakses pada 14 Desember 2016

Permana, Gilang. 2013. *Analisis Regresi Tobit Pada Permasalahan Pengeluaran Konsumsi Rokok Kota Kediri Tahun 2011 (pdf)*, (Online), diakses pada 14 Desember 2016\

Qardhawi, Y. 1998. *Rasul Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Gema Insani Press

Raymod, W.E dan Myers, H. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuan*. Bandung: Penerbit ITB.

Rencher, Alvin C. dan Wlliam F. Cristensen. 2012. *Methods of Multivariate Analysis Third Edition*. John Wiley & Sons, inc.

Rochmad, 2013. *Aplikasi Metode Newton-Raphson Untuk Menghampiri SolusiPersamaan Non Linear*. Semarang: Universitas Negeri Semarang

Sarwoko. 2007. *Statistik Inferensi*. Yogyakarta: Andi Offset.

Sembring, R.K. 2003. *Analisis Regresi*. Bandung: Penerbit ITB

Sembring, R.K. 1995. *Analisis Regresi*. Bandung: Penerbit ITB

Smith, H. dan Norman R. Draper. 1992. *Analisis Regresi Terapan*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama Jakarta

Suharyadi dan Purwanto. 2009. *Statistika untuk Ekonomi dan Keuangan*. Jakarta: Salemba Empat

Supangat, Andi. 2008. *Statistik dalam Kajian Deskriptif, Inferensi dan Nonparametrik*. Jakarta: Prenada Media Group

Supranto, J.. 2004. *Ekonometri Buku Kedua*. Jakarta: Ghalia Indonesia

Tobin, James. 1958. *Estimation of Relationships for Limited Dependet Variables*. Econometrica, vol.26, No.1, pp.24-36

Wardani, Irma Agrica. 2011. *Analisis Regresi Dummy Variabel Model Tobit (Kasus pada Estimasi Hujan di Karangplosos Malang)*. Skripsi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

Waryono, dkk. 1997. *Pengantar Meterologi dan Klimatologi*. Surabaya: PT Bina Ilmu

Wibisono, Yusuf. 2005. *Metode Statistik*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press

Wibisono, Y. 2009. *Metode Statistika (Edisi 2).* Yogyakarta: UGM Press

Winarno, Wing Wahyu. 2007. *Analisis Ekonometrika dan Satistika Eviews.* Yogyakarta: UPP STIM YKPN

RIWAYAT HIDUP

Mustabirotun Ni'mah lahir di Lumajang pada tanggal 27 Maret 1995. Anak ketiga dari tiga bersaudara, pasangan Bpk. Syamsul Qodir dan Ibu Munfarihah. Memiliki dua orang kakak bernama Alm. Istibaroh dan Muhammad Shobirin.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Nurul Islam Bades Pasirian Lumajang dan lulus pada tahun 2007. Setelah itu melanjutkan pendidikan menengah pertama di MTS Nurul Islam Bades Pasirian Lumajang yang ditamatkan pada tahun 2010. Pada tahun yang sama melanjutkan pendidikan menengah atas di MAS Miftahul Midad Lumajang dan lulus pada tahun 2013. Selanjutnya, pada tahun 2013 menempuh pendidikan berikutnya di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Mustabirotun Ni'mah
NIM : 13610053
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Estimasi Parameter Regresi Model Tobit Bivariat dengan Metode *Maximum Likelihood*
Pembimbing I : Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D
Pembimbing II : Ach. Nasichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	6 November 2017	Konsultasi & Revisi Keagamaan BAB I & II	1.
2.	22 Desember 2017	Konsultasi Keagamaan BAB II	2.
3.	3 Maret 2018	Konsultasi & Revisi BAB I, II, & III	3.
4.	15 Maret 2018	ACC BAB I, II, III, & IV	4.
5.	10 April 2018	ACC Keagamaan	5.
6.	12 November 2018	Konsultasi Bab IV	6.
7.	16 November 2018	Konsultasi Keagamaan Bab IV	7.
8.	20 November 2018	Konsultasi dan Revisi Keagamaan Bab IV	8.
9.	5 April 2019	Konsultasi dan revisi bab IV	9.
10.	5 April 2019	ACC Bab IV	10.
11.	5 April 2019	ACC Keseluruhan Kajian Keagamaan	11.
12.	8 April 2019	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 5 April 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001