KETERBATASAN PERUMUMAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL PADA RUANG MORREY KLASIK

SKRIPSI

OLEH
EVANA DYAH PURNAMASTUTI
NIM. 15610097

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

KETERBATASAN PERUMUMAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL PADA RUANG MORREY KLASIK

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Evana Dyah Purnamastuti
NIM. 15610097

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

KETERBATASAN PERUMUMAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL PADA RUANG MORREY KLASIK

SKRIPSI

Oleh
Evana Dyah Purnamastuti
NIM. 15610097

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 03 Mei 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si.	Ach. Nashichuddin, MA
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19730705 200003 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 19650414 200312 1 001

KETERBATASAN PERUMUMAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL PADA RUANG MORREY KLASIK

SKRIPSI

Oleh
Evana Dyah Purnamastuti
NIM. 15610097

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 29 Mei 2019

Penguji Utama	: Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc	………………
Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	………………
Sekretaris Penguji	: Hairur Rahman, M.Si	………………
Anggota Penguji	: Ach. Nashichuddin, M.A	………………

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Evana Dyah Purnamastuti

NIM : 15610097

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Klasik

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 03 Mei 2019
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
795B1AFF241655980
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Evana Dyah Purnamastuti
NIM. 15610097

MOTO

" Bila Kau tak tahan lelahnya belajar, maka

Kau harus tahan menanggung perihnya Kebodohan"

(HR. Syafi'i)

PERSEMBAHAN

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَـٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt penulis persembahkan skripsi ini kepada: Ayahanda Seno Poernomo, Ibunda Endang Sulistyowati tercinta, yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat, dan kasih sayang yang tak ternilai, serta keenam kakak Enita Purdiana, Endik Purdianto, Entin Anggaripur Dianti, Enisa Purdiana, Enila Purnamasari, Evina Ayu Purwanti, dan seluruh keluarga yang selalu memberi semangat.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah Swt yang telah melimpahkan rahmat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Klasik", sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia menuju jalan yang terang benderang yaitu ad-Din al-Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk, dukungan baik secara langsung maupun tidak langsung dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Moh. Jamhuri, M.Si, selaku dosen wali yang telah memberikan arahan dan bimbingan sejak semester awal.
5. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.

6. Ach. Nashichuddin, MA, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
7. Ayahanda Seno Poernomo, Ibunda Endang Sulistyowati, orang tua luar biasa yang telah memberikan segalanya yang penulis butuhkan dan pengorbanannya tidak bisa penulis ungkapkan dengan kata-kata.
8. Segenap dosen Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah mentransferkan ilmunya dengan baik dan membimbing dengan sabar.
9. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
10. Semua pihak yang telah memberikan bantuan dalam proses penyelesaian penelitian skripsi ini secara langsung maupun tidak.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 03 Mei 2019

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Purnamastuti, Evana Dyah. 2019. **Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Klasik.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, MA.

Kata kunci: keterbatasan, perumuman operator integral fraksional, ruang Morrey Klasik.

Perumuman operator integral fraksional pertama kali dipelajari oleh Nakai pada tahun 2001. Selanjutnya kajian tentang *Fractional Integral Operator and Olsen Inequality in the Non-Homogen Classic Morrey Space* telah dilakukan oleh Utoyo, dkk pada tahun 2012. Kemudian kajian tentang keterbatasan perumuman operator integral fraksional di ruang Lebesgue pada ruang kuasi metrik tak homogen telah dilakukan oleh Utoyo pada tahun 2016. Ruang Lebesgue merupakan bentuk khusus dari ruang Morrey Klasik. Perumuman operator integral fraksional dikatakan terbatas jika terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga $\|T(f):Y\| \leq C\|f:X\|$ untuk setiap $f \in X$. Pembuktian keterbatasan pada penelitian ini menggunakan ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev (H-L-S) dengan memanfaatkan fungsi maksimal operator dan ketaksamaan holder.

Perumuman operator integral fraksional merupakan bentuk pengembangan dari operator integral fraksional jika untuk $\rho(t) = t^{\alpha}$ dimana $0 < \alpha < n$ sedemikian sehingga operator $I_{\rho} = I_{\alpha}$. Perumuman operator integral fraksional dalam penelitian ini dinotasikan sebagai $I_{\rho}f(x) := \int_X \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} f(y)d\mu(y)$.

Tujuan penelitian ini adalah menentukan keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada ruang Morrey Klasik. Selanjutnya diperoleh suatu teorema yang menyatakan bahwa perumuman operator integral fraksional terbatas dari $L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)$ ke $L^{q,\lambda_2}(X)$ dan juga terbatas dari $L^{p,\lambda}(X)$ ke $L^{q,\lambda}(X)$. Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan *(library research)*. Hasil penelitian ini adalah:

Keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada ruang Morrey Klasik terbatas pada

1. $L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)$ ke $L^{q,\lambda_2}(X)$
2. $L^{p,\lambda}(X)$ ke $L^{q,\lambda}(X)$

Pada penelitian selanjutnya diharapkan dapat dilanjutkan ke ruang yang lebih luas yaitu ruang campanato.

