SPEKTRUM MATRIKS *ANTIADJACENCY* DAN MATRIKS LAPLACE GRAF INVERS DARI GRUP MODULO

SKRIPSI

OLEH
IFKRA FEBRY
NIM. 12610069

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

SPEKTRUM MATRIKS *ANTIADJACENCY* DAN MATRIKS LAPLACE GRAF INVERS DARI GRUP MODULO

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Ifkra Febry
NIM. 12610069

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERIMAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

SPEKTRUM MATRIKS *ANTIADJACENCY* DAN MATRIKS LAPLACE GRAF INVERS DARI GRUP MODULO

SKRIPSI

Oleh
Ifkra Febry
NIM. 12610069

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 20 Desember 2018

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19751006 2003121 001	NIP. 19650414 2003121 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

SPEKTRUM MATRIKS *ANTIADJACENCY* DAN MATRIKS LAPLACE GRAF INVERS DARI GRUP MODULO

SKRIPSI

Oleh
Ifkra Febry
NIM. 12610069

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 10 Januari 2019

Penguji Utama	: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Ketua Penguji	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Ifkra Febry
NIM	: 12610069
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Spektrum Matriks *Antiadjacency* dan Matriks Laplace Graf Invers dari Grup Modulo

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 Februari 2019
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
TGL. 20
009B6AFF170248838
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Ifkra Febry
NIM. 12610069

MOTO

Orang Hebat adalah Orang-orang yang Pernah Gagal, Lalu Berjuang untuk Bangkit.

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Hasan Basri dan Ibunda tercinta Lilis Suryani yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi dukungan, motivasi, selalu memberi semangat yang tiada henti hingga selesainya skripsi ini, tak lupa restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu serta selalu memberikan teladan yang baik bagi penulis.

Untuk kakak tersayang Myka Santri Yani serta adik tercinta Vivi Santri Yani yang selalu memberikan doa dan dukungan kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur ke hadirat Allah Swt yang telah memberikan rahmat, taufik, hidayah, dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul *"Spektrum Matriks Antiadjacency dan Matriks Laplace Graf Invers dari Grup Modulo"*. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada nabi Muhammad Saw yang telah membimbing ummatnya dari jalan kegelapan menuju jalan yang terang benderang yakni agama Islam.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Selama proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat saran, bimbingan, arahan, doa, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M. Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan motivasi kepada penulis.

5. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagai ilmunya kepada penulis.
6. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terimakasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah dan Ibu tercinta yang telah mencurahkan kasih sayang, doa, bimbingan dan motivasi hingga selesainya skripsi ini.
8. Saudara-saudara tersayang yang telah memberikan semangat kepada penulis.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2012 yang berjuang bersama-sama.
10. Keluarga besar UKM Teater K2 (Komedi Kontemporer) yang telah memotivasi dan memberikan banyak bantuan kepada penulis.
11. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah Swt dan dapat memberikan manfaat dan wawasan yang lebih luas bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Januari 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Febry, Ifkra. 2019. **Spektrum Matriks *Antiadjacency* dan Matriks Laplace Graf Invers dari Grup Modulo.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Kata Kunci: matriks *antiadjacency*, matriks Laplace, spektrum *antiadjacency*, spektrum Laplace, graf invers, grup modulo.

Graf dapat dinyatakan dalam bentuk matriks, seperti matriks *antiadjacency* yang dinotasikan $\mathbf{A}^{+}(\mathbf{G})$ yang diperoleh dari matriks *adjacency* dinotasikan $\mathbf{A}(\mathbf{G})$, matriks Laplace yang dinotasikan $\mathbf{L}(\mathbf{G})$ diperoleh dari operasi pengurangan matriks derajat titik dinotasikan $\mathbf{D}(\mathbf{G})$ dan matriks $\mathbf{A}(\mathbf{G})$ yang ditunjukan oleh $\mathbf{L}(\mathbf{G}) = \mathbf{D}(\mathbf{G}) - \mathbf{A}(\mathbf{G})$. Ketika graf telah dalam bentuk matriks, maka dapat ditentukan nilai eigen pada baris pertama dan *algebraic multiplicity* pada baris kedua disebut spektrum. Spektrum yang diperoleh dari matriks $\mathbf{A}^{+}(\mathbf{G})$ disebut spektrum matriks *antiadjacency* dinotasikan sebagai $\mathbf{Spec}\,(\mathbf{A}^{+}(\mathbf{G}))$ dan yang diperoleh dari matriks $\mathbf{L}(\mathbf{G})$ disebut spektrum Laplace dinotasikan sebagai $\mathbf{Spec}\,(\mathbf{L}(\mathbf{G}))$. Tujuan dari penelitian ini adalah mencari pola dari $\mathbf{Spec}\,(\mathbf{A}^{+}(\mathbf{G}))$ dan $\mathbf{Spec}\,(\mathbf{L}(\mathbf{G}))$. Hasil dari penelitian ini diperoleh:

a. Spektrum matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace graf invers dari grup modulo untuk n ganjil adalah:

$$\mathbf{Spec}\left(A^{+}(\Gamma_s(Z_n))\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \frac{n-1}{2} & 1 & \frac{n-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Spec}\left(L(\Gamma_s(Z_n))\right) = \begin{bmatrix} n & n-2 & 0 \\ \frac{n-1}{2} & \frac{n-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

b. Spektrum matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace graf invers dari grup modulo untuk n genap dan $n = 4\mathrm{k} + 2, \mathrm{k} \in \mathbb{N}$ adalah:

$$\mathbf{Spec}\left(A^{+}(\Gamma_s(Z_n))\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{n-2}{4} & 1 & \frac{n-2}{2} & 1 & \frac{n-2}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Spec}\left(L(\Gamma_s(Z_n))\right) = \begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ \frac{n-2}{4} & \frac{n}{2} & \frac{n-2}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

c. Spektrum matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace graf invers dari grup modulo untuk n genap dan $n = 4\mathrm{k} + 4, \mathrm{k} \in \mathbb{N}$ adalah:

$$\mathbf{Spec}\left(A^{+}(\Gamma_s(Z_n))\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{n-4}{4} & 2 & \frac{n-4}{2} & 2 & \frac{n-4}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Spec}\left(L(\Gamma_s(Z_n))\right) = \begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ \frac{n}{4} & \frac{n}{2} & \frac{n-4}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Bagi penelitian selanjutnya, diharapkan dapat menemukan bermacam-macam teorema tentang spektrum selain *antiadjacency* dan Laplace dari graf lainnya.

ABSTRACT

Febry, Ifkra. 2019 **The Spectrum of Antiadjacency Matrix and Laplacian Matrix Graph Inverse of Modulo Group.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Dr. Usman Pagalay, M.Si.

Keyword: antiadjacency matrix, Laplacian matrix, antiadjacency spectrum, Laplacian spectrum, inverse graph, modulo group.

Graph can be shown in the from of matrix, like antiadjacency matrix is denoted by $\mathbf{A}^+(\mathbf{G})$ obtained from adjacency matrix denoted $\mathbf{A}(\mathbf{G})$, Laplacian matrix is denoted by $\mathbf{L}(\mathbf{G})$ obtained from the reduction operation of degree matrix denoted $\mathbf{D}(\mathbf{G})$ and matrix $\mathbf{A}(\mathbf{G})$ indicated by $\mathbf{L}(\mathbf{G}) = \mathbf{D}(\mathbf{G}) - \mathbf{A}(\mathbf{G})$. When the graph is in the form of a matrix, then it can be determined the eigenvalue in the first row and algebraic multiplicity in the second row is called the spectrum. The spectrum obtained from the matrix $\mathbf{A}^+(\mathbf{G})$ is called the antiadjacency matrix spectrum denoted as **Spec** $(\mathbf{A}^+(\mathbf{G}))$ and what is obtained from the matrix $\mathbf{L}(\mathbf{G})$ is called the Laplacian spectrum denoted as **Spec** $(\mathbf{L}(\mathbf{G}))$. The purpose of this study is to look for patterns from **Spec** $(\mathbf{A}^+(\mathbf{G}))$ and **Spec** $(\mathbf{L}(\mathbf{G}))$. The results of this study were obtained:

a. Spectrum antiadjacency matrix and Laplacian matrix of the inverse graph of the modulo group for odd n is:

$$\mathbf{Spec}\left(A^+(\Gamma_s(Z_n))\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \frac{n-1}{2} & 1 & \frac{n-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Spec}\left(L(\Gamma_s(Z_n))\right) = \begin{bmatrix} n & n-2 & 0 \\ \frac{n-1}{2} & \frac{n-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

b. Spectrum antiadjacency matrix and Laplacian matrix is the inverse graph of the modulo group for n even and $n = 4k+2, k \in \mathbb{N}$ is:

$$\mathbf{Spec}\left(A^+(\Gamma_s(Z_n))\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{n-2}{4} & 1 & \frac{n-2}{2} & 1 & \frac{n-2}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Spec}\left(L(\Gamma_s(Z_n))\right) = \begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ \frac{n-2}{4} & \frac{n}{2} & \frac{n-2}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

c. Spectrum antiadjacency matrix and Laplacian matrix is the inverse graph of the modulo group for n even and $n = 4k+4, k \in \mathbb{N}$ is:

$$\mathbf{Spec}\left(A^+(\Gamma_s(Z_n))\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{n-4}{4} & 2 & \frac{n-4}{2} & 2 & \frac{n-4}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Spec}\left(L(\Gamma_s(Z_n))\right) = \begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ \frac{n}{4} & \frac{n}{2} & \frac{n-4}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

For further research, it is expected to find various kinds of theorems about spectrum other than antiadjacency and Laplacian from other graphs.

ملخص

فبري، إفكرى. 2019. **طيف مصفوفة مكافحة التجاوز ومصفوفة لابلاس غراف انعكاس جروب مودولو**. بحث شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعه الحكوميه الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشارين: (١) الدكتور عبدالشاكر، الماجستير. (٢) الدكتور عثمان فغلي، الماجستير.

الكلمات الرئيسيه: مصفوفة مكافحة، مصفوفة لابلاس، الطيف المضادة للعدوانية، طيف لابلاس، الرسم العكسي مجموعة **مودولو**.

.

يمكن أن يظهر الرسم البياني في المصفوفة ، مثل المصفوفة المضادة للعمود تدل على $\mathbf{A^+(G)}$ تم الحصول عليها من مصفوفة *adjacency* المشار إليها $\mathbf{A(G)}$ ، تدل مصفوفة $\mathbf{L(G)}$ Laplace التي تم الحصول عليها من عملية التخفيض لمصفوفة درجة تدل على $\mathbf{D(G)}$ ومصفوفة $\mathbf{A(G)}$ المشار إليها بواسطة $\mathbf{L(G) = D(G) - A(G)}$ عندما يكون الرسم البياني في شكل مصفوفة، فإنه يمكن تحديد القيمة الذاتية في الصف الأول وتسمى التعددية الجبرية في الصف الثاني بالطيف. يطلق على الطيف المتحصل عليه من المصفوفة $\mathbf{A^+(G)}$ طيف مصفوفة *antiadjacency* والذي يشار إليه على أنه $\mathbf{Spec(A^+(G))}$ ويسمى ما يتم الحصول عليه من المصفوفة $\mathbf{L(G)}$ بالطيف الخاص بـ Laplace الذي يشار إليه على أنه $\mathbf{Spec\,L(G)}$. الغرض من هذه الدراسة هو البحث عن أنماط من المواصفات $\mathbf{Spec\,A^+(G)}$و $\mathbf{Spec\,L(G)}$ تم الحصول على نتائج هذه الدراسة:

أ. مصفوفة مناهضة التكاثف ومصفوفة لابلاس للرسم البياني العكسي لمجموعة لمودولو n odd هي:

$$\mathbf{Spec}\left(A^+(\Gamma_s(Z_n))\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \frac{n-1}{2} & 1 & \frac{n-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Spec}\ \left(L(\Gamma_s(Z_n))\right) = \begin{bmatrix} n & n-2 & 0 \\ \frac{n-1}{2} & \frac{n-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

ب. مصفوفة معاداة الطيف ومصفوفة لابلاس هي الرسم المعكوس لمجموعة لمودولو $\boldsymbol{n}$. و $n = 4k + 2, k \in N$ ، هي:

$$\textbf{Spec}\left(A^{+}\left(\Gamma_s(Z_n)\right)\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{n-2}{4} & 1 & \frac{n-2}{2} & 1 & \frac{n-2}{4} \end{bmatrix}$$

$$\textbf{Spec}\left(L\left(\Gamma_s(Z_n)\right)\right) = \begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ \frac{n-2}{4} & \frac{n}{2} & \frac{n-2}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

ج. مصفوفة مناهضة التكاثف ومصفوفة لابلاس هي الرسم المعكوس لمجموعة لمودولو n و

$n = 4k + 4\ k \in N$، هي:

$$\textbf{Spec}\left(A^{+}\left(\Gamma_s(Z_n)\right)\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{n-4}{4} & 2 & \frac{n-4}{2} & 2 & \frac{n-4}{4} \end{bmatrix}$$

$$\textbf{Spec}\left(L\left(\Gamma_s(Z_n)\right)\right) = \begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ \frac{n}{4} & \frac{n}{2} & \frac{n-4}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

لمزيد من البحث من المتوقع أن تكون قادرة على العثور على أنواع مختلفة من النظريات حول الطيف غير المضادة للكآبة ولابلاس من الرسوم البيانية الأخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sisi. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $n(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $m(G)$. Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v, ditulis $e = uv$. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut terkait langsung *(incident)*, dan titik u dan v disebut ujung dari e (Chartrand, dkk, 2016).

Teori graf juga membahas tentang suatu graf yang dibangun dari grup, misalnya graf invers dan komplemen graf invers. Misalkan $(\Gamma, *)$ adalah grup berhingga dan $S = \{u \in \Gamma | u \neq u^{-1}\}$. Didefinisikan graf invers yang terkait dengan Γ, yaitu $G_S(\Gamma)$ adalah graf yang himpunan titiknya anggota dengan Γ sedemikian sehingga dua titik yang berbeda u dan v adalah terhubung langsung jika dan hanya jika $u * v \in S$ atau $v * u \in S$ (Monther dan Yusuf, 2017).

Salah satu kajian dalam teori spekral graf adalah menentukan spektrum pada graf. Spektrum pada graf merupakan pasangan terurut dari nilai-nilai eigen matriks ketetanggaan beserta multiplisitasnya. Jika λ adalah nilai eigen dari matriks A, maka multiplisitas aljabar didefinisikan sebagai multiplisitas dari λ sebagai akar polinom karakteristik dari A. Multiplisitas geometri didefinisikan sebagai dimensi dari ruang eigen Eλ. Matriks simetri, multiplisitas geometri sama dengan multiplisitas aljabarnya (Kolman, 2007).

Adapun penelitian sebelumnya yang sudah dilakukan para peneliti tentang spectrum graf yaitu Shuhua Yin (2006) meneliti spektrum *Adjacency* dan spektrum *Laplace* pada graf Gl yang diperoleh dari graf komplit Kl dengan menambahkan pohon isomorfik berakar untuk masing-masing titik di Kl. Yuanping Zhang (2008) meneliti tentang Q-spectrum graf lolipop. Abdussakir, dkk (2009) meneliti spektrum Adjacency pada graf Komplit (Kn), graf Star (Sn), graf Bipartisi Komplit (Km,n), dan graf Lintasan (Pn). Ayyaswamy dan Balachandran (2010) meneliti spectrum Detour beberapa graf. Imam Fachruddin (2010) meneliti spektrum graf hasil kali Cartesius. Lailatul Khusnah (2011) meneliti spektrum Detour pada Graf Komplit (Kn). Bayu Tara Wijaya (2011) meneliti spektrum Detour Graf m-Partisi Komplit.

Hakikat keberadaan manusia di atas sendi kekeluargaan erat hubungannya dengan tali silaturahim. Dihimpunnya semua unsur ini didalam hati nurani manusia dan dijadikannya titik pusat untuk mengatur masyarakat islam di atas pondasinya. Dipelihara golongan lemah melalui rasa soladaritas antar keluarga, yang bertuhankan Sang Maha Pencipta Yang Maha Esa; dan dipeliharanya masyarakat ini dari kekejian, kezaliman, dan fitnah; serta diaturnya keluarga mislim, masyarakat muslim, dan seluruh manusia muslim diatas prinsip kesatuan rububiyah dan kesatuan kemanusian. Allah Swt. berfirman dalam al-Quran surat an-Nisa ayat 1, yaitu:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ ٱتَّقُواْ رَبَّكُمُ ٱلَّذِي خَلَقَكُم مِّن نَّفۡسٖ وَٰحِدَةٖ وَخَلَقَ مِنۡهَا زَوۡجَهَا وَبَثَّ مِنۡهُمَا رِجَالٗا كَثِيرٗا وَنِسَآءٗۚ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَ ٱلَّذِي تَسَآءَلُونَ بِهِۦ وَٱلۡأَرۡحَامَۚ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَلَيۡكُمۡ رَقِيبٗا

Artinya: *"Hai sekalian manusia, bertakwalah kepada Tuhan-mu yang telah menciptakan kamu dari seorang diri, dan dari padanya Allah menciptakan isterinya; dan dari pada keduanya Allah memperkembang biakkan laki-laki dan perempuan yang banyak. dan bertakwalah kepada Allah yang dengan (mempergunakan) nama-Nya kamu saling meminta satu sama lain, dan (peliharalah) hubungan silaturrahim. Sesungguhnya Allah selalu menjaga dan mengawasi kamu*" (*QS.An-Nisa'/4:1)*

Dalam al-Quran surat an-Nisa ayat 1 menjelaskan bahwa agar umat manusia senantiasa bertakwa kepada Allah swt, dan mengingat akan kekuasan-Nya yang telah menciptakan manusia dari satu iradah, yang bersumber dari satu asal usul. Dan menjaga kekeliruan pandangan yang menyakitkan dan merendahkan seorang wanita. Serta membangun keluarga dan memeliharanya serta menjalin silaturrahimdan menjaganya.

Merujuk pada al-Quran surat an-Nisa ayat 1 menyatakan bahwa permasalahan tentang sendi kekeluargaan erat hubungannya dengan tali silaturrahim, tak terlepas juga bahwa ilmu tersebut juga dibahas dalam bidang matematika. Salah satunya tentang spektrum matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace graf invers dari grup modulo.

