PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN DIFUSI KONVEKSI 1D MENGGUNAKAN METODE GALERKIN - BEDA HINGGA

SKRIPSI

OLEH
LAILATUL AZIZAH YAN FADILAH
NIM. 13610052

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN DIFUSI KONVEKSI 1D MENGGUNAKAN METODE GALERKIN - BEDA HINGGA

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Lailatul Azizah Yan Fadilah
NIM. 13610052

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN DIFUSI KONVEKSI 1D MENGGUNAKAN METODE GALERKIN - BEDA HINGGA

SKRIPSI

Oleh
Lailatul Azizah Yan Fadilah
NIM. 13610052

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 4 Februari 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Mohammad Jamhuri, M.Si	Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004	NIP. 19650414 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN DIFUSI KONVEKSI 1D MENGGUNAKAN METODE GALERKIN - BEDA HINGGA

SKRIPSI

Oleh
Lailatul Azizah Yan Fadilah
NIM. 13610052

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
Dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 25 Februari 2019

Penguji Utama	: Ari Kusumastuti, M.Si, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Hairur Rahman, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Mohammad Jamhuri, M.Si	....
Anggota Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini

Nama	: Lailatul Azizah Yan Fadilah
NIM	: 13610052
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Penyelesaian Numerik Persamaan Difusi Konveksi 1D Menggunakan Metode Galerkin - Beda Hingga

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 04 Februari 2019
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
F3DE5AFF827164326
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Lailatul Azizah Yan Fadilah
NIM. 13610052

MOTO

"... dan tidaklah kamu diberi pengetahuan melainkan sedikit". (Q.S Al-Isra:85)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Tejo Irianto dan Ibunda Siti Romlah

Tente Siti Roikah, Mbah Ahmad Syafi'i dan Mbah Siti Aisyah

atas segala macam bentuk bantuan yang diberikan kepada penulis.

Dan juga terimakasih kepada Adik M. Rifqi Gigih Y.F, M. Asroful Habib Y.F, dan Jirayah Bassam Ariqoh

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan nikmat, rahmat serta hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penulis banyak mendapatkan bimbingan serta arahan dari berbagai pihak selama proses penyusunan skripsi ini. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus sebagai pembimbing II yang memberikan arahan, nasihat, dan berbagi ilmunya kepada penulis.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
6. Ayah dan ibu tercinta yang telah mencurahkan cinta kasih, doa, bimbingan, dan motivasi hingga selesainya skripsi ini.
7. Saudara-saudara tersayang yang telah memberikan semangat kepada penulis.
8. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2013 yang berjuang bersama-sama.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 4 Februari 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Fadilah, Lailatul Azizah Yan. 2019. **Penyelesaian Numerik Persamaan Difusi Konveksi 1D Menggunakan Metode Galerkin - Beda Hingga.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si (II) Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Kata Kunci: Persamaan difusi konveksi 1D, metode Galerkin, metode beda hingga.

Persamaan difusi konveksi 1D adalah salah satu contoh dari persamaan diferensial parsial tipe parabolik. Persamaan ini bergantung terhadap ruang *x* dan waktu *t* sehingga termasuk dalam masalah *unsteady* karena mengalami perubahan terhadap waktu. Penyelesaian numerik persamaan diferensial parsial bisa diperoleh dengan menggunakan metode Galerkin. Oleh karena itu, dalam penelitian ini digunakan metode Galerkin untuk menyelesaikan persamaan difusi konveksi 1D serta dilakukan analisis galat terhadap solusi numerik tersebut.

Penyelesaian persamaan difusi konveksi 1D dengan metode Galerkin dilakukan dengan mendiskritkan domain ruang dan waktu menjadi beberapa elemen, kemudian menentukan interpolasi setiap elemen dengan fungsi linier atau disebut fungsi aproksimasi, dan dalam fungsi aproksimasi terdapat fungsi interpolasi. Selanjutnya, mensubstitusikan fungsi aproksimasi ke persamaan difusi konveksi 1D sehingga disebut residu. Residu yang diperoleh diminimumkan dengan metode residu berbobot dan pemilihan fungsi pembobot dilakukan dengan metode Galerkin. Kemudian fungsi turunan terhadap waktu dari hasil metode residu berbobot didiskritkan dengan metode beda hingga sehingga diperoleh persamaan untuk setiap elemen. Selanjutnya, persamaan dari setiap elemen digabungkan sehingga berbentuk sistem persamaan dan diselesaikan dengan bantuan matriks. Kemudian analisis galat dilakukan dengan mencari selisih antara solusi analitik dan solusi numerik secara manual dan dengan bantuan program *Python*.

ABSTRACT

Fadilah, Lailatul Azizah Yan. 2019. **Numerical Solution of 1D Convection Diffusion Equation Using the Galerkin Method – Finite Difference.** Thesis. Departemenet of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si (II) Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Keyword : The 1D convection diffusion equation, Galerkin method, finite difference method.

The 1D convection diffusion equation is an example of a parabolic type partial differential equation. This equation depends on space x and time t so that it is included in the unsteady problem because it changes with time. The numerical solution of partial differential equations can be obtained using the Galerkin method. Accordingly, in this study, the Galerkin method was used to solve the 1D convection diffusion equation and do an error analysis of the numerical solution.

The solution of the 1D convection diffusion equation using the Galerkin method is done by discretizing the space and time domains into several elements, then interpolating each element determined by a linear function called an approximation function and in the approximation function there is an interpolation function. Next, substituting the approximation function to the 1D convection diffusion equation so that it is referred to as residual. The residual obtained is minimized by the weighted residual method and the weighting function selection is done by the Galerkin method. Then the derivative function respect to time from the results of the weighted residual method is discretized by using the finite difference method so that the equation for each element is obtained. Furthermore, determining the equations of each element are combined so that they form a system of equations and are solved with the help of a matrix. Then the error analysis is done bydetermining the differences between analytical solutions and numerical solutions manually and with the help of the Python program.

ملخص

فضيلة ، ليلة العزيزة يان. 2019. الحلول العددي لمعادلات الانتشار الحراري 1D باستخدام طريقة *Galerkin* – فرق محدود. بحث جامعي. شعبة الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المستشارون: (1) مُحَمَّد جمهوري الماجستير و (2) الدكتور عثمان بكالي الماجستير.

الكلمات المفتاحية: معادلة الانتشار الحراري ، *Galerkin* ، طريقة الفرق المحدد.

معادلة انتشار الحمل الحراري 1D هي مثال لمعادلة تفاضلية جزئية من النوع المكافئ. تعتمد هذه المعادلة على الفضاء x والوقت t بحيث يتم تضمينها في المشكلة غير المستقرة لأنها تتغير مع مرور الوقت. يمكن الحصول على الحل العددي للمعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام طريقة *Galerkin*. لذلك ، في هذه الدراسة ، تم استخدام طريقة *Galerkin* لحل معادلة انتشار الحمل الحراري 1D وتم إجراء تحليل خطأ للمحلول العددي.

يتم الحل من معادلة انتشار الحمل الحراري 1D بطريقة *Galerkin* عن طريق فصل المجالين الزمان والمكان في عدة عناصر ، ثم يتم تحديد الاستكمال الداخلي لكل عنصر بواسطة دالة خطية تسمى بدالة التقريب وفي دالة التقريب توجد دالة استيفاء. بعد ذلك ، استبدل دالة التقريب بمعادلة انتشار الحمل الحراري 1D بحيث يشار إليها بالباقي. يتم تقليل المتبقي الذي تم الحصول عليه بواسطة الطريقة المتبقية الموزونة ويتم اختيار دالة الترجيح بواسطة طريقة *Galerkin* بحيث تكون عملية الترجيح المختارة هي دالة الاستيفاء. ثم يتم تقدير الدالة المشتقة للوقت من نتائج الطريقة المتبقية الموزونة باستخدام طريقة الفرق المحدد بحيث يتم الحصول على معادلة كل عنصر. علاوة على ذلك ، قم بتجميع معادلات كل عنصر بحيث تشكل نظام المعادلات ويتم حلها بمساعدة مصفوفة. ثم يتم تحليل الخطأ من خلال البحث عن الاختلافات بين الحلول التحليلية والحلول العددية يدويًا وبمساعدة برنامج *Python*.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan difusi konveksi 1D adalah salah satu contoh dari persamaan diferensial parsial tipe parabolik. Persamaan ini bergantung terhadap ruang x dan waktu t sehingga termasuk dalam masalah *unsteady* karena mengalami perubahan terhadap waktu. Salah satu contoh proses difusi konveksi adalah fenomena perpindahan kalor yang bisa terjadi pada zat cair. Dimana proses difusi menggambarkan perpindahan kalor yang terjadi karena perbedaan temperatur dan proses konveksi adalah perpindahan kalor yang mengikuti aliran zat cair.

Persamaan difusi konveksi 1D berbentuk persamaan diferensial parsial dengan suatu variabel terikat u dan variabel bebas x dan t. Misalkan proses difusi konveksi terjadi pada sebuah saluran pipa air panas dengan panjang tertentu. Maka variabel u menyatakan suhu air pada suatu titik dimana bergantung pada posisi titik ruang x dan waktu t. Perubahan suhu air u dipengaruhi oleh proses difusi dan konveksi dengan proses difusi dipengaruhi oleh koefisien difusi D dan proses konveksi dipengaruhi oleh kecepatan aliran air v pada pipa.

Metode Galerkin adalah salah satu metode numerik yang termasuk dalam metode elemen hingga. Metode ini bisa digunakan untuk mencari solusi numerik dari persamaan diferensial biasa ataupun parsial, termasuk persamaan difusi konveksi 1D. Penyelesaian numerik dengan metode Galerkin dilakukan dengan menggunakan interpolasi dari setiap elemen yang merupakan hasil diskritisasi dari domain sehingga diperoleh fungsi aproksimasi. Fungsi aproksimasi yang diperoleh disubstitusikan ke persamaan difusi konveksi 1D sehingga terdapat *error* atau residu. Oleh karena itu digunakan metode residu berbobot untuk meminimumkan residu dengan pemilihan pembobot sesuai dengan metode Galerkin yaitu pembobot sama dengan fungsi interpolasi. Metode residu berbobot dilakukan dengan cara mengintegralkan hasil kali dari residu dengan pembobot, kemudian hasil dari metode ini dibentuk menjadi sistem persamaan linier dan diselesaikan dengan bantuan matriks.

Penggunaan metode Galerkin pernah digunakan dalam menyelesaikan persamaan difusi 1D dalam Hoffman (2001:752) dengan solusi numerik yang diperoleh mendekati solusi analitik. Dikarenakan persamaan difusi 1D merupakan masalah *unsteady* maka saat proses penyelesaian dengan Galerkin hanya domain ruang (x) yang didiskritkan, sehingga untuk mendiskritkan domain waktu (t) diperlukan metode beda hingga, diantaranya adalah metode beda maju (Hoffman, 2001:757). Adapun penelitian sebelumnya tentang penyelesaian persamaan difusi konveksi 1D secara numerik dilakukan Mohammadi, dkk. (2011) dengan menggunakan berbagai macam metode beda hingga, diperoleh solusi numerik yang paling mendekati solusi analitik saat menggunakan metode *Crank-Nicholson*.

Allah berfirman dalam Al-Quran surat al-Balad:8-10,

"Bukankah Kami telah memberikan kepadanya dua buah mata. Lidah dan dua buah bibir. Dan Kami telah menunjukkan kepadanya dua jalan." (QS. Al-Balad:8-10).

Menurut tafsir *fi dzilalil quran*, ayat di atas menceritakan tentang manusia yang merasa angkuh dalam segala kelebihan yang dimilikinya termasuk penglihatan dan lisan. Padahal segala sesuatu yang dimilikinya tidak lain adalah karunia dari Allah SWT. Kemudian Allah juga memberikan akal untuk memberikan pemahaman kepada mereka akan suatu hal yang baik dan buruk.

Allah berkehendak memberinya kemampuan untuk menempuh jalan-jalan mana yang dikehendakinya.

Allah berfirman dalam Al-Quran surat az-Zumar:18,

"Yang mendengarkan perkataan lalu mengikuti apa yang paling baik di antaranya mereka itulah orang-orang yang telah diberi Allah petunjuk dan mereka itulah orang-orang yang mempunyai akal."(QS. Az-Zumar:18)

Tafsir dari ayat di atas menurut Shihab (2000) adalah tentang anjuran Allah kepada manusia untuk selalu dalam kebaikan. Seseorang yang menyukai kebaikan akan semakin tertarik setiap bertambahnya kebaikan itu. Jika menghadapi dua hal, yang satu kebaikan dan yang lainnya keburukan, maka ia akan cenderung kepada yang baik dan apabila menemukan yang satu baik dan yang lainnya lebih baik, maka ia akan mengarah kepada hal yang lebih baik. Dari sini setiap mereka menemukan *haq* dan *bathil*, mereka bersungguh-sungguh mengikuti *haq* dan petunjuk itu. Demikian juga setiap mereka menemukan yang benar dan lebih banyak petunjuknya. Kebenaran dan petunjuklah yang selalu mereka dambakan, dan karena itu mereka bersungguh-sungguh mendengarkan suatu perkataan.

Allah menciptakan manusia dengan dilengkapi oleh akal supaya digunakan untuk berpikir tentang segala hal. Allah memberikan akal agar manusia bisa membedakan mana yang baik dan yang buruk dan memberikan kebebasan terhadap manusia untuk memilih yang baik atau yang buruk. Akan tetapi, Allah menganjurkan untuk memilih hal baik daripada hal buruk dan memilih hal yang lebih baik apabila ditemukan suatu yang baik dan lainnya lebih baik.

Memilih sesuatu yang lebih baik dari sesuatu lainnya yang baik adalah hal yang harus dilakukan oleh manusia dalam menjalani berbagai aspek kehidupan. Begitupun saat menyelesaikan persoalan matematika. Penyelesaian terhadap permasalahan matematika terdapat berbagai macam metode yang bisa digunakan. Setiap metode pasti memiliki kelebihan dan kekurangan masing-masing. Oleh karena itu, diharuskan untuk memilih metode mana yang paling baik diantara metode-metode lainnya. Seperti halnya pemilihan metode Galerkin untuk menyelesaikan persamaan difusi konveksi 1D.

Berdasarkan uraian di atas, maka dalam penelitian ini digunakan metode Galerkin yang termasuk dalam metode elemen hingga untuk diskritisasi ruang dan metode beda hingga untuk diskritisasi waktu dalam mencari solusi numerik dari persamaan difusi konveksi 1D. Selanjutnya, dilakukan analisis terhadap nilai *error* dari solusi numerik tersebut untuk mengetahui tingkat keakuratan solusi numerik. Sehingga, dalam penelitian ini penulis menggunakan judul "Penyelesaian Numerik Persamaan Difusi Konveksi 1D Menggunakan Metode Galerkin-Beda Hingga".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana cara menyelesaikan persamaan difusi konveksi 1D secara numerik menggunakan metode Galerkin-Beda Hingga?
2. Bagaimana analisis galat dari solusi numerik persamaan difusi konveksi 1D dengan metode Galerkin-Beda Hingga?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui cara menyelesaikan persamaan difusi konveksi 1D secara numerik menggunakan metode Galerkin-Beda Hingga.
2. Untuk mengetahui analisis galat dari solusi numerik persamaan difusi konveksi 1D dengan metode Galerkin-Beda Hingga.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan bisa memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Menghasilkan penyelesaian persamaan difusi konveksi 1D secara numerik dengan menggunakan metode Galerkin-Beda.
2. Mengetahui analisis galat dari solusi numerik persamaan difusi konveksi 1D dengan metode Galerkin-Beda Hingga untuk memastikan tingkat keakuratan dari solusi numerik.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Penelitian ini menggunakan persamaan difusi konveksi 1D yang dibahas pada penelitian Mohammadi, dkk (2011) sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + v\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = 0 \tag{1.1}$$

$$\text{dimana } 0 \leq x \leq L \text{ dan } 0 \leq t \leq T$$

Keterangan:

$u(x,t)$	: suhu
v	: kecepatan dari aliran air dan bisa berupa konstanta
L	: panjang saluran
D	: koefisien difusi

dengan $D = 0{,}005\ m^2/s$, $v = 0{,}8\ m/s$.

dengan kondisi awal

$$u(x,0) = \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{D}\right) \tag{1.2}$$

dengan kondisi batas *Dirichlet*

$$u(0,x) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \exp\left(-\frac{(-1-vt)^2}{D(1+4t)}\right) \tag{1.3}$$

$$u(l,x) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \exp\left(-\frac{(l-1-vt)^2}{D(1+4t)}\right) \tag{1.4}$$

dengan solusi analitik

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left(-\frac{(x-1-vt)^2}{D(4t+1)}\right) \tag{1.5}$$

2. Penelitian ini menggunakan metode elemen hingga dengan metode residu berbobot untuk meminimumkan *error* dan metode Galerkin untuk pemilihan bobot.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur (*library research*). Metode ini dilakukan dengan mempelajari dan menelaah beberapa literatur seperti buku, jurnal, dan referensi lain yang berhubungan dengan penelitian ini. Berikut langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Menyelesaikan persamaan difusi konveksi 1D dengan metode Galerkin – Beda Hingga.
    a. Diskritisasi domain ruang dan waktu dari persamaan difusi konveksi 1D menjadi beberapa elemen (subdomain) dengan menggunakan elemen garis.

b. Mencari interpolasi dari setiap elemen menggunakan fungsi linier order 1 $\bar{u}(x,t) = a_0(t) + a_1(t)x$, dengan $\bar{u}(x,t)$ disebut sebagai fungsi aproksimasi.

c. Mencari nilai $a_0(t)$ dan $a_1(t)$ dengan metode substitusi-eliminasi sehingga diperoleh fungsi aproksimasi $\bar{u}(x,t) = u_i(t)\frac{x_{i+1}-x}{\Delta x} + u_{i+1}(t)\frac{x-x_i}{\Delta x}$, dengan fungsi $N_{i,1}(x) = \frac{x_{i+1}-x}{\Delta x}$ dan $N_{i,2}(x) = \frac{x-x_i}{\Delta x}$ adalah fungsi interpolasi.

d. Mensubstitusikan fungsi aproksimasi ke persamaan difusi konveksi 1D sehingga disebut sebagai residu $\frac{\partial \bar{u}(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial \bar{u}(x,t)}{\partial x} - D\frac{\partial^2 \bar{u}(x,t)}{\partial x^2} = R$.

e. Meminimumkan residu dengan mengintegralkan hasil kali residu dengan fungsi pembobot. Pemilihan fungsi pembobot menggunakan metode Galerkin sehingga diperoleh dua fungsi pembobot sama dengan fungsi interpolasi $I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} RN_i(x)dx$, dengan I_i adalah hasil integral dari hasil kali residu dengan pembobot dan $I_i = 0$.

f. Mendiskritkan fungsi yang bergantung waktu pada persamaan I_i dengan menggunakan metode beda hingga $u_t^n = \frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}$.

g. Menggabungkan hasil integral dari residu sehingga diperoleh sistem persamaan linier.

h. Menyelesaikan persamaan dalam bentuk matriks sehingga diperoleh nilai dari u saat x dan t tertentu.

