POLINOMIAL MONIK ATAS GELANGGANG HIMPUNAN BILANGAN BULAT MODULO *N*

SKRIPSI

OLEH
Muhammad Safin Ali
NIM. 12610085

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

POLINOMIAL MONIK ATAS GELANGGANG HIMPUNAN BILANGAN BULAT MODULO *N*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Muhammad Safin Ali
NIM. 12610069

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERIMAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

POLINOMIAL MONIK ATAS GELANGGANG HIMPUNAN BILANGAN BULAT MODULO *N*

SKRIPSI

Oleh
Muhammad Safin Ali
NIM. 12610085

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 20 Desember 2018

Pembimbing I,

Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 19720604 199903 2 001

Pembimbing II,

Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd
NIP. 19630502 198703 1 005

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

POLINOMIAL MONIK ATAS GELANGGANG HIMPUNAN BILANGAN BULAT MODULO *N*

SKRIPSI

Oleh
Muhammad Safin Ali
NIM. 12610085

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 10 Januari 2019

Penguji Utama	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Ketua Penguji	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Evawati Alisah, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Muhammad Safin Ali
NIM	: 12610085
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Polinomial Monik Atas Gelanggang Himpunan Bilangan Bulat Modulo *n*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 Desember 2018
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
969ADAFF170248833
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Muhammad Safin Ali
NIM. 12610085

MOTO

Hidup adalah Perjuangan dan Keikhlasan Pengabdian Menuju Kebahagiaan yang hakiki.

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kepada Alm Ayahanda M. Saeri dan Ibunda tercinta Chotidjah yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi dukungan, motivasi, selalu memberi semangat yang tiada henti hingga selesainya skripsi ini, tak lupa restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu serta selalu memberikan teladan yang baik bagi penulis.

Untuk kakak tersayang Siti Khoiriyah dan Moch. Ilyas serta adik tercinta Wardatin Nafisah yang selalu memberikan doa dan dukungan kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur ke hadirat Allah Swt yang telah memberikan rahmat, taufik, hidayah, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul *"Polinomial Monik Atas Gelanggang Himpunan Bilangan Bulat Modulo n"*. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada nabi Muhammad Saw yang telah membimbing ummatnya dari jalan kegelapan menuju jalan yang terang benderang yakni agama Islam.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Selama proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat saran, bimbingan, arahan, doa, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M. Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan motivasi kepada penulis.

5. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagai ilmunya kepada penulis.
6. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terimakasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah dan Ibu tercinta yang telah mencurahkan kasih sayang, doa, bimbingan dan motivasi hingga selesainya skripsi ini.
8. Saudara-saudara tersayang yang telah memberikan semangat kepada penulis.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2012 yang berjuang bersama-sama.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah Swt dan dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Januari 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Ali, Muhammad Safin. 2019. **Polinomial Monik Atas Gelanggang Himpunan Bilangan Bulat Modulo n.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Kata kunci: Polinomial, Gelanggang, dan Monik Polinomial.

Matematika merupakan bidang ilmu pengetahuan yang mengalami perkembangan seiring kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi. Salah satu cabang dari matematika yaitu aljabar. Penelitian ini sendiri hanya terbatas pada polinomial dan gelanggang. Suatu polinomial $f(x) \in R[x]$ dengan elemen suku tertingginya identitas dari R atau dengan kata lain jika peubah x dengan pangkat tertingginya adalah 1 maka polinomial ini dinamakan polinomial monik. Polinomial berderajat n, didefinisikan sebagai suatu fungsi berbentuk:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}$$

Tujuan penelitian ini adalah cara menentukan monik polinomial atas gelanggang himpunan bilangan bulat modulo n. Pertama, menentukan derajat $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0$. Kedua, menentukan modulo dari modulo 3 sampai modulo k. Langkah terakhir adalah polinomial monik dikombinasikan dengan cara kelas modulo dimasukkan pada polinomial $f(x)$, hasil kombinasi tersebut kemudian dikalikan sehingga banyak monik polinomial atas gelanggang himpunan bilangan bulat modulo k adalah k^n, $\forall\, k \geq 3$ dan $k \in \mathbb{Z}$.

Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan pada *multivarriate polynomial* yaitu polinomial dengan banyak variabel dan n derajat. Cara menyelesaikannya dengan menggunakan program komputer sehingga cepat, tepat dan akurat.

ABSTRACT

Ali, Muhammad Safin. 2019. **Monic Polynomial Ring on the Set of Integers Modulo *n*.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Evawati Alisah, M.Pd, (II) Dr. H. Imam Sudjarwo, M.Pd.

keywords: Polynomials, Rings, dan Monic Polynomials.

Mathematics is a field of science that has been developed along with the advancement of science and technology. One branch of mathematics is algebra. This study itself is only limited to polynomials and rings. Polynomial of $f(x) \in R[x]$ with the highest element number of identity of R or in other words if the variable x with the highest power is 1, then this polynomial is called monic polynomial. Polynomials with degrees n, are defined as a function in the form of:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{R}.$$

The purpose of this study was to determine how monic polynomial over a ring set of integers modulo n. First, determine the degree $f\ (x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$. Second, determine modulo from modulo 3 to modulo k. The last step is the monic polynomial combined with the modulo class entered in the polynomial $f\ (x)$, the result of the combination is multiplied so that many monic polynomials over the array of modulo sets of combined numbers are then multiplied so that many monic polynomials over the set of modulo integers are k^n, $\forall\ k \geq 3$ dan $k \in \mathbb{Z}$.

The next study can be done on multivarriate polynomial namely polynomials withmany variables and n degrees. As well as how to solve it by using a computer program so that it is fast, precise and accurate.

ملخص

علي، محمد شافين. **2019**. *Monic* **من حلقة متعددة الحدود للموديل**. بحث شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعه الحكوميه الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشارين: (1) إيفاواتي أليسه، الماجستيرة. (2) الدكتور الحج إمام سوجارو، الماجستير.

الكلمات الرئيسيه: متعدد الحدود، الساحة، ومتعددة الحدود.

الرياضيات هي مجال العلوم الذي تطور جنبا إلى جنب مع تقدم العلوم والتكنولوجيا. فرع واحد من الرياضيات هوا لجبر. تقتصر هذه الدراسة نفسها فقط على متعددة الحدود والساحات. متعدد الحدود $f\ (x)\ \in R\ [x]$ مع أعلى عنصر من رقم الهوية R أو بعبارة أخرى إذا كان المتغير x بأعلى قدرة هو 1، فإن هذا متعدد الحدود يسمى كثيرا لحدود *monic*. تُعرّف كثيرات الحدود التي لهادرجة n ، كدالتي على شكل.