Melihat penelitian-penelitian sebelumnya, maka peneliti merasa perlu untuk meneliti spektrum suatu graf, yang lebih dikhususkan pada spektrum *antiadjacency* dan spektrum Laplace dengan judul "Spektrum Matriks *Antiadjacency* dan Matriks Laplace Graf Invers dari Grup Modulo".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana pola umum spektrum matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace graf invers dari grup modulo untuk n ganjil?
2. Bagaimana pola umum spektrum matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace graf invers dari grup modulo untuk n genap dan $n = 4\mathrm{k} + 2, \mathrm{k} \in \mathbb{N}$?
3. Bagaimana pola umum spektrum matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace graf invers dari grup modulo untuk n genap dan $n = 4\mathrm{k} + 4, \mathrm{k} \in \mathbb{N}$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah

1. Untuk mengetahui pola umum spektrum matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace graf invers dari grup modulo untuk n ganjil
2. Untuk mengetahui pola umum spektrum matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace graf invers dari grup modulo untuk n ganjil dan $n = 4\mathrm{k} + 2, \mathrm{k} \in \mathbb{N}$
3. Untuk mengetahui pola umum spektrum matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace graf invers dari grup modulo untuk n ganjil dan $n = 4\mathrm{k} + 4, \mathrm{k} \in \mathbb{N}$

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan informasi tentang pola umum dari spektrum matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace graf invers dari grup modulo untuk n ganjil

2. Memberikan informasi tentang pola umum spektrum matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace graf invers dari grup modulo untuk n ganjil dan $n = 4\mathrm{k} + 2, \mathrm{k} \in \mathbb{N}$
3. Memberikan informasi tentang pola umum spektrum matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace graf invers dari grup modulo untuk n ganjil dan $n = 4\mathrm{k} + 4, \mathrm{k} \in \mathbb{N}$.

1.5 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini metode yang digunakan penulis adalah studi literatur dengan mempelajari dan menelaah beberapa buku, jurnal, dan referensi lain yang mendukung penelitian ini.

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1 Mengidentifikasi semua anggota dari grup modulo yaitu Z_3 hingga Z_{16}

2 Menggambar graf invers dari grup modulo yaitu Z_3 hingga Z_{16}

3 Menentukan matriks *adjacency* dan matriks *antiadjacency*

4 Mencari spektrum dari matriks *antiadjacency* graf invers dari grup modulo.

5 Mencari matriks *degree* dan matriks Laplace dengan cara mengurangi matriks *adjacency* dengan matriks *degree*.

6 Mencari nilai eigen dari matriks *antiandjacency* dan matriks Laplace.

7 Mencari spektrum matriks Laplace graf invers dari grup modulo.

8 Mencari pola spektrum matriks *antiandjacency* dan matriks Laplace graf invers dari grup modulo dan dirumuskan menjadi suatu teorema serta dibuktikan kebenarannya secara umum.

1.6 Batasan Masalah

Untuk lebih memfokuskan penelitian, maka grup modulo yang dibahas untuk pencarian pola umum dibatasi pada Z_3 hingga Z_{16}.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah dalam menelaah dan memahami skripsi ini, maka penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi kedalam beberapa sub bab dengan rumusannya sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini akan dibahas mengenai teori-teori yang berhubungan dengan pembahasan pola umum dari spektrum matriks *Antiadjacency* dan spektrum matriks Laplace

Bab III Pembahasan

Pada bab ini akan dibahas mengenai pola umum dari spektrum matriks *Antiadjacency* dan spektrum matriks Laplace

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dilakukan dan saran bagi pembaca yang akan melanjutkan penelitian dalam skripsi ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Grup

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G tidak sama dengan himpunan kosong $(G \neq 0)$ dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk semua $a, b, c \in G$ (yaitu $*$ asosiatif).
2. Ada suatu elemen e di G sehingga $a * e = e * a = a$, untuk semua $a \in G$ (e disebut identitas di G).
3. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu elemen a^{-1} di G sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} disebut invers dari a).

Sebagai tambahan, grup $(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in G$ (Dummit dan Foote, 2004).

Contoh:

Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat, maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup karena berlaku:

i. Operasi penjumlahan $(+)$ pada $\mathbb{Z}$ merupakan operasi biner yang terdefinisi di $\mathbb{Z}$ sebab operasi biner merupakan pemetaan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a + b \in \mathbb{Z}$. Sehingga $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi $+$.
ii. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka $a + (b + c) = (a + b) + c$. Jadi operasi $+$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$.
iii. Terdapat anggota identitas yaitu 0 terhadap operasi $*$ di $\mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.

iv. Untuk $a \in \mathbb{Z}$ terdapat a^{-1} yaitu $(-a) \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Berdasarkan i, ii, iii, dan iv di atas $\mathbb{Z}$ memenuhi aksioma grup maka terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

2.2 Modulo

Misalkan s dan t bilangan bulat, dan n bilangan bulat positif. Maka dapat dituliskan $s \equiv t(mod\ n)$ jika n membagi $\mathrm{t} - \mathrm{s}$. $s \equiv t(mod\ n)$ dibaca "s kongruen t modulo n". Bilangan bulat positif n disebut modulus.

2.3 Graf

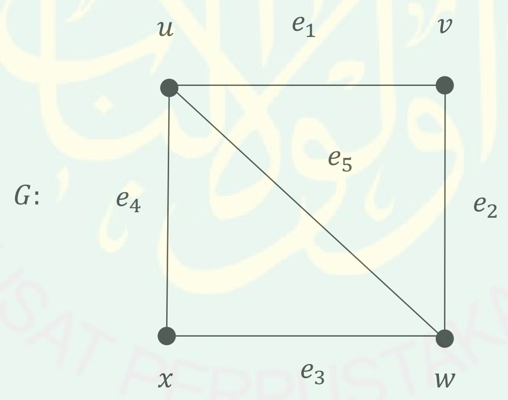
Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dari unsur-unsur yang disebut titik *(vertex)* dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan tak terurut (u, v) dari titik-titik u dan v yang berbeda di $V(G)$ disebut sisi *(edge)*. Selanjutnya sisi $e = (u, v)$ pada graf G ditulis $e = uv$ (Chartrand, dkk, 2016).

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut titik-titik yang terhubung langsung *(adjacent vertices)*, sedangkan u dan e disebut terkait langsung *(incident)*, begitu juga dengan v dan e. Selanjutnya, jika e_1 dan e_2 adalah sisi-sisi berbeda di G yang terkait langsung *(incident)* dengan titik, maka e_1 dan e_2 adalah sisi-sisi yang terhubung langsung *(adjacent edges)* (Chartrand, dkk, 2016).

Suatu graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Graf dengan satu titik dan tidak mempunyai sisi disebut graf trivial.Banyaknya titik di graf G disebut order dari G yang dilambangkan dengan $n(G)$, sedangkan banyaknya sisi disebut ukuran *(size)* dari G yang dilambangkan dengan $m(G)$. Graf $G(n, m)$ memiliki order n dan size m (Chartrand, dkk, 2016).

Graf G dapat dipresentasikan dalam bentuk diagram (gambar) yang setiap titik G digambarkan dengan suatu noktah dan setiap sisi yang menghubungkan dua titik di G digambarkan dengan kurva sederhana (ruas garis) dengan titik-titik akhir di kedua titik tersebut. Ada tiga cara untuk menggambarkan suatu graf, yaitu dalam bentuk diagram secara geometri, matriks, dan dengan menggunakan himpunan pasangan berurutan (Budayasa, 2007).

Misalnya diberikan graf G dengan $V(G) = \{u, v, w, x\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dimana $e_1 = uv, e_2 = vw, e_3 = wx, e_4 = ux, e_5 = uw$. Maka G dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.1 Graf ***G***

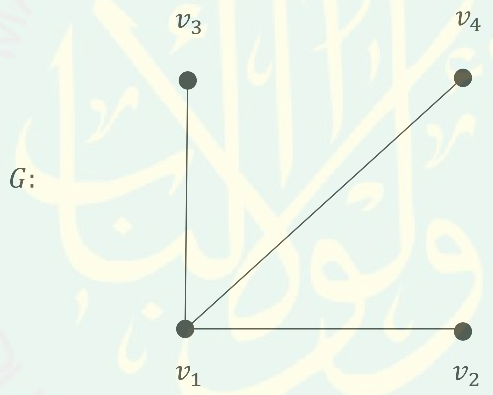
Graf G pada Gambar 2.1 mempunyai 4 titik dan 5 sisi sehingga $n(G) = 4$ dan $m(G) = 5$ (Budayasa, 2007).

2.3.1 Graf Terhubung

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v, ditulis $e = uv$. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, sedangkan u dan e, v dan e disebut terkait langsung *(incident)*. (Chartrand, dkk, 2016).

Contoh:

Misalkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4\}$. Maka G dapat digambarkan sebagai berikut:



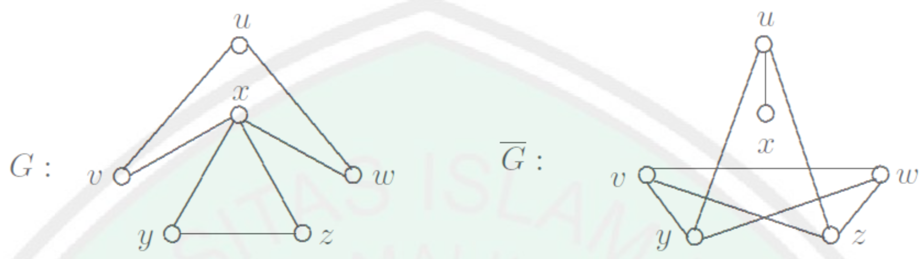
Gambar 2.2 Graf Terhubung

Graf G pada Gambar 2.2 adalah graf terhubung karena G memuat lintasan $v_1 - v_2$ untuk setiap dua titik yang berbeda v_1 dan v_2 di G, begitu juga dengan $v_1 - v_3$ dan $v_1 - v_4$.

2.3.2 Komplemen Graf

Komplemen G (ditulis $\overline{G}$) dari graf G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ sedemikian sehingga dua titik terhubung langsung di $\overline{G}$ jika dan hanya jika titik tersebut tidak terhubung langsung di G. Jika graf G berorde n dan berukuran m, maka $\overline{G}$ berorde n memiliki ukuran $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) - m$ (Chartrand, dkk, 2016).

Contoh:



Gambar 2.3 Graf ***G*** dan Komplemennya

Pada graf G, titik u dan v terhubung langsung dan titik u dan v di $\overline{G}$ tidak terhubung langsung, begitu juga dengan titik lain yang terhubung langsung di graf G.

2.3.3 Graf Invers dari Grup

Misalkan $(\Gamma,*)$ adalah grup berhingga dan $S = \{u \in \Gamma | u \neq u^{-1}\}$. Didefinisikan graf invers yang terkait dengan Γ, yaitu $G_S(\Gamma)$ adalah graf yang himpunan titiknya anggota dengan Γ sedemikian sehingga dua titik yang berbeda u dan v adalah terhubung langsung jika dan hanya jika $u * v \in S$ atau $v * u \in S$ (Monther dan Yusuf, 2017).

Catatan

1. Jelas, identitas e adalah anggota trivial yang invers terhadap dirinya sendiri dalam grup berhingga Γ. Maka $e \notin S$. Sehingga menyebabkan kardinalitas dari S kurang dari kardinalitas dari Γ. Khususnya, jika Γ tidak memuat anggota yang invers terhadap dirinya sendiri selain identitas maka $|S| = |\Gamma| - 1$.

2. Banyaknya anggota S selalu genap, maka $|S| = |\Gamma| - 1$ jika banyaknya anggota Γ ganjil.
3. Untuk sebarang graf invers, $\deg e = |S|$ (Monther dan Yusuf, 2017).

2.3.4 Representasi Graf dalam Matriks

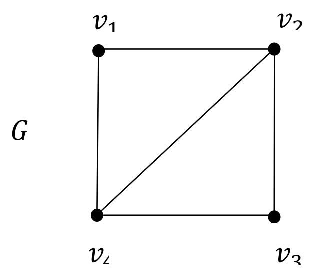
Misalkan G graf dengan order n $(n \geq 1)$ dan ukuran m serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Matriks keterhubungan titik atau matriks keterhubungan dari graf G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})$, adalah matriks $(n \times n)$ dengan unsur pada baris ke -i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j dan 0 untuk lainnya. Dengan kata lain, matriks keterhubungan dapat ditulis $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}) = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq n$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ,\text{jika } v_i\, v_j \in E(G) \\ 0 & ,\text{jika } v_i\, v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Matriks keterhubungan suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya. Hal ini karena graf tidak memuat *loop* dan tidak memuat sisi paralel.

Contoh:

Misalkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$. Maka diagram dan matriks keterhubungan graf G sebagai berikut:



$$\boldsymbol{A}(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.4 Graf $\boldsymbol{G}$ dan Matriks Keterhubungan Titik

Misalkan G graf dengan order $n(n \geq 1)$ dan ukuran m serta himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Matriks keterhubungan sisi dari graf G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{G})$, adalah matriks $(m \times m)$ dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika sisi e_i terhubung langsung dengan sisi e_j, dan 0 untuk lainnya. Dengan kata lain, matriks keterhubungan sisi dapat ditulis $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{G}) = [b_{ij}], 1 \leq i, \boldsymbol{j} \leq m$, dengan

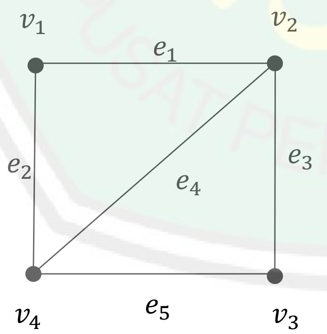
$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } e_i \text{ dan } e_j \text{ terhubung langsung} \\ 0 & \text{, jika } e_i \text{ dan } e_j \text{ tidak terhubung langsung} \end{cases}$$

Matriks keterhubungan sisi suatu graf G juga merupakan matriks simetri dengan unsur 0 dan 1 dan memuat nilai 0 pada diagonal utamanya.

Contoh:

Misalkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$. Maka diagram dan matriks keterhubungan graf G sebagai berikut:

G:



$$\boldsymbol{B}(G) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.5 Graf $\boldsymbol{G}$ dan Matriks Keterhubungan Sisi

Misalkan G graf dengan order $n(n \geq 1)$ dan ukuran m serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Matriks keterkaitan dari graf G, dinotasikan dengan $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{G})$**,** adalah matriks $(n \times m)$ dengan unsur pada baris i dan kolom j adalah bilangan yang menyatakan berapa kali titik v_i terkait langsung dengan sisi e_j. Dengan kata lain, matriks keterkaitan dapat ditulis $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{G}) = [c_{ij}], 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, dengan

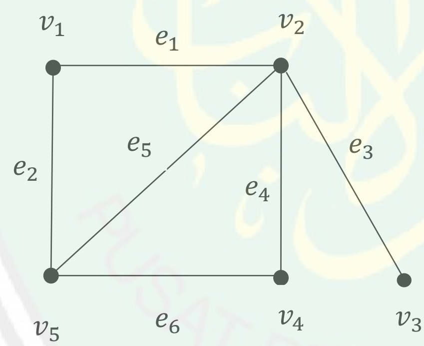
$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } v_i \text{ terkait langsung dengan } e_j \\ 0 & \text{, jika } v_i \text{ tidak terkait langsung dengan } e_j \end{cases}$$

Matriks keterkaitan suatu graf G adalah matriks dengan unsur 0 dan 1 (Abdussakir, dkk, 2016).

Contoh:

Misalkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_5, v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_4v_5\}$. Maka diagram dan matriks keterkaitan dari graf G sebagai berikut:

G:



$$\boldsymbol{I}(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.6 Graf $\boldsymbol{G}$ dan Matriks Keterkaitannya

2.3.5 Matriks *Antiadjacency*

Misalkan G adalah graf dengan order p dan $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})$ adalah matriks *adjacency* dari graf G. Didefinisikan matriks $J = [e_{ij}], 1 \leq i, j \leq p$ dengan

$$e_{ij} = 1, \forall i, j, 1 \leq i, j \leq p$$

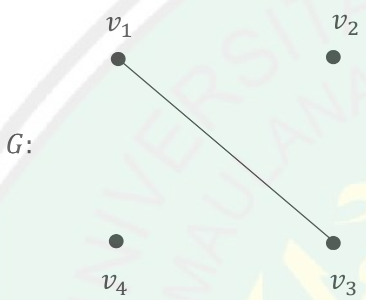
maka matriks $\boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{G}) = [b_{ij}]$, dengan $\boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{J} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})$ disebut matriks *antiadjacency* dari graf G, atau dapat ditulis juga:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, jika } i \neq j \text{, dan } v_i \text{ terhubung langsung dengan } v_j \\ 0 & \text{, lainnya} \end{cases}$$

(Putra dan Sugeng, 2015)

Contoh

Dari graf G pada Gambar 2.4 dapat ditentukan diagram dan matriks *antiadjacency*nya $A^+(G)$ graf G sebagai berikut:



$$\boldsymbol{A^+(G)} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Gambar 2.7 Graf G dan Matriks *Antiadjacency*

2.4 Matriks

Suatu matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan matriks dinamakan entri. Matriks terdiri dari entri-entri yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk persegi panjang dengan panjang dan lebar menunjukkan banyak baris dan banyak kolom. Matriks yang memiliki m baris dan n kolom disebut matriks berukuran $m \times n$. Bentuk umum dari matriks adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } [a_{ij}]_{m \times n}$$

(Anton & Rorres, 2004)

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad [2 \quad 1 \quad 0], \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad [4]$$

Matriks pertama pada contoh di atas mempunyai 3 baris dan 2 kolom, sehingga ukurannya adalah 3×2. Angka pertama selalu menunjukkan banyaknya baris dan angka kedua menunjukkan banyaknya kolom. Jadi, matriks selebihnya dalam contoh di atas berturut-turut mempunyai ukuran $1 \times 3, 2 \times 2, 2 \times 1, 1 \times 1$ (Anton & Rorres, 2004).