2. Menganalisis galat dari solusi numerik persamaan difusi konveksi 1D dengan metode Galerkin-Beda Hingga.

- Saat perhitungan manual dengan nilai Δx dan Δt yang besar

a. Membuat tabel solusi numerik dan tabel solusi analitik.

b. Menghitung nilai galat dengan ketentuan mencari selisih mutlak dari solusi numerik dan solusi analitik berdasarkan kedua tabel solusi tersebut.

- Saat perhitungan dengan bantuan program *Python* dengan beragam nilai Δx dan Δt yang cukup kecil

a. Menggambar grafik 3D dari solusi numerik dan solusi analitik dan membandingkannya.

b. Untuk memperjelas nilai galat maka digambarkan pula grafik dari galat dengan ketentuan selisih mutlak dari solusi numerik dan solusi analitik dengan bantuan program.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini menggunakan sistematika penulisan yang terbagi dalam empat bab dan masing-masing bab terdiri dari beberapa subbab. Berikut rincian dari sistematika penulisan agar mempermudah pembaca untuk memahaminya.

Bab I Pendahuluan

Bab ini menguraikan tentang hal-hal yang melatarbelakangi penulisan, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan tentang teori-teori dari berbagai literatur seperti buku, jurnal ilmiah, serta penelitian terdahulu yang mendukung dalam pembahasan penelitian. Sehingga pada bab ini diuraikan tentang persamaan difusi, metode elemen hingga, metode beda hingga, dan kajian Al-Quran terkait masalah tersebut.

Bab III Pembahasan

Bab ini menjelaskan langkah-langkah dalam pemyelesaian persamaan difusi dengan metode elemen hingga dan metode beda hingga, simulasi dari solusinya, dan kajian Al-Quran terkait masalah tersebut.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh dari penelitian beserta saran-saran yang mendukung untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Difusi Konveksi 1D

Persamaan difusi adalah salah satu bentuk dari persamaan diferensial parsial tipe parabolik. Ada berbagai macam proses difusi yang terjadi di sekitar kita, salah satunya difusi kalor. Difusi kalor terjadi saat kalor berpindah dari tempat dengan temperatur tinggi menuju tempat dengan temperatur yang lebih rendah. Jika arah difusi hanya dibatasi pada sumbu x, maka temperatur di setiap titik akan bergantung pada posisi x dan waktu t (Kettle, 2010:10).

Persamaan difusi berbeda dengan persamaan difusi konveksi. Persamaan difusi konveksi menggambarkan suatu fenomena dimana proses difusi dan proses konveksi terjadi secara bersamaan. Proses difusi bisa terjadi pada zat padat, cair, dan udara. Sedangkan proses konveksi hanya bisa terjadi pada zat cair dan gas. Sehingga, proses difusi dan konveksi yang terjadi secara bersamaan hanya bisa terjadi pada zat cair dan gas. Salah satu contoh proses difusi konveksi adalah proses perpindahan panas dalam aliran air. Konveksi dan difusi sama-sama berperan dalam memindahkan panas dari satu tempat ke tempat lain, tetapi dengan cara yang berbeda. Proses konveksi memindahkannya dalam mengikuti aliran fluida, sementara difusi menyebar terlepas dari arah aliran (Sobey, 1983) dalam (Bajellan, 2015:6).

Persamaan difusi konveksi menggambarkan fenomena fisik dimana proses difusi yang dipengaruhi oleh koefisien difusi D dari partikel-partikel bergerak dengan kecepatan tertentu v dari tempat dengan temperatur tinggi menuju yang lebih rendah. Proses ini dimodelkan dalam bentuk persamaan (2.1) dengan suku pertama merupakan perubahan suhu saat berada pada posisi *x* dan *t* tertentu yang dipengaruhi oleh proses konveksi pada suku kedua dan proses difusi pada suku ketiga. Berikut persamaan difusi konveksi kasus satu dimensi (Mohammadi dkk, 2011:1536)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad (2.1)$$

$$\text{dimana } 0 \leq x \leq L \text{ dan } 0 \leq t \leq T$$

Keterangan:

$u(x,t)$: suhu

v : kecepatan dari aliran air dan bisa berupa konstanta

L : panjang saluran

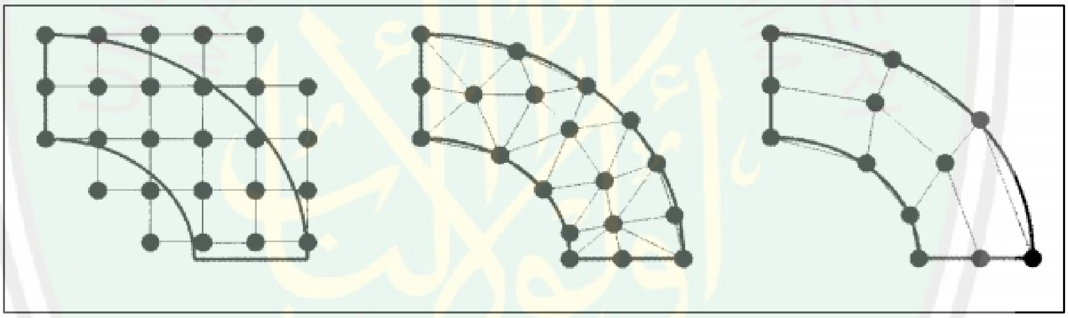
D : koefisien difusi

2.2 Metode Galerkin – Beda Hingga

Metode Galerkin adalah salah satu metode yang termasuk dalam metode elemen hingga. Metode elemen hingga adalah salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa maupun persamaan diferensial parsial (Kosasih, 2012:1). Metode ini merupakan metode yang tepat untuk berbagai macam sistem. Berbeda dengan metode beda hingga, metode elemen hingga membagi domain menjadi beberapa subdomain/elemen dengan bentuk-bentuk sederhana untuk dicari solusi dari setiap elemen tersebut. Selanjutnya solusi dari setiap elemen tersebut diakumulasi sehingga diperoleh solusi keseluruhan dari persamaan diferensial (Chapra, 2010:888-889).

Mesh dari metode beda hingga terdiri atas baris dan kolom garis ortogonal. Sedangkan *mesh* dari metode elemen hingga bentuknya berbeda-beda atau unik sesuai dengan domain yang ditentukan dan tidak perlu ortogonal. Misal, untuk persamaan dua dimensi bentuk yang digunakan untuk diskritisasi sistem adalah segitiga atau segiempat dan untuk persamaan tiga dimensi bisa digunakan bentuk tetrahedra atau hexahedra (Kosasih, 2012:87).

Diskritisasi domain dari persamaan diferensial tersebut dilakukan pada domain ruang (*spatial domain*) dan domain waktu (*time domain*) sehingga menjadi subdomain atau elemen-elemen yang lebih kecil. Metode elemen hingga berbeda dengan metode beda hingga. Metode beda hingga sulit digunakan dalam domain dengan bentuk geometri yang kompleks, hal ini dapat dilihat pada Gambar (2.1) (Kosasih, 2012:3).



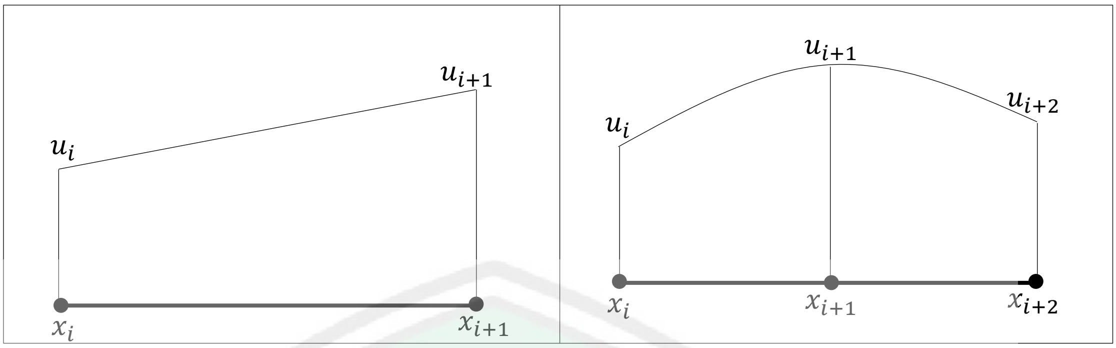
(a) (b) (c)

Gambar 2.1 *Mesh* Metode Beda Hingga dan Metode Elemen Hingga
(a) Mesh Metode Beda Hingga, (b) dan (c) Mesh Metode Elemen Hingga (elemen segitiga, elemen segiempat)

Berikut langkah-langkah dalam metode Galerkin – beda hingga (Huebner, 1987:7-9):

1. Diskritisasi Domain

Langkah pertama adalah membagi daerah domain menjadi subdomain atau beberapa elemen. Sebelum membagi daerah domain menjadi beberapa elemen, ditentukan terlebih dahulu jenis elemen yang akan digunakan. Untuk masalah satu dimensi digunakan elemen garis dengan dua titik nodal untuk persamaan linier dan tiga titik nodal untuk persamaan nonlinier seperti gambar berikut.



(a) (b)

Gambar 2.2 Diskritisasi Domain Persamaan 1 Dimensi
(a) Diskritisasi Persamaan Linier dengan Dua Titik Nodal, (b) Diskritisasi Persamaan Nonlinier dengan Tiga Titik Nodal

Dengan u adalah variabel yang bergantung dan x adalah variabel bebas atau domain. Selanjutnya untuk masalah dua dimensi, elemen yang umumnya digunakan adalah bentuk segitiga dan segiempat. Sedangkan masalah tiga dimensi, elemen yang umumnya digunakan adalah tetrahedral dan heksahedral. Inilah salah satu keunggulan dari metode elemen hingga dibandingkan dengan metode beda hingga.

2. Penentuan Fungsi Aproksimasi

Fungsi aproksimasi dari setiap elemen dicari terlebih dahulu untuk mendapatkan solusi dari setiap titik nodal. Fungsi aproksimasi dapat dicari dengan menggunakan interpolasi dari titik-titik nodal di setiap elemen. Interpolasi yang digunakan adalah fungsi polinomial. Order dari polinomial bergantung pada jumlah titik nodal pada setiap elemen dan syarat kontinuitas yang diperlukan pada sepanjang batas elemen. Oleh karena itu, pada tahap ini ditentukan terlebih dahulu banyaknya titik nodal yang digunakan untuk setiap elemen, kemudian dipilih interpolasi yang sesuai. Jika titik nodal yang dipilih adalah dua titik seperti gambar 2.2(a) maka interpolasi yang digunakan fungsi linier, sedangkan untuk tiga titik nodal seperti gambar 2.2(b) maka digunakan fungsi nonlinier.

Dikarenakan fungsi yang akan dicari adalah fungsi aproksimasi mengakibatkan solusi yang diperoleh adalah solusi hampiran sehingga untuk solusi hampiran $u(x,t)$ disimbolkan dengan $\bar{u}(x,t)$.

Interpolasi yang digunakan untuk masalah *steady* satu dimensi dengan dua titik nodal adalah fungsi polinomial order 1 atau fungsi linier.

$$\bar{u}(x) = a_0 + a_1 x \tag{2.2}$$

Dengan $\bar{u}(x)$ variabel bergantung, x variabel bebas, dan a_0, a_1 konstanta. Persamaan (2.2) masih dalam bentuk umum dengan konstanta belum diketahui. Maka akan dihitung terlebih dahulu nilai dari konstanta a_0 dan a_1 (Chapra dan Canale, 2010:889-890). Misal saat $x = x_i$ dan $x = x_{i+1}$ maka persamaan (2.2) menjadi

$$\bar{u}(x_i) = a_0 + a_1 x_i \tag{2.3}$$

$$\bar{u}(x_{i+1}) = a_0 + a_1 x_{i+1} \tag{2.4}$$

Dengan $\bar{u}(x_i) = u_i$ dan $\bar{u}(x_{i+1}) = u_{i+1}$. Selanjutnya eliminasi persamaan (2.3) dan (2.4) sehingga diperoleh

$$u_i - u_{i+1} = a_1(x_i - x_{i+1}) \leftrightarrow a_1 = \frac{u_i - u_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \tag{2.5}$$

Persamaan (2.3) dikalikan dengan x_{i+1} dan persamaan (2.4) dikalikan dengan x_i, kemudian dieliminasi sehingga diperoleh

$$u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i = a_0(x_{i+1} - x_i) \leftrightarrow a_0 = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{2.6}$$

Substitusi persamaan (2.5) dan (2.6) ke persamaan (2.2) maka diperoleh

$$\bar{u}(x) = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{u_i - u_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} x$$

$$\bar{u}(x) = u_i \left(\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\right) + u_{i+1} \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)$$

Misalkan $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ maka

$$\bar{u}(x) = u_i \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x} + u_{i+1} \frac{x - x_i}{\Delta x} \tag{2.7}$$

dengan

$$N_{i,1}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x} \tag{2.8}$$

dan

$$N_{i,2}(x) = \frac{x - x_i}{\Delta x} \tag{2.9}$$

Persamaan (2.7) adalah solusi aproksimasi, sedangkan persamaan (2.8) dan persamaan (2.9) adalah fungsi interpolasi.

Sedangkan interpolasi untuk masalah *unsteady* satu dimensi dengan dua titik nodal adalah fungsi polinomial order 1 atau fungsi linier juga dengan dua variabel bebas *x* dan *t*.

$$\bar{u}(x,t) = a_0(t) + a_1(t)x \tag{2.10}$$

Dengan $u(x,t)$ variabel bergantung, x dan t variabel bebas, dan $a_0(t)$ dan $a_1(t)$. Persamaan (2.10) masih dalam bentuk umum dengan konstanta belum diketahui. Maka akan dihitung terlebih dahulu nilai dari $a_0(t)$ dan $a_1(t)$ (Chapra dan Canale, 2010:889-890). Misal saat $x = x_i$, dan $x = x_{i+1}$ maka persamaan (2.10) menjadi

$$\bar{u}(x_i,t) = a_0(t) + a_1(t)x_i \tag{2.11}$$

$$\bar{u}(x_{i+1},t) = a_0(t) + a_1(t)x_{i+1} \tag{2.12}$$

Dengan $\bar{u}(x_i,t) = u_i(t)$ dan $\bar{u}(x_{i+1},t) = u_{i+1}(t)$. Eliminasi persamaan (2.11) dan (2.12) sehingga diperoleh

$$u_i(t) - u_{i+1}(t) = a_1(t)(x_i - x_{i+1}) \leftrightarrow a_1(t) = \frac{u_i(t) - u_{i+1}(t)}{x_i - x_{i+1}} \tag{2.13}$$

Persamaan (2.11) dikalikan dengan x_{i+1} dan persamaan (2.12) dikalikan dengan x_i, kemudian dieliminasi sehingga diperoleh

$$u_i(t)x_{i+1} - u_{i+1}(t)x_i = a_0(t)(x_{i+1} - x_i)$$

$$a_0(t) = \frac{u_i(t)x_{i+1} - u_{i+1}(t)x_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{2.14}$$

Substitusi persamaan (2.13) dan (2.14) ke persamaan (2.10) maka

$$\bar{u}(x,t) = \frac{u_i(t)x_{i+1} - u_{i+1}(t)x_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{u_i(t) - u_{i+1}(t)}{x_i - x_{i+1}}x$$

$$\bar{u}(x,t) = u_i(t)\left(\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\right) + u_{i+1}(t)\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)$$

Misalkan $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ maka diperoleh

$$\bar{u}(x,t) = u_i(t)\frac{x_{i+1} - x}{\Delta x} + u_{i+1}(t)\frac{x - x_i}{\Delta x} \tag{2.15}$$

dengan

$$N_{i,1}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x} \tag{2.16}$$

dan

$$N_{i,2}(x) = \frac{x - x_i}{\Delta x} \tag{2.17}$$

Persamaan (2.15) adalah solusi aproksimasi, sedangkan persamaan (2.16) dan persamaan (2.17) adalah fungsi interpolasi.

3. Perhitungan Properti Elemen

Penentuan ketepatan suatu fungsi aproksimasi persamaan (2.15) sebagai solusi numerik dari persamaan diferensial diharuskan memenuhi syarat batas, oleh karena itu persamaan (2.15) disubstitusikan ke persamaan (2.1). Karena persamaan (2.15) bukanlah solusi eksak, maka sisi kanan dari persamaan (2.1) tidak sama dengan nol akan tetapi sama dengan residu yang menunjukkan terdapat *error* dari hasil perhitungan.