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{R}.$$

كان الغرض من هذه الدراسة هو تحديد *monic* متعددا لحدود على مجموعة صحيح العددية . أولاً، حدد درجة n

$$f\ (x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0.$$

ثانيا، تحديد *modulo* من *modulo* 3 إلى k *modulo* . تتمثل الخطوة الأخيرة في كثير الحدود الموحّد مع فئة الوحدة التي تم إدخالها في كثير الحدود $f(x)$، وبالتالي فإن توليفة المدققين متعدِّدات الحدود لمجالات تعيين عدد صحيح هي $k \in \mathbb{Z}$ و $k^n, \forall\ k \geq 3$.

في الدراسة التالية يستطع القيام به على عدد من متعدد الحدود أي متعدد الحدود مع العديد من المتغيرات ودرجات n .وكيفية حلها باستخدام برنامج كمبيوتر بحيث تكون سريعة و دقيقة.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama, semua itu kebenarannya bisa kita lihat dalam al-Quran. Alam semesta ini banyak mengandung rahasia tentang fenomena-fenomena alam. Namun keberadaan fenomena-fenomena itu sendiri hanya dapat diketahui oleh orang-orang yang benar-benar mengerti arti kebesaran Allah Swt (Rahman, 2007:1).

Dalam pandangan al-Quran, tidak ada peristiwa yang terjadi secara kebetulan. Semua terjadi dengan “hitungan”, baik dengan hukum-hukum alam yang telah dikenal manusia maupun yang belum. Salah satu peristiwa yang terjadi tercantum dalam al-Quran yaitu dijelaskan dalam surat al-Furqan ayat 2 sebagai berikut:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ
وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ٢

“Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya (Q.S al-Furqan/25:2)”.

Demikian juga dalam al-Quran surat ar-Rahman ayat 5 sebagai berikut:

ٱلشَّمْسُ وَٱلْقَمَرُ بِحُسْبَانٍ ٥

"Matahari dan bulan (beredar) menurut perhitungan (Q.S ar-Rahman/55:5)".

Ayat-ayat di atas menjelaskan bahwa semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Matematika berada pada posisi di antara dunia nyata dan dunia ghaib. Matematika tidak berada di dunia nyata sehingga objek matematika bersifat abstrak dan tidak berada di dunia ghaib sehingga objek matematika bukan suatu "penampakan". Membawa objek dunia nyata ke dalam bahasa matematika disebut dengan abstraksi dan mewujudkan matematika dalam dunia nyata disebut aplikasi. Salah satu sifat matematika yaitu matematika bersifat abstrak, yang berarti bahwa objek-objek matematika diperoleh melalui abstraksi dari fakta-fakta atau fenomena dunia nyata. Karena objek matematika merupakan hasil abstraksi dunia nyata, maka matematika dapat ditelusuri kembali berdasarkan proses abstraksinya. Hal inilah yang mendasari bagaimana cara mempelajari matematika (Abdussakir, 2007:15).

Ilmu aljabar abstrak merupakan bagian dari ilmu matematika. Salah satu bahasan dalam aljabar abstrak adalah gelanggang. Gelanggang adalah himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu $(+)$ sebagai operasi pertama dan $(\times)$ sebagai operasi kedua, yang kedua-duanya didefinisikan pada R yang memenuhi aksioma-aksioma yang telah ditentukan. Sedangkan gelanggang komutatif dengan elemen satuan dan semua unsur di R mempunyai invers terhadap operasi kedua kecuali elemen nol (identitas pada operasi pertama) disebut lapangan (Raisinghania danAggarwal, 1980:313-314).

Salah satu kegunaan yang terpenting dari teori gelanggang adalah perluasan dari suatu polinomial yang lebih besar atau lebih luas sehingga suatu polinomial (suku banyak) dapat diketahui mempunyai akar. Seperti dalam al-Quran surat Nuh ayat 16 sebagai berikut:

وَجَعَلَ ٱلْقَمَرَ فِيهِنَّ نُورًا وَجَعَلَ ٱلشَّمْسَ سِرَاجًا ١٦

“Dan Allah menciptakan padanya bulan sebagai cahaya dan menjadikan matahari sebagai pelita (Q.S Nuh /71:16)”.

Ayat di atas menjelaskan bahwa bulan diciptakan untuk menerangi bumi, namun bulan tidak bisa menerangi bumi tanpa adanya sinar dari matahari. Maka dari itu, Allah Swt menciptakan matahari sebagai pelita (penerang). Pada kenyataannya cahaya bulan yang hanya bisa memberi cahayanya atau menyinari pada waktu mendapatkan sinar dari matahari, dan apabila tidak disinari atau dalam keadaan tertutup atau terhalangi benda lain maka bulan tidak bisa menerangi benda lain (bumi). Sedangkan matahari selalu memberikan sinarnya pada benda-benda di sekitarnya, tiada hentinya menyinari alam semesta ini karena matahari sebagai sumber sinar ataupun sumber cahaya bagi alam semesta. Hal ini bisa dipandang seperti halnya pada suatu lapangan yang dapat diperluas. Karena cahaya bulan merupakan bagian dari cahaya atau sinar matahari.

Aljabar merupakan cabang dari ilmu matematika yang materinya cukup kompleks. Salah satunya adalah aljabar linear yang mana salah satu bahan kajiannya adalah struktur aljabar (aljabar abstrak) yang membahas tentang gelanggang. Kemudian cabang ilmu matematika lainnya adalah teori bilangan yang salah satu kajiannya berupa keterbagian (bilangan modulo).

Di dalam kajian struktur aljabar selalu melibatkan 3 unsur yaitu sebuah himpunan tidak kosong, satu atau lebih operasi *biner*, dan beberapa aksioma. Banyaknya operasi dan aksioma yang berlaku menjadi pembeda antara struktur aljabar yang satu dengan struktur aljabar yang lain (Arifin, 2000:5).

Merujuk pada klasifikasi yang telah digambarkan dalam konsep Islam maka aljabar juga terdapat grup abelian dan gelanggang. Struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong R dengan satu operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma, diantaranya assosiatif, memiliki elemen identitas, memiliki elemen invers, dan komutatif dinamakan grup abelian. Sedangkan suatu himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$ yang memenuhi tiga aksioma diantaranya yaitu $(R, +)$ berupa grup abelian, operasi kedua $(\times)$ bersifat assosiatif dan operasi kedua $(\times)$ bersifat distributif terhadap operasi pertama $(+)$ disebut gelanggang (Dummit & Foote, 1991:510).