2.4.1 Operasi Matriks

2.4.1.1 Penjumlahan Matriks

Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Matriks-matriks yang ukurannya berbeda tidak bisa ditambahkan (Anton & Rorres, 2004).

Contoh:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Maka

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 + (-4) & 1 + 3 & 0 + 5 \\ -1 + 2 & 0 + 2 & 2 + 0 \\ 4 + 3 & -2 + 2 & 7 + (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2.4.1.2 Pengurangan Matriks

Jika $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka selisih $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Matriks-matriks yang ukurannya berbeda tidak bisa dikurangikan.

Contoh:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 9 & -4 & 6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 9 & -4 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 6 & -9 & 5 \end{bmatrix}$$

2.4.1.3 Perkalian Matriks

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $m \times r$ dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali $\boldsymbol{AB}$ adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut, untuk mencari entri dalam baris *i* dan kolom *j* dari $\boldsymbol{AB}$, pilihlah baris *i* dari matriks $\boldsymbol{A}$ dan kolom *j* dari matriks $\boldsymbol{B}$, kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan. Perkalian $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ terdefinisi jika dan hanya jika banyak kolom matriks $\boldsymbol{A}$ sama dengan banyak baris matriks $\boldsymbol{B}$.

Contoh:

Matriks $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

dengan mengalikannya, maka menghasilkan

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Jadi $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ (Anton & Rorres, 2004).

2.4.2 Matriks Laplace

Misalkan $G(V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E, dengan $|V| = n$ dan $|E| = m$. Jadi G adalah graf dengan n titik dan m sisi.

Matriks Laplace dari G adalah matriks $L(G) = D(G) - A(G)$, dengan $D(G)$ adalah diagonal matriks dimana entrinya adalah derajat titik dari G dan $A(G)$ adalah matriks *Adjacency* graf G (Biyikoglu, dkk, 2009). Matriks derajat dari graf G, dinotasikan dengan $D(G)$ adalah matriks diagonal yang elemen baris ke-i dan kolom ke-j derajat dari $v_i, i = 1,2,3,\ldots,n$. Jadi, matriks derajat dari graf G dapat ditulis $D(G) = [d_{ij}], 1 \leq i,j \leq n$, dengan

$$d_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

(Abdussakir, dkk, 2016).

2.4.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Kata "vektor eigen" adalah ramuan bahasa Jerman dan Inggris. Dalam bahasa Jerman "eigen" dapat diterjemahkan sebagai "sebenarnya" atau "karakteristik". Oleh karena itu, nilai eigen dapat juga dinamakan nilai sebenarnya atau nilai karakteristik. Dalam literatur lama kadang-kadang dinamakan akar-akar *latent*.

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam R^n dinamakan vektor eigen *(eigen vector)* dari $\boldsymbol{A}$ jika Ax adalah kelipatan skalar dari x; yakni, $Ax = \lambda x$ untuk suatu skalar λ . Skalar λ dinamakan nilai eigen *(eigen value)* dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ (Anton & Rorres, 2004).

Teorema

Misalkan $\boldsymbol{A}$ matriks $n \times n$. Bilangan λ adalah nilai eigen jika dan hanya jika $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$, dimana $\boldsymbol{I}$ notasi dari matriks $n \times n$ (Jain & Gunawardena, 2004).

Nilai eigen dan vektor eigen mempunyai tafsiran geometrik yang bermanfaat dalam R^2 dan R^3. Jika λ adalah nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan x, maka $\boldsymbol{A}x = \lambda x$, sehingga perkalian oleh $\boldsymbol{A}$ akan memperbesar x, atau membalik arah x, yang bergantung pada nilai λ. Untuk mencari nilai eigen matriks $\boldsymbol{A}$ yang berukuran $n \times n$ maka dituliskan kembali $\boldsymbol{A}x = \lambda x$ sebagai $\boldsymbol{A}x = \lambda \boldsymbol{I}x$ atau secara ekivalen $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})x = 0$.

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan ini. Akan tetapi persamaan ini akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika $det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$ ini dinamakan persamaan karakteristik $\boldsymbol{A}$, skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$. Bila diperluas, maka determinan $det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ adalah polinom λ yang dinamakan polinom karakteristik dari $\boldsymbol{A}$ (Anton & Rorres, 2004).

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $n\ x\ n$, maka polinom karakteristik $\boldsymbol{A}$ harus terpenuhi sebanyak n dan koefisien λ^n adalah 1. Jadi, polinom karakteristik dari matriks $n \times n$ mempunyai bentuk $det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$.

Jika $\boldsymbol{A}$ matriks $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen satu sama lain:

1. λ adalah nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$.
2. Sistem persamaan $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})x = 0$ mempunyai pemecahan yang tak trivial.
3. Ada vektor tak nol x di dalam R^n sehingga $\boldsymbol{A}x = \lambda x$.
4. λ adalah pemecahan riil dari persamaan karakteristik $det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$.

Vektor eigen $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vektor tak nol x yang memenuhi $\boldsymbol{A}x = \lambda x$. Secara ekivalen, vektor eigen yang bersesuaian dengan λ adalah vektor tak nol dalam ruang pemecahan dari $(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})x = 0$. Ruang pemecahan ini dinamakan sebagai ruang eigen *(eigen space)* dari $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan λ.

2.5 Spektrum Laplace

Spektrum Laplace dari graf berhingga Γ didefinisikan dengan spektrum dari matriks Laplace yang merupakan himpunan dari nilai eigen bersamaan dengan multiplisitas dari nilai eigen tersebut.

Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen berbeda dari L, dengan $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$, dan misalkan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing λ_i, maka matriks berordo $(2 \times n)$ yang memuat $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pada baris pertama dan $m(\lambda_1), m(\lambda_2), \dots, m(\lambda_n)$ pada baris kedua disebut spektrum graf G. Spektrum yang diperoleh dari matriks $L(G)$ disebut spektrum *Laplace* dan dinotasikan dengan $spec_L(G)$. Jadi, spektrum *Laplace* dari graf G dapat ditulis dengan

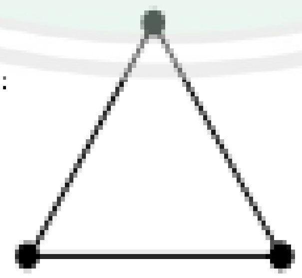
$$\boldsymbol{spec_L}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & m(\lambda_2) & \cdots & m(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

(Abdussakir, dkk, 2009).

Contoh:

Untuk menentukan spektrum Laplace suatu graf, perhatikan graf komplit K_3 beserta matriks keterhubungan titik dan matriks derajatnya berikut ini:

K_3:



$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Pertama menghitung matriks Laplace dengan rumus

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kemudian menentukan nilai eigen dari matriks Laplace menggunakan persamaan $\det(L - \lambda I\,) = 0$. Diperoleh

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0$$

$$\left(\lambda^3 - 2\right)(\lambda + 1)^2 = 0$$

Jadi, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$.

Berdasarkan persamaan karakteristik tersebut maka didapatkan nilai *algebraic multiplicity*, $m(\lambda_1) = 1$ dan $m(\lambda_2) = 2$.

Dengan demikian, spektrum Laplace graf K_3 adalah

$$\boldsymbol{spec_L}(K_3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.6 Kajian dalam al-Quran

Agama Islam merupakan agama yang penuh rahmat, cinta dan kasih sayang. Agama Islam merupakan agama yang menjunjung tinggi perdamaian. Untuk mewujudkannya diperlukan kerjasama antar manusia, baik dari umat muslim maupun bagi yang non muslim. Salah satu faktor untuk mendukung terjadinya perdamaian adalah menjaga tali silaturahmi yang bagaimana telah dijelaskan pada surat Al-Hujurat ayat 13.

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقۡنَٰكُم مِّن ذَكَرٖ وَأُنثَىٰ وَجَعَلۡنَٰكُمۡ شُعُوبٗا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓاْۚ إِنَّ أَكۡرَمَكُمۡ عِندَ ٱللَّهِ أَتۡقَىٰكُمۡۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٞ

Artinya: *"Hai manusia, Sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah ialah orang yang paling takwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal" (QS. al-Hujurat: 13).*

M. Quraih Shihab menyatakan bahwa ayat tersebut memberikan uraian tentang prinsip dasar hubungan manusia, karena pada ayat ini seruan tidak lagi ditujukan secara khusus kepada orang-orang beriman, akan tetapi kepada seluruh jenis manusia yaitu "Wahai sekalian manusia" (Shihab, 2004). Sebagaimana telah dijelaskan dalam hadits yang berbunyi:

قَالَ أَبُو عِيسَى التِّرْمِذِيُّ: حَدَّثَنَا أَحْمَدُ بْنُ مُحَمَّدٍ، حَدَّثَنَا عَبْدُ اللَّهِ بْنُ الْمُبَارَكِ، عَنْ عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ، عَنِ النَّبِيِّ صَلَّى مَوْلَى الْمُنْبَعِثِ الْمَلِكِ بْنِ عِيسَى الثَّقَفِيِّ، عَنْ يَزِيدَ عَبْدِ اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قَالَ: "تَعَلَّمُوا مِنْ أَنْسَابِكُمْ مَا تَصِلُونَ بِهِ أَرْحَامَكُمْ؛ فَإِنَّ صِلَةَ الرَّحِمِ مَحَبَّةٌ فِي الْأَهْلِ، مَثْرَاةٌ فِي الْمَالِ، مَنْسَأَةٌ فِي الْأَثَرِ

Artinya: *"Abu Isa At-Turmuzi mengatakan, telah menceritakan kepada kami Ahmad ibnu Muhammad, telah menceritakan kepada kami Abdullah ibnul Mubarak, dari Abdul Malik ibnu Isa As-Saqafi, dari Yazid Mula Al-Munba'is, dari Abu Hurairah r.a., dari Nabi Saw. yang telah bersabda: Pelajarilah nasab-nasab kalian untuk mempererat silaturrahim (hubungan keluarga) kalian, karena sesungguhnya silaturrahim itu menanamkan rasa cinta kepada kekeluargaan, memperbanyak harta, dan memperpanjang usia".*

Agama Islam di samping mengatur hubungan antar manusia (*hablum min an Nâs*), juga menitikberatkan kepada hubungan antar manusia dengan Allah (*hablum min Allah*). Sebagaimana Allah Swt berfirman surat Ali Imran ayat 112:

ضُرِبَتۡ عَلَيۡهِمُ ٱلذِّلَّةُ أَيۡنَ مَا ثُقِفُوٓاْ إِلَّا بِحَبۡلٖ مِّنَ ٱللَّهِ وَحَبۡلٖ مِّنَ ٱلنَّاسِ وَبَآءُو بِغَضَبٖ مِّنَ ٱللَّهِ وَضُرِبَتۡ عَلَيۡهِمُ ٱلۡمَسۡكَنَةُۚ ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمۡ كَانُواْ يَكۡفُرُونَ بِ‍َٔايَٰتِ ٱللَّهِ وَيَقۡتُلُونَ ٱلۡأَنۢبِيَآءَ بِغَيۡرِ حَقّٖۚ ذَٰلِكَ بِمَا عَصَواْ وَّكَانُواْ يَعۡتَدُونَ

Artinya: *"Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia, dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. yang demikian itu karena mereka kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh para nabi tanpa alasan yang benar. Demikian itu disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas"(QS. Ali Imran: 112).*

. Al-Quran mengenalkan konsep yang luar biasa: keragaman itu untuk manusia saling mengenal satu sama lain. Dengan saling mengenal perbedaan manusi bisa belajar membangun peradaban. Dengan saling tahu perbedaan di antara manusia maka kita akan lebih toleran, manusia mendapat kesempatan belajar satu sama lain. Kesalahpahaman sering terjadi karena manusia belum saling mengenal keragaman diantara manusia.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini, dibahas mengenai spektrum graf terhubung yang terbentuk dari grup modulo berdasarkan tabel *Cayley*.

3.1 Spektrum Matriks Antiadjacency dan Matriks Laplace Graf Invers dari Grup Modulo untuk *n* Ganjil

Sebelum menentukan pola umum spektrum *antiadjacency* dan spektrum Laplace dari grup modulo Z_n, maka akan dibahas terlebih dahulu grup modulo Z_3, Z_5, dan Z_7. Sehingga ketika diimplementasikan ke grup modulo Z_n dapat dipaparkan pada subbab berikut ini.

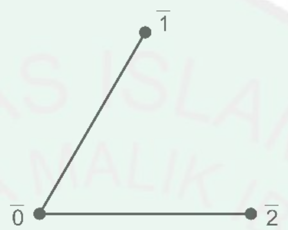
3.1.1 Grup Modulo Z_3

Dalam subbab ini, akan dijelaskan tentang cara mengidentifikasi anggota dari grup-grup modulo. Dalam penelitian ini dibatasi hanya pada modulo Z_3 hingga Z_7, sedangkan untuk grup modulo yang lain maka akan mengikuti pola yang didapatkan pada penelitian ini. Cara mengidentifikasi anggota grup modulo adalah sebagai berikut. Lagkah pertama tentukan unsur-unsur dari modulo Z_3 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.1 Operasi Penjumlahan Modulo 3

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Dari Tabel 3.1 diketahui bahwa unsur yang inversnya diri sendiri dari grup modulo Z_3 adalah $\bar{0}$ dan unsur yang inversnya bukan diri sendiri adalah $\bar{1}$ dan $\bar{2}$. Kemudian langkah selanjutnya adalah menggambarkan graf invers dari modulo Z_3. Graf invers yang terbentuk dari operasi penjumlahan Tabel 3.1 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf Invers Grup Modulo Z_3

Sehingga diperoleh matriks *antiadjacency* dari Gambar 3.1 sebagai berikut:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_3)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah menentukan matriks *adjacency* maka akan ditentukan matriks *antiadjacency* dari grup modulo Z_3 dengan cara mengganti entri "0" menjadi "1", sedangkan yang berentri "1" diganti menjadi "0". Seperti matriks berikut:

$$\mathbf{A}^+(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_3)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian langkah selanjutnya adalah mencari spektrum dari matriks *antiadjacency* dengan cara mencari nilai Eigen pada matriks *antiadjacency* grup modulo Z_3.

$$\det(\mathbf{A}^+(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_3)) - \boldsymbol{\lambda}\, \boldsymbol{I}) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh persamaan karakteristik. Dengan menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang terdapat pada *software* Maple, diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\lambda(-2+\lambda)}{-1+\lambda} \end{bmatrix} = 0$$

Karena $\det\left(\mathbf{A}^{+}(\boldsymbol{\Gamma}_{s}(\mathbf{Z_3}))-\boldsymbol{\lambda I}\right)$ adalah hasil perkalian entri diagonal matriks utama, maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (1-\lambda)(1-\lambda)\left(-\frac{\lambda(-2+\lambda)}{-1+\lambda}\right) \\ &= \frac{-\lambda^4+4\lambda^3-5\lambda^2+2\lambda}{-1+\lambda} \\ &= -\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda \\ &= (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda) \end{aligned}$$

Dengan menetapkan $P(\lambda)=0$ maka diperoleh nilai Eigen $\lambda_1=2,\ \lambda_2=1$, dan $\lambda_3=0$, dan multiplisitas masing-masing dari nilai Eigennya $m\lambda_1=1$, $m\lambda_2=1$, dan $m\lambda_3=1$. Maka diperoleh spektrum matriks $antiadjacency$ graf invers dari grup modulo Z_3 adalah:

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{A}^{+}}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_3})) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah itu menentukan matriks *degree* dari graf invers grup modulo Z_3 dengan cara melihat derajat titik sehingga diperoleh:

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_3})) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian menentukan matriks Laplace dengan cara mengitung selisih dari matriks *degree* dengan matriks *adjacency* dengan rumus:

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_3})) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_3})) = \mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_3}))$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_3}))$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan spektrum dari matriks Laplace grup modulo Z_3 dengan menggunakan cara seperti mencari spektrum matriks *antiadjacency*.

$$\det(\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z_3})) - \boldsymbol{\lambda}\, \boldsymbol{I}) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Dengan menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang terdapat pada *software* Maple, diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda + 2 & -1 & -1 \\ 0 & -\dfrac{\lambda^2 - 3\lambda + 1}{\lambda - 2} & \dfrac{1}{\lambda - 2} \\ 0 & 0 & -\dfrac{(\lambda^2 - 4\lambda + 3)\lambda}{\lambda^2 - 3\lambda + 1} \end{bmatrix} = 0$$

Karena $\det(\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z_3})) - \boldsymbol{\lambda I})$ adalah hasil perkalian entri diagonal matriks utama, maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (2-\lambda)\left(-\frac{\lambda^2 - 3\lambda + 1}{\lambda - 2}\right)\left(-\frac{(\lambda^2 - 4\lambda + 3)\lambda}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}\right) \\ &= \frac{-\lambda^5 + 7\lambda^4 - 16\lambda^3 + 13\lambda^2 - 3\lambda}{\lambda^2 - 3\lambda + 1} \\ &= \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda) \end{aligned}$$

Dengan menetapkan $P(\lambda) = 0$ maka diperoleh nilai Eigen $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 0$, dan multiplisitas masing-masing dari nilai Eigennya $m\lambda_1 = 1$, $m\lambda_2 = 1$, dan $m\lambda_3 = 1$. Maka diperoleh spektrum matriks Laplace graf invers dari grup modulo Z_3 adalah:

$$\mathbf{Spec_L}(\boldsymbol{\Gamma_s}(\mathbf{Z_3})) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

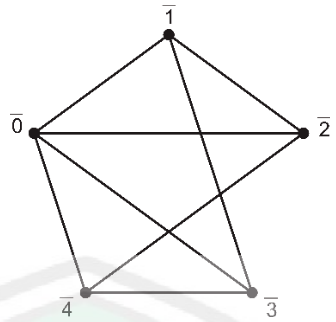
3.1.2 Grup Modulo Z_5

Pada sub bab ini akan dicari spektrum dari matriks *antiadjaceny* dan matriks Laplace dari grup modulo Z_5. Adapun langkah-langkah yang dilakukan sama seperti pada pembahasan sebelumnya. Pertama akan ditentukan unsur-unsur dari anggota grup modulo Z_5.