ABSTRACT

Purnamastuti, Evana Dyah. 2019. **Boundedness of the Generalized Fractional Integral Operator on Classic Morrey Spaces.** Thesis. Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, MA.

Keywords: Boundedness, Classic Morrey Spaces, Generalization Fractional Integral Operator

Generalization of the fractional integral operator were first published by Nakai in 2001. Furthermore, studies of boundedness of the fractional integral operator and Olsen Inequality in the Non-Homogen Classic Morrey Space has been carried out by Utoyo, et. al. in 2012. Then, the study of limitations of the generalization of fractional integral operators in the Lebesgue space in quasi-homogeneous quasi-metric spaces was carried out by Utoyo in 2016. Lebesgue space is a special form of the Classic Morrey space. Generalization of the fractional integral operators is called to be limited if there is $C > 0$ such that $\|T(f): Y\| \leq C\|f: X\|$ for every $f \in X$. The proof of limitation in this case using the Hardy-Littlewood-Sobolev inequality (H-L-S) by utilizing the maximum operator function and the inequality of the holder.

A generalization of the fractional integral operators is a form of development of fractional integral operators if for $\rho(t) = t^{\alpha}$ where $0 < \alpha < n$ such that $I_{\rho} = I_{\alpha}$. The generalization of fractional integral operators in this study is denoted by $I_{\rho}f(x) := \int_X \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} f(y)d\mu(y)$.

The purpose of this research is to determine the limitation of the generalization of fractional integral operators in the Classic Morrey Space. Furthermore, a theorem is obtained which states that the fractional integral operator is limited from $L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)$ to $L^{q,\lambda_2}(X)$ and also limited from $L^{p,\lambda}(X)$ to $L^{q,\lambda}(X)$. The research method that used in this research is library research method. The results of this study is:

The limitations of the generalization of fractional integral operators in the Classic Morrey space are limited to

1. $L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)$ to $L^{q,\lambda_2}(X)$
2. $L^{p,\lambda}(X)$ to $L^{q,\lambda}(X)$

In further research, it is expected that it can be proceed to a wider space, namely the campanato space.

ملخص

فرنمستوتي، إيفانا دياه. 2019. **القيود المفروضة على تعميم عن مشغلي متكامل كسري في فضاءات *Classic Morrey*.** بحث جامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (1) خير الرحمن الماجستير (2) أحمد ناصح الدين الماجستير.

كلمات الرئيسة: القيود، تعميم عن عوامل التشغيل الكسرية المتكاملة، فضاءات ***Classic Morrey***.

قامت ناكاي بأول الدراسة تعميم لمشغلي الكسور الجزئية في عام 2001. علاوة على ذلك، أجرت شركة Utoyo. دراسة عن المشغل المتكامل الجزئي وعدم المساواة في أولسن في الفضاء غير المتجانس *Classic Morrey* في عام 2012. ثم بعد ذلك، أجرت شركة Utoyo في عام 2016 دراسة للقيود المحدودة للمشغلين الأساسيين الكسريين في الفضاء Lebesgue في فضاء شبه متجانسة. تعتبر فضاء Lebesgue نموذجًا خاصًا لفضاء *Classic Morrey*. يقال إن تعميم عن مشغلي التكامل الجزئي محدود إذا كان $C > 0$ كذلك $\|T(f): Y\| \leq C\|f: X\|$ في كل $f \in X$. دليل على القيود في هذه الدراسة يستخدم Hardy-Littlewood-Sobolev (H-L-S) عدم المساواة من خلال الاستفادة القصوى من دالة المشغل متباينات.

تعميم المشغلين التكامليين الكسريين هو شكل من أشكال تطوير المشغلين المتكاملين الكسريين إن كان $\rho(t) = t^{\alpha}$ حيث $0 < \alpha < n$ كذلك $I_\rho = I_\alpha$ يشار إلى تعميم عن العوامل التكاملية الكسرية في هذه الدراسة بـ $I_\rho f(x) := \int_X \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} f(y) d\mu(y)$. والغرض من هذه الدراسة هو تحديد حدود تعميم مشغلي التكامل الجزئي في فضاء *Classic Morrey*. علاوة على ذلك، يتم الحصول على نظرية تنص على أن تعميم عن عوامل التكامل الجزئية يقتصر على $L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)$

الى $L^{q,\lambda_2}(X)$ و محدود من $L^{p,\lambda}(X)$ الى. $L^{q,\lambda}(X)$. طريقة البحث المستخدمة في هذه الدراسة هي الأدب. نتائج هذه الدراسة هي :

تقتصر القيود المحدودة لمشغلي التكامل الجزئي في فضاء *Classic Morrey* على

1. $L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)$ الى $L^{q,\lambda_2}(X)$
2. $L^{p,\lambda}(X)$ الى $L^{q,\lambda}(X)$