Pada polinomial gelanggang, jika tidak ada penjelasan mengenai koefisien-koefisien yang menyertai peubahnya masing-masing, maka dianggap sebagai bilangan riil. Tetapi apabila ada penjelasan lebih lanjut, maka koefisien sesuai dengan gelanggang yang ditunjuk. Dari penjelasan di atas maka penulis ingin mengembangkan polinomial yang koefisien-koefisiennya merupakan elemen dari gelanggang modulo. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji tentang monik atas polinomial pada gelanggang bilangan bulat modulo dengan judul "Polinomial Monik Atas Gelanggang Himpunan Bilangan Bulat Modulo *n*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan pada bagian sebelumnya, maka rumusan masalah penelitian ini yaitu bagaimanakah menentukan polinomial monik atas gelanggang himpunan bilangan bulat modulo *n* ?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah yang telah dipaparkan, maka tujuan dari pembahasan skripsi ini adalah untuk mengetahui polinomial monik atas gelanggang himpunan bilangan bulat modulo n.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dalam penelitian adalah untuk menentukan banyaknya polinomial monik atas gelanggang himpunan bilangan bulat modulo n.

1.5 Batasan Masalah

Pembahasan mengenai aljabar abstrak dalam matematika begitu luas. Agar tidak melampaui apa yang telah menjadi tujuan dari penulisan skripsi ini maka dibutuhkan suatu batasan masalah yang dapat digunakan sebagai acuan dalam penulisan lebih lanjut. Masalah yang akan dibahas oleh peneliti yaitu polinomial monik dari gelanggang himpunan bilangan bulat modulo n. Sebagai batasan masalah pada penelitian ini yaitu $f(x) = a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ dan pada gelanggang bilangan bulat modulo n.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan *(library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek-objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang digunakan oleh peneliti ini sebagai berikut:

1. Menentukan polinomial-polinomial di $\mathbb{Z}_n[x]$ pada suatu peubah x dengan derajat n dan bilangan bulat.
2. Menentukan pola penjumlahan dan perkalian pada derajat polinomial-polinomial di $\mathbb{Z}_n[x]$.
3. Mencari monik dari polinomial $\mathbb{Z}_n[x]$.
4. Pola dari monik polinomial $\mathbb{Z}_n[x]$.
5. Membuktikan pola dari polinomial $\mathbb{Z}_n[x]$.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk memperoleh gambaran menyeluruh mengenai rancangan isi skripsi ini, secara umum dapat dilihat dari sistematika penulisan di bawah ini:

Bab I Pendahuluan

Bab ini menjelaskan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini penulis menjelaskan teori yang mendasari penulisan skripsi ini. Dasar teori yang digunakan meliputi definisi, teorema, serta contoh yang berhubungan dengan gelanggang, polinomial, polinomial atas lapangan, sublapangan lapangan, lapangan, polinomial monik, dan kajian agama.

Bab III Pembahasan

Bab ini menjelaskan pengolahan data dan menganalisis data yang telah terkaji.

Bab IV Penutup

Pada bab ini menjelaskan tentang kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan dan saran yang dapat dijadikan acuan bagi peneliti selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Gelanggang

Suatu sistem aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan satu operasi dinamakan grup. Sistem aljabar tersebut berjumlah cukup untuk menampung struktur-struktur yang ada dalam matematika. Pada bagian ini dikembangkan suatu sistem aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang disebut dengan gelanggang. Secara eksplisit, suatu gelanggang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1

Suatu gelanggang $(R,+,\times)$ adalah himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner dinotasikan $(+)$ sebagai operasi pertama dan $(\times)$ sebagai operasi kedua, yang kedua-duanya didefinisikan pada R yang memenuhi aksioma berikut:

i. $(R,+)$ merupakan grup abelian.

ii. Operasi $\times$ bersifat asosiatif di R:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c), \forall a,b,c \in R$$

iii. Operasi $\times$ bersifat distributif terhadap operasi $+$ baik di kanan maupun kiri

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ (distributif kanan)

$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ (distributif kiri).

(Raisinghania dan Aggarwal, 1980:313).

Contoh 1

Selidiki apakah $(\mathbb{Z}, +,\times)$ dengan $\mathbb{Z}$ bilangan bulat adalah merupakan gelanggang?

Jawab:

i. (Z,+) merupakan grup abelian karena

a. Ambil $a, b \in \mathbb{Z}$maka $a + b \in \mathbb{Z}$.

Jadi $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

b. Ambil $a, b \in \mathbb{Z}$, maka$(a + b) + c = a + (b + c)$

Jadi operasi penjumlahan bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$.

c. Ada $0 \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + 0 = 0 + a, \forall a \in \mathbb{Z}$.

Jadi 0 adalah identitas penjumlahan.

d. Untuk masing-masing $a \in \mathbb{Z}$ ada $(-a) \in \mathbb{Z}$ sehingga

$a + (-a) = (-a) + a = 0$

Jadi invers dari a adalah $-a$.

ii. Operasi $\times$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c); \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$$

iii. Operasi $\times$ bersifat distributif terhadap operasi $+$ di $\mathbb{Z}$ baik kanan maupun kiri.

$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c); \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c); \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Karena bilangan bulat memenuhi aksioma-aksioma pada gelanggang, maka $\mathbb{Z}$ merupakan gelanggang.

Contoh 2

Himpunan $\mathbb{Z}_2$ adalah himpunan semua kelas bilangan bulat modulo 2 dengan penjumlahan modulo 2 dan perkalian modulo 2 adalah suatu gelanggang.

Tabel 2.1 Penjumlahan $(\mathbb{Z}_2, +)$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Tabel 2.2 Perkalian $(\mathbb{Z}_2, \times)$

$\times$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel Cayley $\mathbb{Z}_2$ untuk modulo 2 terlihat bahwa sifat tertutupnya terpenuhi, elemen nolnya adalah $\bar{0}$, inversnya terhadap penjumlahan modulo 2 yaitu $-\bar{0} = \bar{0}, -\bar{1} = \bar{1}$. Tabel simetris terhadap diagonal utama, sehingga penjumlahan modulo 2 bersifat komutatif. Himpunan $\mathbb{Z}_2$ terhadap perkalian modulo 2 bersifat tertutup.

2.2 Gelanggang bilangan Bulat Modulo *n*

Definisi 2

Subgelanggang dari gelanggang R adalah subgrup dari $(R, +)$ yang tertutup terhadap operasi perkalian (Dummit dan Foote, 2004:228).

Contoh 3

1. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian adalah subgelanggang dari himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$.
2. Himpunan bilangan raional $\mathbb{Q}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian adalah subgelanggang dari himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$.