Tabel 3.2 Operasi Penjumlahan Modulo 5

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

Dari Tabel 3.2 diketahui bahwa unsur yang inversnya diri sendiri dari grup modulo Z_5 adalah $\bar{0}$ dan unsur yang inversnya bukan diri sendiri adalah $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ dan $\bar{4}$. Kemudian langkah selanjutnya adalah menggambarkan graf invers dari grup modulo Z_5. Graf invers yang terbentuk dari operasi penjumlahan Tabel 3.2 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.2 Graf Invers Grup Modulo Z_5

Sehingga diperoleh matriks *adjacency* titik dari Gambar 3.2 sebagai berikut:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_5)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah menentukan matriks *adjacency* maka akan ditentukan matriks *antiadjacency* dari graf invers grup modulo Z_5 dengan cara mengganti entri "0" menjadi "1", sedangkan yang berentri "1" diganti menjadi "0". Seperti matriks berikut:

$$\mathbf{A}^{+}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_5)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian langkah selanjutnya adalah mencari spektrum dari matriks *antiadjacency* dengan cara mencari nilai Eigen pada matriks *antiadjacency* grup modulo Z_5.

$$\det\left(\mathbf{A}^{+}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_5)) - \boldsymbol{\lambda}\, \boldsymbol{I}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh persamaan karakteristik. Dengan menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang terdapat pada *software* Maple, diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda+1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda-1} \end{bmatrix} = 0$$

Karena $\det\left(\mathbf{A}^{+}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z_5})) - \boldsymbol{\lambda I}\right)$ adalah hasil perkalian entri diagonal matriks utama, maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (1-\lambda)(\lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2) \\ &= \lambda^5 - 5\lambda^4 + 8\lambda^3 - 4\lambda^2 \\ &= (\lambda-2)^2(\lambda-1)(\lambda)^2 \end{aligned}$$

Dengan menetapkan $P(\lambda) = 0$ maka diperoleh nilai Eigen $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 0$, dan multiplisitas masing-masing dari nilai Eigennya $m\lambda_1 = 2$, $m\lambda_2 = 1$, dan $m\lambda_3 = 2$. Maka diperoleh spektrum matriks $antiadjacency$ graf invers dari grup modulo Z_5 adalah:

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{A^+}}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_5})) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah itu menentukan matriks *degree* dari graf invers grup modulo Z_5 dengan cara melihat derajat titik sehingga diperoleh:

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_5)) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Kemudian tentukan matriks Laplace dengan cara mengitung selisih dari matriks *degree* dengan matriks *adjacency* dengan rumus $\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_5)) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_5)) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_5))$ seperti langkah sebelumnya, maka diperoleh:

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_5)) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan spektrum dari matriks Laplace grup modulo Z_5 dengan menggunakan cara seperti mencari spektrum matriks *antiadjacency*.

$$\det(\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_{s}(\mathbf{Z}_5)) - \boldsymbol{\lambda}\, \boldsymbol{I}) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh persamaan karakteristik. Dengan menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang terdapat pada *software* Maple, diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\left[\left[-\lambda+4,-1,-1,-1,-1\right],\right.$$
$$\left[0,-\frac{\lambda^2-7\lambda+11}{\lambda-4},-\frac{\lambda-5}{\lambda-4},-\frac{\lambda-5}{\lambda-4},\frac{1}{\lambda-4}\right],$$
$$\left[0,0,-\frac{\lambda^3-10\lambda^2+30\lambda-24}{\lambda^2-7\lambda+11},\frac{2\lambda-9}{\lambda^2-7\lambda+11},-\frac{\lambda^2-8\lambda+15}{\lambda^2-7\lambda+11}\right],$$
$$\left[0,0,0,-\frac{\lambda^4-13\lambda^3+58\lambda^2-99\lambda+45}{\lambda^3-10\lambda^2+30\lambda-24},-\frac{(\lambda-3)\left(\lambda^2-8\lambda+15\right)}{\lambda^3-10\lambda^2+30\lambda-24}\right],$$
$$\left.\left[0,0,0,0,-\frac{\left(\lambda^2-8\lambda+15\right)\lambda}{\lambda^2-5\lambda+3}\right]\right]$$

Karena $\det(\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_5))-\boldsymbol{\lambda I})$ adalah hasil perkalian entri diagonal matriks utama, maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\lambda) &= -\lambda^5+16\lambda^4-94\lambda^3+240\lambda^2-225\lambda \\ &= (\lambda-5)^2(\lambda-3)^2(\lambda) \end{aligned}$$

Dengan menetapkan $\mathrm{P}(\lambda)=0$ maka diperoleh nilai Eigen $\lambda_1=5,\ \lambda_2=3$, dan $\lambda_3=0$, dan multiplisitas masing-masing dari nilai Eigennya $m\lambda_1=2$, $m\lambda_2=2$, dan $m\lambda_3=1$. Maka diperoleh spektrum matriks Laplace graf invers dari grup modulo Z_5 adalah:

$$\mathbf{Spec_L}(\boldsymbol{\Gamma_s}(\mathbf{Z_5}))=\begin{bmatrix}5 & 3 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

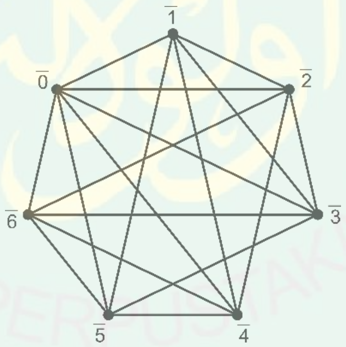
3.1.3 Grup Modulo Z_7

Pada sub bab ini akan dicari spektrum dari matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace dari grup modulo Z_7. Adapun langkah-langkah yang dilakukan sama seperti pada pembahasan sebelumnya. Pertama akan ditentukan unsur-unsur dari anggota grup modulo Z_7.

Tabel 3.3 Operasi Penjumlahan Modulo 7

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$

Dari Tabel 3.3 diketahui bahwa unsur yang inversnya diri sendiri dari grup modulo Z_7 adalah $\overline{0}$ dan unsur yang inversnya bukan diri sendiri adalah $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}$, dan $\overline{6}$. Kemudian langkah selanjutnya adalah menggambarkan graf invers dari grup modulo Z_7. Graf invers yang terbentuk dari operasi penjumlahan Tabel 3.3 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf Invers Grup Modulo Z_7

Sehingga diperoleh matriks *adjacency* titik dari Gambar 3.3 sebagai berikut:

$$\mathbf{A(\Gamma_s(Z_7))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah menentukan matriks *adjacency* maka akan ditentukan matriks *antiadjacency* dari graf invers grup modulo Z_7 dengan cara mengganti entri “0” menjadi “1”, sedangkan yang berentri “1” diganti menjadi “0”. Seperti matriks berikut:

$$\mathbf{A}^{+}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_7)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian langkah selanjutnya adalah mencari spektrum dari matriks *antiadjacency* dengan cara mencari nilai Eigen pada matriks *antiadjacency* grup modulo Z_7.

$$\det\left(\mathbf{A}^{+}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_7)) - \boldsymbol{\lambda}\, \mathbf{I}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh persamaan karakteristik. Dengan menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang terdapat pada *software* Maple, diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\det\begin{bmatrix} -\lambda+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda+1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda+1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda-1} \end{bmatrix} = 0$$

Karena $\det(\mathbf{A}^{+}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_7)) - \boldsymbol{\lambda I})$ adalah hasil perkalian entri diagonal matriks utama, maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\lambda) &= -\lambda^7 + 7\lambda^6 - 18\lambda^5 + 20\lambda^4 - 8\lambda^3 \\ &= (\lambda-2)^3(\lambda-1)(\lambda)^3 \end{aligned}$$

Dengan menetapkan $\mathrm{P}(\lambda) = 0$ maka diperoleh nilai Eigen $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1$, dan $\lambda_3 = 0$, dan multiplisitas masing-masing dari nilai Eigennya $m\lambda_1 = 3$, $m\lambda_2 = 1$, dan $m\lambda_3 = 3$. Maka diperoleh spektrum matriks *antiadjacency* graf invers dari grup modulo Z_7 adalah:

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{A}^{+}}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_7)) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah itu menentukan matriks *degree* dari graf invers grup modulo Z_7 dengan cara melihat derajat titik sehingga diperoleh:

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_7)) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Kemudian tentukan matriks Laplace dengan cara mengitung selisih dari matriks *degree* dengan matriks *adjacency* dengan rumus $\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_7})) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_7})) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_7}))$ seperti langkah sebelumnya, maka diperoleh:

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_7})) = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Kemudian langkah selanjutnya adalah mencari spektrum Laplace dari matriks Laplace dengan cara mencari nilai Eigen pada matriks Laplace grup modulo Z_7.

$$\det(\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{s}}(\mathbf{Z_7})) - \boldsymbol{\lambda}\,\boldsymbol{I}) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 6-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5-\lambda & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5-\lambda & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 5-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 5-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh persamaan karakteristik. Dengan menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang terdapat pada *software* Maple, diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\left[\left[-\lambda+6,-1,-1,-1,-1,-1,-1\right],\right.$$
$$\left[0,-\frac{\lambda^2-11\lambda+29}{\lambda-6},-\frac{\lambda-7}{\lambda-6},-\frac{\lambda-7}{\lambda-6},-\frac{\lambda-7}{\lambda-6},-\frac{\lambda-7}{\lambda-6},\frac{1}{\lambda-6}\right],$$
$$\left[0,0,-\frac{\lambda^3-16\lambda^2+82\lambda-132}{\lambda^2-11\lambda+29},-\frac{(\lambda-6)(\lambda-7)}{\lambda^2-11\lambda+29},-\frac{(\lambda-6)(\lambda-7)}{\lambda^2-11\lambda+29},\frac{2\lambda-13}{\lambda^2-11\lambda+29},-\frac{\lambda^2-12\lambda+35}{\lambda^2-11\lambda+29}\right],$$
$$\left[0,0,0,-\frac{\lambda^3-15\lambda^2+69\lambda-90}{\lambda^2-10\lambda+22},\frac{3\lambda-20}{\lambda^2-10\lambda+22},-\frac{(\lambda-5)(\lambda-7)}{\lambda^2-10\lambda+22},-\frac{\lambda^2-12\lambda+35}{\lambda^2-10\lambda+22}\right],$$
$$\left[0,0,0,0,-\frac{\lambda^4-20\lambda^3+141\lambda^2-400\lambda+350}{\lambda^3-15\lambda^2+69\lambda-90},-\frac{(\lambda-5)^2(\lambda-7)}{\lambda^3-15\lambda^2+69\lambda-90},-\frac{(\lambda-5)(\lambda^2-12\lambda+35)}{\lambda^3-15\lambda^2+69\lambda-90}\right],$$
$$\left[0,0,0,0,0,-\frac{\lambda^4-19\lambda^3+124\lambda^2-305\lambda+175}{(\lambda-6)(\lambda^2-8\lambda+10)},-\frac{(\lambda-5)(\lambda^2-12\lambda+35)}{(\lambda-6)(\lambda^2-8\lambda+10)}\right],$$
$$\left.\left[0,0,0,0,0,0,-\frac{\lambda(\lambda^2-12\lambda+35)}{\lambda^2-7\lambda+5}\right]\right]$$

Karena $\det(\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_7))-\boldsymbol{\lambda I})$ adalah hasil perkalian entri diagonal matriks utama, maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= -\lambda^7+36\lambda^6-537\lambda^5+4248\lambda^4-18795\lambda^3+44100\lambda^2-42875\lambda \\ &= (\lambda-7)^3(\lambda-5)^3(\lambda) \end{aligned}$$

Dengan menetapkan $P(\lambda)=0$ maka diperoleh nilai Eigen $\lambda_1=7,\ \lambda_2=5$, dan $\lambda_3=0$, dan multiplisitas masing-masing dari nilai Eigennya $m\lambda_1=3$, $m\lambda_2=3$, dan $m\lambda_3=1$. Maka diperoleh spektrum matriks Laplace graf invers dari grup modulo Z_7 adalah:

$$\mathbf{Spec_L}(\boldsymbol{\Gamma_s}(\mathbf{Z_7}))=\begin{bmatrix}7 & 5 & 0\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}$$

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace graf invers dari beberapa grup modulo, di antaranya:

Tabel 3.4 Polinomial Karakteristik Matriks *Antidjacency* Graf Invers dari Grup Modulo untuk *n* ganjil

n	Grup Modulo Z_n	Polinomial Antiadjacency
3	Grup Modulo Z_3	$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda)$
5	Grup Modulo Z_5	$p(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)(\lambda)^2$
7	Grup Modulo Z_7	$p(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 1)(\lambda)^3$
...	...	...
n	Grup Modulo Z_n	$p(\lambda) = (\lambda - 2)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda - 1)(\lambda)^{\frac{n-1}{2}}$

Tabel 3.5 Spektrum Matriks *Antidjacency* Graf Invers dari Grup Modulo untuk *n* ganjil

n	Grup Modulo Z_n	Spektrum
3	Grup Modulo Z_3	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
5	Grup Modulo Z_5	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
7	Grup Modulo Z_7	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
...	...	...
n	Grup Modulo Z_n	$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \frac{n-1}{2} & 1 & \frac{n-1}{2} \end{bmatrix}$

Tabel 3.6 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace Graf Invers dari Grup Modulo untuk *n* ganjil

n	Grup Modulo Z_n	Polinomial Antiadjacency
3	Grup Modulo Z_3	$p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda)$
5	Grup Modulo Z_5	$p(\lambda) = (\lambda - 5)^2(\lambda - 3)^2(\lambda)$
7	Grup Modulo Z_7	$p(\lambda) = (\lambda - 7)^3(\lambda - 5)^3(\lambda)$
...	...	...
n	Grup Modulo Z_n	$p(\lambda) = (\lambda - n)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda - n + 2)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda)$

Tabel 3.7 Spektrum Matriks Laplace Graf Invers dari Grup Modulo untuk *n* ganjil

n	Grup Modulo Z_n	Spektrum
3	Grup Modulo Z_3	$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
5	Grup Modulo Z_5	$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
7	Grup Modulo Z_7	$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
...	...	...
n	Grup Modulo Z_n	$\begin{bmatrix} n & n-2 & 0 \\ \frac{n-1}{2} & \frac{n-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Teorema 1

Polinomial karakteristik matriks *antiadjacency* graf invers dari grup modulo Z_n untuk n ganjil adalah

$$\mathrm{P}(\lambda) = (\lambda - 2)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda - 1)(\lambda)^{\frac{n-1}{2}}$$

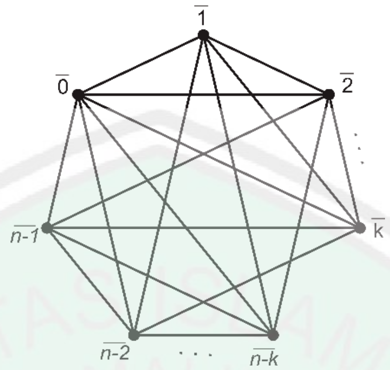
Bukti

Diketahui anggota grup modulo (Z_n) untuk n ganjil adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{k}, \dots, \overline{n-k}, \dots \overline{n-2}, \overline{n-1}\}$. Maka langkah selanjutnya adalah mengidentifikasi operasi penjumlahan elemen grup modulo Z_n sebagai berikut:

Tabel 3.8 Operasi Penjumlahan Modulo n

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	...	$\bar{k}$	...	$\overline{n-k}$	...	$\overline{n-2}$	$\overline{n-1}$
$\bar{0}$	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$	...	$\bar{k}$	...	$\overline{n-k}$	...	$\overline{n-2}$	$\overline{n-1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	...	$\overline{k+1}$	...	$\overline{n-k+1}$	...	$\overline{n-1}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	...	$\overline{k+2}$	...	$\overline{n-k+2}$	...	$\bar{0}$	$\bar{1}$
...	...	...	...		...		...		...	...
$\bar{k}$	$\bar{k}$	$\overline{k+1}$	$\overline{k+2}$	...	$\overline{2k}$	...	$\bar{0}$	...	$\overline{n-2+k}$	$\overline{n-1+k}$
...	...	...	...		...		...		...	...
$\overline{n-k}$	$\overline{n-k}$	$\overline{n-k+1}$	$\overline{n-k+2}$	...	$\bar{0}$	...	$\overline{2n-2k}$	...	$\overline{2n-2-k}$	$\overline{2n-1-k}$
...	...	...	...		...		...		...	...
$\overline{n-2}$	$\overline{n-2}$	$\overline{n-1}$	0	...	$\overline{n-2+k}$	...	$\overline{2n-2-k}$	...	$\overline{2n-4}$	$\overline{2n-3}$
$\overline{n-1}$	$\overline{n-1}$	0	$\bar{1}$	...	$\overline{n-1+k}$	...	$\overline{2n-1-k}$	...	$\overline{2n-3}$	$\overline{2n-2}$

Dari Tabel 3.8 diketahui bahwa unsur yang inversnya diri sendiri dari grup modulo Z_n adalah $\bar{0}$ dan unsur yang inversnya bukan diri sendiri adalah $\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{k}, \dots, \overline{n-k}, \dots \overline{n-2}$, dan $\overline{n-1}$. Kemudian langkah selanjutnya adalah menggambarkan graf invers dari grup modulo Z_n. Graf invers yang terbentuk dari operasi penjumlahan Tabel 3.8 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.4 Graf Invers Grup Modulo Z_n

Sehingga diperoleh matriks *adjacency* titik dari Gambar 3.4 sebagai berikut:

$$\mathbf{A(\Gamma_s(Z_n))} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \dots & \bar{k} & \dots & \overline{n-k} & \dots & \overline{n-2} & \overline{n-1} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \\ \vdots \\ \bar{k} \\ \vdots \\ \overline{n-k} \\ \vdots \\ \overline{n-2} \\ \overline{n-1} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Setelah menentukan matriks *adjacency* titik maka akan ditentukan matriks *antiadjacency* titik dari graf invers grup modulo Z_n dengan cara mengganti entri "0" menjadi "1", sedangkan yang berentri "1" diganti menjadi "0". Seperti matrik berikut:

$$\mathbf{A^+(\Gamma_s(Z_n))} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \dots & \bar{k} & \dots & \overline{n-k} & \dots & \overline{n-2} & \overline{n-1} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \\ \vdots \\ \bar{k} \\ \vdots \\ \overline{n-k} \\ \vdots \\ \overline{n-2} \\ \overline{n-1} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kemudian langkah selanjutnya adalah mencari spektrum dari matriks *antiadjacency* dengan cara mencari nilai eigen pada matriks *antiadjacency* grup modulo Z_n.