في مزيد من الأبحاث، من المتوقع أن يتمكن من الانتقال إلى فضاء أوسع، وهي فضاء campanato.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Operator adalah suatu pemetaan dari ruang bernorma yang satu ke ruang bernorma yang lain. Misalkan X dan Y ruang bernorma, dengan T merupakan suatu operator terbatas dari ruang bernorma X ke ruang bernorma Y jika terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga

$$\|T(f): Y\| \leq C\|f: X\| \text{ untuk setiap } f \in X,$$

Dengan $\|f: X\|$ menotasikan norma f di ruang bernorma X. Jika untuk ruang bernorma $X = Y$ dan T merupakan suatu operator terbatas, maka dikatakan bahwa T terbatas di ruang bernorma X (Royden, H. L dan Fitzpatrick, 2010; Utoyo, M.I, dkk, 2012: 227; Hartanto. 2014: 1).

Operator yang menjadi bahan kajian utama pada perkembangan analisis modern adalah operator integral fraksional. Operator integral fraksional pertama kali diperkenalkan oleh Marcel Riesz sekitar tahun 1886. Selanjutnya G.H Hardy, J.E Littlewood pada tahun 1932 dan Sergei Sobolev pada tahun 1938 membuktikan keterbatasan operator integral fraksional pada ruang lebesgue dan hasilnya dikenal sebagai ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev (H-L-S). Dan pembuktian ketaksamaan Hardy- Littlewood-Sobolev (H-L-S) dilakukan dengan memanfaatkan keterbatasan operator maksimal Hardy- Littlewood (M-H-L) pada ruang lebesgue. Operator integral fraksional didefinisikan dengan misalkan f adalah fungsi terukur bernilai riil pada $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, dan misalkan $0 < \alpha < n$. Operator I_α yang memetakan fungsi $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ke $I_\alpha f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} f(y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Operator integral fraksional merupakan operator yang terbatas pada ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke $L^q(\mathbb{R}^n)$ dimana terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga,

$$||I_\alpha f: L^q(\mathbb{R}^n)|| \leq C||f: L^p(\mathbb{R}^n)||$$

dengan $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ dan $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ (Gunawan, H, 2004: 1).

Selanjutnya pada tahun 1938 C.B. Morrey memperkenalkan perumuman dari ruang Lebesgue yaitu ruang Morrey, dimana pendefinisian operator integral fraksional diperluas dari ruang Lebesgue ke ruang Morrey. Spanne (dalam (Peetre (1969)) serta Adams (1975) dan Chiarenza dan Frasca (1987) membuktikan keterbatasan operator integral fraksional pada ruang Morrey Klasik yang merupakan perumuman dari ruang Lebesgue.

Pada tahun 2001 Nakai memperkenalkan dan mempelajari keterbatasan perumuman operator integral fraksional I_ρ, dimana perumuman operator integral fraksional merupakan perumuman dari operator integral fraksional. Misalkan $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$, terkait dengan suatu fungsi $\rho: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dan sebarang f, didefinisikan pemetaan $f \rightarrow I_\rho f$, dengan

$$I_\rho f(x) := \int_X \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} f(y)dy$$

Jika untuk $\rho(t) = t^{\alpha}$, dimana $0 < \alpha < n$ maka operator $I_{\rho} = I_{\alpha}$, dikenal dengan sebutan perumuman operator integral fraksional (Eridani,dkk, 2004: 307 dan Gunawan, H, 2003: 2). Selanjutnya kajian tentang *Fractional Integral Operator and Olsen Inequality in the Non-Homogen Classic Morrey Space* telah dilakukan oleh Utoyo, dkk (2012). Hasil dalam penelitian ini adalah menggunakan ukuran keteraturan yang lebih umum dari penelitian sebelumnya. Kemudian kajian tentang keterbatasan perumuman operator integral fraksional di ruang Lebesgue pada ruang kuasi metrik tak homogen telah dilakukan oleh Utoyo (2016). Hasil dalam penelitian ini adalah bahwa syarat perlu yang dihasilkan bukan merupakan syarat cukup untuk keterbatasan perumuman operator integral fraksional

Keterbatasan operator integral fraksional pada hakikatnya mengalami perkembangan sehingga secara tidak langsung menuntut manusia untuk selalu berfikir dalam mengembangkan ilmu. Anjuran untuk berfikir dalam mengembangkan ilmu telah dituliskan dalam salah satu ayat al-Qur'an, pada surat al-Imron ayat 189-191:

وَلِلَّهِ مُلْكُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ ۗ وَاللَّهُ عَلَىٰ كُلِّ شَيْءٍ قَدِيرٌ ﴿١٨٩﴾ إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَاوَاتِ
وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِأُولِي الْأَلْبَابِ ﴿١٩٠﴾ الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَامًا وَقُعُودًا
وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَٰذَا بَاطِلًا سُبْحَانَكَ فَقِنَا عَذَابَ
النَّارِ ﴿١٩١﴾

"*Kepunyaan Allah-lah kerajaan langit dan bumi, dan Allah Maha Perkasa atas segala sesuatu. Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal. (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka".*

Berfikir dalam istilah Arab disebut tafakur. Menurut Badi dan Tajdin (2007:15) tafakur dapat diarahkan dalam beberapa tujuan, yaitu pada penciptaan alam semesta, kekuasaan Allah Swt di alam semesta, serta untuk memahami dan menangkap pesan dalam al-Quran.