3. Himpunan bilangan bulat kelipatan n untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$ yaitu $n\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian adalah subgelanggang dari himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$.

Definisi 3

Misalkan R suatu gelanggang.

1. Unsur tak nol a di R dinamakan unsur pembagi nol jika terdapat unsur tak nol b di R sedemikian sehingga $ab = 0$ atau $ba = 0$.
2. Misalkan R memiliki unsur kesatuan, yaitu $1 \neq 0$. Unsur u di R dinamakan *unit* di R jika untuk suatu v di R berlaku $uv = vu = 1$. Himpunan dari *unit-unit* di R dinotasikan dengan $R^{\times}$ (Dummit dan Foote, 2004:226).

Definisi 4

Suatu gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan R dinamakan daerah integral jika R tidak memiliki unsur pembagi nol (Dummit dan Foote, 2004:228).

Contoh 4

Gelanggang bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian adalah daerah integral, yaitu $a \times b \neq 0$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b \neq 0$.

2.3 Polinomial

Definisi 5

Polinomial $p(x)$ berderajat n, didefinisikan sebagai suatu fungsi berbentuk $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{R}$.(Munir, 2008:105).

Teorema 1. Algoritma Pembagian

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua polinom dengan $f(x), g(x) \in F[x]$ dan $g(x) \neq 0$ maka terdapat polinom-polinom unik $q(x), r(x) \in F[x]$ sedemikian hingga:

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

dengan derajat $r(x)$ kurang dari derajat $g(x)$ atau $r(x) = 0$ (Beachy dan Blair, 1990:173-174).

Bukti

Misalkan $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ dan $g(x) = a_0 + \cdots + b_nx^n$, dengan $a_m \neq 0$ dan $b_n \neq 0$. Diasumsikan bahwa teorema ini benar untuk semua polinomial.

Asumsikan bahwa $m \geq n$

Setelah itu bagi a_mx^m dengan b_nx^n diperoleh $a_mb_n^{-1}x^{m-n}$, kemudian kalikan dengan $g(x)$ dan mengurangi $f(x)$. Ini diberikan

$$f_1(x) = f(x) - a_mb_n^{-1}x^{m-n}g(x)$$

dengan $f_1(x)$ mempunyai derajat kurang dari m.

Dengan hipotesis induksi, dapat ditulis:

$$f_1(x) = q_1(x)g(x) + r(x) \dots\dots\dots (*)$$

dengan derajat $r(x)$ kurang dari n, kecuali jika $r(x) = 0$. Karena

$$f(x) = f_1(x) - a_mb_n^{-1}x^{m-n}g(x)$$

Substitusikan pada persamaan (*) di atas, maka

$$f(x) = (q_1(x) + a_mb_n^{-1}x^{m-n}g(x) + r(x)$$

Hasil bagi $q(x) = q_1(x) + a_mb_n^{-1}x^{m-n}$ mempunyai koefisien di F, dengan $a_m, b_n \in F$, dan $q_1(x)$ mempunyai koefisien di F dengan hipotesis induksi. Akhirnya, sisa $r(x)$ mempunyai koefisien di F dengan hipotesis induksi.

Untuk menunjukkan bahwa hasil bagi $q(x)$ dan sisa $r(x)$ adalah unik, seandainya

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$$

dan

$$f(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x)$$

dengan demikian

$$[q_1(x) - q_2(x)]\, g(x) = r_2(x) - r_1(x)$$

Karena $r_2(x) - r_1(x) = 0$ atau derajat $r_2(x) - r_1(x)$ kurang dari derajat $g(x)$, ini dapat dipegang jika hanya $q_1(x) - q_2(x) = 0$ jadi $q_1(x) = q_2(x)$. Kemudian $r_2(x) - r_1(x) = 0$ jadi $r_2(x) = r_1(x)$.

2.4 Polinomial atas Gelanggang

Polinomial atas gelanggang adalah polinomial yang koefisien suku-sukunya merupakan himpunan terurut *infinite* dari gelanggang R yang berlaku $a_i \neq 0\ \forall i > n$ dan $n \in Z^+$ (Raishinghania dan Aggarwal, 1980:422).

Misalkan R adalah gelanggang dan $R[x]$ adalah semua himpunan polinomial atas gelanggang R pada suatu peubah x, maka dapat didefinisikan penjumlahan dan perkalian pada polinomial-polinomial di $R[x]$ seperti berikut:

1. Penjumlahan pada polinomial

   Misalkan

   $$f(x) = a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + \ ... + a_nx^n$$

   dan

   $$g(x) = b_0x^0 + b_1x + b_2x^2 + \ ... + b_nx^n$$

   adalah dua polinomial di $R[x]$, maka jumlah dari $f(x)$ dan $g(x)$ dinotasikan dengan $f(x) + g(x)$ yaitu didefinisikan dengan

   $$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ ... + (a_n + b_n)x^n$$

   Dengan jelas merupakan polinomial atas gelanggang dan oleh karenanya anggota dari $R[x]$.

2. Perkalian pada polinomial (Judson, 1997:257)

   Misalkan

   $$f(x) = a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + \ ... + a_nx^n$$

   dan

   $$g(x) = b_0x^0 + b_1x + b_2x^2 + \ ... + b_nx^m$$

   adalah dua polinomial di $R[x]$, maka perkalian dari $f(x)$ dan $g(x)$ dinotasikan dengan $f(x) \times g(x)$ yaitu didefinisikan dengan

   $$f(x) \times g(x) = c_0x^0 + c_1x + c_2x^2 + \ ... + c_{n+m}x^{n+m}$$

   Dengan $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_kb_{i-k} = a_0b_i + a_1b_{i-1} + \ ... + a_{i-1}b_1 + a_ib_0$ untuk masing-masing i.

   Dengan demikian jelas bahwa hasil dari perkalian dua polinomial di $R[x]$ yaitu juga berada dalam $R[x]$. Maka dapat dikatakan suatu polinomial itu memenuhi kedua operasi pada gelanggang yang kemudian dinamakan polinomial atas gelanggang.