Dalam pengerjaan metode numerik, diharapkan nilai *error* yang diperoleh adalah nilai *error* yang sekecil-kecilnya sehingga mengakibatkan solusi yang diperoleh mendekati solusi yang sebenarnya. Metode elemen hingga memiliki cara untuk meminimukan residu yaitu dengan mengintegralkan hasil kali residu dengan pembobot pada keseluruhan domain yang disebut sebagai metode residu berbobot. Pemilihan pembobot bisa menggunakan metode Galerkin sehingga bobot yang digunakan sama dengan fungsi interpolasi pada persamaan (2.15) (Chapra,dkk., 2010:896). Secara umum metode residu berbobot dapat dituliskan sebagai

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} R N_i(x)\ dx = 0 \tag{2.18}$$

dimana R = residu dan $N_i(x)$ = pembobot atau fungsi interpolasi.

Jika persamaan yang digunakan adalah masalah *steady*, maka stelah dilakukan perhitungan dengan metode residu berbobot dilanjutkan ke langkah selanjutnya (ke-empat). Akan tetapi, jika persamaan tersebut adalah masalah *unsteady* maka akan terdapat fungsi yang bergantung terhadap *t* dimana fungsi tersebut diturunkan terhadap waktu u_t, sehingga dilakukan diskritisasi terlebih dahulu dengan metode beda hingga. Menurut Hoffman (2001:757) ada tiga metode beda hingga yang dapat digunakan antara lain:

a. Metode *Forward Time*

$$u_t^n = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}$$

b. Metode *Backward Time*

$$u_t^{n+1} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}$$

c. Metode *Centered-Time*

$$u_t^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}$$

4. Pembentukan Sistem Persamaan Linier (Penggabungan)

Persamaan dari setiap elemen yang diperoleh pasti terhubung satu sama lain karena memiliki titik nodal yang sama walaupun dalam elemen yang berbeda. Oleh karena itu dilakukan proses penggabungan pada persamaan tersebut. Hasil penggabungan dapat diekspresikan menggunakan matriks-matriks. Penggabungan matriks-matriks elemen yang telah terbentuk tersebut mengekspresikan perilaku dari seluruh sistem yang disebut sebagai matriks global. Matriks persamaan untuk sistem memiliki bentuk yang sama seperti persamaan untuk masing-masing elemen. Inilah hal yang unik dari metode elemen hingga, yaitu persamaan dari sistem diperoleh dari penggabungan persamaan setiap elemen.

5. Penentuan Kondisi Batas

Sebelum mencari solusi dari sistem persamaan diharuskan memodifikasi persamaan tersebut untuk menjelaskan kondisi batas dari permasalahan. Hal ini dikenal sebagai nilai nodal dari variabel bergantung.

6. Pemecahan Sistem Persamaan

Sistem global yang diperoleh dapat berupa sistem persamaan linier atau sistem persamaan nonlinier digunakan untuk mencari nilai nodal yang tidak diketahui dengan menggunakan teknik-teknik standar.

7. Post Proses Hasil

Setelah solusi diperoleh pada tahap 6, hasil dapat ditampilkan berupa grafik kontour atau plot. Jika ada parameter lain yang bergantung pada hasil maka parameter ini dihitung setelah hasil diperoleh (Kosasih, 2012:5).

2.3 Integral Parsial

Metode ini didasarkan pada pengintegralan rumus turunan hasil kali dua fungsi (Purcell, 1987:452). Andaikan $f = f(x)$ dan $g = g(x)$. Maka

$$D_x[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

dengan mengintegralkan dua ruas persamaan tersebut maka diperoleh

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

atau

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Karena $dg = g'(x)dx$ dan $df = f'(x)dx$, persamaan terakhir dapat ditulis sebagai berikut.

a. Pengintegralan Parsial Integral Tentu

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df$$

b. Pengintegralan Parsial Integral Tak Tentu

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

atau diringkas seperti berikut

$$\int_a^b f\,dg = [fg]_a^b - \int_a^b g\,df$$

2.4 Analisis Galat Solusi Numerik Persamaan Difusi Konveksi

Analisis galat dapat dilakukan dengan membandingkan mencari selisih dari solusi numerik dan solusi analitik. Hasil dari selisih tersebut dilihat nilainya kemudian dianalisis. Semakin kecil nilai galat, maka solusi numerik yang diperoleh semakin mendekati solusi analitik. Jika sebaliknya, nilai galat semakin besar maka solusi numerik yang diperoleh jauh dari solusi analitik.

Misalkan $\bar{u}(x,t)$ solusi aproksimasi dari persamaan difusi konveksi dengan metode elemen hingga dan $u(x,t)$ solusi analitik dari persamaan difusi konveksi dengan metode karakteristik, maka dengan e galat dapat dirumuskan sebagai berikut (Munir, 2003:23)

$$e = u(x,t) - \bar{u}(x,t)$$

karena nilai galat tidak ada yang bernilai negatif, maka dimutlakkan sehingga

$$|e| = |u(x,t) - \bar{u}(x,t)| \tag{2.19}$$

2.5 Penyelesaian Masalah dalam Al-Qur'an

Persamaan difusi konveksi seringkali dikaitkan dengan perpindahan panas. Fenomena difusi-konveksi dalam perpindahan panas adalah fenomena perpindahan secara konveksi dan difusi yang terjadi secara bersamaan. Perpindahan panas secara konveksi terjadi saat sejumlah fluida (gas ataupun cairan) mengalir dengan membawa panas yang ikut dengan aliran fluida tersebut. Sedangkan difusi adalah peristiwa mengalirnya suatu zat dari bagian yang berkonsentrasi tinggi ke bagian yang berkonsentrasi rendah (Huda dkk, 2014:68).

Solusi analitik dan solusi numerik dapat diperoleh dari persamaan difusi konveksi. Ada berbagai macam metode yang bisa digunakan untuk menyelesaiakan persamaan difusi konveksi. Dari berbagai macam metode tersebut, sebagai manusia yang berakal diharuskan memilih metode yang paling tepat dan sesuai dengan kondisi pada persamaan difusi konveksi. Allah berfirman dalam Al-Quran surat az-Zumar:18,

"Yang mendengarkan perkataan lalu mengikuti apa yang paling baik di antaranya mereka Itulah orang-orang yang telah diberi Allah petunjuk dan mereka Itulah orang-orang yang mempunyai akal."(QS. Az-Zumar:18)

Allah menciptakan manusia dengan dilengkapi oleh akal supaya digunakan untuk berpikir tentang segala hal. Allah memberikan akal agar manusia bisa membedakan mana yang baik dan yang buruk dan memberikan kebebasan terhadap manusia untuk memilih yang baik atau yang buruk. Akan tetapi, Allah menganjurkan untuk memilih hal baik daripada hal buruk dan memilih hal yang lebih baik apabila ditemukan suatu yang baik dan lainnya lebih baik. Misalnya dalam penelitian ini, digunakan metode elemen hingga untuk mendapatkan solusi numerik dari persamaan difusi konveksi dikarenakan menurut penelitian sebelumnya metode elemen hingga lebih tepat digunakan untuk persamaan tersebut dibandingkan dengan metode lainnya.

Hasil penyelesaian numerik dari suatu persamaan pasti memiliki *error*, begitu pula dengan persamaan difusi konveksi yang diselesaikan dengan metode elemen hingga. Allah SWT telah mengajarkan kepada kita untuk menghargai dan memperhatikan segala sesuatu di sekitar kita meskipun itu merupakan hal yang sangat kecil termasuk nilai *error* dari solusi numerik. Dalam Al-Quran Allah SWT memberikan perumpamaan dengan menggunakan biji *dzarrah* seperti dalam surat Al-Zalzalah ayat 7-8 berikut ini

"Barangsiapa yang mengerjakan kebaikan seberat dzarrahpun, niscaya Dia akan melihat (balasan)nya. Dan Barangsiapa yang mengerjakan kejahatan sebesar dzarrahpun, niscaya Dia akan melihat (balasan)nya pula."

Dari ayat ini, dapat kita ketahui bahwa Allah SWT memperhitungkan amal manusia sampai sekecil *dzarrah* yang ditafsirkan sebagai biji sawi yang sangat kecil. Betapa Allah menghargai usaha hambaNya sampai hal yang sekecil-kecilnya tetap diperhitungkan olehNya. Oleh karena itu, sebagai insan yang diciptakan Allah patutnya kita tidak perlu ragu untuk berbuat kebaikan karena sekecil apapun amal yang dilakukan pasti Allah akan memperhitungkannya.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan penyelesaian numerik persamaan difusi konveksi satu dimensi menggunakan metode elemen hingga. Persamaan tersebut diselesaikan pada domain $0 \leq x \leq 3, 0 \leq t \leq 1$. Selanjutnya dibandingkan antara selesaian numerik dan selesaian analitik untuk mengetahui nilai *error*.

3.1 Penyelesaian Numerik Persamaan Difusi Konveksi dengan Metode Galerkin – Beda Hingga

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) + v\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = 0 \tag{3.1}$$

dengan $0 \leq x \leq 3,\ \ 0 \leq t \leq 1$

dengan kondisi batas

$$u(0,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}}\exp\left(-\frac{(-1-vt)^2}{D(1+4t)}\right), \qquad t \in [0,1] \tag{3.2}$$

$$u(3,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}}\exp\left(-\frac{(2-vt)^2}{D(1+4t)}\right), \qquad t \in [0,1] \tag{3.3}$$

dengan kondisi awal

$$u(x,0) = \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{D}\right), \qquad x \in [0,3] \tag{3.4}$$

dengan solusi analitik

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}}\exp\left(-\frac{(x-1-vt)^2}{D(4t+1)}\right) \tag{3.5}$$

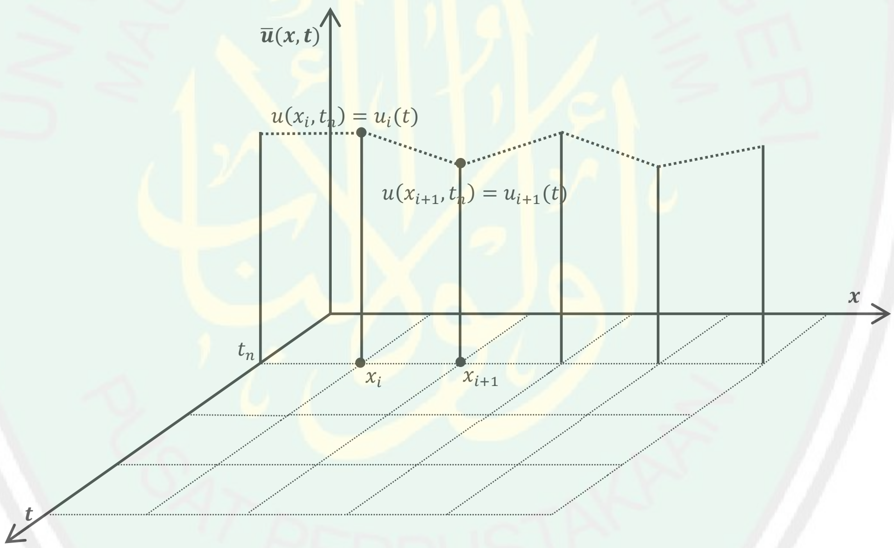
dengan nilai dari $v = 0{,}8$ dan $D = 0{,}005$.

Persamaan difusi konveksi di atas akan diselesaikan secara numerik dengan metode Galerkin yang termasuk dalam metode elemen hingga. Dikarenakan akan diperoleh solusi numerik dari persamaan difusi konveksi dengan simbol $\bar{u}(x,t)$, maka akan terdapat *error* sehingga untuk persamaan (3.1) tidak sama dengan nol tetapi sama dengan residu (*error*).

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}(x,t)+v\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x,t)-D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{u}(x,t)=R \tag{3.6}$$

3.1.1 Diskritisasi Domain

Diskritisasi domain dilakukan dalam domain ruang x dan domain waktu t untuk persamaan difusi konveksi 1D. Berikut ilustrasi diskritisasi domain saat waktu ke-n untuk persamaan (3.1).



Gambar 3.1 Diskritisasi Domain Persamaan Difusi Konveksi 1-Dimensi saat Elemen ke-i dan Waktu ke-n

3.1.2 Penentuan Fungsi Aproksimasi

Selanjutnya mencari interpolasi dari titik $\left(x_i,u_i(t)\right)$ dan titik $\left(x_{i+1},u_{i+1}(t)\right)$. Karena terdapat dua titik nodal maka digunakan fungsi polinomial orde 1 atau fungsi linier sebagai fungsi aproksimasi.

$$\bar{u}(x,t)=a_0(\mathrm{t})+a_1(t)x \tag{3.7}$$

Dengan $\bar{u}(x,t)$ variabel bergantung, (x,t) variabel bebas dan a_0,a_1 konstanta.

Persamaan (3.7) memiliki konstantanta yang belum diketahui, sehingga dihitung terlebih dahulu nilai dari konstanta a_0 dan a_1.

Misal saat x_i maka persamaan (3.7) menjadi

$$u_i(t) = a_0(\mathrm{t}) + a_1(t)x_i \tag{3.8}$$

Misal saat x_{i+1} maka persamaan (3.7) menjadi

$$u_{i+1}(t) = a_0(\mathrm{t}) + a_1(t)x_{i+1} \tag{3.9}$$

Eliminasi persamaan (3.8) dan persamaan (3.9) untuk mencari nilai a_1

$$u_i(t) - u_{i+1}(t) = a_1(t)x_i - a_1(t)x_{i+1}$$

$$u_i(t) - u_{i+1}(t) = a_1(t)(x_i - x_{i+1})$$

$$a_1(t) = \frac{u_i(t) - u_{i+1}(t)}{(x_i - x_{i+1})} \tag{3.10}$$

Selanjutnya persamaan (3.8) dikalikan dengan x_{i+1} dan persamaan (3.9) dikalikan dengan x_i untuk mencari nilai a_0. Kemudian kedua persamaan tersebut dieliminasi sehingga diperoleh

$$u_i(t)x_{i+1} - u_{i+1}(t)x_i = a_0(t)x_{i+1} - a_0(t)x_i$$

$$u_i(t)x_{i+1} - u_{i+1}(t)x_i = a_0(t)(x_{i+1} - x_i)$$

$$a_0(t) = \frac{u_i(t)x_{i+1} - u_{i+1}(t)x_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{3.11}$$

Substitusi nilai a_1 persamaan (3.9) dan nilai a_0 persamaan (3.10) ke persamaan (3.6) sehingga menjadi

$$\bar{u}(x,t) = \frac{u_i(t)x_{i+1} - u_{i+1}(t)x_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{u_i(t) - u_{i+1}(t)}{x_i - x_{i+1}}x$$

$$\bar{u}(x,t) = \frac{u_i(t)x_{i+1} - u_{i+1}(t)x_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{u_i(t) - u_{i+1}(t)}{x_{i+1} - x_i}x$$

$$\bar{u}(x,t) = \frac{u_i(t)(x_{i+1} - x) + u_{i+1}(t)(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$\bar{u}(x,t) = \left(\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\right) u_i(t) + \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right) u_{i+1}(t)$$

dengan $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ maka diperoleh

$$\bar{u}(x,t) = \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x} u_i(t) + \frac{x - x_i}{\Delta x} u_{i+1}(t) \tag{3.12}$$

Persamaan (3.11) bisa dituliskan sebagai

$$\bar{u}(x,t) = N_{i,1}(x) u_i(t) + N_{i,2}(x) u_{i+1}(t) \tag{3.13}$$

dengan permisalan

$$N_{i,1}(x) = \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x} \tag{3.14}$$

dan

$$N_{i,2}(x) = \frac{x - x_i}{\Delta x} \tag{3.15}$$

dengan persamaan $N_{i,1}$ dan $N_{i,2}$ disebut fungsi interpolasi.