$$\det\left(\mathbf{A}^{+}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_n)) - \boldsymbol{\lambda I}\right)$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1-\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh persamaan karakteristik. Dengan menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang terdapat pada *software* Maple, diperoleh hasil sebagai berikut.

$$det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{-\lambda(\lambda-2)}{\lambda-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \frac{-\lambda(\lambda-2)}{\lambda-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \frac{-\lambda(\lambda-2)}{\lambda-1} \end{bmatrix} = 0$$

Karena $\det\left(\mathbf{A}^{+}(\boldsymbol{\Gamma}_{s}(\mathbf{Z}_{n}))-\boldsymbol{\lambda I}\right)$ adalah hasil perkalian entri diagonal matriks utama, maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.:

$$\mathrm{P}(\lambda)=(\lambda-2)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda-1)(\lambda)^{\frac{n-1}{2}}$$

***Corollary* 1**

Misal grup modulo $(Z_n)=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\dots,\overline{k},\dots,\overline{n-k},\dots\overline{n-2},\overline{n-1}\}$, untuk n ganjil. Maka spektrum matriks $antiadjacency$ adalah:

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{A}^{+}}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{n}})\right)=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ \dfrac{n-1}{2} & 1 & \dfrac{n-1}{2}\end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan teorema 1, polinomial karakteristik matriks *antiadjacency* graf invers dari grup modulo Z_n untuk n ganjil adalah:

$$\mathrm{P}(\lambda)=(\lambda-2)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda-1)(\lambda)^{\frac{n-1}{2}}$$

Dengan menetapkan $\mathrm{P}(\lambda)=0$ maka diperoleh nilai Eigen $\lambda_1=2,\ \lambda_2=1$, dan $\lambda_3=0$, dan multiplisitas masing-masing dari nilai Eigennya $m\lambda_1=\frac{n-1}{2}$, $m\lambda_2=1$, dan $m\lambda_3=\frac{n-1}{2}$. Maka diperoleh spektrum matriks $antiadjacency$ graf invers dari grup modulo $\mathrm{Z_n}$ untuk n ganjil adalah:

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{A}^{+}}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{n}})\right)=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ \dfrac{n-1}{2} & 1 & \dfrac{n-1}{2}\end{bmatrix}$$

Teorema 2

Polinomial karakteristik matriks Laplace graf invers dari grup modulo Z_n untuk n ganjil adalah

$$p(\lambda)=(\lambda-n)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda-n+2)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda)$$

Bukti

Dari Gambar 3.4 maka diperoleh matriks *degree* dari graf invers grup modulo $\mathrm{Z_n}$ dengan cara melihat derajat titik sehingga diperoleh derajat titiknya adalah:

$$
\begin{array}{ll}
\bar{0} = \mathrm{n} - 1 & \qquad\qquad \overline{\mathrm{n}-\mathrm{k}} = \mathrm{n} - 2 \\
\bar{1} = \mathrm{n} - 2 & \qquad\qquad \vdots \\
\bar{2} = \mathrm{n} - 2 & \qquad\qquad \overline{\mathrm{n}-2} = \mathrm{n} - 2 \\
\vdots & \qquad\qquad \overline{\mathrm{n}-1} = \mathrm{n} - 2 \\
\bar{\mathrm{k}} = \mathrm{n} - 2 &
\end{array}
$$

Sehingga diperoleh matriks *degree* sebagai berikut:

$$
\mathbf{D}\ (\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{n}})) =
\begin{array}{cc}
& \begin{matrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \dots & \bar{\mathrm{k}} & \dots & \overline{\mathrm{n}-\mathrm{k}} & \dots & \overline{\mathrm{n}-2} & \overline{\mathrm{n}-1} \end{matrix} \\
\begin{matrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \\ \vdots \\ \bar{\mathrm{k}} \\ \vdots \\ \overline{\mathrm{n}-\mathrm{k}} \\ \vdots \\ \overline{\mathrm{n}-2} \\ \overline{\mathrm{n}-1} \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & n-2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & n-2 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & n-2 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & n-2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & n-2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Kemudian menentukan matriks Laplace dengan cara mengitung selisih dari matriks *degree* dengan matriks *adjacency* dengan rumus $\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{n}})) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{n}}))$ **-** $\mathbf{A}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{n}}))$, maka diperoleh:

$$
\mathbf{L}\ (\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{n}})) =
\begin{array}{cc}
& \begin{matrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \dots & \bar{\mathrm{k}} & \dots & \overline{\mathrm{n}-\mathrm{k}} & \dots & \overline{\mathrm{n}-2} & \overline{\mathrm{n}-1} \end{matrix} \\
\begin{matrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \\ \vdots \\ \bar{\mathrm{k}} \\ \vdots \\ \overline{\mathrm{n}-\mathrm{k}} \\ \vdots \\ \overline{\mathrm{n}-2} \\ \overline{\mathrm{n}-1} \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & \dots & -1 & \dots & -1 & -1 \\
-1 & n-2 & -1 & \dots & -1 & \dots & -1 & \dots & -1 & 0 \\
-1 & -1 & n-2 & \dots & -1 & \dots & -1 & \dots & 0 & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
-1 & -1 & -1 & \dots & n-2 & \dots & 0 & \dots & -1 & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
-1 & -1 & -1 & \dots & 0 & \dots & n-2 & \dots & -1 & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
-1 & -1 & 0 & \dots & -1 & \dots & -1 & \dots & n-2 & -1 \\
-1 & 0 & -1 & \dots & -1 & \dots & -1 & \dots & -1 & n-2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Kemudian langkah selanjutnya adalah mencari spektrum dari matriks Laplace dengan cara mencari nilai eigen pada matriks Laplapce grup modulo $\mathrm{Z_n}$.

$$\det(\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_n)) - \boldsymbol{\lambda I}) =$$

$$\begin{bmatrix}
n-1-\lambda & -1 & -1 & \dots & -1 & \dots & -1 & \dots & -1 & -1 \\
-1 & n-2-\lambda & -1 & \dots & -1 & \dots & -1 & \dots & -1 & 0 \\
-1 & -1 & n-2-\lambda & \dots & -1 & \dots & -1 & \dots & 0 & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
-1 & -1 & -1 & \dots & n-2-\lambda & \dots & 0 & \dots & -1 & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
-1 & -1 & -1 & \dots & 0 & \dots & n-2-\lambda & \dots & -1 & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
-1 & -1 & 0 & \dots & -1 & \dots & -1 & \dots & n-2-\lambda & -1 \\
-1 & 0 & -1 & \dots & -1 & \dots & -1 & \dots & -1 & n-2-\lambda
\end{bmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh persamaan karakteristik. Dengan menggunakan metode *Gaussian Elimination* yang terdapat pada *software* Maple, karena $\det \mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_n)) - \boldsymbol{\lambda I}$ adalah hasil perkalian entri diagonal matriks utama, maka diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.:

$$\mathrm{P}(\lambda) = (\lambda - n)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda - n + 2)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda)$$

***Corollary* 2**

Misal grup modulo $(Z_n) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{k}, \dots, \overline{n-k}, \dots \overline{n-2}, \overline{n-1}\}$, untuk n ganjil. Maka spektrum matriks Laplace nya adalah:

$$\mathbf{Spec}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\boldsymbol{Z}_n)) = \begin{bmatrix} n & n-2 & 0 \\ \frac{n-1}{2} & \frac{n-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan teorema 2, polinomial karakteristik dari matriks Laplace graf invers dari grup modulo $\mathrm{Z_n}$ untuk n ganjil adalah:

$$\mathrm{P}(\lambda) = (\lambda - n)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda - n + 2)^{\frac{n-1}{2}}(\lambda)$$

Dengan menetapkan $\mathrm{P}(\lambda) = 0$ maka diperoleh nilai Eigen $\lambda_1 = n,\ \lambda_2 = n-2$, $dan\ \lambda_3 = 0$, dan multiplisitas masing-masing dari nilai Eigennya $m\lambda_1 = \frac{n-1}{2},\ m\lambda_2 = \frac{n-1}{2},\ dan\ m\lambda_3 = 1$. Maka diperoleh spektrum matriks Laplace graf invers dari grup modulo, untuk n ganjil adalah:

$$\mathbf{Spec_L}(\Gamma_s(\mathbf{Z_n})) = \begin{bmatrix} n & n-2 & 0 \\ \frac{n-1}{2} & \frac{n-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Spektrum Matriks Antiadjacency dan Matriks Laplace Graf Invers dari Grup Modulo untuk n Genap dan $n = 4\mathbf{k} + 2, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$

Sebelum menentukan pola umum spektrum antiadjacency dan spektrum Laplace dari grup modulo Z_n, maka akan dibahas terlebih dahulu grup modulo Z_6, Z_{10}, dan Z_{14}. Sehingga ketika diimplementasikan ke grup modulo Z_n dapat dipaparkan pada subbab berikut ini.

3.2.1 Grup Modulo Z_6

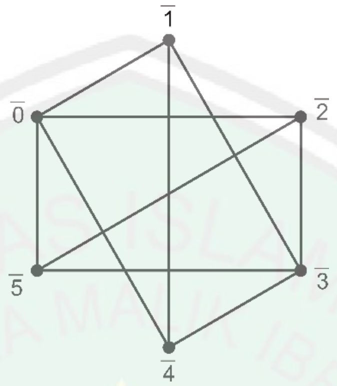
Pada sub bab ini akan dicari spektrum dari matriks *antiadjaceny* dan matriks Laplace dari grup modulo Z_6. Adapun langkah-langkah yang dilakukan sama seperti pada pembahasan sebelumnya. Pertama akan ditentukan unsur-unsur dari anggota grup modulo Z_6.

Tabel 3.9 Operasi Penjumlahan Modulo 6

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$

Dari Tabel 3.9 diketahui bahwa unsur yang inversnya diri sendiri dari grup modulo Z_6 adalah $\bar{0}$ dan $\bar{3}$ dan unsur yang inversnya bukan diri sendiri adalah

$\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}$ dan $\overline{5}$. Kemudian langkah selanjutnya adalah menggambarkan graf invers dari grup modulo Z_6. Graf invers yang terbentuk dari operasi penjumlahan Tabel 3.9 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.5 Graf Invers Grup Modulo Z_6

Sehingga diperoleh matriks *adjacency* titik dari Gambar 3.5 sebagai berikut:

$$\mathbf{A(\Gamma_s(Z_6))} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah menentukan matriks *adjacency* maka akan ditentukan matriks *antiadjacency* dari graf invers grup modulo Z_6 dengan cara mengganti entri "0" menjadi "1", sedangkan yang berentri "1" diganti menjadi "0". Seperti matriks berikut:

$$\mathbf{A^{+}(\Gamma_s(Z_6))} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan perhitungan yang sama seperti sebelumnya, maka diperoleh spektrum *antiadjacency* nya adalah:

$$\mathbf{Spec_{A^{+}}(\Gamma_s(Z_6))} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah itu menentukan matriks *degree* dari graf invers grup modulo Z_6 dengan cara melihat derajat titik dari Gambar 3.5 sehingga diperoleh:

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_6)) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Kemudian tentukan matriks Laplace dengan cara mengitung selisih dari matriks *degree* dengan matriks *adjacency* dengan rumus $\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_6(\mathbf{Z}_6)) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma}_6(\mathbf{Z}_6)) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\Gamma}_6(\mathbf{Z}_6))$ seperti langkah sebelumnya, maka didapati:

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_6)) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Kemudian langkah selanjutnya adalah mencari spektrum Laplace dari matriks Laplace dengan cara mencari nilai eigen pada matriks Laplace grup modulo Z_6. Dengan perhitungan yang sama seperti sebelumnya, maka diperoleh spektrum Laplace nya adalah:

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_6)) = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

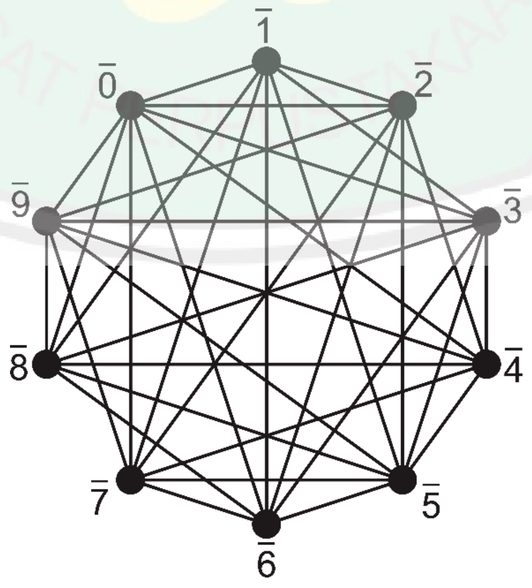
3.2.2 Grup Modulo $\mathbf{Z}_{10}$

Pada sub bab ini akan dicari spektrum dari matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace dari grup modulo Z_{10}. Adapun langkah-langkah yang dilakukan sama seperti pada pembahasan sebelumnya. Pertama akan ditentukan unsur-unsur dari anggota grup modulo Z_{10}.

Tabel 3.10 Operasi Penjumlahan Modulo 10

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$

Dari Tabel 3.10 diketahui bahwa unsur yang inversnya diri sendiri dari grup modulo Z_{10} adalah $\overline{0}$ dan $\overline{5}$ sedangkan unsur yang inversnya bukan diri sendiri adalah $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}$ dan $\overline{9}$. Kemudian langkah selanjutnya adalah menggambarkan graf invers dari grup modulo Z_{10}. Graf invers yang terbentuk dari operasi penjumlahan Tabel 3.10 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.6 Graf Invers Grup Modulo Z_{10}

Sehingga diperoleh matriks *adjacency* titik dari Gambar 3.6 sebagai berikut:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_{10})) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah menentukan matriks *adjacency* maka akan ditentukan matriks *antiadjacency* dari graf invers grup modulo Z_{10} dengan cara mengganti entri “0” menjadi “1”, sedangkan yang berentri “1” diganti menjadi “0”. Seperti matriks berikut:

$$\mathbf{A}^{+}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_{10})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan perhitungan yang sama seperti sebelumnya, maka diperoleh spektrum *antiadjacency* nya adalah:

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{A}^{+}}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_{10})) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah itu menentukan matriks *degree* dari graf invers grup modulo Z_{10} dengan cara melihat derajat titik dari Gambar 3.6 sehingga diperoleh:

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma_s}(\mathbf{Z_{10}})) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Kemudian tentukan matriks Laplace dengan cara mengitung selisih dari matriks *degree* dengan matriks *adjacency* dengan rumus $\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma_{10}}(\mathbf{Z_{10}})) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma_{10}}(\mathbf{Z_{10}})) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\Gamma_{10}}(\mathbf{Z_{10}}))$ seperti langkah sebelumnya, maka didapati:

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma_s}(\mathbf{Z_{10}})) = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 7 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 7 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 7 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 7 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 7 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 7 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Kemudian langkah selanjutnya adalah mencari spektrum Laplace dari matriks Laplace dengan cara mencari nilai Eigen pada matriks Laplace grup modulo Z_{10}. Dengan perhitungan yang sama seperti sebelumnya, maka diperoleh spektrum Laplace nya adalah:

$$\mathbf{Spec_L}(\boldsymbol{\Gamma_s}(\mathbf{Z_{10}})) = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

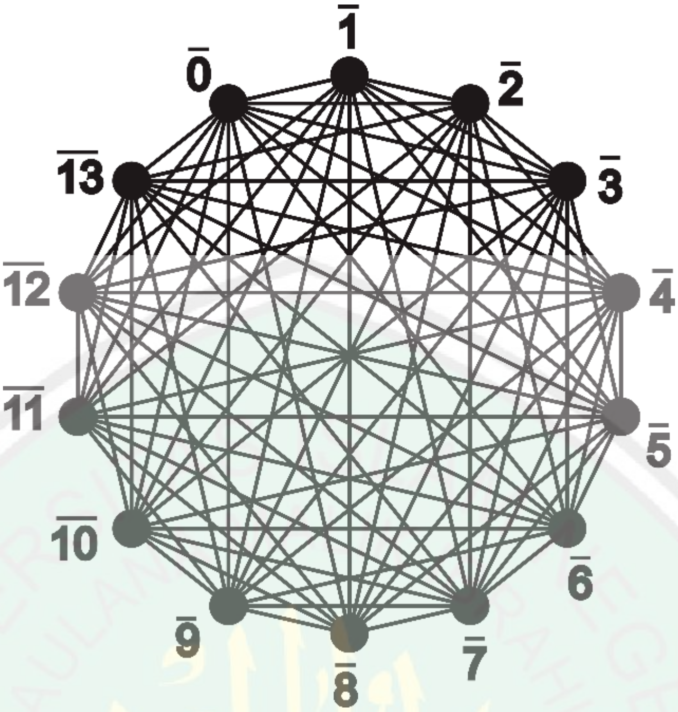
3.2.3 Grup Modulo $\mathbf{Z_{14}}$

Pada sub bab ini akan dicari spektrum dari matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace dari grup modulo Z_{14}. Adapun langkah-langkah yang dilakukan sama seperti pada pembahasan sebelumnya. Pertama akan ditentukan unsur-unsur dari anggota grup modulo Z_{14}.