Ahmad Bin Muhammad ash Showy al Mashry al Kholwaty al Maliky (1241-1175H:260) berpendapat bahwa lafad الَّذِينَ يَذْكُرُونَ وَيَتَفَكَّرُونَ menjadi badal dari lafad sebelumnya yaitu lafad لِأُولِي الْأَلْبَابِ hal ini menunjukkan bahwa orang-orang yang memiliki akal yang sempurna adalah orang-orang yang mau berpikir dan berdzikir. Lafad وَيَتَفَكَّرُونَ menjadi athof dari lafad يَذْكُرُونَ yang berarti hal ini menunjukkan adanya suatu pekerjaan yang dikaitkan atau sesuatu yang bersamaan. Ada kalanya manusia mengingat Allah SWT terlebih dahulu, baru manusia tergugah untuk memikirkan akan ciptaan-Nya. Adakalanya manusia berpikir untuk mencari atau membuktikan suatu kebenaran, kemudian akhirnya sampai kepada hakikat dari apa yang dicari yaitu adanya kekuasaan Allah SWT. Ada juga yang melakukannya secara bersamaan. Mereka berpikir dan sekaligus berdzikir. Sedangkan Ibnu Katsir (2004) berpendapat bahwa dengan akal-akal yang sempurna dan memiliki kecerdasan, yang dapat dengan mudah mengetahui segala sesuatu hakikat dari apa yang dicari secara jelas dan gamblang.

Berdasarkan hikmah dari al-Qur’an surat al-Imron ayat 189-191, dapat diketahui bahwa manusia memiliki kewajiban memperdalam ilmu untuk berfikir serta mencari atau membuktikan suatu kebenaran karena manusia memiliki akal-akal yang sempurna dan memiliki kecerdasan, kemudian pada akhirnya sampai kepada hakikat dari apa yang dicari, selanjutnya membagikannya kepada sesama, sehingga ilmu pun akan mengalami perkembangan yang berkelanjutan. Kajian tentang perkembangan dalam ilmu matematika selalu mengalami perkembangan yang bertujuan untuk dapat membuktikan suatu kebenaran dari penemuan-penemuan baru.

Berdasarkan paparan di atas dan sebagai pengembangan dari hasil-hasil penelitian terdahulu yang banyak merujuk pada jurnal ataupun artikel. Sehingga penulis ingin mengkaji lebih dalam dengan melengkapi bukti-bukti yang belum banyak menjelaskan tentang hal tersebut secara terperinci. Oleh karena itu, penulis merumuskan judul "Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Klasik". Yang dalam penelitian ini penulis akan membuktikan keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada Ruang Morrey Klasik terbatas dari $L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)$ ke $L^{q,\lambda_2}(X)$ dan terbatas dari $L^{p,\lambda}(X)$ ke $L^{q,\lambda}(X)$ dengan ρ memenuhi kondisi pertumbuhan atau *growth condition* $\mu(B(x,r)) \leq Cr^s$ dimana $s = \frac{pq(n-\alpha)}{pq+p-q}$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada Ruang Morrey Klasik terbatas dari $L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)$ ke $L^{q,\lambda_2}(X)$?
2. Bagaimana keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada Ruang Morrey Klasik terbatas dari $L^{p,\lambda}(X)$ ke $L^{q,\lambda}(X)$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada Ruang Morrey Klasik terbatas dari $L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)$ ke $L^{q,\lambda_2}(X)$.
2. Mengetahui keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada Ruang Morrey Klasik terbatas dari $L^{p,\lambda}(X)$ ke $L^{q,\lambda}(X)$.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Dengan mengetahui keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada Ruang Morrey Klasik diperoleh bahwa perumuman operator integral fraksional terbatas dari $L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)$ ke $L^{q,\lambda_2}(X)$.
2. Dengan mengetahui keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada Ruang Morrey Klasik diperoleh bahwa perumuman operator integral fraksional terbatas dari $L^{p,\lambda}(X)$ ke $L^{q,\lambda}(X)$.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini akan dibuktikan keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada ruang Morrey Klasik sehingga tidak akan membuktikan atau membahas hasil-hasil yang serupa pada ruang lainnya.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*library research*). Metode ini dilakukan dengan mengumpulkan informasi atau rujukan yang berasal dari buku, jurnal dan sumber lainnya yang berkaitan dengan integral fraksional sebagai landasan teori. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Pada pembuktian keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada ruang Morrey Klasik terbatas dari $L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)$ ke $L^{q,\lambda_2}(X)$ melalui teorema Hardy-Littlewood-Sobolev (H-L-S) untuk $\frac{s\lambda_1}{np} = \frac{\lambda_2}{q}$ dimana $0 < \lambda_1 < \frac{np}{q}$ dengan memanfaatkan fungsi maksimal operator dan ketaksamaan holder.
2. Pada pembuktian keterbatasan dari perumuman operator integral fraksional pada ruang Morrey Klasik terbatas dari $L^{p,\lambda}(X)$ ke $L^{q,\lambda}(X)$ melalui teorema Hardy-Littlewood-Sobolev (H-L-S) untuk $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha-n+s}{s-\lambda}$ dimana $0 < \lambda < s$ dengan memanfaatkan fungsi maksimal operator dan ketaksamaan holder.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan digunakan untuk mempermudah dalam memahami penelitian ini. Dalam sistematika penulisan penelitian ini terbagi menjadi empat bab dan masing-masing bab dibagi dalam subbab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini terdiri dari teori-teori yang digunakan untuk mendukung pembahasan dan menjawab rumusan masalah. Kajian Pustaka dalam penelitian ini meliputi: integral Lebesgue, ketaksamaan holder, keterbatasan operator, operator integral fraksional, perumuman operator integral fraksional, fungsi maksimal operator dan ruang Morrey Klasik, serta kajian agama.