Contoh 5

Misal $\mathbb{Z}_5[x]$ adalah himpunan polinomial-polinomial yang koefisien suku-sukunya merupakan anggota dalam $\mathbb{Z}_5$ Misal

$$p(x) = 3x^0 + 4x + 2x^2$$

$$q(x) = x^0 + 3x + 4x^2 + 3x\text{^}2$$

Jadi dengan definisi penjumlahan dan perkalian polinomial maka diperoleh:

$$p(x) + q(x) = (3+1)x^0 + (4+3)x + (2+4)x^2 + (0+2)x^3$$

$$= 4x^0 + 7x + 6x^2 + 2x^3$$

$$= 4x^0 + 2x + x^2 + 2x^3$$

$$p(x) \times q(x) = c_0x^0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5$$

$$c_0 = 3 \times 1$$

$$= 3$$

$$c_1 = (3 \times 3) + (4 \times 1)$$

$$= 4 + 4$$

$$= 3$$

$$c_2 = (3 \times 4) + (4 \times 4) + (2 \times 1)$$

$$= 2 + 2 + 2$$

$$= 2$$

$$c_3 = (3 \times 3) + (4 \times 4) + (2 \times 3) + (0 \times 1)$$

$$= 4 + 1 + 1 + 0$$

$$= 1$$

$$c_4 = (4 \times 3) + (2 \times 4) + (0 \times 3)$$

$$= 2 + 3 + 0$$

$$= 0$$

$$c_5 = (2 \times 3) + (0 \times 4)$$

$$= 1 + 0$$

$$= 1$$

Jadi $p(x) \times q(x) = 3x^0 + 3x + x^2 + x^3 + 0x^4 + 4x^5$

$$= 3x^0 + 3x + x^2 + x^3 + 4x^0$$

$$= 2x^0 + 3x + x^2 + x^3$$

2.5 Polinomial Monik

Misalkan $f(x)$ adalah suatu polinom dan $R[x]$ adalah ring polinom, $f(x) \in R[x]$ dikatakan polinomial monik (*monic polynomial*) bila koefisien x dengan pangkat tertingginya adalah 1 (Mas'oed, 2013:149).

Contoh 6

Polinom $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ adalah polinomial monik.

2.6 Kajian Aljabar dalam Perspektif Islam

Aljabar abstrak adalah bidang matematika yang mengkaji struktur aljabar seperti grup, gelanggang, lapangan, modul, dan ruang vektor. Pada dasarnya aljabar abstrak juga membahas tentang himpunan dan operasinya. Sehingga dalam mempelajari materi ini selalu identik dengan sebuah himpunan tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dapat dikombinasikan dengan penjumlahan, perkalian, ataupun keduanya atau dapat dioperasikan dengan satu atau lebih operasi biner. Hal tersebut berarti pembahasan-pembahasannya melibatkan objek-objek abstrak yang dinyatakan dalam simbol-simbol (Anonim, 2011:5).

Bidang kajian ini disebut dengan aljabar (saja) sebagai kependekan aljabar abstrak, disebut juga dengan struktur aljabar. Tetapi kebanyakan lebih senang menyebutnya dengan aljabar abstrak untuk membedakannya dengan aljabar elementer. Aljabar abstrak ini banyak digunakan dalam kajian lanjut bidang matematika (teori bilangan aljabar, topologi aljabar, geometri aljabar) (Anonim, 2011:5).

Beberapa bagian dari aljabar abstrak dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu dikenal dengan grup. Sedangkan kajian himpunan dengan satu operasi biner dalam konsep Islam yaitu, bahwa manusia adalah diciptakan secara berpasang-pasangan. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat al-Fathir ayat 11.

وَٱللَّهُ خَلَقَكُم مِّن تُرَابٍ ثُمَّ مِن نُّطْفَةٍ ثُمَّ جَعَلَكُمْ أَزْوَٰجًاۚ وَمَا تَحْمِلُ مِنْ أُنثَىٰ وَلَا تَضَعُ إِلَّا بِعِلْمِهِۦۚ وَمَا يُعَمَّرُ مِن مُّعَمَّرٍ وَلَا يُنقَصُ مِنْ عُمُرِهِۦٓ إِلَّا فِى كِتَٰبٍۚ إِنَّ ذَٰلِكَ عَلَى ٱللَّهِ يَسِيرٌ ١١

"dan Allah menciptakan kamu dari tanah kemudian dari air mani, kemudian Dia menjadikan kamu berpasangan (laki-laki dan perempuan). dan tidak ada seorang perempuan pun mengandung dan tidak (pula) melahirkan melainkan dengan sepengetahuan-Nya. dan sekali-kali tidak dipanjangkan umur seorang yang berumur panjang dan tidak pula dikurangi umurnya, melainkan (sudah ditetapkan) dalam kitab (Lauh Mahfuzh). Sesungguhnya yang demikian itu bagi Allah adalah mudah."(Q.S. al-Fathir:11).

Dari surat al-Fathir ayat 11 di atas disebutkan, bahwa manusia adalah berpasang-pasangan yaitu laki-laki dengan perempuan dengan cara menikah. Biasanya dalam matematika disimbolkan $(G, +)$, dengan G adalah himpunan tak kosongnya yaitu himpunan manusia (laki-laki, perempuan) dan (+) adalah operasi binernya yaitu pernikahan.

Sedangkan untuk himpunan yang tidak kosong dengan dua operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu disebut dengan gelanggang. Untuk gelanggang sendiri dibagi menjadi dua menurut sifat identitasnya, yaitu gelanggang yang mempunyai identitas 1 dan gelanggang yang tidak mempunyai unsur identitas 1. Sedangkan kajian himpunan dengan dua operasi biner dalam konsep Islam yaitu, manusia adalah diciptakan secara berpasang-pasangan dan cara memasangkannya dengan hukum-hukum tertentu. Seperti dijelaskan dalam firman Allah SWT dalam surat an-Nisa’ ayat23.

حُرِّمَتۡ عَلَيۡكُمۡ أُمَّهَٰتُكُمۡ وَبَنَاتُكُمۡ وَأَخَوَٰتُكُمۡ وَعَمَّٰتُكُمۡ وَخَٰلَٰتُكُمۡ وَبَنَاتُ ٱلۡأَخِ
وَبَنَاتُ ٱلۡأُخۡتِ وَأُمَّهَٰتُكُمُ ٱلَّٰتِيٓ أَرۡضَعۡنَكُمۡ وَأَخَوَٰتُكُم مِّنَ ٱلرَّضَٰعَةِ وَأُمَّهَٰتُ نِسَآئِكُمۡ
وَرَبَٰٓئِبُكُمُ ٱلَّٰتِي فِي حُجُورِكُم مِّن نِّسَآئِكُمُ ٱلَّٰتِي دَخَلۡتُم بِهِنَّ فَإِن لَّمۡ تَكُونُواْ دَخَلۡتُم
بِهِنَّ فَلَا جُنَاحَ عَلَيۡكُمۡ وَحَلَٰٓئِلُ أَبۡنَآئِكُمُ ٱلَّذِينَ مِنۡ أَصۡلَٰبِكُمۡ وَأَن تَجۡمَعُواْ بَيۡنَ
ٱلۡأُخۡتَيۡنِ إِلَّا مَا قَدۡ سَلَفَۗ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ غَفُورٗا رَّحِيمٗا ٢٣