Tabel 3.11 Operasi Penjumlahan Modulo 14

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{13}$	13	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$

Dari Tabel 3.11 diketahui bahwa unsur yang inversnya diri sendiri dari grup modulo Z_{14} adalah $\overline{0}$ dan $\overline{7}$ sedangkan unsur yang inversnya bukan diri sendiri adalah $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}$ dan $\overline{13}$. Kemudian langkah selanjutnya adalah menggambarkan graf invers dari grup modulo Z_{14}. Graf invers yang terbentuk dari operasi penjumlahan Tabel 3.11 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.7 Graf Invers Grup Modulo Z_{14}

Sehingga diperoleh matriks *adjacency* titik dari Gambar 3.7 sebagai berikut:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_{14})) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah menentukan matriks *adjacency* maka akan ditentukan matriks *antiadjacency* dari graf invers grup modulo Z_{14} dengan cara mengganti entri "0" menjadi "1", sedangkan yang berentri "1" diganti menjadi "0". Seperti matriks berikut:

$$\mathbf{A}^{+}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{14}})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan perhitungan yang sama seperti sebelumnya, maka diperoleh spektrum *antiadjacency* nya adalah:

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{A}^{+}}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{14}})) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah itu menentukan matriks *degree* dari graf invers grup modulo Z_{14} dengan cara melihat derajat titik sehingga diperoleh:

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{14}})) = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Kemudian tentukan matriks Laplace dengan cara mengitung selisih dari matriks *degree* dengan matriks *adjacency* dengan rumus $\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{14}})) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{14}})) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{14}}))$ seperti langkah sebelumnya, maka didapati:

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{14}})) = \begin{bmatrix} 12 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 11 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 11 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 11 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 12 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 11 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 11 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 11 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 11 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 11 \end{bmatrix}$$

Kemudian langkah selanjutnya adalah mencari spektrum Laplace dari matriks Laplace dengan cara mencari nilai Eigen pada matriks Laplace grup modulo Z_{14}. Dengan perhitungan yang sama seperti sebelumnya, maka diperoleh spektrum Laplace nya adalah:

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{14}})) = \begin{bmatrix} 14 & 12 & 10 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace graf invers dari beberapa grup modulo, diantaranya:

Tabel 3.12 Polinomial Karakteristik Matriks *Antidjacency* Graf Invers dari Grup Modulo untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+2}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$

n	Grup Modulo Z_n	Polinomial Antiadjacency
6	Grup Modulo Z_6	$p(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)^2(\lambda)(\lambda+1)$
10	Grup Modulo Z_{10}	$p(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda-2)(\lambda-1)^4(\lambda)(\lambda+1)^2$
14	Grup Modulo Z_{14}	$p(\lambda) = (\lambda-3)^3(\lambda-2)(\lambda-1)^6(\lambda)(\lambda+1)^3$
...	...	...
n	Grup Modulo Z_n	$p(\lambda) = (\lambda-3)^{\frac{n-2}{4}}(\lambda-2)(\lambda-1)^{\frac{n-2}{2}}(\lambda)(\lambda+1)^{\frac{n-2}{4}}$

Tabel 3.13 Spektrum Matriks *Antidjacency* Graf Invers dari Grup Modulo untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+2}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$

n	Grup Modulo Z_n	Spektrum
6	Grup Modulo Z_6	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10	Grup Modulo Z_{10}	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
14	Grup Modulo Z_{14}	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
...	...	...
n	Grup Modulo Z_n	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{n-2}{4} & 1 & \frac{n-2}{2} & 1 & \frac{n-2}{4} \end{bmatrix}$

Tabel 3.14 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace Graf Invers dari Grup Modulo untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+2}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$

n	Grup Modulo Z_n	Polinomial Laplace
6	Grup Modulo Z_6	$p(\lambda) = (\lambda - 6)(\lambda - 4)^3(\lambda - 2)(\lambda)$
10	Grup Modulo Z_{10}	$p(\lambda) = (\lambda - 10)^2(\lambda - 8)^5(\lambda - 6)^2(\lambda)$
14	Grup Modulo Z_{14}	$p(\lambda) = (\lambda - 14)^3(\lambda - 12)^7(\lambda - 10)^3(\lambda)$
...	...	...
n	Grup Modulo Z_n	$p(\lambda) = (\lambda - n)^{\frac{n-2}{4}}(\lambda - n + 2)^{\frac{n}{2}}(\lambda - n + 4)^{\frac{n-2}{4}}(\lambda)$

Tabel 3.15 Spektrum Matriks Laplace Graf Invers dari Grup Modulo untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+2}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$

n	Grup Modulo Z_n	Spektrum
6	Grup Modulo Z_6	$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
10	Grup Modulo Z_{10}	$\begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
14	Grup Modulo Z_{14}	$\begin{bmatrix} 14 & 12 & 10 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
...	...	...
n	Grup Modulo Z_n	$\begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ \frac{n-2}{4} & \frac{n}{2} & \frac{n-2}{4} & 1 \end{bmatrix}$

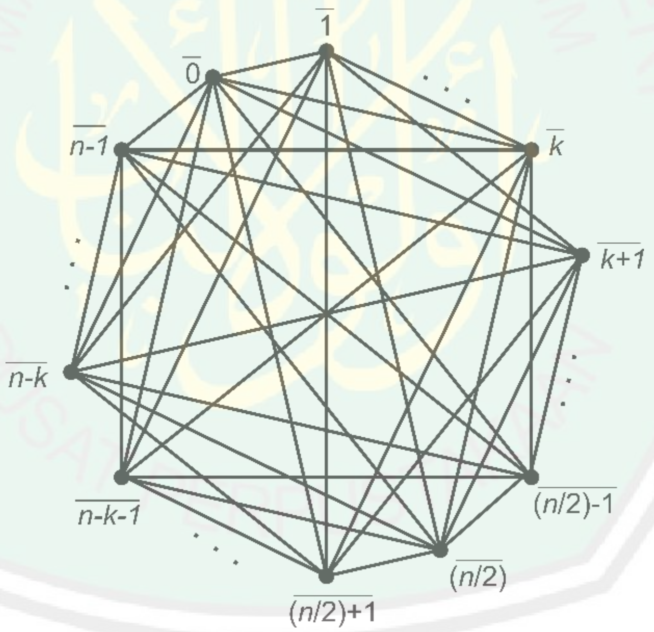
Teorema 3

Polinomial karakteristik matriks *antiadjacency* graf invers dari grup modulo Z_n untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+2}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$ adalah

$$\mathrm{P}(\lambda) = (\lambda - 3)^{\frac{n-2}{4}}(\lambda - 2)(\lambda - 1)^{\frac{n-2}{2}}(\lambda)(\lambda + 1)^{\frac{n-2}{4}}$$

Bukti

Diketahui anggota grup modulo (Z_n) untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+2}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$ adalah $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{k}, \dots, \overline{\frac{n}{2} - k}, \overline{\frac{n}{2}}, \overline{\frac{n}{2} + k}, \dots, \overline{n-k} \dots \overline{n-2}, \overline{n-1}\}$. Maka langkah selanjutnya adalah mengidentifikasi operasi penjumlahan elemen grup modulo Z_n dan diketahui bahwa unsur yang identitasnya diri sendiri dari grup modulo Z_n adalah $\overline{0}$ dan $\overline{\frac{n}{2}}$ dan unsur yang identitasnya bukan diri sendiri adalah $\{\overline{1}, \dots, \overline{k}, \overline{k+1}, \dots, \overline{\frac{n}{2} - 1}, \overline{\frac{n}{2} + 1}, \dots, \overline{n-k-1}, \overline{n-k}, \dots, \overline{n-1}\}$. Kemudian langkah selanjutnya adalah menggambarkan graf invers dari grup modulo Z_n. Graf invers yang terbentuk dari operasi penjumlahan Z_n adalah sebagai berikut:



Gambar 3.8 Graf Invers Grup Modulo Z_n untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+2}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$

Sehingga diperoleh matriks *adjacency* titik dari Gambar 3.8 sebagai berikut:

$$
\mathbf{A}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z_n})) = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} \bar{0} & \bar{1} & \dots & \bar{k} & \overline{k+1} & \dots & \overline{\frac{n}{2}-1} & \overline{\frac{n}{2}} & \overline{\frac{n}{2}+1} & \dots & \overline{n-k-1} & \overline{n-k} & \dots & \overline{n-1} \end{matrix} \\
\begin{matrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \vdots \\ \bar{k} \\ \overline{k+1} \\ \vdots \\ \overline{\frac{n}{2}-1} \\ \overline{\frac{n}{2}} \\ \overline{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ \overline{n-k-1} \\ \overline{n-k} \\ \vdots \\ \overline{n-1} \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 \\
1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\
0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\
1 & 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Setelah menentukan matriks *adjacency* titik maka akan ditentukan matriks *antiadjacency* titik dari graf invers grup modulo $\mathrm{Z_n}$ dengan cara mengganti entri “0” menjadi “1”, sedangkan yang berentri “1” diganti menjadi “0”. Seperti matriks berikut:

$$
\mathbf{A}^{+}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z_n})) = \begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} \bar{0} & \bar{1} & \dots & \bar{k} & \overline{k+1} & \dots & \overline{\frac{n}{2}-1} & \overline{\frac{n}{2}} & \overline{\frac{n}{2}+1} & \dots & \overline{n-k-1} & \overline{n-k} & \dots & \overline{n-1} \end{matrix} \\
\begin{matrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \vdots \\ \bar{k} \\ \overline{k+1} \\ \vdots \\ \overline{\frac{n}{2}-1} \\ \overline{\frac{n}{2}} \\ \overline{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ \overline{n-k-1} \\ \overline{n-k} \\ \vdots \\ \overline{n-1} \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Karena $\det\left(\mathbf{A}^{+}(\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{Z_n})) - \boldsymbol{\lambda I}\right)$ adalah hasil perkalian entri diagonal matriks utama, yang diperoleh dari metode *Gaussian Elimination* yang terdapat pada *software* Maple, sehingga didapati polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)^{\frac{n-2}{4}}(\lambda - 2)(\lambda - 1)^{\frac{n-2}{2}}(\lambda)(\lambda + 1)^{\frac{n-2}{4}}$$

***Corollary* 3**

Misal grup modulo $(Z_n) = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{k}, \overline{k+1}, \dots, \overline{\frac{n}{2}-1}, \overline{\frac{n}{2}}, \overline{\frac{n}{2}+1}, \dots, \overline{n-k-1}, \overline{n-k}, \dots, \overline{n-1}\}$, untuk n genap dimana $\boldsymbol{n = 4k + 2, k} \in \mathbb{N}$. Maka spektrum matriks $antiadjacency$ adalah:

$$\mathbf{Spec_{A^+}}(\boldsymbol{\Gamma_s}(\mathbf{Z_n})) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{n-2}{4} & 1 & \frac{n-2}{2} & 1 & \frac{n-2}{4} \end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan teorema 3, polinomial karakteristik matriks *antiadjacency* graf invers dari grup modulo Z_n untuk n genap dimana $\boldsymbol{n = 4k + 2, k} \in \mathbb{N}$.

$$\mathrm{P}(\lambda) = (\lambda - 3)^{\frac{n-2}{4}}(\lambda - 2)(\lambda - 1)^{\frac{n-2}{2}}(\lambda)(\lambda + 1)^{\frac{n-2}{4}}$$

Dengan menetapkan $\mathrm{P}(\lambda) = 0$ maka diperoleh nilai Eigen $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2\ \ \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = 0,\ dan\ \lambda_5 = -1$, dan multiplisitas masing-masing dari nilai Eigennya $m\lambda_1 = \frac{n-2}{4}$, $m\lambda_2 = 1$, $m\lambda_3 = \frac{n-2}{2}, m\lambda_4 = 1$, dan $m\lambda_5 = \frac{n-2}{4}$. Maka diperoleh spektrum matriks $antiadjacency$ graf invers dari grup modulo, untuk n genap dimana $\boldsymbol{n = 4k + 2, k} \in \mathbb{N}$ adalah:

$$\mathbf{Spec_{A^+}}(\boldsymbol{\Gamma_s}(\mathbf{Z_n})) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{n-2}{4} & 1 & \frac{n-2}{2} & 1 & \frac{n-2}{4} \end{bmatrix}$$

Teorema 4

Polinomial karakteristik matriks Laplace graf invers dari grup modulo Z_n untuk untuk n genap dimana $\boldsymbol{n = 4k + 2, k} \in \mathbb{N}$ adalah

$$\mathrm{P}(\lambda) = (\lambda - n)^{\frac{n-2}{4}}(\lambda - n + 2)^{\frac{n}{2}}(\lambda - n + 4)^{\frac{n-2}{4}}(\lambda)$$

Bukti

Dari Gambar 3.8 maka diperoleh matriks $degree$ dari graf invers grup modulo Z_n dengan cara melihat derajat titik sehingga diperoleh:

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{n}})) = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} \overline{0} & \overline{1} & \cdots & \overline{k} & \overline{k+1} & \cdots & \overline{\frac{n}{2}-1} & \overline{\frac{n}{2}} & \overline{\frac{n}{2}+1} & \cdots & \overline{n-k-1} & \overline{n-k} & \cdots & \overline{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \vdots \\ \overline{k} \\ \overline{k+1} \\ \vdots \\ \overline{\frac{n}{2}-1} \\ \overline{\frac{n}{2}} \\ \overline{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ \overline{n-k-1} \\ \overline{n-k} \\ \vdots \\ \overline{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & n-3 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & n-3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n-3 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-3 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & n-3
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Kemudian menentukan matriks Laplace dengan cara mengitung selisih dari matriks *degree* dengan matriks *adjacency* dengan rumus $\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{n}}))=\mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{n}}))$ **-** $\mathbf{A}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{n}}))$**,** maka diperoleh:

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{n}})) = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccccc} \overline{0} & \overline{1} & \cdots & \overline{k} & \overline{k+1} & \cdots & \overline{\frac{n}{2}-1} & \overline{\frac{n}{2}} & \overline{\frac{n}{2}+1} & \cdots & \overline{n-k-1} & \overline{n-k} & \cdots & \overline{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \vdots \\ \overline{k} \\ \overline{k+1} \\ \vdots \\ \overline{\frac{n}{2}-1} \\ \overline{\frac{n}{2}} \\ \overline{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ \overline{n-k-1} \\ \overline{n-k} \\ \vdots \\ \overline{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
n-2 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\
-1 & n-3 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-1 & -1 & \cdots & n-3 & 0 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & -1 \\
-1 & -1 & \cdots & 0 & n-3 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-1 & 0 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & n-3 & -1 & 0 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\
0 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-2 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & 0 & -1 & n-3 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & n-3 & 0 & \cdots & -1 \\
-1 & -1 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & n-3 & \cdots & -1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-1 & 0 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 0 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & n-3
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Karena $\det(\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\boldsymbol{n}})) - \boldsymbol{\lambda I})$ adalah hasil perkalian entri diagonal matriks utama, yang diperoleh dari metode *Gaussian Elimination* yang terdapat pada *software* Maple, sehingga didapati polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$\mathrm{P}(\lambda) = (\lambda - n)^{\frac{n-2}{4}}(\lambda - n + 2)^{\frac{n}{2}}(\lambda - n + 4)^{\frac{n-2}{4}}(\lambda)$$

***Corollary* 4**

Spektrum matriks Laplace graf invers dari grup modulo Z_n untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+2}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$ adalah

$$\mathbf{Spec_L}(\boldsymbol{\Gamma_s}(\mathbf{Z_n})) = \begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ \frac{n-2}{4} & \frac{n}{2} & \frac{n-2}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan teorema 4, polinomial karakteristik dari matriks Laplace graf invers dari grup modulo $\mathrm{Z_n}$ untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+2}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$ adalah

$$\mathrm{P}(\lambda) = (\lambda - n)^{\frac{n-2}{4}}(\lambda - n + 2)^{\frac{n}{2}}(\lambda - n + 4)^{\frac{n-2}{4}}(\lambda)$$

Dengan menetapkan $\mathrm{P}(\lambda) = 0$ maka diperoleh nilai Eigen $\lambda_1 = n,\ \lambda_2 = n-2\,,\ \lambda_3 = n-4,\ dan\ \lambda_4 = 0,$ dan multiplisitas masing-masing dari nilai Eigennya $m\lambda_1 = \frac{n-2}{4},\ m\lambda_2 = \frac{n}{2},\ m\lambda_3 = \frac{n-2}{4}$ dan $m\lambda_4 = 1$. Maka diperoleh spektrum matriks Laplace graf invers dari grup modulo, untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+2}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$ adalah:

$$\mathbf{Spec_L}(\boldsymbol{\Gamma_s}(\mathbf{Z_n})) = \begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ \frac{n-2}{4} & \frac{n}{2} & \frac{n-2}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

3.3 Spektrum Matriks Antiadjacency dan Matriks Laplace Graf Invers dari Grup Modulo untuk $\boldsymbol{n}$ Genap dan $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+4}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$

Sebelum menentukan pola umum spektrum antiadjacency dan spektrum Laplace dari grup modulo Z_n, maka akan dibahas terlebih dahulu grup modulo Z_8, Z_{12}, dan Z_{16}. Sehingga ketika diimplementasikan ke grup modulo Z_n dapat dipaparkan pada subbab berikut ini.

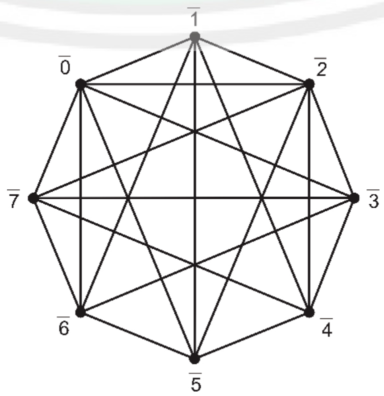
3.3.1 Grup Modulo Z_8

Pada sub bab ini akan dicari spektrum dari matriks *antiadjaceny* dan matriks Laplace dari grup modulo Z_8. Adapun langkah-langkah yang dilakukan sama seperti pada pembahasan sebelumnya. Pertama akan ditentukan unsur-unsur dari anggota grup modulo Z_8.