Bab III Pembahasan

Bab ini menguraikan secara keseluruhan langkah-langkah yang disebutkan dalam metode penelitian dan menjawab semua rumusan masalah. Pembahasan dalam penelitian ini meliputi: keterbatasan operator integral fraksional pada ruang Morrey Klasik dan kajian agama.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Integral Lebesgue

Definisi Fungsi Sederhana 2.1:

Fungsi f disebut fungsi sederhana jika f merupakan fungsi bernilai real yang hanya mempunyai sejumlah berhingga nilai. Fungsi sederhana f dapat dinotasikan dalam bentuk:

$$f = \alpha_1 \chi_{A_1} + \cdots + \alpha_n \chi_{A_n}$$

Dengan $\{A_1, \dots, A_n\}$ saling asing dan $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = X$ (Bartel,1966:10).

Misalkan $f: X \to \mathbb{R}$. Fungsi tak negatif $f^+(x)$ dan $f^-(x)$ didefinisikan dengan

$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\}$$

dan

$$f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}$$

Dimana fungsi $f^+(x)$ disebut bagian positif dari $f(x)$ dan $f^-(x)$ disebut bagian positif dari $f(x)$. Berdasarkan definisi kedua fungsi tak negatif tersebut diperoleh

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

dan

$$|f(x)| = f^+(x) - f^-(x)$$

(Bartel, 1966: 10; Burkill, J. C, 1963: 26; Hartanto, 2014: 8).

Definisi Integral Lebesgue dari fungsi sederhana terukur f pada ruang ukuran (X, δ, μ) 2.2:

$$\int_X f(x)d\mu = \alpha_1\chi_{A_1} + \cdots + \alpha_n\chi_{A_n}$$

Integral dari fungsi terukur g dengan φ merupakan fungsi sederhana terukur didefinisikan sebagai:

$$\int_X g(x)d\mu = \sup\{\varphi d\mu; 0 \le \varphi \le \mathrm{g}\}$$

Selanjutnya fungsi terukur f dikatakan terintegral pada himpunan terukur A, jika

$$\int_A f(x)d\mu(x) < \infty$$

(Bartel, 1966:41 dan Hartanto, 2014: 8).

Teorema 2.1:

Misalkan f dan g merupakan fungsi yang nilai integralnya ada di bilangan real pada himpunan terukur A pada ruang metrik ukur (X, δ, μ) dengan X adalah himpunan, δ adalah metrik dan μ adalah ukuran.

(i) Jika $|f| \le |g|$ maka $\int_A |f(x)|\, d\mu(x) \le \int_A |g(x)|\, d\mu(x)$

(ii) Jika F himpunan terukur sehingga $F \subseteq A$ maka

$$\int_F |f(x)|\, d\mu(x) \le \int_A |f(x)|\, d\mu(x)$$

(iii) $\left|\int_A |f(x)|\, d\mu(x)\right| \le \int_A |f(x)|\, d\mu(x)$

(iv) Jika $\{A_n\}$ barisan himpunan pada $\mathcal{A}$, maka $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ dan f fungsi terukur tak negatif maka

$$\int_A |f(x)|\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)|\, d\mu(x)$$

(Royden, H.L dan Fitzpatrick, 2010: 374-375 dan Hartanto, 2014: 9).

Contoh 2.1:

(i) Misalka fungsi $f(x) = x$ dan fungsi $g(x) = x^2$, dimana x bilangan real dengan domainnya [1,2] maka untuk

$|f(x)| \leq |g(x)|$

$|x| \leq |x^2|$

$x \leq x^2$

Jika dimisalkan $x = 2$ maka $2 \leq 2^2$ atau ditulis dengan $2 \leq 4$.