3.1.3 Perhitungan Properti Elemen

Perhitungan dalam setiap elemen dilakukan dalam dua tahap, yaitu perhitungan menggunakan metode residu berbobot kemudian perhitungan dengan metode beda hingga.

a. Metode Residu Berbobot

Metode residu berbobot digunakan untuk meminimumkan residu dari persamaan (3.6) dengan mengintegralkan di seluruh daerah domain hasil kali dari persamaan (3.6) dengan fungsi pembobot persamaan (3.14) atau persamaan (3.15) yang dipilih berdasarkan metode Galerkin. Sehingga metode residu berbobot secara umum dituliskan sebagai

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} R N_i(x)\, dx = 0$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x,t) + v \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}(x,t) - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{u}(x,t) \right) N_i \, dx = 0$$

dimisalkan integral hasil kali residu dengan pembobot sebagai I_i sehingga $I_i = 0$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x,t) + v \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}(x,t) - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{u}(x,t) \right) N_i \, dx = I_i$$

Pilih pembobot pertama $N_{i,1}(x) = \left(\frac{x_{i+1}-x}{\Delta x}\right)$ dengan $I_{i,1}$ = integral dari hasil kali residu dengan pembobot $N_{i,1}$ maka

$$I_{i,1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,1}(x) \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x,t) + v \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}(x,t) - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{u}(x,t) \right) dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,1}(x) \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x,t) dx + v \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,1}(x) \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}(x,t) dx$$

$$-D \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,1}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{u}(x,t) \, dx$$

Misalkan $I_{i,1} = A + B + C$ maka

$$A = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,1}(x) \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x,t) dx$$

$$B = v \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,1}(x) \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}(x,t) dx$$

$$C = -D \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,1}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{u}(x,t) \, dx$$

Turunan terhadap t persamaan (3.13) adalah

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x,t) = N_{i,1}(x) \frac{du_i(t)}{dt} + N_{i,2}(x) \frac{du_{i+1}(t)}{dt} \quad (3.16)$$

Persamaan A

$$A = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,1}(x) \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(x,t) dx$$

Substitusi persamaan (3.16) ke persamaan A sehingga menjadi

$$A = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,1}(x)\left(N_{i,1}(x)\frac{du_i(t)}{dt} + N_{i,2}(x)\frac{du_{i+1}(t)}{dt}\right)\,dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(N_{i,1}^2(x)\frac{du_i}{dt} + N_{i,1}(x)N_{i,2}(x)\frac{du_{i+1}}{dt}\right)dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,1}^2(x)\frac{du_i}{dt}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,1}(x)N_{i,2}(x)\frac{du_{i+1}}{dt}dx$$

Substitusi nilai $N_{i,1}$ persamaan (3.14) dan nilai $N_{i,2}$ persamaan (3.15) pada persamaan A sehingga menjadi

$$A = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1} - x}{\Delta x}\right)^2 \frac{du_i}{dt}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_i}{\Delta x}\left(\frac{x_{i+1} - x}{\Delta x}\right)\frac{du_{i+1}}{dt}dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1}^2 - 2xx_{i+1} + x^2}{\Delta x^2}\right)\frac{du_i}{dt}dx$$

$$+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1}x - x^2 - x_i x_{i+1} + xx_i}{\Delta x^2}\right)\frac{du_{i+1}}{dt}dx$$

$$= \frac{1}{\Delta x^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}^2 - 2xx_{i+1} + x^2)\frac{du_i}{dt}dx$$

$$+ \frac{1}{\Delta x^2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}x - x^2 - x_i x_{i+1} + xx_i)\frac{du_{i+1}}{dt}dx$$

$$= \frac{1}{\Delta x^2}\left(x_{i+1}^2 x - x^2 x_{i+1} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{du_i}{dt}$$

$$+ \frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{x_{i+1}x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - xx_i x_{i+1} + \frac{x^2 x_i}{2}\right)\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{du_{i+1}}{dt}$$

Substitusi nilai batas x_i dan x_{i+1} pada persamaan A

$$A = \frac{1}{\Delta x^2}\left(x_{i+1}^2(x_{i+1} - x_i) - (x_{i+1}^2 - x_i^2)x_{i+1} + \frac{(x_{i+1}^3 - x_i^3)}{3}\right)\frac{du_i}{dt}$$

$$+ \frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{(x_{i+1}^2 - x_i^2)(x_{i+1} + x_i)}{2} - \frac{(x_{i+1}^3 - x_i^3)}{3} - (x_{i+1} - x_i)x_i x_{i+1}\right)\frac{du_{i+1}}{dt}$$

$$= \frac{1}{\Delta x^2}\left((x_{i+1}^3 - x_i x_{i+1}^2) - (x_{i+1}^3 - x_{i+1}x_i^2) + \frac{x_{i+1}^3 - x_i^3}{3}\right)\frac{du_i}{dt}$$

$$+\frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{x_{i+1}^3+x_{i+1}^2x_i-x_i^2x_{i+1}-x_i^3}{2}-\frac{x_{i+1}^3-x_i^3}{3}-x_ix_{i+1}^2+x_i^2x_{i+1}\right)\frac{du_{i+1}}{dt}$$

$$=\frac{1}{\Delta x^2}\left(-x_ix_{i+1}^2+x_{i+1}x_i^2+\frac{x_{i+1}^3-x_i^3}{3}\right)\frac{du_i}{dt}$$

$$+\frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{1}{6}x_{i+1}^3-\frac{1}{2}x_{i+1}^2x_i+\frac{1}{2}x_{i+1}x_i^2-\frac{1}{6}x_i^3\right)\frac{du_{i+1}}{dt}$$

$$A=\frac{1}{6\Delta x^2}(2x_{i+1}^3-6x_{i+1}^2x_i+6x_{i+1}x_i^2-2x_i^3)\frac{du_i}{dt}$$

$$+\frac{1}{6\Delta x^2}\,(x_{i+1}^3-3x_{i+1}^2x_i+3x_{i+1}x_i^2-x_i^3)\frac{du_{i+1}}{dt}$$

$$=\frac{1}{6\Delta x^2}\left(2(x_{i+1}-x_i)^3\frac{du_i}{dt}+(x_{i+1}-x_i)^3\frac{du_{i+1}}{dt}\right)$$

dengan $x_{i+1}-x_i=\Delta x$ maka persamaan A menjadi

$$A=\frac{1}{6\Delta x^2}\left(2\Delta x^3\frac{du_i}{dt}+\Delta x^3\frac{du_{i+1}}{dt}\right)$$

$$A=\frac{\Delta x}{6}\left(2\frac{du_i}{dt}+\frac{du_{i+1}}{dt}\right)$$

Persamaan B

$$B=v\int_{x_i}^{x_{i+1}}N_{i,1}(x)\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x,t)dx$$

Digunakan pengintegralan parsial untuk menyelesaikan persamaan B

Misalkan,

$$f(x)=N_{i,1}(x)\quad \text{dan}\quad g'(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x,t)$$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}N_{i,1}(x)\quad \text{dan}\quad g(x,t)=\bar{u}(x,t)|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

Maka

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)g'(x,t)dx=[f(x)g(x,t)]_{x_i}^{x_{i+1}}-\int_{x_i}^{x_{i+1}}g(x,t)f'(x)dx$$

Sehingga diperoleh

$$B = v\left[N_{i,1}(x)\bar{u}(x,t)\right]_{x_i}^{x_{i+1}} - v\int_{x_i}^{x_{i+1}} \bar{u}(x,t)\frac{d}{dx}N_{i,1}(x)dx$$

Substitusi nilai $N_{i,1}$ persamaan (3.14) dan persamaan (3.11) ke persamaan B, maka diperoleh

$$B = v\left[\frac{x_{i+1}-x}{\Delta x}\left(\frac{x_{i+1}-x}{\Delta x}u_i(t) + \frac{x-x_i}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right)\right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$-v\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{x_{i+1}-x}{\Delta x}u_i(t) + \frac{x-x_i}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right)\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{x_{i+1}-x}{\Delta x}\right)\right)dx$$

substitusi nilai batas x_i dan x_{i+1} pada suku pertama maka

$$B = -vu_i(t) + \frac{v}{\Delta x}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{x_{i+1}-x}{\Delta x}u_i(t) + \frac{x-x_i}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right)dx$$

$$= -vu_i(t) + \frac{v}{\Delta x}\left[\frac{xx_{i+1}-\frac{1}{2}x^2}{\Delta x}u_i(t) + \frac{\frac{1}{2}x^2 - xx_i}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

substitusi nilai batas x_i dan x_{i+1} pada suku kedua maka

$$B = -vu_i(t) + \frac{v}{\Delta x}\left(\frac{x_{i+1}^2 - \frac{1}{2}x_{i+1}^2}{\Delta x}u_i(t) + \frac{\frac{1}{2}x_{i+1}^2 - x_{i+1}x_i}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right)$$

$$-\frac{v}{\Delta x}\left(\frac{x_ix_{i+1} - \frac{1}{2}x_i^2}{\Delta x}u_i(t) + \frac{\frac{1}{2}x_i^2 - x_i^2}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right)$$

$$= -vu_i(t) + \frac{v}{\Delta x}\left(\frac{\frac{1}{2}x_{i+1}^2 - x_ix_{i+1} + \frac{1}{2}x_i^2}{\Delta x}u_i(t)\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{2}x_{i+1}^2 - x_{i+1}x_i + \frac{1}{2}x_i^2}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right)$$

$$= -vu_i(t) + \frac{v}{\Delta x}\left(\frac{\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)^2}{\Delta x}u_i(t) + \frac{\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)^2}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right)$$

dengan $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ maka persamaan *B* menjadi

$$B = -vu_i(t) + \frac{v}{\Delta x}\left(\frac{\frac{1}{2}\Delta x^2}{\Delta x}u_i(t) + \frac{\frac{1}{2}\Delta x^2}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right)$$

$$= -vu_i(t) + \frac{v}{\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{2}u_i(t) + \frac{\Delta x}{2}u_{i+1}(t)\right)$$

$$= -vu_i(t) + v\left(\frac{1}{2}u_i(t) + \frac{1}{2}u_{i+1}(t)\right)$$

$$= -\frac{v}{2}u_i(t) + \frac{v}{2}u_{i+1}(t)$$

$$B = \frac{v}{2}\left(u_{i+1}(t) - u_i(t)\right)$$

Persamaan C

$$C = -D\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,1}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{u}(x,t)\,dx$$

Digunakan pengintegralan parsial untuk menyelesaikan persamaan *C*

Misalkan,

$$f(x) = N_{i,1}(x) \quad \text{dan} \quad g'(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{u}(x,t)$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}N_{i,1}(x) \quad \text{dan} \quad g(x) = \frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x,t)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

Maka

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g'(x,t)dx = [f(x)g(x,t)]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x,t)f'(x)dx$$

Sehingga diperoleh

$$C = -D\left[N_{i,1}(x)\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x,t)\right]_{x_i}^{x_{i+1}} + D\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x,t)\frac{d}{dx}N_{i,1}(x)\,dx$$

substitusi nilai $N_{i,1}$ persamaan (3.14) ke persamaan *C* sehingga menjadi

$$C = -D\left[\frac{x_{i+1}-x}{\Delta x}\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x,t)\right]_{x_i}^{x_{i+1}} + D\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x,t)\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{x_{i+1}-x}{\Delta x}\right)\right]dx$$

$$= D\frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta x}\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x_i,t) + D\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x,t)\left(-\frac{1}{\Delta x}\right)dx$$

dengan $x_{i+1}-x_i = \Delta x$ dan $\bar{u}(x_i,t) = \bar{u}_i(t)$ maka persamaan *C* menjadi

$$C = D\frac{\Delta x}{\Delta x}\frac{\partial u_i(t)}{\partial x} - D\frac{1}{\Delta x}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x,t)\,dx$$

$$C = D\frac{\partial u_i(t)}{\partial x} - D\frac{1}{\Delta x}\bar{u}(x,t)|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

Substitusi persamaan (3.11) ke persamaan *C* sehingga menjadi

$$C = D\frac{\partial u_i(t)}{\partial x} - \frac{D}{\Delta x}\left[\frac{x_{i+1}-x}{\Delta x}u_i(t) + \frac{x-x_i}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

Substitusi nilai batas x_i dan x_{i+1} pada persamaan *C* maka

$$C = D\frac{\partial u_i(t)}{\partial x} - \frac{D}{\Delta x}\left(u_{i+1}(t) - u_i(t)\right)$$

Setelah diperoleh hasil dari perhitungan persamaan *A*, *B*, dan *C*, selanjutnya disubstitusikan kembali ke persamaan $I_{i,1}$ sehingga diperoleh

$$I_{i,1} = A + B + C$$

$$I_{i,1} = \frac{\Delta x}{6}\left(2\frac{du_i(t)}{dt} + \frac{du_{i+1}(t)}{dt}\right) + \frac{v}{2}\left(u_{i+1}(t) - u_i(t)\right) - D\frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{\Delta x} + D\frac{\partial u_i(t)}{\partial x} \quad (3.17)$$

Langkah selanjutnya dilakukan pengintegralan dari hasil kali residu dengan pembobot kedua $N_{i,2}(x) = \left(\frac{x-x_i}{\Delta x}\right)$ dengan $I_{i,2}$ = integral dari hasil kali residu dengan pembobot $N_{i,2}$ maka

$$I_{i,2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,2}(x)\left(\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}(x,t) + v\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x,t) - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{u}(x,t)\right)dx$$

$$I_{i,2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,2}(x)\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(x,t)dx + v\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,2}(x)\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x,t)dx$$

$$-D\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,2}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{u}(x,t)\,dx$$

Misalkan $I_{i,2} = A + B + C$ maka

$$A = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,2}(x)\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}(x,t)dx$$

$$B = v\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,2}(x)\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x,t)dx$$

$$C = -D\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,2}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{u}(x,t)\,dx$$

Persamaan A

$$A = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,2}(x)\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}(x,t)dx$$

Substitusi persamaan (3.16) ke persamaan A sehingga menjadi

$$A = \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,2}(x)\left(N_{i,1}(x)\frac{du_i(t)}{dt} + N_{i,2}(x)\frac{du_{i+1}(t)}{dt}\right)dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(N_{i,2}(x)N_{i,1}(x)\frac{du_i(t)}{dt} + N_{i,2}^2(x)\frac{du_{i+1}(t)}{dt}\right)dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,2}(x)N_{i,1}(x)\frac{du_i(t)}{dt}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,2}^2(x)\frac{du_{i+1}(t)}{dt}\,dx$$

Substitusi nilai $N_{i,2}$ persamaan (3.15) dan nilai $N_{i,2}$ persamaan (3.15) pada persamaan A sehingga menjadi

$$A = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_i}{\Delta x}\left(\frac{x_{i+1} - x}{\Delta x}\right)\frac{du_i}{dt}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{x - x_i}{\Delta x}\right)^2\frac{du_{i+1}}{dt}dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x_{i+1}x - x^2 - x_i x_{i+1} + x x_i}{\Delta x^2}\right) \frac{du_i}{dt} dx$$

$$+ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x^2 - 2x x_i + x_i^2}{\Delta x^2}\right) \frac{du_{i+1}}{dt} dx$$

$$= \frac{1}{\Delta x^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1}x - x^2 - x_i x_{i+1} + x x_i) \frac{du_i}{dt}\ dx$$

$$+ \frac{1}{\Delta x^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x^2 - 2x x_i + x_i^2) \frac{du_{i+1}}{dt} dx$$

$$= \frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{x_{i+1}x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - x x_i x_{i+1} + \frac{x^2 x_i}{2}\right)\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{du_i}{dt}$$

$$+ \frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{x^3}{3} - x^2 x_i + x x_i^2\right)\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{du_{i+1}}{dt}$$

Substitusi nilai batas x_i dan x_{i+1} pada persamaan *A*

$$A = \frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{x_{i+1}(x_{i+1}^2 - x_i^2)}{2} - \frac{(x_{i+1}^3 - x_i^3)}{3} - (x_{i+1} - x_i)x_i x_{i+1} + \frac{(x_{i+1}^2 - x_i^2)x_i}{2}\right)\frac{du_i}{dt}$$

$$+ \frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{(x_{i+1}^3 - x_i^3)}{3} - (x_{i+1}^2 - x_i^2)x_i + (x_{i+1} - x_i)x_i^2\right)\frac{du_{i+1}}{dt}$$

$$= \frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{x_{i+1}^3}{2} - \frac{x_{i+1}x_i^2}{2} - \left(\frac{x_{i+1}^3}{3} - \frac{1}{3}x_i^3\right) + x_i^2 x_{i+1} - x_{i+1}^2 x_i + \frac{1}{2}x_{i+1}^2 x_i - \frac{1}{2}x_i^3\right)\frac{du_i}{dt}$$

$$+ \frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{1}{3}x_{i+1}^3 - \frac{1}{3}x_i^3 - x_{i+1}^2 x_i + x_i^3 + x_{i+1}x_i^2 - x_i^3\right)\frac{du_{i+1}}{dt}$$

$$= \frac{1}{6\Delta x^2}(x_{i+1}^3 - 3x_{i+1}^2 x_i + 3x_{i+1}x_i^2 - x_i^3)\frac{du_i}{dt}$$

$$+ \frac{1}{3\Delta x^2}(x_{i+1}^3 - 3x_{i+1}^2 x_i + 3x_{i+1}x_i^2 - x_i^3)\frac{du_{i+1}}{dt}$$

$$= \frac{1}{6\Delta x^2}\left((x_{i+1} - x_i)^3 \frac{du_i}{dt} + 2(x_{i+1} - x_i)^3 \frac{du_{i+1}}{dt}\right)$$

dengan $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ maka persamaan *A* menjadi

$$A = \frac{1}{6\Delta x^2}\left(\Delta x^3 \frac{du_i}{dt} + 2\Delta x^3 \frac{du_{i+1}}{dt}\right)$$

$$A = \frac{\Delta x}{6}\left(\frac{du_i}{dt} + 2\frac{du_{i+1}}{dt}\right)$$

Persamaan B

$$B = v\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,2}(x)\frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x,t)dx$$

Digunakan pengintegralan parsial untuk menyelesaikan persamaan B

Misalkan,

$$f(x) = N_{i,2}(x) \quad \text{dan} \quad g'(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\bar{u}(x,t)$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}N_{i,2}(x) \quad \text{dan} \quad g(x,t) = \bar{u}(x,t)|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

Maka

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g'(x,t)dx = [f(x)g(x,t)]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x,t)f'(x)dx$$