Tabel 3.17 Operasi Penjumlahan Modulo 8

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	0	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	4	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	4
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	4	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	4	$\overline{5}$	$\overline{6}$

Dari Tabel 3.17 diketahui bahwa unsur yang inversnya diri sendiri dari grup modulo Z_8 adalah $\overline{0}$ dan $\overline{4}$ sedangkan unsur yang inversnya bukan diri sendiri adalah $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{5}, \overline{6}$ dan $\overline{7}$. Kemudian langkah selanjutnya adalah menggambarkan graf invers dari grup modulo Z_8. Graf invers yang terbentuk dari operasi penjumlahan Tabel 3.17 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.9 Graf Invers Grup Modulo Z_8

Sehingga diperoleh matriks *adjacency* titik dari Gambar 3.9 sebagai berikut:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_8})) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah menentukan matriks *adjacency* maka akan ditentukan matriks *antiadjacency* dari graf invers grup modulo Z_8 dengan cara mengganti entri "0" menjadi "1", sedangkan yang berentri "1" diganti menjadi "0". Seperti matriks berikut:

$$\mathbf{A}^{+}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_8})) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan perhitungan yang sama seperti sebelumnya, maka diperoleh spektrum *antiadjacency* nya adalah:

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{A}^{+}}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_8})) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Setelah itu menentukan matriks *degree* dari graf invers grup modulo Z_8 dengan cara melihat derajat titik sehingga diperoleh:

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_8})) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Kemudian tentukan matriks Laplace dengan cara mengitung selisih dari matriks *degree* dengan matriks *adjacency* dengan rumus $\mathbf{L}(\mathbf{\Gamma_s}(\mathbf{Z_8})) = \mathbf{D}(\mathbf{\Gamma_s}(\mathbf{Z_8})) - \mathbf{A}(\mathbf{\Gamma_s}(\mathbf{Z_8}))$ seperti langkah sebelumnya, maka didapati:

$$\mathbf{L}(\mathbf{\Gamma_s}(\mathbf{Z_8})) = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Kemudian langkah selanjutnya adalah mencari spektrum Laplace dari matriks Laplace dengan cara mencari nilai Eigen pada matriks Laplace grup modulo Z_8. Dengan perhitungan yang sama seperti sebelumnya, maka diperoleh spektrum Laplace nya adalah:

$$\mathbf{Spec_L}(\mathbf{\Gamma_s}(\mathbf{Z_8})) = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3.2 Grup Modulo Z_{12}

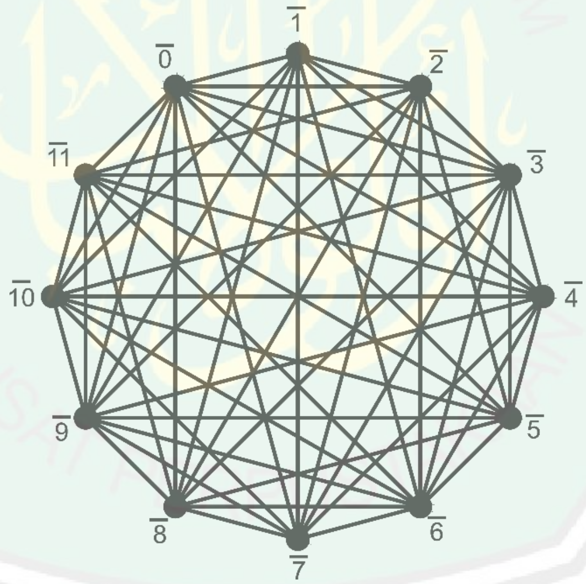
Pada sub bab ini akan dicari spektrum dari matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace dari grup modulo Z_{12}. Adapun langkah-langkah yang dilakukan sama seperti pada pembahasan sebelumnya. Pertama akan ditentukan unsur-unsur dari anggota grup modulo Z_{12}.

Tabel 3.18 Operasi Penjumlahan Modulo 12

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$

Dari Tabel 3.18 diketahui bahwa unsur yang inversnya diri sendiri dari grup modulo Z_{12} adalah $\overline{0}$ dan $\overline{6}$ sedangkan unsur yang inversnya bukan diri sendiri adalah $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}$, dan $\overline{11}$. Kemudian langkah selanjutnya adalah menggambarkan graf invers dari grup modulo Z_{12}. Graf invers yang terbentuk dari operasi penjumlahan Tabel 3.18 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.10 Graf Invers Grup Modulo Z_{12}

Sehingga diperoleh matriks *adjacency* titik dari Gambar 3.10 sebagai berikut:

$$
\mathbf{A(\Gamma_s(Z_{12}))} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

Setelah menentukan matriks *adjacency* maka akan ditentukan matriks *antiadjacency* dari graf invers grup modulo Z_{12} dengan cara mengganti entri "0" menjadi "1", sedangkan yang berentri "1" diganti menjadi "0". Seperti matriks berikut:

$$
\mathbf{A^{+}(\Gamma_s(Z_{12}))} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

Dengan perhitungan yang sama seperti sebelumnya, maka diperoleh spektrum *antiadjacency* nya adalah:

$$
\mathbf{Spec_{A^{+}}(\Gamma_s(Z_{12}))} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}
$$

Setelah itu menentukan matriks *degree* dari graf invers grup modulo Z_{12} dengan cara melihat derajat titik sehingga diperoleh:

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_{12})) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Kemudian tentukan matriks Laplace dengan cara mengitung selisih dari matriks *degree* dengan matriks *adjacency* dengan rumus $\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_{12})) = \mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{Z}_{12})) - \mathbf{A}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_{12}))$ seperti langkah sebelumnya, maka didapati:

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_{12})) = \begin{bmatrix} 10 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 9 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 10 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 9 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 9 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 10 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 9 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 9 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 10 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 9 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

Kemudian langkah selanjutnya adalah mencari spektrum Laplace dari matriks Laplace dengan cara mencari nilai Eigen pada matriks Laplace grup modulo Z_{12}. Dengan perhitungan yang sama seperti sebelumnya, maka diperoleh spektrum Laplace nya adalah:

$$\mathbf{Spec}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_{12})) = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

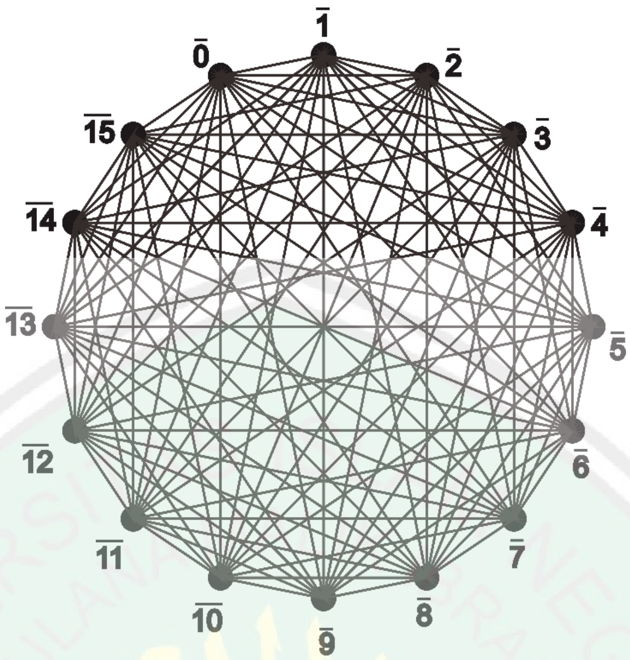
3.3.3 Grup Modulo $\mathbf{Z_{16}}$

Pada sub bab ini akan dicari spektrum dari matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace dari grup modulo Z_{16}. Adapun langkah-langkah yang dilakukan sama seperti pada pembahasan sebelumnya. Pertama akan ditentukan unsur-unsur dari anggota grup modulo Z_{16}.

Tabel 3.19 Operasi Penjumlahan Modulo 16

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	0
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	0	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
$\overline{12}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{13}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{14}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\overline{15}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$

Dari Tabel 3.19 diketahui unsur yang inversnya diri sendiri dari grup modulo Z_{16} adalah $\overline{0}$ dan $\overline{8}$ sedangkan unsur yang inversnya bukan diri sendiri adalah $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}$ dan $\overline{15}$. Kemudian langkah selanjutnya adalah menggambarkan graf invers dari grup modulo Z_{16}. Graf invers yang terbentuk dari operasi penjumlahan Tabel 3.19 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.11 Graf Invers Grup Modulo Z_{16}

Sehingga diperoleh matriks *adjacency* titik dari Gambar 3.11 sebagai berikut:

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_{16})) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

Setelah menentukan matriks *adjacency* maka akan ditentukan matriks *antiadjacency* dari graf invers grup modulo Z_{16} dengan cara mengganti entri "0" menjadi "1", sedangkan yang berentri "1" diganti menjadi "0". Seperti matriks berikut:

$$A^{+}\left(\Gamma_s(Z_{16})\right) = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

Dengan perhitungan yang sama seperti sebelumnya, maka diperolah spektrum *antiadjacency* nya adalah:

$$\mathbf{Spec}_{A^{+}}\left(\Gamma_s(Z_{16})\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah itu menentukan matriks *degree* dari graf invers grup modulo Z_{16} dengan cara melihat derajat titik sehingga diperoleh:

$$D\left(\Gamma_s(Z_{16})\right) = \begin{bmatrix} 14&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&13&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&13&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&13&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&14&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&14&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&14&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&13 \end{bmatrix}$$

Kemudian tentukan matriks Laplace dengan cara mengitung selisih dari matriks *degree* dengan matriks *adjacency* dengan rumus $\mathbf{L}\left(\Gamma_s(Z_{16})\right) = \mathbf{D}\left(\Gamma_s(Z_{16})\right) - \mathbf{A}\left(\Gamma_s(Z_{16})\right)$ seperti langkah sebelumnya, maka didapati:

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{16}})) = \begin{bmatrix} 14 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 13 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 13 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 13 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 14 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 13 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 13 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 13 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 14 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 13 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 13 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 13 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 14 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 13 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 13 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 13 \end{bmatrix}$$

Kemudian langkah selanjutnya adalah mencari spektrum Laplace dari matriks Laplace dengan cara mencari nilai Eigen pada matriks Laplace grup modulo Z_{16}. Dengan perhitungan yang sama seperti sebelumnya, maka diperoleh spektrum Laplace nya adalah:

$$\mathbf{Spec_L}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_{\mathbf{16}})) = \begin{bmatrix} 16 & 14 & 12 & 0 \\ 4 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Dari spektrum yang telah ditemukan, diperoleh bentuk polinomial karakteristik dan spektrum matriks *antidjacency* dan matriks Laplace graf invers dari beberapa grup modulo, diantaranya:

Tabel 3.20 Polinomial Karakteristik Matriks *Antidjacency* Graf Invers Grup Modulo untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+4}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$

n	Grup Modulo Z_n	Polinomial Antiadjacency
8	Grup Modulo $\mathrm{Z_8}$	$\mathrm{P}(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)^2(\lambda-1)^2(\lambda)^2(\lambda+1)$
12	Grup Modulo $\mathrm{Z_{12}}$	$\mathrm{P}(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda-2)^2(\lambda-1)^4(\lambda)^2(\lambda+1)^2$
16	Grup Modulo $\mathrm{Z_{16}}$	$\mathrm{P}(\lambda) = (\lambda-3)^3(\lambda-2)^2(\lambda-1)^6(\lambda)^2(\lambda+1)^3$
...	...	...
n	Grup Modulo $\mathrm{Z_n}$	$\mathrm{P}(\lambda) = (\lambda-3)^{\frac{n-4}{4}}(\lambda-2)^2(\lambda-1)^{\frac{n-4}{2}}(\lambda)^2(\lambda+1)^{\frac{n-4}{4}}$

Tabel 3.21 Spektrum Matriks *Antidjacency* Graf Invers Grup Modulo untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+4}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$

n	Grup Modulo Z_n	Spektrum
8	Grup Modulo $\mathrm{Z_8}$	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

12	Grup Modulo Z_{12}	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
16	Grup Modulo Z_{16}	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
...	...	...
n	Grup Modulo Z_n	$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{n-4}{4} & 2 & \frac{n-4}{2} & 2 & \frac{n-4}{4} \end{bmatrix}$

Tabel 3.22 Polinomial Karakteristik Matriks Laplace Graf Invers Grup Modulo untuk $\boldsymbol{n}$ genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+4}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$

n	Grup Modulo Z_n	Polinomial Antiadjacency
3	Grup Modulo Z_8	$P(\lambda) = (\lambda-8)^2(\lambda-6)^4(\lambda-4)(\lambda)$
5	Grup Modulo Z_{12}	$P(\lambda) = (\lambda-12)^3(\lambda-10)^6(\lambda-8)^2(\lambda)$
7	Grup Modulo Z_{16}	$P(\lambda) = (\lambda-16)^4(\lambda-14)^8(\lambda-12)^3(\lambda)$
...	...	...
n	Grup Modulo Z_n	$P(\lambda) = (\lambda-n)^{\frac{n}{4}}(\lambda-n+2)^{\frac{n}{2}}(\lambda-n+4)^{\frac{n-4}{4}}(\lambda)$

Tabel 3.23 Spektrum Matriks Laplace Graf Invers Grup Modulo untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+4}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$

n	Grup Modulo Z_n	Spektrum
6	Grup Modulo Z_8	$\begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
10	Grup Modulo Z_{12}	$\begin{bmatrix} 12 & 10 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
14	Grup Modulo Z_{16}	$\begin{bmatrix} 16 & 14 & 12 & 0 \\ 4 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
...	...	...
n	Grup Modulo Z_n	$\begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ \frac{n}{4} & \frac{n}{2} & \frac{n-4}{4} & 1 \end{bmatrix}$

Teorema 5

Polinomial karakteristik matriks *antiadjacency* graf invers dari grup modulo Z_n untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+4}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$ adalah

$$P(\lambda) = (\lambda-3)^{\frac{n-4}{4}}(\lambda-2)^2(\lambda-1)^{\frac{n-4}{2}}(\lambda)^2(\lambda+1)^{\frac{n-4}{4}}$$

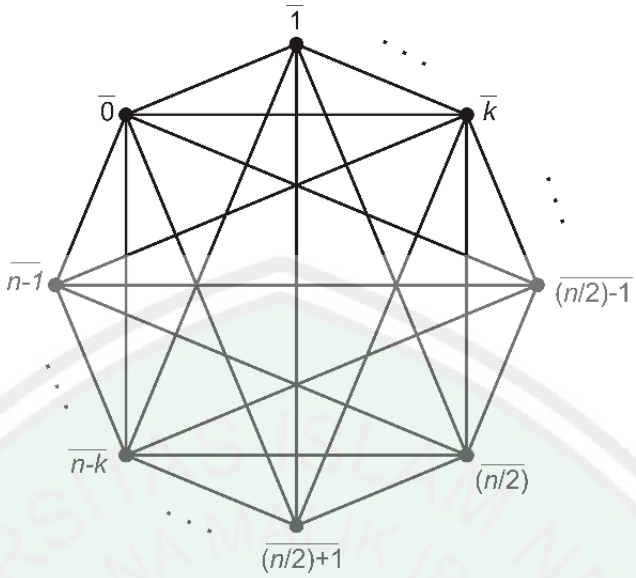
Bukti

Diketahui anggota grup modulo (Z_n) untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+4}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$ adalah $(Z_n) = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{k}, \dots, \overline{\frac{n}{2}-1}, \overline{\frac{n}{2}}, \overline{\frac{n}{2}+1}, \dots, \overline{n-k}, \dots, \overline{n-1}\}$. Maka langkah selanjutnya adalah mengidentifikasi operasi penjumlahan elemen grup modulo Z_n sebagai berikut:

Tabel 3.24 Operasi Penjumlahan Modulo n untuk n genap dimana $\boldsymbol{n = 4k + 4, k} \in \mathbb{N}$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	…	$\overline{k}$	…	$\overline{\left(\frac{n}{2}\right)-1}$	$\frac{\overline{n}}{2}$	$\overline{\left(\frac{n}{2}\right)+1}$	…	$\overline{n-k}$	…	$\overline{n-1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	…	$\overline{k}$	…	$\overline{\left(\frac{n}{2}\right)-1}$	$\frac{\overline{n}}{2}$	$\overline{\left(\frac{n}{2}\right)+1}$	…	$\overline{n-k}$	…	$\overline{n-1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	…	$\overline{k+1}$	…	$\frac{\overline{n}}{2}$	$\overline{\left(\frac{n}{2}\right)+1}$	$\overline{\left(\frac{n}{2}\right)+2}$	…	$\overline{n-k+1}$	…	$\overline{0}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
$\overline{k}$	$\overline{k}$	$\overline{k+1}$	…	$\overline{2k}$	…	$\overline{\left(\frac{n}{2}\right)-1-}$	$\overline{\frac{n}{2}+k}$	$\overline{\left(\frac{n}{2}\right)+1+}$	…	$\overline{0}$	…	$\overline{n-1+k}$
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
$\overline{\left(\frac{n}{2}\right)-1}$	$\overline{\left(\frac{n}{2}\right)-1}$	$\frac{\overline{n}}{2}$	…	$\overline{\left(\frac{n}{2}\right)-1+}$	…	$\overline{n-2}$	$\overline{n-1}$	$\overline{0}$	…	$\overline{\left(\frac{3n}{2}\right)-1}$	…	$\overline{\left(\frac{3n}{2}\right)-2}$
$\frac{\overline{n}}{2}$	$\frac{\overline{n}}{2}$	$\overline{\left(\frac{n}{2}\right)+1}$	…	$\overline{\frac{n}{2}+k}$	…	$\overline{n-1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	…	$\overline{\frac{3n}{2}-k}$	…	$\overline{\frac{3n}{2}-1}$
$\overline{\left(\frac{n}{2}\right)+1}$	$\overline{\left(\frac{n}{2}\right)+1}$	$\overline{\left(\frac{n}{2}\right)+2}$	…	$\overline{\left(\frac{n}{2}\right)+1+}$	…	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	…	$\overline{\left(\frac{3n}{2}\right)+1}$	…	$\frac{\overline{3n}}{2}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
$\overline{n-k}$	$\overline{n-k}$	$\overline{n-k+1}$	…	$\overline{0}$	…	$\overline{\left(\frac{3n}{2}\right)-1}$	$\overline{\frac{3n}{2}-k}$	$\overline{\left(\frac{3n}{2}\right)+1}$	…	$\overline{2n-2k}$	…	$\overline{2n-k}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
$\overline{n-1}$	$\overline{n-1}$	$\overline{0}$	…	$\overline{n-1+k}$	…	$\overline{\left(\frac{3n}{2}\right)-2}$	$\overline{\frac{3n}{2}-1}$	$\frac{\overline{3n}}{2}$	…	$\overline{2n-k-}$	…	$\overline{2n-2}$

Dari Tabel 3.24 diketahui bahwa unsur yang inversnya diri sendiri dari modulo Z_n adalah $\overline{0}$ dan $\frac{\overline{n}}{2}$ sedangkan unsur yang inversnya bukan diri sendiri adalah $\{\overline{1}, \dots, \overline{k}, \dots, \overline{\frac{n}{2}-1}, \overline{\frac{n}{2}+1}, \dots, \overline{n-k}, \dots, \overline{n-1}\}$. Kemudian langkah selanjutnya adalah menggambarkan graf invers dari grup modulo Z_n. Jadi dikatakan graf invers yang terbentuk dari operasi penjumlahan Tabel 3.24 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.12 Graf Invers Grup Modulo Z_n untuk n genap dimana $\boldsymbol{n = 4k + 4}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$