Selanjutnya misalkan $A = [1,2]$ dimana A merupakan domain, fungsi $f(x) = x$ dan fungsi $g(x) = x^2$ dengan $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan fungsi yang nilai integralnya ada di bilangan real pada A maka

Kasus (i)

$$\int_A |f(x)|\, d\mu(x) = \int_{[1,2]} |x|\, d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{2}x^2\Big]_1^2$$

$$= \frac{3}{2}$$

Kasus (ii)

$$\int_A |g(x)|\, d\mu(x) = \int_{[1,2]} |x^2|\, d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{3}x^3\Big]_1^2$$

$$= \frac{7}{3}$$

Dengan demikian maka $\int_A |f(x)|\, d\mu(x) \leq \int_A |g(x)|\, d\mu(x)$

(ii) Misalkan F, A himpunan terukur, dengan $F = [1,\frac{3}{2}]$ dan $A = [1,2]$ sehingga $F \subseteq A$, untuk $f(x) = x$ dengan $f(x)$ merupakan fungsi yang nilai integralnya ada di bilangan real pada F dan A maka

Kasus (i)

$$\int_F |f(x)|\, d\mu(x) = \int_{[1,\frac{3}{2}]} |x|\, d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{2}x^2\Big]_1^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{5}{8}$$

Kasus (ii)

$$\int_A |f(x)|\, d\mu(x) = \int_{[1,2]} |x|\, d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{2}x^2\Big]_1^2$$

$$= \frac{3}{2}$$

Dengan demikian maka $\int_F |f(x)|\, d\mu(x) \leq \int_A |f(x)|\, d\mu(x)$

(iii) Misalka fungsi $f(x) = x$, dengan $f(x)$ fungsi yang nilai integralnya ada di bilangan real pada A, A himpunan terukur, dimana $A = [1,2]$, maka

Kasus (i)

$$\left|\int_A |f(x)|\, d\mu(x)\right| = \left|\int_{[1,2]} |x|\, d\mu(x)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}x^2\right]_1^2\right|$$

$$= \left|\frac{3}{2}\right|$$

$$= \frac{3}{2}$$

Kasus (ii)

$$\int_A |f(x)|\, d\mu(x) = \int_{[1,2]} |x|\, d\mu(x)$$

$$= \frac{1}{2}x^2\Big]_1^2$$

$$= \frac{3}{2}$$

Dengan demikian maka $\left|\int_A |f(x)|\, d\mu(x)\right| \leq \int_A |f(x)|\, d\mu(x)$

(iv) Misalkan diambil $A_n = (n-1, n]$ dan diambil

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1^2} = 1 & x \in A_1 = (0,1] \\ \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} & x \in A_2 = (1,2] \\ \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} & x \in A_3 = (2,3] \\ \vdots & \vdots \end{cases}, \text{dengan } n = 1,2,\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mathcal{X}_{A_n}(x)$$

Selanjutnya yaitu $f_n(x) = \frac{1}{n^2}\chi_{A_n}(x)$, dimana $\mathcal{X}_{A_n}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A_n \\ 0 & x \notin A_n \end{cases}$

maka

$$\begin{aligned} \int_A |f(x)|\, d\mu(x) &= \int_A \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \chi_{A_n}(x) \right| d\mu(x) \\ &= \int_A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \mathcal{X}_{A_n}(x)\, d\mu(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_A \mathcal{X}_{A_n}(x)\, d\mu(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{n-1}^{n} d\mu(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (n-(n-1)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Karena $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \chi_{A_n}(x) > 0$

-Karena penjumlahan dan integral bersifat linear, sehingga dapat bertukar posisi.

-Karena $\frac{1}{n^2}$ tidak berantung pada x, sehingga dapat dikeluarkan dari integral.

Karena $\mathcal{X}_{A_n}(x) = 1, x \in A_n = (n-1, n]$

Untuk menunjukkan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, maka diambil $sin(x)$ dengan

$$\begin{aligned} sin(x) &= x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)(\cdots) \\ &= x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)(\cdots) \end{aligned}$$

$$= x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$$sin_3(x) = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)$$

$$= x\left[1+\mathrm{O}(x^4)-\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{x^2}{(2\pi)^2}\left(1-\frac{x^2}{(3\pi)^2}\right)\right]$$

$$= x\left[1+\mathrm{O}(x^4)-\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{x^2}{(2\pi)^2}-\frac{x^2}{(p\pi)^2}+\mathrm{O}(x^6)\right]$$

$$= T-\frac{x^3}{\pi^2}-\frac{x^3}{(2\pi)^2}-\frac{x^3}{(3\pi)^2}$$

$$sin_3(x) = -\frac{x^3}{\pi^2}-\frac{x^3}{(2\pi)^2}-\frac{x^3}{(3\pi)^2}+T$$

$$sin_n(x) = T-\left[\frac{x^3}{\pi^2}+\frac{x^3}{(2\pi)^2}+\cdots+\frac{x^3}{(n\pi)^2}\right]$$

Dengan $-\left[\frac{x^3}{\pi^2}+\frac{x^3}{(2\pi)^2}+\cdots+\frac{x^3}{(n\pi)^2}\right] = -x^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2n^2}$, maka