“Diharamkan atas kamu (mengawini) ibu-ibumu; anak-anakmu yang perempuan; saudara-saudaramu yang perempuan, saudara-saudara bapakmu yang perempuan; saudara-saudara ibumu yang perempuan; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang laki-laki; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang perempuan; ibu-ibumu yang menyusui kamu; saudara perempuan sepersusuan; ibu-ibu isterimu (mertua); anak-anak isterimu yang dalam pemeliharaanmu dari isteri yang telah kamu campuri, tetapi jika kamu belum campur dengan isterimu itu (dan sudah kamu ceraikan), Maka tidak berdosa kamu mengawininya; (dan diharamkan bagimu) isteri-isteri anak kandungmu (menantu); dan menghimpunkan (dalam perkawinan) dua perempuan yang bersaudara, kecuali yang telah terjadi pada masa lampau; Sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang (Q.S. an-Nisaa’:23)”.

Maka dari firman Allah SWT diatas dijelaskan bahwa manusia adalah berpasang-pasangan antara laki-laki dan perempuan dengan menikah. Akan tetapi cara menikah dengan pasangannya harus secara hukum agama. Dalam matematika biasanya disimbolkan $(R, +, \times)$, dengan R adalah himpunan tak kosongnya yaitu himpunan manusia (laki-laki, perempuan), $(+)$ adalah operasi pertamanya yaitu pernikahan, dan $(\times)$ adalah operasi keduanya yaitu hukum agamanya.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini, dibahas mengenai langkah-langkah mencari banyak polinomial monik atas gelanggang himpunan bilangan bulat modulo k. Penulis hanya membatasi pada polinomial berderajat n.

3.1 Polinom Derajat 1 $f(x) = x + a_0$

Dalam sub bab ini, akan dijelaskan tentang cara menentukan polinomial monik dari kelas modulo Z_3 sampai Z_k pada polinomial derajat 1. Maka untuk mendapatkan monik polinomial dilakukan dengan cara menjabarkan polinomial $f(x) = x + a_0$, sehingga hasilnya sebagai berikut:

Tabel 3.1 Polinomial Derajat 1 $f(x) = x + a_0$

Polinomial	Modulo	Monik Polinomial	Banyak Monik
$f(x) = x + a_0$	Z_3	$\bar{1}x + \bar{0}$	3
		$\bar{1}x + \bar{1}$	
		$\bar{1}x + \bar{2}$	
	Z_4	$\bar{1}x + \bar{0}$	4
		$\bar{1}x + \bar{1}$	
		$\bar{1}x + \bar{2}$	
		$\bar{1}x + \bar{3}$	
	Z_5	$\bar{1}x + \bar{0}$	5
		$\bar{1}x + \bar{1}$	
		$\bar{1}x + \bar{2}$	
		$\bar{1}x + \bar{3}$	
		$\bar{1}x + \bar{4}$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	Z_k	$\bar{1}x + \bar{k}$	k

Berdasarkan Tabel 3.1 diketahui $f(x) = x + a_0$ pada Z_k, banyaknya monik adalah Z. Dalam prosedur menentukan banyaknya monik dari polinomial derajat 1 modulo k, maka $f(x) = \bar{1}x + a_0$ dengan a_0 anggota Z_k. Banyaknya $f(x)$ dapat dicari dengan menggunakan rumus kombinasi a_0 pada Z_k sehingga diperoleh $C_1^k = k$, maka banyak monik adalah k.

3.2 Polinom Derajat 2 $f(x) = x^2 + a_1x + a_0$

Pada polinom berderajat 2 akan dijelaskan tentang cara menentukan polinomial monik dari kelas modulo Z_3 sampai Z_k

Tabel 3.2 Polinomial Derajat 2 $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

Polinomial	Modulo	Monik Polinomial	Banyak Monik
$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$	Z_3	$\bar{1}x^2 + \bar{0}x + a_0$	3^2
		$\bar{1}x^2 + \bar{1}x + a_0$	
		$\bar{1}x^2 + \bar{2}x + a_0$	
	Z_4	$\bar{1}x^2 + \bar{0}x + a_0$	4^2
		$\bar{1}x^2 + \bar{1}x + a_0$	
		$\bar{1}x^2 + \bar{2}x + a_0$	
		$\bar{1}x^2 + \bar{3}x + a_0$	
	Z_5	$\bar{1}x^2 + \bar{0}x + a_0$	5^2
		$\bar{1}x^2 + \bar{1}x + a_0$	
		$\bar{1}x^2 + \bar{2}x + a_0$	
		$\bar{1}x^2 + \bar{3}x + a_0$	
		$\bar{1}x^2 + \bar{4}x + a_0$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	Z_k	$\bar{1}x^2 + \bar{k}x + \bar{k}$	k^2

Berdasarkan Tabel 3.2 diketahui $f(x) = x^2 + a_1x + a_0$ pada Z_k, banyaknya monik adalah k^2. Dalam prosedur menentukan banyaknya monik dari polinomial derajat 2 modulo k, maka $f(x) = \bar{1}x^2 + a_1 + a_0$ dengan a_1 dan a_0 anggota Z_k. Banyaknya $f(x)$ dapat dicari dengan menggunakan rumus kombinasi

a_1, a_0 pada Z_k sehingga diperoleh $C_1^k \times C_1^k = k \times k$, maka banyak moniknya adalah k^2.

3.3 Polinom Derajat 3 $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Dengan cara yang sama, akan dijelaskan tentang cara menentukan polinomial dari kelas modulo Z_3 sampai Z_k dengan menentukan pola monik pada polinomial berderajat 3.