Sehingga diperoleh

$$B = v[N_{i,2}(x)\bar{u}(x,t)]_{x_i}^{x_{i+1}} - v\int_{x_i}^{x_{i+1}} \bar{u}(x,t)\frac{d}{dx}N_{i,2}(x)dx$$

substitusi nilai $N_{i,2}$ persamaan (3.15) dan persamaan (3.11) ke persamaan B, maka diperoleh

$$B = v\left[\frac{x-x_i}{\Delta x}\left(\frac{x_{i+1}-x}{\Delta x}u_i(t) + \frac{x-x_i}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right)\right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$-v\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{x_{i+1}-x}{\Delta x}u_i(t) + \frac{x-x_i}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right)\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{x-x_i}{\Delta x}\right)\right)dx$$

substitusi nilai batas x_i dan x_{i+1} pada suku pertama maka

$$B = vu_{i+1}(t) - \frac{v}{\Delta x}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\frac{x_{i+1}-x}{\Delta x}u_i(t) + \frac{x-x_i}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right)dx$$

$$= vu_{i+1}(t) - \frac{v}{\Delta x}\left[\frac{xx_{i+1} - \frac{1}{2}x^2}{\Delta x}u_i(t) + \frac{\frac{1}{2}x^2 - xx_i}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

substitusi nilai batas x_i dan x_{i+1} pada suku kedua maka

$$B = vu_{i+1}(t) - \frac{v}{\Delta x}\left(\frac{x_{i+1}^2 - \frac{1}{2}x_{i+1}^2}{\Delta x}u_i(t) + \frac{\frac{1}{2}x_{i+1}^2 - x_{i+1}x_i}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right)$$

$$+ \frac{v}{\Delta x}\left(\frac{x_i x_{i+1} - \frac{1}{2}x_i^2}{\Delta x}u_i(t) + \frac{\frac{1}{2}x_i^2 - x_i^2}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right)$$

$$= vu_{i+1}(t) - \frac{v}{\Delta x}\left(\frac{\frac{1}{2}x_{i+1}^2 - x_i x_{i+1} + \frac{1}{2}x_i^2}{\Delta x}u_i(t)\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{2}x_{i+1}^2 - x_{i+1}x_i + \frac{1}{2}x_i^2}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right)$$

$$B = vu_{i+1}(t) - \frac{v}{\Delta x}\left(\frac{\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)^2}{\Delta x}u_i(t) + \frac{\frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)^2}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right)$$

dengan $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ maka persamaan B menjadi

$$B = vu_{i+1}(t) - \frac{v}{\Delta x}\left(\frac{\frac{1}{2}\Delta x^2}{\Delta x}u_i(t) + \frac{\frac{1}{2}\Delta x^2}{\Delta x}u_{i+1}(t)\right)$$

$$= vu_{i+1}(t) - \frac{v}{\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{2}u_i(t) + \frac{\Delta x}{2}u_{i+1}(t)\right)$$

$$= vu_{i+1}(t) - v\left(\frac{1}{2}u_i(t) + \frac{1}{2}u_{i+1}(t)\right)$$

$$= \frac{v}{2}u_{i+1}(t) - \frac{v}{2}u_i(t)$$

$$B = \frac{v}{2}\left(u_{i+1}(t) - u_i(t)\right)$$

Persamaan C

$$C = -D \int_{x_i}^{x_{i+1}} N_{i,2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{u}(x,t)\, dx$$

Digunakan pengintegralan parsial untuk menyelesaikan persamaan *C*

Misalkan,

$$f(x) = N_{i,2}(x) \quad \text{dan} \quad g'(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{u}(x,t)$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} N_{i,2}(x) \quad \text{dan} \quad g(x) = \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}(x,t)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

Maka

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) g'(x,t) dx = [f(x) g(x,t)]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x,t) f'(x) dx$$

Sehingga diperoleh

$$C = -D \left[N_{i,2}(x) \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}(x,t) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + D \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}(x,t) \frac{d}{dx} N_{i,2}(x) dx$$

Substitusi persamaan $N_{i,1}$ persamaan (3.14) ke persamaan *C* sehingga menjadi

$$C = -D \left[\frac{x - x_i}{\Delta x} \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}(x,t) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + D \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}(x,t) \left[\frac{d}{dx} N_{i,2} \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right) \right] dx$$

$$= -D \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta x} \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}(x_{i+1}, t) + D \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}(x,t) \left(\frac{1}{\Delta x} \right) dx$$

dengan $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ dan $\bar{u}(x_i, t) = \bar{u}_i(t)$ maka persamaan *C* menjadi

$$C = -D \frac{\Delta x}{\Delta x} \frac{\partial}{\partial x} u_{i+1}(t) + D \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}(x,t)\, dx$$

$$= -D \frac{\partial}{\partial x} u_{i+1}(t) + D \frac{1}{\Delta x} \bar{u}(x,t)|_{x_i}^{x_{i+1}}$$

Substitusi persamaan (3.11) ke persamaan *C* sehingga menjadi

$$C = -D \frac{\partial}{\partial x} u_{i+1}(t) + \frac{D}{\Delta x} \left[\frac{x_{i+1} - x}{\Delta x} u_i(t) + \frac{x - x_i}{\Delta x} u_{i+1}(t) \right]_{x_i}^{x_{i+1}}$$

Substitusi nilai batas x_i dan x_{i+1} pada persamaan C maka

$$C = -D\frac{\partial}{\partial x}u_{i+1}(t) + \frac{D}{\Delta x}\big(u_{i+1}(t) - u_i(t)\big)$$

Setelah diperoleh hasil dari perhitungan persamaan *A*, *B*, dan *C*, selanjutnya disubstitusikan kembali ke persamaan $I_{i,2}$ sehingga diperoleh

$$I_{i,2} = A + B + C$$

$$I_{i,2} = \frac{\Delta x}{6}\left(\frac{du_i(t)}{dt} + 2\frac{du_{i+1}(t)}{dt}\right) + \frac{v}{2}\big(u_{i+1}(t) - u_i(t)\big) - D\frac{\partial}{\partial x}u_{i+1}(t) + D\frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{\Delta x} \qquad (3.18)$$

b. Metode Beda Hingga

Pada persamaan (3.17) dan persamaan (3.18) masih terdapat fungsi turunan terhadap waktu. Oleh karena itu, langkah selanjutnya adalah mendiskritkan kedua persamaan di atas dengan menggunakan metode beda hingga beda maju seperti persamaan (3.19) berikut,

$$u_t = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \qquad (3.19)$$

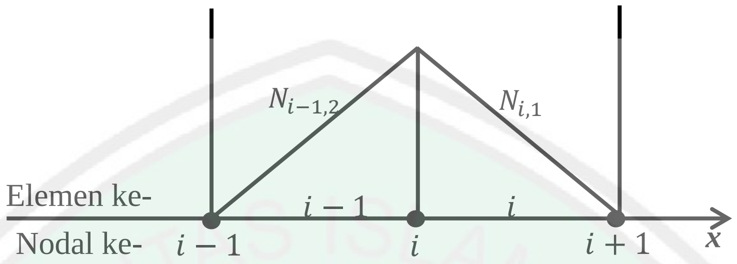
Pendiskritan fungsi turunan terhadap waktu dilakukan dengan cara substitusi persamaan (3.19) ke persamaan (3.17) dan persamaan (3.18), sehingga diperoleh

$$I_{i,1} = \frac{\Delta x}{6}\left(2\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\Delta t}\right) + \frac{v}{2}(u_{i+1}^n - u_i^n) - D\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + D\frac{\partial u_i^n}{\partial x} \qquad (3.20)$$

$$I_{i,2} = \frac{\Delta x}{6}\left(\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + 2\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\Delta t}\right) + \frac{v}{2}(u_{i+1}^n - u_i^n) - D\frac{\partial}{\partial x}u_{i+1}^n + D\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} \qquad (3.21)$$

3.1.4 Pembentukan Sistem Persamaan Linier (Penggabungan)

Dilakukan penggabungan untuk persamaan (3.20) dan (3.21) dengan ketentuan sebagai berikut,



Gambar 3.2 Ilustrasi Penggabungan Elemen-*i* dan Elemen-(*i-1)* di *Node-i*

Untuk elemen ke-i selain kondisi batas awal dan kondisi batas akhir, pada saat penggabungan diperlukan persamaan dari elemen ke-$(i-1)$ dengan fungsi interpolasi kedua dan persamaan dari elemen ke-i dengan fungsi interpolasi pertama seperti ilustrasi gambar di atas. Maka i diganti dengan $i-1$ pada persamaan (3.21) dan untuk persamaan (3.20) tidak berubah. Sehingga persamaan (3.21) berubah menjadi

$$I_{i,2} = \frac{\Delta x}{6}\left(\frac{u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^{n}}{\Delta t} + 2\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}\right) + \frac{v}{2}(u_i^n - u_{i-1}^n) - D\frac{\partial}{\partial x}u_i^n + D\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} \tag{3.22}$$

Sebelum penggabungan, disederhanakan dulu persamaan (3.20), maka diperoleh

$$I_{i,1} = \frac{\Delta x}{6}\left(2\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^{n}}{\Delta t}\right) + \frac{v}{2}(u_{i+1}^n - u_i^n) - D\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + D\frac{\partial u_i^n}{\partial x}$$

dikarenakan integral dari hasil kali residu dengan pembobot adalah nol, atau $I_{i,1} = 0$ maka

$$0 = \frac{\Delta x}{6}\left(2\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\Delta t}\right) + \frac{v}{2}(u_{i+1}^n - u_i^n) - D\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + D\frac{\partial u_i^n}{\partial x}$$

$$0 = \frac{2\Delta x}{6\Delta t}u_i^{n+1} - \left(\frac{2\Delta x}{6\Delta t} + \frac{v}{2} - \frac{D}{\Delta x}\right)u_i^n + \frac{\Delta x}{6\Delta t}u_{i+1}^{n+1} - \left(\frac{\Delta x}{6\Delta t} - \frac{v}{2} + \frac{D}{\Delta x}\right)u_{i+1}^n + D\frac{\partial u_i^n}{\partial x}$$

$$\frac{\Delta x}{3\Delta t}u_i^{n+1} + \frac{\Delta x}{6\Delta t}u_{i+1}^{n+1} = \left(\frac{\Delta x}{3\Delta t} + \frac{v}{2} - \frac{D}{\Delta x}\right)u_i^n + \left(\frac{\Delta x}{6\Delta t} - \frac{v}{2} + \frac{D}{\Delta x}\right)u_{i+1}^n - D\frac{\partial u_i^n}{\partial x} \quad (3.23)$$

Sebelum penggabungan, disederhanakan dulu persamaan (3.22), maka diperoleh

$$I_{i,2} = \frac{\Delta x}{6}\left(\frac{u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t} + 2\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}\right) + \frac{v}{2}(u_i^n - u_{i-1}^n) - D\frac{\partial}{\partial x}u_i^n + D\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}$$

dikarenakan integral dari hasil kali residu dengan pembobot adalah nol, atau $I_{i,2} = 0$ maka

$$0 = \frac{\Delta x}{6}\left(\frac{u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t} + 2\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}\right) + \frac{v}{2}(u_i^n - u_{i-1}^n) - D\frac{\partial}{\partial x}u_i^n + D\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}$$

$$0 = \frac{\Delta x}{6\Delta t}u_{i-1}^{n+1} - \left(\frac{\Delta x}{6\Delta t} + \frac{v}{2} + \frac{D}{\Delta x}\right)u_{i-1}^n + \frac{2\Delta x}{6\Delta t}u_i^{n+1} - \left(\frac{2\Delta x}{6\Delta t} - \frac{v}{2} - \frac{D}{\Delta x}\right)u_i^n - D\frac{\partial}{\partial x}u_i^n$$

$$\frac{\Delta x}{6\Delta t}u_{i-1}^{n+1} + \frac{\Delta x}{3\Delta t}u_i^{n+1} = \left(\frac{\Delta x}{6\Delta t} + \frac{v}{2} + \frac{D}{\Delta x}\right)u_{i-1}^n + \left(\frac{2\Delta x}{6\Delta t} - \frac{v}{2} - \frac{D}{\Delta x}\right)u_i^n + D\frac{\partial}{\partial x}u_i^n \quad (3.24)$$

Selanjutnya dilakukan penggabungan untuk persamaan (3.23) dan persamaan (3.24) seperti berikut

$$\frac{\Delta x}{6\Delta t}u_{i-1}^{n+1}+\frac{2\Delta x}{3\Delta t}u_{i}^{n+1}+\frac{\Delta x}{6\Delta t}u_{i+1}^{n+1}=\left(\frac{\Delta x}{6\Delta t}+\frac{v}{2}+\frac{D}{\Delta x}\right)u_{i-1}^{n}$$
$$+\left[\left(\frac{\Delta x}{3\Delta t}+\frac{v}{2}-\frac{D}{\Delta x}\right)+\left(\frac{2\Delta x}{6\Delta t}-\frac{v}{2}-\frac{D}{\Delta x}\right)\right]u_{i}^{n} \tag{3.25}$$
$$+\left(\frac{\Delta x}{6\Delta t}-\frac{v}{2}+\frac{D}{\Delta x}\right)u_{i+1}^{n}$$

Misalkan,

$$a=\frac{\Delta x}{6\Delta t}$$

$$b=\frac{\Delta x}{3\Delta t}$$

$$c=\left(\frac{\Delta x}{6\Delta t}+\frac{v}{2}+\frac{D}{\Delta x}\right)$$

$$d=\left(\frac{\Delta x}{3\Delta t}+\frac{v}{2}-\frac{D}{\Delta x}\right)$$

$$e=\left(\frac{\Delta x}{3\Delta t}-\frac{v}{2}-\frac{D}{\Delta x}\right)$$

$$f=\left(\frac{\Delta x}{6\Delta t}-\frac{v}{2}+\frac{D}{\Delta x}\right)$$

maka persamaan (3.25) menjadi

$$au_{i-1}^{n+1}+2bu_{i}^{n+1}+au_{i+1}^{n+1}=cu_{i-1}^{n}+(d+e)u_{i}^{n}+fu_{i+1}^{n} \tag{3.26}$$

Sehingga diperoleh rumus umum untuk penyelesaian persamaan difusi konveksi dengan metode elemen hingga adalah dengan ketentuan sebagai berikut:

a. Persamaan (3.23) digunakan untuk *node*-1.
b. Persamaan (3.24) digunakan untuk *node-m*, dengan banyaknya *m* titik nodal.

c. Persamaan (3.26) digunakan untuk *node*-2 sampai dengan *node*-$(m-1)$, dengan banyaknya m titik nodal.

3.1.5 Penentuan Kondisi Batas

Kondisi batas yang digunakan dalam penelitian ini adalah kondisi batas *Dirichlet*, sehingga persamaan (3.23) dan persamaan (3.24) tidak diperlukan dalam proses penyelesaian numerik persamaan difusi konveksi 1D dengan metode Galerkin – beda hingga

3.1.6 Pemecahan Sistem Persamaan

Dalam perhitungan ini akan dilakukan secara manual dengan kondisi $\Delta x = 0{,}5$ dan $\Delta t = 0{,}25$ sehingga domain ruang terbagi menjadi 6 elemen dengan 7 titik nodal dan domain waktu terbagi menjadi 4 elemen dengan 5 titik nodal. Pemilihan nilai Δx dan Δt yang cukup besar dilakukan agar mempermudah proses perhitungan manual secara bertahap. Selanjutnya, pemecahan sistem persamaan dilakukan dengan bantuan matriks. Adapun ketentuan lain yakni dilakukan pemotongan pada hasil perhitungan sebanyak tujuh angka di belakang koma (,).

$$a = \frac{\Delta x}{6\Delta t} = 0{,}3333333$$

$$b = \frac{\Delta x}{3\Delta t} = 0{,}6666667$$

$$c = \left(\frac{\Delta x}{6\Delta t} + \frac{v}{2} + \frac{D}{\Delta x}\right) = 0{,}7433333$$

$$d = \left(\frac{\Delta x}{3\Delta t} + \frac{v}{2} - \frac{D}{\Delta x}\right) = 1{,}0566667$$

$$e = \left(\frac{2\Delta x}{6\Delta t} - \frac{v}{2} - \frac{D}{\Delta x}\right) = 0{,}2566667$$

$$f = \left(\frac{\Delta x}{6\Delta t} - \frac{v}{2} + \frac{D}{\Delta x}\right) = -0{,}0566667$$

Substitusi nilai-nilai di atas pada persamaan (3.26) sehingga diperoleh

$$0{,}3333333u_{i-1}^{n+1} + 2(0{,}6666667)u_i^{n+1} + 0{,}3333333u_{i+1}^{n+1} = 0{,}7433333u_{i-1}^{n} + (1{,}0566667 + 0{,}2566667)u_i^n - 0{,}0566667u_{i+1}^n$$

$$0{,}3333333u_{i-1}^{n+1} + 1{,}3333333u_i^{n+1} + 0{,}3333333u_{i+1}^{n+1} = 0{,}7433333u_{i-1}^{n} + 1{,}3133333u_i^n - 0{,}0566667u_{i+1}^n$$

a. Saat n = 1

$$0{,}3333333u_{i-1}^{2} + 1{,}3333333u_i^{2} + 0{,}3333333u_{i+1}^{2} = 0{,}7433333u_{i-1}^{1} + 1{,}3133333u_i^1 - 0{,}0566667u_{i+1}^1$$