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x-\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots$$

$$= -\frac{x^3}{3!}$$

Sehingga

$$-\frac{x^3}{3!} = -x^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2n^2}$$

Selanjutnya mengalikan ruas kanan dan kiri dengan $\frac{\pi^2}{x^3}$, maka diperoleh

$$\frac{\pi^2}{3!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

atau bisa ditulis dengan

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Dengan demikian maka diperoleh

$\int_A |f(x)|\, d\mu(x) = \frac{\pi^2}{6}$, dimana untuk $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Pada sisi lain

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f_n(x)|\, d\mu(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \left| \frac{1}{n^2} \mathcal{X}_{A_n}(x) \right| d\mu(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \frac{1}{n^2} \mathcal{X}_{A_n}(x)\, d\mu(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} \frac{1}{n^2}\, d\mu(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^2}\, d\mu(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-(n-1))}{n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

Karena $\frac{1}{n^2} \chi_{A_n}(x) > 0$

Karena $\mathcal{X}_{A_n}(x) = 1, x \in A_n = (n-1, n]$

Dengan demikian maka $\int_A |f(x)|\, d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f_n(x)|\, d\mu(x)$

(Royden, H.L, 1988: 84).

2.2 Ketaksamaan Holder

Definisi 2.4:

Misalkan $L^p(X) = \left\{f: X \to \mathbb{R}: \left(\int_X |f(y)|^p \, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}, 1 < p, q < \infty$ dan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Jika $f \in L^p(X)$ dan $g \in L^q(X)$ maka $f, g \in L^1(X)$ dan $\int_X |f(x)g(x)| \, d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g(x)|^q \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}}$ (Hartanto, 2014: 9).

2.3 Keterbatasan Operator

Definisi 2.5:

Operator adalah suatu pemetaan dari ruang bernorma yang satu ke ruang bernorma yang lain. Misalkan X dan Y ruang bernorma, dengan T merupakan suatu operator terbatas dari ruang bernorma X ke ruang bernorma Y jika terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga

$$\|T(f): Y\| \leq C\|f: X\| \text{ untuk setiap } f \in X,$$

Dengan $\|f: X\|$ menotasikan norma f di ruang bernorma X. Jika untuk ruang bernorma $X = Y$ dan T merupakan suatu operator terbatas, maka dikatakan bahwa T terbatas di ruang bernorma X (Royden, H. L dan Fitzpatrick, 2010; Utoyo, M.I, dkk, 2012: 227; Hartanto. 2014: 1).

2.4 Operator Integral Fraksional

Definisi 2.6:

Misalkan f adalah fungsi terukur bernilai riil pada X, $n \geq 1$, dan misalkan $0 < \alpha < n$. Operator I_α yang memetakan fungsi $f: X \to \mathbb{R}$ ke $I_\alpha f: X \to \mathbb{R}$ dengan

$$I_\alpha f(x) := \int_X \frac{1}{\delta(x,y)^{n-\alpha}} f(y) d\mu(y), \qquad x \in X$$

adalah operator integral fraksional (Gunawan, H, 2004: 1).

2.5 Perumuman Operator Integral Fraksional

Operator integral fraksional disebut sebagai perumuman operator integral fraksional yaitu misalkan $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$, terkait dengan suatu fungsi $\rho: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dan sebarang f, didefinisikan pemetaan $f \to I_\rho f$; dengan

$$I_\rho f(x) := \int_X \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} f(y) d\mu(y)$$

Operator I_ρ disebut perumuman operator integral fraksional sedangkan operator I_α disebut sebagai operator integral fraksional. operator I_ρ adalah generalisasi dari operator I_α jika untuk $\rho(t) = t^\alpha$, dimana $0 < \alpha < n$ maka operator $I_\rho = I_\alpha$. Perumuman operator integral fraksional yang didefinisikan sebagai $I_\rho f(x) = \int_X \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} f(y) d\mu(y)$ merupakan perumuman dari operator I_α yang didefinisikan sebagai $I_\alpha f(x) = \int_X \frac{1}{\delta(x,y)^{n-\alpha}} f(y) d\mu(y)$. Berikut pembuktianya,

Diketahui bahwa perumuman operator integral fraksional didefinisikan sebagai $I_\rho f(x) = \int_X \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} f(y) d\mu(y)$, dengan memisalkan $\rho(t) = t^\alpha$ selanjutnya diperoleh

$$I_\rho f(x) = \int_X \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} f(y)d\mu(y)$$