Tabel 3.3 Polinomial Derajat 3 $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Polinomial	Modulo	Monik Polinomial	Banyak Monik
$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1 x + a_0$	Z_3	$\bar{1}x^3 + \bar{0}x^2 + \bar{0}x + a_0$	3^3
		$\bar{1}x^3 + \bar{0}x^2 + \bar{1}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{0}x^2 + \bar{2}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{1}x^2 + \bar{0}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{1}x^2 + \bar{1}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{1}x^2 + \bar{2}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{0}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{1}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + a_0$	
	Z_4	$\bar{1}x^3 + \bar{0}x^2 + \bar{0}x + a_0$	4^3
		$\bar{1}x^3 + \bar{0}x^2 + \bar{1}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{0}x^2 + \bar{2}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{0}x^2 + \bar{3}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{1}x^2 + \bar{0}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{1}x^2 + \bar{1}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{1}x^2 + \bar{2}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{1}x^2 + \bar{3}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{0}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{1}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{0}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{1}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{2}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{3}x^2 + \bar{3}x + a_0$	
	Z_5	$\bar{1}x^3 + \bar{0}x^2 + \bar{0}x + a_0$	5^3
		$\bar{1}x^3 + \bar{0}x^2 + \bar{1}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{0}x^2 + \bar{2}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{0}x^2 + \bar{3}x + a_0$	
		$\bar{1}x^3 + \bar{0}x^2 + \bar{4}x + a_0$	

		$\bar{1}x^3+\bar{1}x^2+\bar{0}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+\bar{1}x^2+\bar{1}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+\bar{1}x^2+\bar{2}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+\bar{1}x^2+\bar{3}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+1x^2+\bar{4}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+\bar{2}x^2+\bar{0}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+\bar{2}x^2+\bar{1}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+\bar{2}x^2+\bar{2}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+\bar{2}x^2+\bar{3}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+\bar{2}x^2+\bar{4}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+\bar{3}x^2+\bar{0}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+\bar{3}x^2+\bar{1}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+\bar{3}x^2+\bar{2}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+\bar{3}x^2+\bar{3}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+\bar{3}x^2+\bar{4}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+\bar{4}x^2+\bar{0}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+\bar{4}x^2+\bar{1}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+\bar{4}x^2+\bar{2}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+\bar{4}x^2+\bar{3}x+a_0$	
		$\bar{1}x^3+\bar{4}x^2+\bar{4}x+a_0$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	Z_k	$\bar{1}x^3+\bar{k}x^2+\bar{k}x+k$	k^3

Berdasarkan Tabel 3.3 diketahui $f(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ pada Z_k, banyaknya monik adalah k^3. Dalam prosedur menentukan banyaknya monik dari polinomial derajat 3 modulo k, maka $f(x)=\bar{1}x^3+a_2+a_1+a_0$ dengan a_2,a_1 dan a_0 anggota Z_k. Banyaknya $f(x)$ dapat dicari dengan menggunakan rumus kombinasi a_2,a_1,a_0 pada Z_k sehingga diperoleh $C_1^k\times C_1^k\times C_1^k=k\times k\times k$, maka banyak moniknya adalah k^3.

3.4 Polinom Derajat n

Dalam sub bab ini, akan dijelaskan tentang cara menentukan banyak polinomial monik dari derajat n pada Z_k. Untuk Z_3 sampai Z_k pada polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$ adalah sebagai berikut.

Tabel 3.4 Polinom Derajat n.

Derajat Polinomial	Modulo	Pola Monik	Banyak Monik
	Z_3	$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$	3^n
	Z_4	$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$	4^n
	Z_5	$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$	5^n
	Z_k	$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$	k^n

Maka banyak monik pada polinomial derajat n untuk setiap $a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0 \in Z_k$ adalah k^n. Dalam prosedur menentukan banyaknya monik dari polinomial derajat n modulo k, maka $f(x) = \bar{1}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$ dengan $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ anggota Z_k. Banyaknya $f(x)$ dapat dicari dengan menggunakan rumus kombinasi $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ pada Z_k sehingga diperoleh $C_1^k \times C_1^k \times \ldots C_1^k = k \times k \times \ldots \times k$, maka banyak moniknya adalah k^n.

Berdasarkan Tabel dan deskripsi di atas maka dapat dirumuskan teorema sebagai berikut. Misal $\mathbb{Z}_k$ adalah gelanggang bilangan bulat mdulo k, $k \geq 3$. Dan $\mathbb{Z}_k[x]$ adalah himpunan polinomial dengan variabel x dan koefisien di $\mathbb{Z}_k$. Maka banyak polinomial monik berderajat n di $\mathbb{Z}_k[x]$ adalah k^n.

Bukti:

Polinomial monik $f(x)$ di $\mathbb{Z}_k[x]$ berbentuk

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$$

dengan $a_i \in \mathbb{Z}_k, i = 0,1,\dots,n-1$. Maka a_i dapat diisi oleh sebanyak k kemungkinan anggota $\mathbb{Z}_k = \{\overline{0},\overline{1},\dots,\overline{k-1}\}$. Karena terdapat a_i sebanyak n maka terdapat polinomial monik sebanyak $k \times k \times k \times \dots \times k = k^n$.

3.5 Kajian Agama

Agama islam adalah agama yang mementingkan keyakinan yang mendalam dengan konsep berserah diri dalam menerima segala ketetapan serta aturan yang telah diturunkan oleh sang Pencipta. Berserah diri tersebut merupakan bukti yang harus dimiliki oleh setiap orang yang menerima islam sebagai agama yang benar. Seorang yang menerima kebenaran islam tersebut dinamakan orang mukmin. Orang mukmin adalah seseorang yang beriman dan berserah kepada Allah dan Rasul-Nya, baik secara lahir maupun batin. Orang mukmin yang sejati senantiasa menunjukkan identitasnya dalam segala ucapan serta tindakannya baik dalam kehidupan individu maupun dalam kehidupan sosial. Setiap orang yang beriman kepada Allah dan rasul-Nya, tentulah memiliki kriteria tertentu yang harus dimiliki (Halfia, 2011:3).

Dalam hal ini Allah berfirman, QS. at-Taubah:71

وَٱلْمُؤْمِنُونَ وَٱلْمُؤْمِنَٰتُ بَعْضُهُمْ أَوْلِيَآءُ بَعْضٍۚ يَأْمُرُونَ بِٱلْمَعْرُوفِ وَيَنْهَوْنَ عَنِ ٱلْمُنكَرِ وَيُقِيمُونَ ٱلصَّلَوٰةَ وَيُؤْتُونَ ٱلزَّكَوٰةَ وَيُطِيعُونَ ٱللَّهَ وَرَسُولَهُۥٓۚ أُوْلَٰٓئِكَ سَيَرْحَمُهُمُ ٱللَّهُۗ إِنَّ ٱللَّهَ عَزِيزٌ حَكِيمٌ ٧١

"Dan orang-orang yang beriman, laki-laki dan perempuan sebagian mereka (adalah) menjadi penolong bagi sebagian yang lain. Mereka menyuruh (mengerjakan) yang ma`ruf, mencegah dari yang mungkar, mendirikan shalat, menunaikan zakat, dan mereka taat

kepda Allah dan rasul-Nya. Mereka itu akan diberi rahmat oleh Allah. Sesungguhnya Allah maha Perkasa lagi maha Bijaksana." (QS. Al-Taubah: 71)