Sehingga diperoleh matriks *adjacency* titik dari Gambar 3.12 sebagai berikut:

$$
\mathbf{A}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_n})) = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} \overline{0} & \overline{1} & \dots & \overline{k} & \dots & \overline{\frac{n}{2}-1} & \overline{\frac{n}{2}} & \overline{\frac{n}{2}+1} & \dots & \overline{n-k} & \dots & \overline{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} \overline{0} \\ \overline{1} \\ \vdots \\ \overline{k} \\ \vdots \\ \overline{\frac{n}{2}-1} \\ \overline{\frac{n}{2}} \\ \overline{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ \overline{n-k} \\ \vdots \\ \overline{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\
1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
1 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \\
0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\
1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
1 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Setelah menentukan matriks *adjacency* titik maka akan ditentukan matriks *antiadjacency* titik dari graf invers grup modulo Z_n dengan cara mengganti entri “0” menjadi “1”, sedangkan yang berentri “1” diganti menjadi “0”. Seperti matriks berikut:

$$
\mathbf{A}^{+}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_n)) = \begin{array}{c} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \\ \vdots \\ \bar{k} \\ \vdots \\ \overline{\frac{n}{2}-1} \\ \overline{\frac{n}{2}} \\ \overline{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ \overline{n-k} \\ \vdots \\ \overline{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} \bar{0} & \bar{1} & \dots & \bar{k} & \dots & \overline{\frac{n}{2}-1} & \overline{\frac{n}{2}} & \overline{\frac{n}{2}+1} & \dots & \overline{n-k} & \dots & \overline{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Karena $\det\left(\mathbf{A}^{+}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_n)) - \boldsymbol{\lambda I}\right)$ adalah hasil perkalian entri diagonal matriks utama, yang diperoleh dari metode *Gaussian Elimination* yang terdapat pada *software* Maple, sehingga didapati polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$
\mathrm{P}(\lambda) = (\lambda - 3)^{\frac{n-4}{4}}(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)^{\frac{n-4}{2}}(\lambda)^2(\lambda + 1)^{\frac{n-4}{4}}
$$

***Corollary* 5**

Misal grup modulo $(Z_n) = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{k}, \dots, \overline{\frac{n}{2}-1}, \overline{\frac{n}{2}}, \overline{\frac{n}{2}+1}, \dots, \overline{n-k}, \dots, \overline{n-1}\}$ untuk n genap dimana $\boldsymbol{n = 4k + 4}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$. Maka spektrum matriks *antiadjacency* adalah:

$$
\mathbf{Spec}_{\mathbf{A}^{+}}\left(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_n)\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{n-4}{4} & 2 & \frac{n-4}{2} & 2 & \frac{n-4}{4} \end{bmatrix}
$$

Bukti

Berdasarkan teorema 5, polinomial karakteristik dari $\mathbf{A}^{+}(\boldsymbol{\Gamma}_s(\mathbf{Z}_n))$ adalah:

$$
p(\lambda) = (\lambda - 3)^{\frac{n-4}{4}}(\lambda - 2)^2(\lambda - 1)^{\frac{n-4}{2}}(\lambda)^2(\lambda + 1)^{\frac{n-4}{4}}
$$

Dengan menetapkan $p(\lambda) = 0$ maka diperoleh nilai Eigen $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2\ \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = 0,\ dan\ \lambda_5 = -1$, dan multiplisitas masing-masing dari nilai Eigennya $m\lambda_1 = \frac{n-4}{4}$, $m\lambda_2 = 2,\ m\lambda_3 = \frac{n-4}{2}, m\lambda_4 = 2,$ dan $m\lambda_5 = \frac{n-4}{4}$.

Maka diperoleh spektrum matriks $antiadjacency$ graf invers dari grup modulo, untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+4}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$ adalah:

$$\mathbf{Spec}_{\mathbf{A^+}}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_n})\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{n-4}{4} & 2 & \frac{n-4}{2} & 2 & \frac{n-4}{4} \end{bmatrix}$$

Teorema 6

Polinomial karakteristik matriks Laplace graf invers dari grup modulo Z_n untuk untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+4}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$ adalah

$$\mathrm{P}(\lambda) = (\lambda - n)^{\frac{n}{4}}(\lambda - n + 2)^{\frac{n}{2}}(\lambda - n + 4)^{\frac{n-4}{4}}(\lambda)$$

Bukti

Dari Gambar 3.24 maka diperoleh matriks $degree$ dari graf invers grup modulo $\mathrm{Z_n}$ dengan cara melihat derajat titik sehingga diperoleh:

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_n})) = \begin{array}{c} \\ \overline{0} \\ \overline{1} \\ \vdots \\ \overline{k} \\ \vdots \\ \overline{\frac{n}{2}-1} \\ \overline{\frac{n}{2}} \\ \overline{\frac{n}{2}+1} \\ \vdots \\ \overline{n-k} \\ \vdots \\ \overline{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} \overline{0} & \overline{1} & \cdots & \overline{k} & \cdots & \overline{\frac{n}{2}-1} & \overline{\frac{n}{2}} & \overline{\frac{n}{2}+1} & \cdots & \overline{n-k} & \cdots & \overline{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} n-2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n-3 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n-2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & n-3 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & n-2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & n-3 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & n-3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kemudian menentukan matriks Laplace dengan cara mengitung selisih dari matriks *degree* dengan matriks *adjacency* dengan rumus $\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_n}))$=$\mathbf{D}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_n}))$-$\mathbf{A}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_n}))$**,** maka diperoleh:

$$
\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_n})) =
\begin{array}{c|cccccccccccc|}
 & \bar{0} & \bar{1} & \dots & \bar{k} & \dots & \overline{\frac{n}{2}-1} & \overline{\frac{n}{2}} & \overline{\frac{n}{2}+1} & \dots & \overline{n-k} & \dots & \overline{n-1} \\
\hline
\bar{0} & n-2 & -1 & \dots & -1 & \dots & -1 & 0 & -1 & \dots & -1 & \dots & -1 \\
\bar{1} & -1 & n-3 & \dots & -1 & \dots & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\bar{k} & -1 & -1 & \dots & n-2 & \dots & -1 & -1 & -1 & \dots & 0 & \dots & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\overline{\frac{n}{2}-1} & -1 & 0 & \dots & -1 & \dots & n-3 & -1 & 0 & \dots & -1 & \dots & -1 \\
\overline{\frac{n}{2}} & 0 & -1 & \dots & -1 & \dots & -1 & n-2 & -1 & \dots & -1 & \dots & -1 \\
\overline{\frac{n}{2}+1} & -1 & -1 & \dots & -1 & \dots & 0 & -1 & n-3 & \dots & -1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\overline{n-k} & -1 & -1 & \dots & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 & \dots & n-2 & \dots & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\overline{n-1} & -1 & 0 & \dots & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 & \dots & -1 & \dots & n-3
\end{array}
$$

Karena $\det(\mathbf{L}(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z}_n)) - \boldsymbol{\lambda I})$ adalah hasil perkalian entri diagonal matriks utama, yang diperoleh dari metode *Gaussian Elimination* yang terdapat pada *software* Maple, sehingga didapati polinomial karakteristik sebagai berikut:

$$\mathrm{P}(\lambda) = (\lambda - n)^{\frac{n}{4}}(\lambda - n + 2)^{\frac{n}{2}}(\lambda - n + 4)^{\frac{n-4}{4}}(\lambda)$$

***Corollary* 6**

Spektrum matriks Laplace graf invers dari grup modulo Z_n untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+4}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$ adalah

$$\mathbf{Spec_L}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{s}}(\mathbf{Z_n})\right) = \begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ \frac{n}{4} & \frac{n}{2} & \frac{n-4}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Bukti

Berdasarkan teorema 6, polinomial karakteristik dari matriks Laplace graf invers dari grup modulo $\mathrm{Z_n}$ untuk n genap dimana $\boldsymbol{n} = \mathbf{4k+4}, \mathbf{k} \in \mathbb{N}$ adalah

$$\mathrm{P}(\lambda) = (\lambda - n)^{\frac{n}{4}}(\lambda - n + 2)^{\frac{n}{2}}(\lambda - n + 4)^{\frac{n-4}{4}}(\lambda)$$

Dengan menetapkan $\mathrm{P}(\lambda) = 0$ maka diperoleh nilai Eigen $\lambda_1 = n,\ \lambda_2 = n-2,\ \lambda_3 = n-4,$ dan $\lambda_4 = 0,$ dan multiplisitas masing-masing dari nilai Eigennya $m\lambda_1 = \frac{n}{4},$ $m\lambda_2 = \frac{n}{2},\ m\lambda_3 = \frac{n-4}{4}$ dan $m\lambda_4 = 1.$ Maka diperoleh spektrum matriks Laplace graf invers dari grup modulo, untuk n genap dimana $\boldsymbol{n = 4k + 4, k} \in \mathbb{N}$ adalah:

$$\mathbf{Spec_L}\left(\boldsymbol{\Gamma_s}(\mathbf{Z_n})\right) = \begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ \frac{n}{4} & \frac{n}{2} & \frac{n-4}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

3.4 Kajian dalam al-Quran

Graf dalam bahasa matematika adalah himpunan dari objek-objek yang dinamakan titik, simpul, atau sudut yang dihubungkan oleh garis atau sisi sehingga titik-titik tersebut terhubung langsung. Sama halnya dengan *ta'aruf* yang telah diperkenalkan dalam al-Quran. Secara bahasa istilah *ta'aruf* berasal dari bahasa Arab yang artinya saling mengenal atau berkenalan. *Ta'aruf* sangat dianjurkan dalam agama Islam agar saling mengenal antara satu sama lain. Salah satu cara agar saling mengenal sesama manusia yaitu dengan bersilaturrahim yang disebutkan dalam surat al-Hujurat ayat 13 yang berbunyi:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقۡنَٰكُم مِّن ذَكَرٖ وَأُنثَىٰ وَجَعَلۡنَٰكُمۡ شُعُوبٗا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓاْۚ إِنَّ
أَكۡرَمَكُمۡ عِندَ ٱللَّهِ أَتۡقَىٰكُمۡۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٞ ١٣

Artinya: *"Hai manusia, Sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa - bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu disisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal" (QS. al-Hujurat: 13).*

Ayat tersebut menjelaskan bahwa terjalinnya hubungan satu sama lain di antara sesama manusia merupakan suatu ketetapan dari Allah, dan hubungan ini berawal dari berbeda-bedanya ciptaan manusia. Hubungan antar manusia adalah kemampuan mengenali sifat, tingkah laku, pribadi seseorang. Ruang lingkup hubungan antar manusia dalam arti luas adalah interaksi antar seseorang dengan orang lain dalam suatu kehidupan untuk memperoleh kepuasan hati. Hubungan antar manusia adalah suatu sosiologi konkrit karena meneliti situasi kehidupan, khususnya masalah "interaksi" dengan pengaruh psikologisnya.

Secara matematika suatu graf dapat dipresentasikan dengan matriks adjacency terdapat nilai 1 untuk graf yang titiknya saling terhubung dan nilai 0 untuk graf yang titiknya tidak terhubung. Hal ini jika dimaknai nilai 1 dapat menggambarkan proses silaturahmi antar sesama manusia dan nilai 0 dapat dimaknai putusnya hubungan silaturahmi antar sesama manusia. Dalam suatu hadis dikataka bahwa

لاَ يَدْخُلُ الْجَنَّةَ قَاطِعٌ

Artinya: "*Tidak akan masuk sorga orang yang memutuskan (persaudaraan)*". (HR. al-Bukhâri dan Muslim).

Berdasarkan hadis diatas juga dijelaskan bahwa Allah SWT tidak menyukai orang-orang yang memutus hubungan silaturahmi. Maksud dari kalimat "tidak akan masuk surga" tertuju kepada orang yang menganggap halal memutuskan persaudaraan tanpa sebab padahal dia tau keharamannya, maka orang ini tidak akan masuk surga.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang sudah diperoleh, maka dapat diambil kesilmpulan bahwa pola umum spektrum matriks *Antiadjacency* dan matriks *Laplace* dari graf invers dari grup modulo dapat diklasifikasikan sebagai berikut:

a. Spektrum matriks *antiadjacency* dan matriks Laplace graf invers dari grup modulo untuk n ganjil adalah:

$$\mathbf{Spec}\left(\mathbf{A}^{+}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{s}(\boldsymbol{Z}_{n})\right)\right)=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \frac{n-1}{2} & 1 & \frac{n-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Spec}\left(\mathbf{L}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{s}(\boldsymbol{Z}_{n})\right)\right)=\begin{bmatrix} n & n-2 & 0 \\ \frac{n-1}{2} & \frac{n-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

b. Spektrum matriks *antiadjacency* graf invers dan matriks Laplace dari grup modulo untuk n genap dan $n = 4k+2, k \in \mathbb{N}$ adalah:

$$\mathbf{Spec}\left(\mathbf{A}^{+}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{s}(\boldsymbol{Z}_{n})\right)\right)=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{n-2}{4} & 1 & \frac{n-2}{2} & 1 & \frac{n-2}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Spec}\left(\mathbf{L}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{s}(\boldsymbol{Z}_{n})\right)\right)=\begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ \frac{n-2}{4} & \frac{n}{2} & \frac{n-2}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

c. Spektrum matriks *antiadjacency* graf invers dan matriks Laplace dari grup modulo untuk n genap dan $n = 4k+4, k \in \mathbb{N}$ adalah:

$$\mathbf{Spec}\left(\mathbf{A}^{+}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{s}(\boldsymbol{Z}_{n})\right)\right)=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ \frac{n-4}{4} & 2 & \frac{n-4}{2} & 2 & \frac{n-4}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Spec}\left(\mathbf{L}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{s}(\boldsymbol{Z}_{n})\right)\right)=\begin{bmatrix} n & n-2 & n-4 & 0 \\ \frac{n}{4} & \frac{n}{2} & \frac{n-4}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

4.2 Saran

Bagi peneliti selanjutnya, disarankan untuk mengkaji spektrum *degree* dan spektrum *signless* Laplace graf invers dari grup modulo atau berbagai macam graf lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir, Azizah, N.N. dan Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir, Muzakir, M. dan Khasanah, R. 2016. *Spektrum Graf Konjugasi dan Graf Komplemen Graf Konjugasi dari Grup Dihedral.* Penelitian P3S. Malang: UIN Maliki Malang.

Anton, H. & Rorres, C. 2004. *Aljabar Linier Elemeneter Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid I.* Jakarta: Erlangga.

Biyikoglu, T., Leydold, J. dan Stadler, P.F. 2007. *Laplacian Eigenvectors of Graphs*. Berlin: Springer.

Budayasa, I. K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya.* Surabaya: Unesa University Press.

Chartrand, G., Lesniak, L., dan Zhang, P. 2016. *Graphs and Digraphs Sixth Edition*. New York: CRC Press.

Dummit, D. S. dan Foote, R. M. 2004. *Abstract Algebra*. New Jersey: a Division of Simon & Schuster, Inc.

Jain, S. K. & Gunawardena, A. D. 2004. *Linear Algebra an Interactive Approach.* Belmont: Thomson Learning.

Katsir, I. 2001. *Tafsir Ibnu Katsir, Jilid 2*. Terjemahan M. Ghoffar. Bogor: Pustaka Imam asy-Syafi'i.

Monther, R. A dan Yusuf, F. Z. 2017. Invers Graphs Associated with Finite Groups. *Electronic Journal of Graph Theory and Aplications*, 5(1): 142-154.

Putra, A. P dan Sugeng, K. A. 2015. Pollinomial Karakteristik Matriks *Antiadjacency* dari Graf Lingkaran Berarah dan Graf Lingkaran Berarah $\overrightarrow{C_n}$ dengan Penambahan Satu *Chord* $\overrightarrow{C_n^t}$. Depok: Universitas Indonesia

RIWAYAT HIDUP

Ifkra Febry dilahirkan di Kota Dumai pada tanggal 10 Pebruari 1993, anak kedua dari tiga bersaudara, pasangan bapak Hasan Basri dan ibu Lilis Suryani. Pendidikan dasar ditempuh di SDN 004 Teluk Binjai Kota Dumai yang ditamatkan pada tahun 2005. Pada tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP N 2 Karang Anyer dan menyelesaikannya pada tahun 2008. Pada tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan menengah atas di SMA N BINAAN KHUSUS dan menyelesaikannya pada tahun 2011. Sejak pendidikan dasar hingga pendidikan menengah atas penulis menempuh di kota kelahirannya. Pendidikan berikutnya penulis tempuh di Universitas Islam Negri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur tulis (SNMPTN) pada tahun 2012 dengan mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Ifkra Febry
Nim	: 12610069
Fakultas/Jurusan	: Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi	: Spektrum Matriks *Antiadjacency* dan Matriks Laplace Graf Invers dari Grup Modulo
Pembimbing I	: Dr. Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II	: Dr. Usman Pagalay M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	20 September 2017	Konsultasi Bab III	1.
2.	18 Oktober 2017	Konsultasi Bab III	2.
3.	22 November 2017	Revisi Bab III	3.
4.	29 November 2017	Konsultasi Bab III	4.
5.	14 Februari 2018	Konsultasi Bab I dan Bab II	5.
6.	21 Maret 2018	Revisi Agama Bab I dan Bab II	6.
7.	23 Mei 2018	Konsultasi Bab III dan Bab IV	7.
8.	29 Agustus 2018	Revisi Bab III dan Bab IV	8.
9.	20 September 2018	Konsultasi Abstrak	9.
10.	24 September 2018	Revisi Abstrak	10.
11.	03 Oktober 2018	Konsultasi Agama Bab III	11.
12.	05 Oktober 2018	Revisi Agama Bab III	12.
13.	11 Oktober 2018	ACC Agama Keseluruhan	13.
14.	12 Oktober 2018	ACC Keseluruhan	14.
15.	22 Oktober 2018	Konsultasi Bab I dan Bab II	15.

Malang, 14 Januari 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001