- Saat i = 2

$$0{,}3333333u_1^2 + 1{,}3333333u_2^2 + 0{,}3333333u_3^2 = 0{,}7433333u_1^1 + 1{,}3133333u_2^1 - 0{,}0566667u_3^1$$

$$1{,}3333333u_2^2 + 0{,}3333333u_3^2 = 0{,}7433333(0) + 1{,}3133333(0) - 0{,}0566667(1) - 0{,}3333333(0)$$

$$1{,}3333333u_2^2 + 0{,}3333333u_3^2 = -0{,}0566667$$

- Saat i = 3

$$0{,}3333333u_2^2 + 1{,}3333333u_3^2 + 0{,}3333333u_4^2 = 0{,}7433333u_2^1 + 1{,}3133333u_3^1 - 0{,}0566667u_4^1$$

$$0{,}3333333u_2^2 + 1{,}3333333u_3^2 + 0{,}3333333u_4^2 = 0{,}7433333(0) + 1{,}3133333(1) - 0{,}0566667(0)$$

$$0{,}3333333u_2^2 + 1{,}3333333u_3^2 + 0{,}3333333u_4^2 = 1{,}3133333$$

- Saat i = 4

$$0{,}3333333u_3^2 + 1{,}3333333u_4^2 + 0{,}3333333u_5^2 = 0{,}7433333u_3^1 + 1{,}3133333u_4^1 - 0{,}0566667u_5^1$$

$$0{,}3333333u_3^2 + 1{,}3333333u_4^2 + 0{,}3333333u_5^2 = 0{,}7433333(1) + 1{,}3133333(0) - 0{,}0566667(0)$$

$$0{,}3333333u_3^2 + 1{,}3333333u_4^2 + 0{,}3333333u_5^2 = 0{,}7433333$$

- Saat i = 5

$$0{,}3333333u_4^2 + 1{,}3333333u_5^2 + 0{,}3333333u_6^2 = 0{,}7433333u_4^1 + 1{,}3133333u_5^1 - 0{,}0566667u_6^1$$

$$0{,}3333333u_4^2 + 1{,}3333333u_5^2 + 0{,}3333333u_6^2 = 0{,}7433333(0) + 1{,}3133333(0) - 0{,}0566667(0)$$

$$0{,}3333333u_4^2 + 1{,}3333333u_5^2 + 0{,}3333333u_6^2 = 0$$

- Saat i = 6

$$0{,}3333333u_5^2 + 1{,}3333333u_6^2 + 0{,}3333333u_7^2 = 0{,}7433333u_5^1 + 1{,}3133333u_6^1 - 0{,}0566667u_7^1$$

$$0{,}3333333u_5^2 + 1{,}3333333u_6^2 = 0{,}7433333(0) + 1{,}3133333(0) - 0{,}0566667(0) - 0{,}3333333(0)$$

$$0{,}3333333u_5^2 + 1{,}3333333u_6^2 = 0$$

Diubah menjadi matriks sehingga

$$\begin{bmatrix} 1{,}3333333 & 0{,}3333333 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3333333 & 1{,}3333333 & 0{,}3333333 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3333333 & 1{,}3333333 & 0{,}3333333 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3333333 & 1{,}3333333 & 0{,}3333333 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}3333333 & 1{,}3333333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \\ u_5^2 \\ u_6^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0566667 \\ 1{,}3133333 \\ 0{,}7433333 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \\ u_5^2 \\ u_6^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,2855385 \\ 0,9721539 \\ 0,3369231 \\ -0,0898462 \\ 0,0224615 \end{bmatrix}$$

b. Saat n = 2

$$0,3333333u_{i-1}^3 + 1,3333333u_i^3 + 0,3333333u_{i+1}^3 = 0,7433333u_{i-1}^2 + 1,3133333u_i^2 - 0,0566667u_{i+1}^2$$

- Saat i = 2

$$0,3333333u_1^3 + 1,3333333u_2^3 + 0,3333333u_3^3 = 0,7433333u_1^2 + 1,3133333u_2^2 - 0,0566667u_3^2$$

$$1,3333333u_2^3 + 0,3333333u_3^3 = 0,7433333(0) + 1,3133333(-0,2855385) - 0,0566667(0,9721539) - 0,3333333(0)$$

$$1,3333333u_2^3 + 0,3333333u_3^3 = -0,4300959$$

- Saat i = 3

$$0,3333333u_2^3 + 1,3333333u_3^3 + 0,3333333u_4^3 = 0,7433333u_2^2 + 1,3133333u_3^2 - 0,0566667u_4^2$$

$$0,3333333u_2^3 + 1,3333333u_3^3 + 0,3333333u_4^3 = 0,7433333(-0,2855385) + 1,3133333(0,9721539) - 0,0566667(0,3369231)$$

$$0,3333333u_2^3 + 1,3333333u_3^3 + 0,3333333u_4^3 = 1,0454195$$

- Saat i = 4

$$0,3333333u_3^3 + 1,3333333u_4^3 + 0,3333333u_5^3 = 0,7433333u_3^2 + 1,3133333u_4^2 - 0,0566667u_5^2$$

$$0{,}3333333u_3^3 + 1{,}3333333u_4^3 + 0{,}3333333u_5^3 = 0{,}7433333(0{,}9721539) + 1{,}3133333(0{,}3369231) - 0{,}0566667(-0{,}0898462)$$

$$0{,}3333333u_3^3 + 1{,}3333333u_4^3 + 0{,}3333333u_5^3 = 1{,}1702179$$

- Saat i = 5

$$0{,}3333333u_4^3 + 1{,}3333333u_5^3 + 0{,}3333333u_6^3 = 0{,}7433333u_4^2 + 1{,}3133333u_5^2 - 0{,}0566667u_6^2$$

$$0{,}3333333u_4^3 + 1{,}3333333u_5^3 + 0{,}3333333u_6^3 = 0{,}7433333(0{,}3369231) + 1{,}3133333(-0{,}0898462) - 0{,}0566667(0{,}0224615)$$

$$0{,}3333333u_4^3 + 1{,}3333333u_5^3 + 0{,}3333333u_6^3 = 0{,}1311753$$

- Saat i = 6

$$0{,}3333333u_5^3 + 1{,}3333333u_6^3 + 0{,}3333333u_7^3 = 0{,}7433333u_5^2 + 1{,}3133333u_6^2 - 0{,}0566667u_7^2$$

$$0{,}3333333u_5^3 + 1{,}3333333u_6^3 = 0{,}7433333(-0{,}0898462) + 1{,}3133333(0{,}0224615) - 0{,}0566667(0) - 0{,}3333333(0)$$

$$0{,}3333333u_5^3 + 1{,}3333333u_6^3 = -0{,}0372862$$

Diubah menjadi matriks sehingga

$$\begin{bmatrix} 1{,}3333333 & 0{,}3333333 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3333333 & 1{,}3333333 & 0{,}3333333 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3333333 & 1{,}3333333 & 0{,}3333333 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3333333 & 1{,}3333333 & 0{,}3333333 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}3333333 & 1{,}3333333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^3 \\ u_3^3 \\ u_4^3 \\ u_5^3 \\ u_6^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}4300959 \\ 1{,}0454195 \\ 1{,}1702179 \\ 0{,}1311753 \\ -0{,}0372862 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2^3 \\ u_3^3 \\ u_4^3 \\ u_5^3 \\ u_6^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5055471 \\ 0,7319008 \\ 0,7142024 \\ -0,0780564 \\ -0,0084505 \end{bmatrix}$$

c. Saat n = 3

$$0,3333333u_{i-1}^4 + 1,3333333u_i^4 + 0,3333333u_{i+1}^4 = 0,7433333u_{i-1}^3 + 1,3133333u_i^3 - 0,0566667u_{i+1}^3$$

- Saat i = 2

$$0,3333333u_1^4 + 1,3333333u_2^4 + 0,3333333u_3^4 = 0,7433333u_1^3 + 1,3133333u_2^3 - 0,0566667u_3^3$$

$$1,3333333u_2^4 + 0,3333333u_3^4 = 0,7433333(0) + 1,3133333(-0,5055471) - 0,0566667u_3^3 - 0,3333333(0)$$

$$1,3333333u_2^4 + 0,3333333u_3^4 = -0,7054263$$

- Saat i = 3

$$0,3333333u_2^4 + 1,3333333u_3^4 + 0,3333333u_4^4 = 0,7433333u_2^3 + 1,3133333u_3^3 - 0,0566667u_4^3$$

$$0,3333333u_2^4 + 1,3333333u_3^4 + 0,3333333u_4^4 = 0,7433333(-0,5055471) + 1,3133333(0,7319008) - 0,0566667(0,7142024)$$

$$0,3333333u_2^4 + 1,3333333u_3^4 + 0,3333333u_4^4 = 0,5449682$$

- Saat i = 4

$$0,3333333u_3^4 + 1,3333333u_4^4 + 0,3333333u_5^4 = 0,7433333u_3^3 + 1,3133333u_4^3 - 0,0566667u_5^3$$

$$0{,}3333333u_3^4 + 1{,}3333333u_4^4 + 0{,}3333333u_5^4 = 0{,}7433333(0{,}7319008) + 1{,}3133333(0{,}7142024) - 0{,}0566667(-0{,}0780564)$$

$$0{,}3333333u_3^4 + 1{,}3333333u_4^4 + 0{,}3333333u_5^4 = 1{,}4864552$$

- Saat i = 5

$$0{,}3333333u_4^4 + 1{,}3333333u_5^4 + 0{,}3333333u_6^4 = 0{,}7433333u_4^3 + 1{,}3133333u_5^3 - 0{,}0566667u_6^3$$

$$0{,}3333333u_4^4 + 1{,}3333333u_5^4 + 0{,}3333333u_6^4 = 0{,}7433333(0{,}7142024) + 1{,}3133333(-0{,}0780564) - 0{,}0566667(-0{,}0084505)$$

$$0{,}3333333u_4^4 + 1{,}3333333u_5^4 + 0{,}3333333u_6^4 = 0{,}4288552$$

- Saat i = 6

$$0{,}3333333u_5^4 + 1{,}3333333u_6^4 + 0{,}3333333u_7^4 = 0{,}7433333u_5^3 + 1{,}3133333u_6^3 - 0{,}0566667u_7^3$$

$$0{,}3333333u_5^4 + 1{,}3333333u_6^4 = 0{,}7433333(-0{,}0780564) + 1{,}3133333(-0{,}0084505) - 0{,}0566667(0) - 0{,}3333333(0)$$

$$0{,}3333333u_5^4 + 1{,}3333333u_6^4 = -0{,}0691203$$

Diubah menjadi matriks sehingga

$$\begin{bmatrix} 1{,}3333333 & 0{,}3333333 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3333333 & 1{,}3333333 & 0{,}3333333 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3333333 & 1{,}3333333 & 0{,}3333333 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3333333 & 1{,}3333333 & 0{,}3333333 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}3333333 & 1{,}3333333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^4 \\ u_3^4 \\ u_4^4 \\ u_5^4 \\ u_6^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}7054263 \\ 0{,}5449682 \\ 1{,}4864552 \\ 0{,}4288552 \\ -0{,}0691203 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2^4 \\ u_3^4 \\ u_4^4 \\ u_5^4 \\ u_6^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,6055386 \\ 0,3058754 \\ 1,0169416 \\ 0,0857238 \\ -0,0732712 \end{bmatrix}$$

d. Saat n = 4

$$0,3333333u_{i-1}^5 + 1,3333333u_i^5 + 0,3333333u_{i+1}^5 = 0,7433333u_{i-1}^4 + 1,3133333u_i^4 - 0,0566667u_{i+1}^4$$

- Saat i = 2

$$0,333333u_1^5 + 1,3333333u_2^5 + 0,3333333u_3^5 = 0,7433333u_1^4 + 1,3133333u_2^4 - 0,0566667u_3^4$$

$$1,3333333u_2^5 + 0,3333333u_3^5 = 0,7433333(0) + 1,3133333(-0,6055386) - 0,0566667(0,3058754) - 0,333333(0)$$

$$1,3333333u_2^5 + 0,3333333u_3^5 = -0,8126069$$

- Saat i = 3

$$0,333333u_2^5 + 1,3333333u_3^5 + 0,3333333u_4^5 = 0,7433333u_2^4 + 1,3133333u_3^4 - 0,0566667u_4^4$$

$$0,333333u_2^5 + 1,3333333u_3^5 + 0,3333333u_4^5 = 0,7433333(-0,6055386) + 1,3133333(0,3058754) - 0,0566667(1,0169416)$$

$$0,333333u_2^5 + 1,3333333u_3^5 + 0,3333333u_4^5 = -0,1060273$$

- Saat i = 4

$$0,333333u_3^5 + 1,3333333u_4^5 + 0,3333333u_5^5 = 0,7433333u_3^4 + 1,3133333u_4^4 - 0,0566667u_5^4$$

$$0{,}333333u_3^5 + 1{,}3333333u_4^5 + 0{,}3333333u_5^5 = 0{,}7433333(0{,}3058754)$$
$$+ 1{,}3133333(1{,}0169416)$$
$$- 0{,}0566667(0{,}0857238)$$

$$0{,}333333u_3^5 + 1{,}3333333u_4^5 + 0{,}3333333u_5^5 = 1{,}5580931$$

- Saat i = 5

$$0{,}333333u_4^5 + 1{,}3333333u_5^5 + 0{,}3333333u_6^5 = 0{,}7433333u_4^4 + 1{,}3133333u_5^4$$
$$- 0{,}0566667u_6^4$$

$$0{,}333333u_4^5 + 1{,}3333333u_5^5 + 0{,}3333333u_6^5 = 0{,}7433333(1{,}0169416)$$
$$+ 1{,}3133333(0{,}0857238)$$
$$- 0{,}0566667(-0{,}0732712)$$

$$0{,}333333u_4^5 + 1{,}3333333u_5^5 + 0{,}3333333u_6^5 = 0{,}8726625$$

- Saat i = 6

$$0{,}333333u_5^5 + 1{,}3333333u_6^5 + 0{,}3333333u_7^5 = 0{,}7433333u_5^4 + 1{,}3133333u_6^4$$
$$- 0{,}0566667u_7^4$$

$$0{,}333333u_5^5 + 1{,}3333333u_6^5 = 0{,}7433333(0{,}0857238) + 1{,}3133333(-0{,}0732712)$$
$$- 0{,}0566667(0) - 0{,}3333333(0)$$

$$0{,}333333u_5^5 + 1{,}3333333u_6^5 = -0{,}0325081$$

Diubah menjadi matriks sehingga

$$\begin{bmatrix} 1{,}3333333 & 0{,}3333333 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}3333333 & 1{,}3333333 & 0{,}3333333 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3333333 & 1{,}3333333 & 0{,}3333333 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3333333 & 1{,}3333333 & 0{,}3333333 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}3333333 & 1{,}3333333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^5 \\ u_3^5 \\ u_4^5 \\ u_5^5 \\ u_6^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}8126069 \\ -0{,}1060273 \\ 1{,}5580931 \\ 0{,}8726625 \\ -0{,}0325081 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2^5 \\ u_3^5 \\ u_4^5 \\ u_5^5 \\ u_6^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5540349 \\ -0,2216811 \\ 1,1226773 \\ 0,4052510 \\ -0,1256938 \end{bmatrix}$$

3.2 Analisis Galat

Analisis galat akan dilakukan secara manual dan dengan bantuan program *Python*. Analisis galat secara manual dilakukan saat nilai $\Delta x = 0,5$ dan $\Delta t = 0,25$. Sedangkan saat nilai Δx dan Δt yang dipilih sebagai berikut akan dilakukan dengan bantaun program,

a. $\Delta x = 0,5$ dan $\Delta t = 0,025$
b. $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,25$
c. $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,025$
d. $\Delta x = 0,005$ dan $\Delta t = 0,025$

Penggunaan berbagai macam nilai Δx dan Δt dilakukan untuk mengetahui hasil solusi numerik yang tepat.

3.2.1 Analisis Galat Saat $\Delta x = 0,5$ dan $\Delta t = 0,25$

Berikut tabel dari solusi numerik berdasarkan perhitungan sebelumnya dan solusi analitik dari persamaan difusi konveksi 1D saat $\Delta x = 0,5$ dan $\Delta t = 0,25$

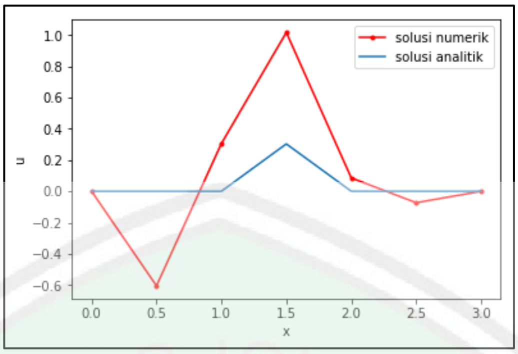
Tabel 3.1 Solusi Numerik Persamaan Difusi Konveksi 1D dengan Metode Elemen Hingga

x, t	t				
	$n = 1$ $t = 0$	$n = 2$ $t = 0{,}25$	$n = 3$ $t = 0{,}5$	$n = 4$ $t = 0{,}75$	$n = 5$ $t = 1$
$i = 1,$ $x = 0$	0	0	0	0	0
$i = 2,$ $x = 0{,}5$	0	$-0{,}2855385$	$-0{,}5055471$	$-0{,}6055386$	$-0{,}5540349$
$i = 3,$ $x = 1$	1	0,9721539	0,7319008	0,3058754	$-0{,}2216811$
$i = 4,$ $x = 1{,}5$	0	0,3369231	0,7142024	1,0169416	1,1226773
$i = 5,$ $x = 2$	0	$-0{,}0898462$	$-0{,}0780564$	0,0857238	0,4052510
$i = 6,$ $x = 2{,}5$	0	0,0224615	$-0{,}0084505$	$-0{,}0732712$	$-0{,}1256938$
$i = 7,$ $x = 3$	0	0	0	0	0

Tabel 3.2 Solusi Analitik Persamaan Difusi Konveksi 1D

x, t	t				
	$n = 1$ $t = 0$	$n = 2$ $t = 0{,}25$	$n = 3$ $t = 0{,}5$	$n = 4$ $t = 0{,}75$	$n = 5$ $t = 1$
$i = 1,$ $x = 0$	0	0	0	0	0
$i = 2,$ $x = 0{,}5$	0	0	0	0	0
$i = 3,$ $x = 1$	1	0,0129511	0,0000135	0	0
$i = 4,$ $x = 1{,}5$	0	0,0000873	0,2964215	0,3032653	0,0122195
$i = 5,$ $x = 2$	0	0	0	0,0001677	0,0902909
$i = 6,$ $x = 2{,}5$	0	0	0	0	0
$i = 7,$ $x = 3$	0	0	0	0	0

Berikut gambar dari solusi numerik dan solusi analitik saat berada di $t = 0,5$



Gambar 3.3 Solusi Numerik dan Solusi Analitik Persamaan Difusi Konveksi 1D Saat $t = 0,5$ dengan $\Delta x = 0,5$ dan $\Delta t = 0,25$

Gambar (3.3) terlihat solusi analitik dan solusi numerik memiliki perbedaan yang sangat jauh. Akan tetapi, antara solusi analitik dan solusi numerik mengalami perubahan pergerakan yang sama yaitu dari $x = 1$ menuju $x = 1,5$ mengalami peningkatan dan mengalami penurunan saat menuju $x = 2$.