Ayat tersebut adalah salah satu ayat al-Quran yang menerangkan sekaligus mengungkap kriteria orang mukmin. kriteria orang yang beriman dalam ayat ini merupakan wujud nyata akan kepasrahan yang mendalam terhadap kebenaran yang ada dalam Islam. Kriteria orang beriman juga dimaksudkan sebagai pembeda antara orang yang telah pasrah sepenuhnya terhadap kebenaran Islam dengan yang belum menerima kebenaran Islam. Setiap manusia yang mengaku beriman, hendaklah merenungkan ayat ini sekaligus mengamalkannya. Sebagaimana hadits di bawah ini:

عَنْ أَبِي عَبْدِ الرَّحْمَن عَبْدِ اللهِ بْن عُمَرَبْن الْخَطَّابِ رَضِيَ اللهُ عَنْهُمَاقَالَ: سَمِعْت رَسُوْل اللهِ صلى الله وسلم يَقُوْلُ: بُنِي اْلإِسْلاَم عَلَى خَمْسٍ: شَهَادَةُ أَنْ لاَ إِلَه إِلاَّ اللهُ وَأَنّ مُحَمَّداً رَسُوْلُ اللهِ وَإِقَامُ الصَّلاَةِ وَإِيْتَاءُ الزَّكَاةِ وَحَجُّ الْبَيْت وَصَوْمُ رَمَضَانَ [رواه الترمذي ومسلم].

"Islam didirikan diatas lima perkaraya itu bersaksi bahwa tiada Tuhan selain Allah dan Muhammad adalah utusan Allah, mendirikan shalat, mengeluarkan zakat, mengerjakan haji kebaitullah dan berpuasa pada bulan ramadhan". (HR. At-tirmidi Muslim)".

Demikianlah, kriteria orang-orang beriman (mukmin) dapat disimpulkan sebagai berikut: orang beriman senantiasa saling tolong menolong, senantiasa menjalankan amar ma`ruf nahi munkar, senantiasa mendirikan shalat, senantiasa menunaikan zakat dan senantiasa taat kepada Allah dan Rasul-Nya. Kelima kelompok orang mukmin itulah yang akan mendapat rahmat Allah, berupa kesejahteraan hidup di dunia dan kebahagiaan kelak di akhirat.

Syarat-syarat yang dimiliki orang beriman itu menunjukkan bahwa segala sesuatu mempunyai kriteria, sebagaimana suatu himpunan tak kosong ketika diberikan dua operasi biner dapat dikatakan gelanggang maka harus memenuhi kriteria (syarat) yaitu grup abelian, operasi, operasi kedua bersifat asosiatif, dan operasi pertama bersifat distributif terhadap operasi kedua.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang sudah dijelaskan pada bab sebelumnya, maka cara untuk menentukan polinomial monik atas gelanggang himpunan bilangan bulat modulo n dapat diringkas seperti berikut. Pertama, menentukan derajat $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$. Kedua, menentukan modulo dari modulo 3 sampai modulo k. Langkah terakhir adalah polinomial monik dikombinasikan dengan cara kelas modulo dimasukkan pada polinomial $f(x)$, hasil kombinasi tersebut kemudian dikalikan sehingga banyak monik polinomial atas gelanggang himpunan bilangan bulat modulo k adalah $k^n, \forall\, k \geq 3$ dan $k \in \mathbb{Z}$.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan pada polinomial yang *multi varriate* yaitu polinomial dengan banyak variabel dan n derajat. Cara menyelesaikannya dengan menggunakan matriks dengan ordo besar, untuk mendapatkan hasil yang cepat, tepat serta akurat sangat dianjurkan dengan menggunakan program komputer.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Anonim. 2009. *Merumuskan Konsep Ilmu Pengetahuan*, Jakarta: Ditjen Cipta Karya.

Arifin, A. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung.

Beachy, W.A. dan Blair, W.D. 1990. *Abstract Algebra with A Concrete Introduction*. Prentice Hall, Englewood, New Jesey 07632.

Chaudhuri. 1983. *Abstract Algebra*. New Delhi: Tata McGraw-Hill. Publishing Company Limited.

Dummit, D.S dan Foote, R.M.. 1991. Abstract Algebra. New York: Prentice Hall International, Inc.

Dummit, S. D. dan Foote, R. M. 2004. *Abstract Algebra, Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Judson, T.W. 1997. *Abstract Algebra: Theory and Aplications*. State University.

Mas'oed, F. 2013. *Struktur Aljabar*. Akademia Permata.

Munir, R. 2008. *Metode Numerik*. Bandung: INFORMATIKA.

Rahman, H. 2007. *Indahnya Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Raisinghania, M.D dan Aggarwal R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Company LTD.

Wahyudin. 1989. *Aljabar Modern*. Bandung: TARSITO

. RIWAYAT HIDUP

Muhammad Safin Ali dilahirkan di Pasuruan pada tanggal 1 Januari 1994, anak ketiga dari empat bersaudara, pasangan bapak M. Saeri dan ibu Chotidjah. Pendidikan dasar ditempuh di SDN 02 Pasrepan Kabupaten Pasuruan yang ditamatkan pada tahun 2006. Pada tahun yang sama ia melanjutkan pendidikan menengah pertama di MTs Hidayatun Nasyi'in Pasrepan Kabupaten Pasuruan dan menyelesaikannya pada tahun 2009. Pada tahun yang sama ia melanjutkan pendidikan menengah atas di MA Al-Ma'arif Singosari Malang dan menyelesaikannya pada tahun 2012. Sejak pendidikan dasar hingga pendidikan menengah pertama penulis ditempuh di kota kelahirannya sedang sekolah menengah atas penulis ditempuh di Malang dan mondok di Pesantren Nurul Huda Singosari Malang. Pendidikan berikutnya penulis tempuh di Universitas Islam Negri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur tulis (Mandiri) pada tahun 2012 dengan mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Muhammad Safin Ali
Nim : 12610085
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Polinomial Monik Atas Gelanggang Himpunan Bilangan Bulat Modulo n
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	26 September 2017	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	28 September 2017	Revisi Bab I dan Bab II	2.
3.	03 Oktober 2017	Konsultasi Bab III dan Bab IV	3.
4.	05 Oktober 2017	Revisi Bab III dan Bab IV	4.
5.	11 Oktober 2018	Konsultasi Abstrak	5.
6.	12 Oktober 2018	Revisi Abstrak	6.
7.	12 Oktober 2018	Konsultasi Agama Bab II & III	7.
8.	15 Oktober 2018	Revisi Agama Bab II & III	8.
9.	22 Oktober 2018	ACC Agama Keseluruhan	9.
10.	24 Oktober 2018	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 26 Desember 2018
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001