Berdasarkan solusi numerik persamaan (3.1) pada Tabel 3.1 dan solusi analitik persamaan (3.1) pada Tabel 3.2 diperoleh nilai *error* dengan ketentuan pada persamaan (2.19) adalah sebagai berikut;

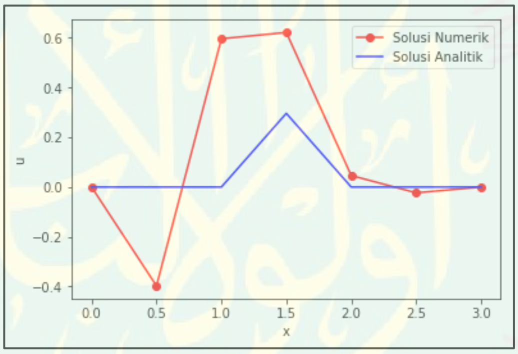
Tabel 3.3 Nilai *Error* atau Selisih Mutlak dari Solusi Numerik dan Solusi Analitik

x , t	t				
	$n = 1$ $t = 0$	$n = 2$ $t = 0,25$	$n = 3$ $t = 0,5$	$n = 4$ $t = 0,75$	$n = 5$ $t = 1$
$i = 1,$ $x = 0$	0	0	0	0	0
$i = 2,$ $x = 0,5$	0	0,2855385	0,5055471	0,6055386	0,5540349
$i = 3,$ $x = 1$	0	0,9592027	0,7318873	0,3058754	0,2216811
$i = 4,$ $x = 1,5$	0	0,3368358	0,4177809	0,7136763	1,1104578
$i = 5,$ $x = 2$	0	0,0898462	0,0780564	0,0855560	0,3149602
$i = 6,$ $x = 2,5$	0	0,0224615	0,0084505	0,0732712	0,1256938
$i = 7,$ $x = 3$	0	0	0	0	0

Nilai *error* pada Tabel 3.3 saat $t \in [0,1]$ relatif besar. Terlihat jelas pada saat $x = 1{,}5$ yang memiliki nilai *error* $1{,}1104578$ dimana saat $t = 1$. Oleh karena itu, dapat dipastikan dengan seiring bertambahnya waktu maka nilai *error* semakin besar. Hal ini merupakan akibat dari penggunaan metode beda maju untuk diskritisasi waktu.

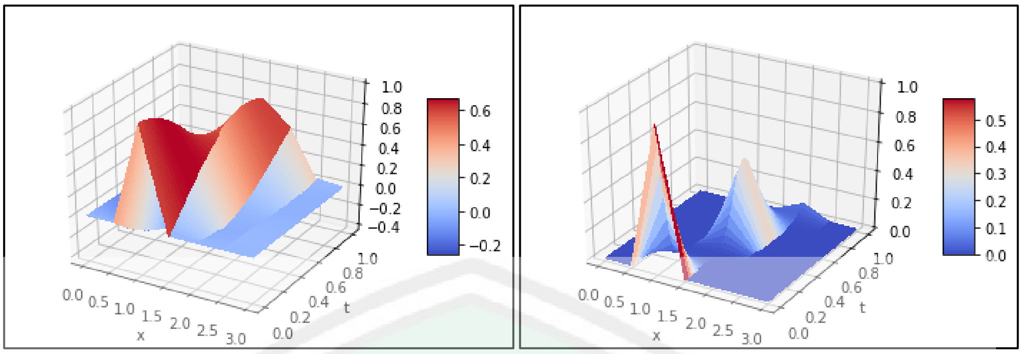
3.2.2 Analisis Galat Saat $\Delta x = 0{,}5$ dan $\Delta t = 0{,}025$

Analisis galat selanjutnya dilakukan dengan bantuan *Python*, dengan nilai $\Delta x = 0{,}5$ dan $\Delta t = 0{,}025$. Sebelum dilakukan analisis galat, berikut gambar solusi numerik dan solusi analitik saat $t = 0{,}5$



Gambar 3.4 Solusi Numerik dan Solusi Analitik Persamaan Difusi Konveksi 1D saat $t = 0{,}5$ dengan $\Delta x = 0{,}5$ dan $\Delta t = 0{,}025$

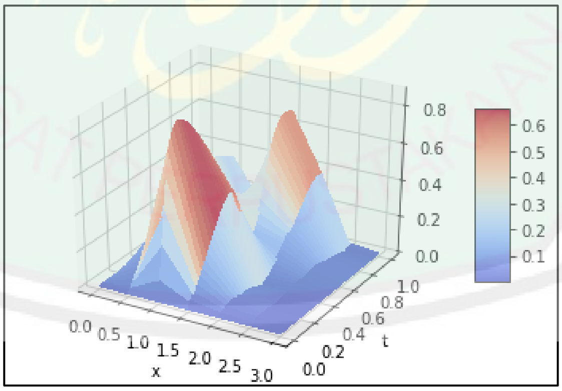
Gambar (3.4) terlihat bahwa solusi analitik dan solusi numerik memiliki perbedaan yang sangat jauh. Akan tetapi memiliki perubahan pergerakan yang sama meskipun perubahan yang terjadi saat dari $x = 1$ menuju $x = 1{,}5$ tidak mengalami peningkatan cukup besar. Untuk lebih memperjelas proses yang terjadi saat $t = 0$ sampai $t = 1$, perhatikan gambar berikut;



Gambar 3.5 Solusi Numerik dan Solusi Analitik Persamaan Difusi Konveksi 1D dengan $\Delta x = 0{,}5$ dan $\Delta t = 0{,}025$

Gambar (3.5) mengilustrasikan solusi numerik (kiri) dan solusi analitik (kanan) pada seluruh domain ruang saat $0 \leq x \leq 3$ dan domain waktu $0 \leq t \leq 1$. Terlihat jelas bahwa solusi numerik dan solusi analatik memiliki perbedaan yang sangat jauh.

Untuk lebih memperjelas perbedaan dari solusi numerik dan solusi analitik maka dilakukan analisis galat saat $\Delta x = 0{,}5$ dan $\Delta t = 0{,}025$ dengan bantuan program *Python* sebagai berikut,

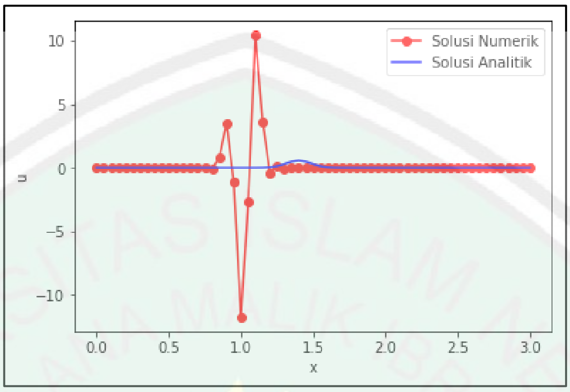


Gambar 3.6 Perubahan Galat Persamaan Difusi Konveksi 1D dengan $\Delta x = 0{,}5$ dan $\Delta t = 0{,}025$

Galat yang dihasilkan lebih kecil dibandingkan saat $\Delta x = 0{,}5$ dan $\Delta t = 0{,}25$. Hal ini dikarenakan digunakan nilai Δt yang lebih kecil dari sebelumnya. Meskipun nilai galat bukanlah nilai yang sangat kecil akan tetapi tidak ada $e > 1$.

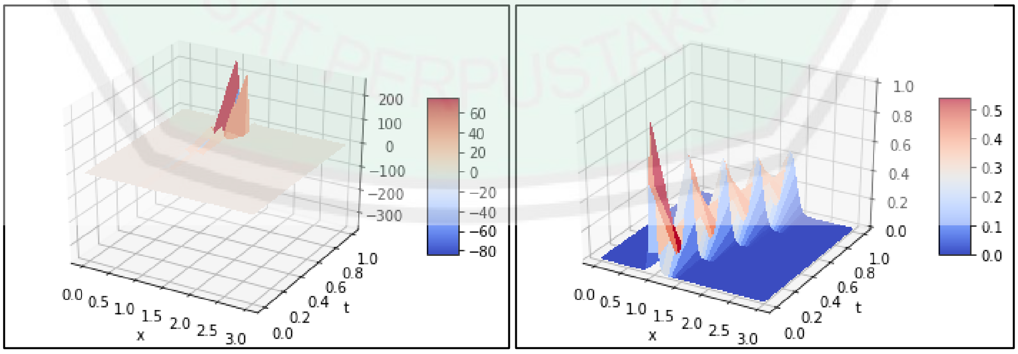
3.2.3 Analaisis Galat Saat $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}25$

Analisis galat selanjutnya dilakukan dengan memilih nilai $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}25$. Berikut gambar solusi numerik dan solusi analitik saat $t = 0{,}5$



Gambar 3.7 Solusi Numerik dan Solusi Analitik Persamaan Difusi Konveksi 1D saat $t = 0{,}5$ dengan $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}25$

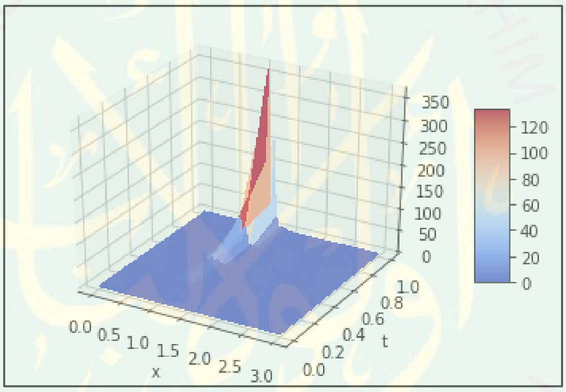
Gambar (3.7) terlihat solusi numerik identik dengan solusi analitik saat menuju $x = 1$ dan mengalami perbedaan yang sangat besar setelahnya. Kemudian kedua solusi sangat identik mulai dari x menuju ke 1,5 sampai $x = 3$. Untuk lebih memperjelas proses yang terjadi saat $t = 0$ sampai $t = 1$, perhatikan gambar berikut;



Gambar 3.8 Solusi Numerik dan Solusi Analitik Persamaan Difusi Konveksi 1D dengan $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}25$

Gambar (3.8) mengilustrasikan solusi numerik (kiri) dan solusi analitik (kanan) pada seluruh domain ruang saat $0 \leq x \leq 3$ dan domain waktu $0 \leq t \leq 1$. Terlihat jelas bahwa solusi numerik dan solusi analatik memiliki perbedaan yang sangat jauh. Perbandingan antara solusi numerik dan solusi analitik sangat jauh dibandingkan dengan simulasi sebelumnya. Hal ini dimungkinkan dikarenakan nilai dari $\Delta t > \Delta x$.

Untuk lebih memperjelas perbedaan dari solusi numerik dan solusi analitik maka dilakukan analisis galat saat $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}25$ dengan bantuan program *Python* sebagai berikut,

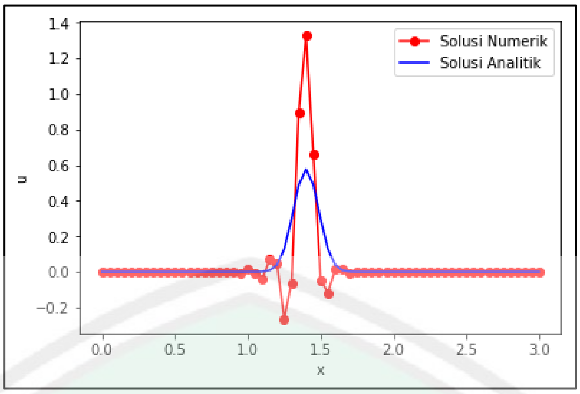


Gambar 3.9 Perubahan Galat Persamaan Difusi Konveksi 1D dengan $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}25$

Galat yang dihasilkan sangat besar dan terus meningkat seiring bertambahnya waktu hingga mencapai $e = 350$. Hal ini dapat dipastikan karena penggunaan nilai Δt yang lebih besar dari nilai Δx.

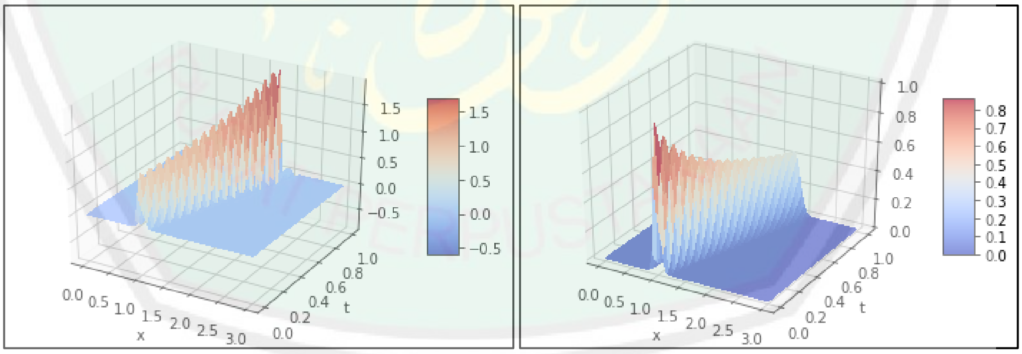
3.3.4 Analisis Galat Saat $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}025$

Analisis galat selanjutnya dilakukan dengan memilih nilai $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}025$. Berikut gambar solusi numerik dan solusi analitik saat $t = 0{,}5$



Gambar 3.10 Solusi Numerik dan Solusi Analitik Persamaan Difusi Konveksi 1D saat $t = 0{,}5$ dengan $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}025$

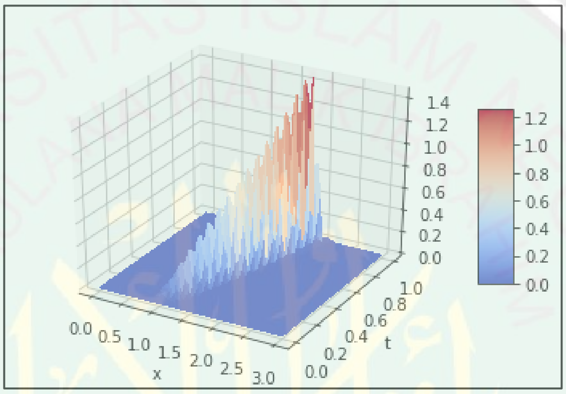
Gambar (3.10) menggambarkan solusi numerik dan solusi analitik saat $t = 0{,}5$. Sama halnya dengan simulasi ketiga yang memiliki keidentikan antara solusi numerik dan solusi analitik hanya pada titik-titik di sekitar batas awal dan batas akhir, dan perubahan melonjak drastis saat berada di titik puncak. Untuk lebih memperjelas proses yang terjadi saat $t = 0$ sampai $t = 1$, perhatikan gambar berikut;



Gambar 3.11 Solusi Numerik dan Solusi Analitik Persamaan Difusi Konveksi 1D dengan $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}025$

Gambar (3.11) mengilustrasikan solusi numerik (kiri) dan solusi analitik (kanan) pada seluruh domain ruang $0 \leq x \leq 3$ dan domain waktu $0 \leq t \leq 1$. Perubahan suhu yang terjadi dari waktu ke waktu terlihat lebih teratur dibandingkan dengan ketiga simulasi sebelumnya. Akan tetapi, perubahan suhu yang terjadi untuk solusi numerik mengalami peningkatan seiring bertambahnya waktu, sedangkan untuk solusi analitik terjadi perubahan suhu yang terus menurun seiring bertambahnya waktu.

Untuk lebih memperjelas perbedaan dari solusi numerik dan solusi analitik maka dilakukan analisis galat saat $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}025$ dengan bantuan program *Python* sebagai berikut,



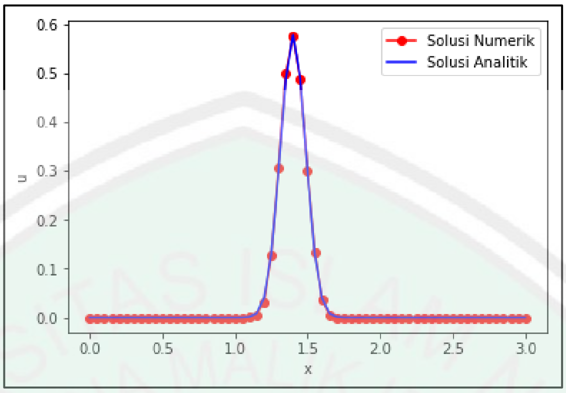
Gambar 3.12 Perubahan Galat Persamaan Difusi Konveksi 1D dengan $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}025$

Galat yang dihasilkan meningkat secara terus menerus seiring bertambahnya waktu dengan peningkatan yang stabil. Hal ini dapat dipastikan karena proses diskritisasi waktu yang menggunakan metode beda maju, sehingga seiring bertambahnya waktu nilai galat yang dihasilkan pun semakin besar. Akan tetapi nilai galat yang dihasilkan tidaklah sebesar nilai galat dari simulasi sebelumnya yaitu mencapai $e = 1{,}4$ dikarenakan nilai Δx dan Δt lebih kecil dibandingkan simulasi sebelumnya.

3.3.5 Analisis Galat Saat $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}00125$

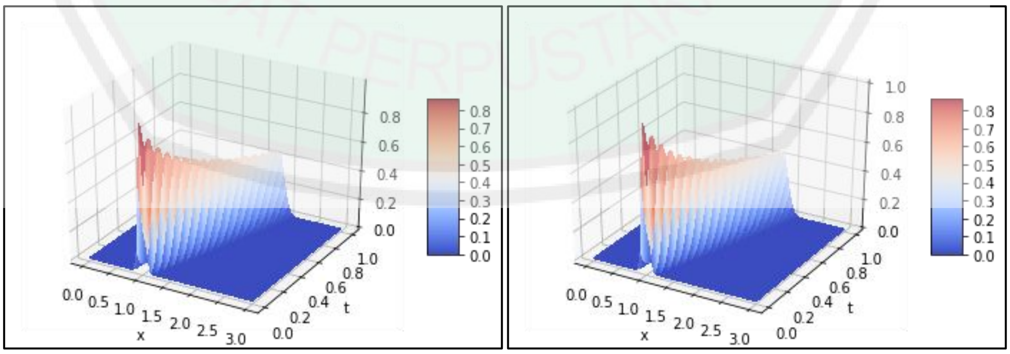
Analisis galat selanjutnya dilakukan dengan memilih nilai $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}00125$. Pemilihan nilai Δx dan Δt dilakukan dengan ketentuan $\Delta t =$

$\frac{1}{2}\Delta x^2$ (Strang, 2006). Berikut gambar solusi numerik dan solusi analitik saat $t = 0{,}5$



Gambar 3.13 Solusi Numerik dan Solusi Analitik Persamaan Difusi Konveksi 1D saat $t = 0{,}5$ dengan $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}00125$

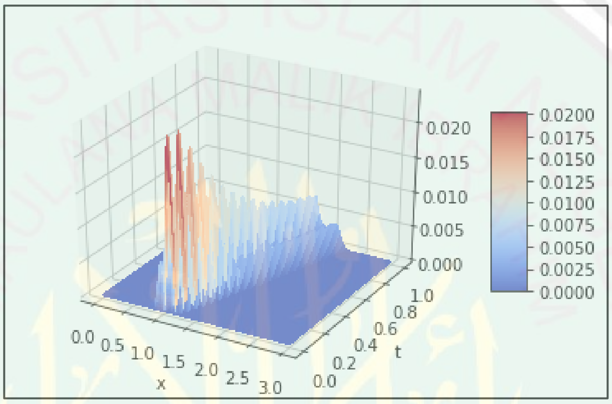
Gambar (3.13) menggambarkan solusi numerik dan solusi analitik saat $t = 0{,}5$. Dengan nilai $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}00125$ diperoleh solusi numerik yang sangat identik dibandingkan keempat simulasi sebelumnya. Hal ini dikarenakan pemilihan nilai Δx dan Δt yang sangat kecil. Untuk lebih memperjelas proses yang terjadi saat $t = 0$ sampai $t = 1$, perhatikan gambar berikut;



Gambar 3.14 Solusi Numerik Persamaan Difusi Konveksi 1D dengan $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}00125$

Gambar (3.14) mengilustrasikan solusi numerik pada seluruh domain ruang saat $0 \leq x \leq 3$ dan domain waktu $0 \leq t \leq 1$. Perubahan suhu yang terjadi memiliki pola pergerakan yang sama antara solusi numerik dan solusi analitik.

Untuk lebih memperjelas perbedaan dari solusi numerik dan solusi analitik maka dilakukan analisis galat saat $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}00125$ dengan bantuan program *Python* sebagai berikut,



Gambar 3.15 Perubahan Galat Persamaan Difusi Konveksi 1D dengan $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}00125$

Galat yang dihasilkan lebih kecil dibandingkan galat dari keempat simulasi sebelumnya. Hal ini berarti bahwa solusi numerik yang diperoleh dengan nilai $\Delta x = 0{,}05$ dan $\Delta t = 0{,}00125$ akurat atau dengan kata lain solusi numerik yang diperoleh mendekati solusi analitik.

3.3 Kajian Islam Tentang Penyelesaian Numerik

Penyelesaian persamaan difusi konveksi 1D dengan metode Galerkin – beda hingga adalah penyelesaian secara numerik, sehingga dapat dipastikan solusi yang diperoleh memiliki galat atau *error*. Apabila solusi numerik memiliki nilai yang hampir mendekati solusi analitik maka galat yang dihasilkan sedikit dan solusi numerik dapat dikatakan akurat. Sehingga, untuk memperoleh nilai galat yang sedikit diharuskan solusi numerik dan solusi analatik harus seimbang nilainya atau dengan kata lain memilki perbedaan nilai yang sedikit.

Allah berfirman tentang keseimbangan dalam surat Ar-Rahman 7:9

" Dan Allah telah meninggikan langit dan Dia meletakkan neraca (keadilan). Supaya kamu jangan melampaui batas tentang neraca itu. Dan Tegakkanlah timbangan itu dengan adil dan janganlah kamu mengurangi neraca itu."

Menurut tafsir Al-Maraghiy, makna dari ayat ke-7 adalah Allah menjadikan alam tinggi, alam langit yang tergantung di angkasa, tempat malaikat yang menurunkan wahyu kepada nabi-nabi Nya. Dan Allah menjadikan aturan-aturan di alam bumi in berjalan pada jalan keadilan. Yakni, adil dalam soal keyakinan, sepertoi tauhid. Dan juga adil dalam soal ibadah, keutamaan dan adab kesopanan. Dan adil pula di antara kekuatan-kekuatan rohani dan jasmani. Maksudnya bahwa Allah menyuruh hamba-hamba Nya supaya mensucikan jiwa mereka namun membolehkan untuk mereka sekian banyak makanan yang baik untuk memelihara tubuh mereka. Dan Allah melarang keterlaluan dalam melakukan agama dan berlebih-lebihan dalam mencintai dunia.

Selanjutnya tafsir dari ayat ke-8 melanjutkan ayat sebelumnya yang menjelaskan tentang keseimbangan. Allah melakukan yang sedemikian rupa supaya kalian jangan keterlaluan dalam melampaui keadilan, serta bersikap pertengahan yang sepatutnya dilakukan dan agar segala urusan berjalan sesuai dengan sunnah-sunnah keseimbangan pada segala perkara yang telah Allah letakkan untukmu. Dengan demikian, maka akan meningkatlah derajat dan teraturlah pekerjaan-pekerjaanmu maupun hubungan-hubunganmu.

Allah telah mempertegas lagi hal lain dengan firman-Nya pada ayat ke-9 bahwa Allah memperhatikan segala perbuatan dan perkataan manusia. Adapun perulangan di sini mengandung arti bahwa Allah mewasiatkan keadilan dan menekankan agar keadilan itu dipakai dan dianjurkan. Pertama, Allah telah menyuruh agar melakukan keseimbangan. Kemudian melarang untuk melampaui batas. Selanjutnya Dia melarang mengurangi timbangan dan berbuat curang. Qatadah berkata mengenai ayat ini yaitu berlaku adillah hai anak Adam, sebagaimana kamu ingin diperlakukan dengan adil, dan tunaikanlah dengan sempurna sebagaimana kamu ingin ditunaikan dengan sempurna karena dengan keadilan manusia menjadi beres.

Berdasarkan ayat di atas, adapun hadis Rasulullah riwayat ibnu Asakir tentang keseimbangan yang harus kita lakukan sebagai manusia yaitu keseimbangan dalam urusan dunia dan akhirat. Dari Anas ra bahwasannya Rasulullah SAW telah bersabda, “Bukanlah yang terbaik di antara kamu orang yang meninggalkan urusan dunianya karena (mengejar) urusan akhiratnya, dan bukan pula (orang yang terbaik) orang yang meninggalkan akhiratnya karena mengejar urusan dunianya, sehingga ia memperoleh kedua-duanya, karena dunia itu adalah (perantara) yang menyampaikan ke akhirat, dan janganlah kamu menjadi bebean orang lain.”

Hadis di atas menjelaskan tentang kehidupan manusia yang seharusnya, yaitu kehidupan yang berimbang. Kehidupan dunia harus diperhatikan disamping kehidupan akhirat. Islam tidak memandang baik terhadap orang yang hanya mengutamakan urusan dunia saja, tapi urusan akhirat dilupakan. Sebaliknya Islam juga tidak mengajarkan umat manusia untuk konsentrasi hanya pada urusan akhirat saja sehingga melupakan kehidupan dunia.

Begitu pula dalam penyelesaian numerik, hasil dari solusi numerik dan solusi analitik harus seimbang supaya nilai galat yang diperoleh tidak terlalu jauh.

Karena jika solusi numerik dan solusi analitik memiliki perbedaan yang sangat jauh maka nilai galat yang diperoleh akan bernilai besar. Sedangkan jika solusi analitik dan solusi numerik memiliki perbedaan yang sangat sedikit atau dapat dikatakan seimbang, maka nilai galat yang diperoleh juga sangat kecil. Hal ini dimaksudkan supaya solusi numerik yang diperoleh mendekati solusi analitik. Dikarenakan nilai galat diperoleh dari hasil selisih antara solusi numerik dan solusi analitik.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut

1. Solusi numerik yang diperoleh dari persamaan difusi konveksi 1D dengan menggunakan metode Galerkin-beda hingga dapat dilakukan dengan mendiskritkan domain menggunakan elemen garis, kemudian mencari solusi aproksimasi dengan interpolasi dari setiap elemen, lalu meminimumkan residu dengan menggunakan metode residu berbobot dan pemilihan bobot digunakan metode Galerkin, kemudian diskritisasi fungsi turunan terhadap waktu dengan metode beda hingga, selanjutnya melakukan penggabungan elemen sehingga terbentuk sistem persamaan linier dan menyelesaikan sistem persamaan tersebut dengan bantuan matriks.
2. Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa semakin kecil nilai Δx dan Δt yang dipilih mengakibatkan nilai *error* yang dihasilkan semakin kecil dengan ketentuan nilai dari $\Delta t < \Delta x$ atau seperti dalam (Strang, 2006) $\Delta t = \frac{1}{2}\Delta x^2$.

4.2 Saran

Penerapan metode Galerkin yang termasuk dalam metode elemen hingga dalam menyelesaikan persamaan difusi konveksi 1D yang termasuk masalah *unsteady* diperlukan metode lain dalam mendiskritkan waktu, seperti metode beda hingga. Dalam penelitian ini dilakukan metode beda maju yang mengakibatkan solusi yang diperoleh kurang akurat untuk nilai Δt kecil. Oleh karena itu penulis menyarankan agar penelitian selanjutnya digunakan metode beda hingga yang lebih akurat seperti metode *Crank-Nicolson*.

DAFTAR RUJUKAN

Al-Maraghiy, Syaikh Ahmad Musthafa. 1974. *Tafsir Al-Maraghiy Juz 27*. Terjemahan Hery Noor Aly, dkk. Semarang: CV. Tohaputra Semarang.

Ames, William F. 1977. *Numerical Methods for Partial Differential Equations.* Florida: Academic Press, Inc.

Bajellan, Asan Ali A. F. 2015. *Computation of The Convection-Diffusion Equation by The Fourth Order Compact Finitr Difference Method.* Turki: Izmir.

Chapra. Steven C dan Canale, Raymond P. 2010. *Numerical Methods for Engineers Sixth Edition*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Heubner, Kenneth H, dkk. 1982. *The Finite Element Method for Engineers Fourth Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Hoffman, Joe D. 2001. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. New York: Marcel Dekker, Inc.

Huda, C dkk. 2014. Simulasi Konveksi-Difusi dalam Media Berpori. *Bionatura-Jurnal Ilmu-Ilmu Hayati dan Fisik*, 16(2): 68-71.

Kettle, Louise Olse. _______. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Queensland: University of Queensland.

Kosasih, Prabuono Buyung. 2012. *Teori dan Aplikasi Metode Elemen Hingga*. Yogyakarta: Andi Yogyakarta.

Mohammadi, Abolfazl dkk. 2017. Numerical Solution of One-Dimensional Advection-Convection Equation Using Simultaneously Temporal and Spatial Weighted Parameters. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 5(6): 1536-1543.

Munir, Rinaldi. 2003. *Metode Numerik Revisi Ketiga*. Bandung: Informatika.

Pepper, Darrel W dan Heinrich, Juan C. 2006. *The Finite Element Method Basic Concepts and Applications Second Edition*. New York: CRC Press.

Purcell, Edwin J dan Varberg, Dale. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis, Jilid 1*. Terjemahan Nyoman Susila, dkk. Jakarta: Erlangga.

Zauderer, Erich. 2006. *Partial Differenttial Equations of Applied Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran 1. Program Simulasi Persamaan Difusi Konveksi 1D dengan Metode Galerkin-Beda Hingga dengan bantun Python

```
from numpy import *
from numpy.linalg import *
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import numpy as np

# set_printoptions(precision=4)
set_printoptions(suppress=True)

v = 0.8
D = 0.005

dx = 0.5
xa = 0
xb = 3
M  = int( (xb-xa)/dx )

dt = 0.25
ta = 0
tb = 1
N = int( (tb-ta)/dt )

a = dx/(6*dt)
b = dx/(3*dt)
c = dx/(6*dt) + v/2 + D/dx
d = dx/(3*dt) + v/2 - D/dx
e = dx/(3*dt) - v/2 - D/dx
f = dx/(6*dt) - v/2 + D/dx

x = linspace(xa,xb,M+1)
t = linspace(ta,tb,N+1)
U = zeros((M+1,N+1))
u = zeros((M+1,N+1))

#solusi analitik
for n in range(N+1):
    for i in range(M+1):
       U[i,n]   =   (   1/sqrt(4*t[n]+1)   )*exp(   -(x[i]-1-
v*t[n])**2/(D*(4*t[n]+1)) )

#kondisi batas dan kondisi nilai awal
u[:,0]  = U[:,0]
u[0,:]  = U[0,:]
u[-1,:] = U[-1,:]

A = zeros((M-1,M-1))
B = zeros((M-1,1))
```

```
for n in range(N):

    i = 0
    A[i,i]   = 2*b
    A[i,i+1] = a

    B[i,0]     = c*u[i,n] + (d+e)*u[i+1,n] + f*u[i+2,n] - a*u[i,n+1]

    for i in range(1,M-2):
        A[i,i-1] = a
        A[i,i]   = 2*b
        A[i,i+1] = a

        B[i,0]   = c*u[i,n] + (d+e)*u[i+1,n] + f*u[i+2,n]

    i = M-2
    A[i,i-1] = a
    A[i,i]   = 2*b

    B[i,0]     = c*u[i,n] + (d+e)*u[i+1,n] + f*u[i+2,n] - a*u[i+2,n+1]

    X = solve(A,B)

    u[1:-1,n+1] = X[:,0]

#plot solusi analitik dan solusi numerik saat t=0,5
plt.plot(x,u[:,2],'o-r',x,U[:,2],'-b')
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("u")
plt.legend(["Solusi Numerik","Solusi Analitik"])
plt.show()

#plot solusi numerik saat t = 0 sampai t = 1
T, X = meshgrid(t,x)
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111,projection='3d')
surf = ax.plot_surface(X, T, u[:,:600], rstride=1, cstride=1, cmap=cm.coolwarm, linewidth=0, antialiased=False)
fig.colorbar(surf, shrink=0.5, aspect=5)
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("t")
plt.show()

#plot nilai galat
E = abs(U-u)
T, X = meshgrid(t,x)
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111,projection='3d')
surf = ax.plot_surface(X, T, E[:,:600], rstride=1, cstride=1, cmap=cm.coolwarm, linewidth=0, antialiased=False)
fig.colorbar(surf, shrink=0.5, aspect=5)
```

```
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("t")
plt.show()
```

RIWAYAT HIDUP

Lailatul Azizah Yan Fadilah lahir di Malang pada tanggal 4 Juni 1997. Anak pertama dari tiga bersaudara, pasangan Bpk. Tejo Irianto dan Ibu Siti Romlah. Memiliki dua orang adik bernama Muhammad Rifqi Gigih Yan Fauzan dan Muhammad Asroful Habib Yan Fajri.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Miftahul Huda Sukorejo Gondanglegi Kab. Malang dan lulus pada tahun 2009. Setelah itu dia melanjutkan pendidikan menengah pertama di MTsN 3 Malang di Kab. Malang yang ditamatkan pada tahun 2011. Pada tahun yang sama dia melanjutkan pendidikan menengah atas di SMAN 1 Kepanjen dan lulus pada tahun 2013. Selanjutnya, pada tahun 2013 dia menempuh pendidikan berikutnya di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lailatul Azizah Yan Fadilah
NIM : 13610052
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Numerik Persamaan Difusi Konveksi 1D Menggunakan Metode Galerkin - Beda Hingga
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si
Pembimbing II : Dr. Usman Pagalay, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1.	4 April 2018	Konsultasi Bab I Dan Bab II	1.	
2.	4 April 2018	Konsultasi Agama Bab I dan Bab II		2.
3.	8 April 2018	Revisi Keagamaan Bab I dan Bab II	3.	
4.	11 April 2018	Revisi Bab I dan Bab II		4.
5.	11 April 2018	Konsultasi Agama Bab III	5.	
6.	18 April 2018	Revisi Bab I dan Bab II		6.
7.	15 Mei 2018	Konsultasi Bab III	7.	
8.	2 November 2018	Revisi Agama Bab III		8.
9.	3 November 2018	Revisi Bab III dan Konsultasi Bab IV	9.	
10.	8 Januari 2019	Revisi Agama Bab I, Bab II dan Bab III		10.
11.	15 Januari 2019	Revisi Bab III dan Bab IV	11.	
12.	4 Februari 2019	ACC Keseluruhan		12.
13.	4 Februari 2019	ACC Keagamaan Keagamaan	13.	

Malang, 4 Februari 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001