$$= \int_X \frac{\delta(x,y)^\alpha}{\delta(x,y)^n} f(y)d\mu(y)$$

$$= \int_X \frac{1}{\delta(x,y)^n} \delta(x,y)^\alpha f(y)d\mu(y)$$

$$= \int_X \frac{1}{\delta(x,y)^n} \frac{1}{\delta(x,y)^{-\alpha}} f(y)d\mu(y)$$

$$= \int_X \frac{1}{\delta(x,y)^{n-\alpha}} f(y)d\mu(y)$$

Dalam hal ini diperoleh bahwa $I_\rho f(x) = \int_X \frac{1}{\delta(x,y)^{n-\alpha}} f(y)d\mu(y)$, dimana telah diketahui bahwa definisi operator integral fraksional adalah $I_\alpha f(x) = \int_X \frac{1}{\delta(x,y)^{n-\alpha}} f(y)d\mu(y)$, dengan demikian maka terbukti bahwa operator $I_\rho = I_\alpha$. Selanjutnya jika untuk ρ memenuhi kondisi penggandaan, maka untuk setiap bilangan bulat k dan $r > 0$ berlaku bahwa jika $2^k r \leq \delta(x,y) < 2^{k+1}r$, maka $\frac{1}{2} \leq \frac{\delta(x,y)}{2^{k+1}r} \leq 2$, sehingga

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\rho(2^{k+1}r)} \leq C \qquad (i)$$

Oleh karena itu,

$$\frac{1}{C}\rho(2^{k+1}r) \leq \rho\big(\delta(x,y)\big) \leq C\rho(2^{k+1}r) \qquad (ii)$$

Berdasarkan (ii) diperoleh bahwa $2^k r \leq t < 2^{k+1}r$ maka $\frac{1}{C} \leq \frac{\rho(t)}{\rho(2^{k+1}r)} \leq C$ sehingga $\frac{\rho(2^{k+1}r)}{C} \leq \rho(t) \leq C\rho(2^{k+1}r)$. Oleh karena itu $\frac{1}{C}\frac{\rho(2^{k+1}r)}{2^{k+1}r} \leq \frac{\rho(t)}{t} \leq C\frac{\rho(2^{k+1}r)}{2^k r}$ atau bisa ditulis dengan $\frac{1}{2C}\frac{\rho(2^{k+1}r)}{2^{k+1}r} \leq \frac{\rho(t)}{t} \leq 2C\frac{\rho(2^{k+1}r)}{2^k r}$. Dengan demikian maka $\int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{1}{2C} \frac{\rho(2^{k+1}r)}{2^k r} dt \leq C \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(t)}{t} dt \leq \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} 2C \frac{\rho(2^{k+1}r)}{2^k r} dt$ sehingga $\frac{1}{2C} \rho(2^{k+1}r) \leq C \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(t)}{t} dt \leq 2C\rho(2^{k+1}r)$. Jika $\rho(2^{k+1}r)$ memenuhi $\frac{1}{2C} \rho(r) \leq C \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(t)}{t} dt \leq 2C\rho(2^{k+1}r)$ maka dapat ditulis dengan $\rho(2^{k+1}r) \leq \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(t)}{t} dt$ (Eridani,dkk, 2004: 307; Nakai, 2001; Hartanto, 2014: 12; Utoyo, 2016: 625).

2.6 Fungsi Maksimal Operator

Membuktikan keterbatasan perumuman operator integral fraksional diperlukan adanya fungsi maksimal operator yang didefinisikan sebagai berikut

Definisi 2.7:

$$Mf(x) := \sup_{B(x,r)} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| d\mu(y)$$

Dalam hal ini $B(x,r)$ adalah bola buka di X yang berpusat di $x \in X$ dengan radius $r > 0$ dan $\mu(B(x,r))$ adalah ukuran Lebesgue (Duoandikoetxea, 2001: 43 dan Gunawan, G., & H. Gunawan, 2006: 31).

2.7 Ruang Morrey Klasik

Sebelum membahas ruang Morrey Klasik akan dibahas terlebih dahulu ruang Lebesgue. Ruang Lebesgue $L^q = L^q(X), 1 \leq q < \infty$ didefinisikan sebagai ruang kelas-kelas fungsi ekivalen f dengan sifat

$$\|f: L^q(X)\| = \left(\int_X |f(y)|^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

Oleh karena setiap anggota dari ruang Morrey Klasik merupakan anggota ruang Lebesgue lokal, dengan demikian sebelum mendefinisikan ruang Morrey Klasik terlebih dahulu didefinisikan ruang Lebesgue lokal, $L_{lok}^q = L_{lok}^q(X), 1 \leq q < \infty$. Ruang Lebesgue lokal didefinisikan sebagai ruang kelas-kelas fungsi ekivalen f sehingga untuk setiap subhimpunan kompak S di X berlaku

$$\int_X |f(y)|^q d\mu(y) < \infty$$

Ruang morrey pertama kali diperkenalkan oleh C.B. Morrey pada tahun 1938 dalam suatu penelitian dengan judul *on the solutions of quasi linear elliptic partial differential equations*. Ruang morrey merupakan ruang morrey klasik dimana ruang morrey klasik dinotasikan dengan $L^{p,\lambda}(X)$ yang didefinisikan sebagai himpunan dari setiap $f \in L_{loc}^p(X)$, sedemikian hingga

$$\|f: L^{p,\lambda}(X)\| \coloneqq \sup_{B \coloneqq B(x,r)} \left(\frac{1}{\mu(B(x,r))^\lambda} \int_B |f(y)|^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Dalam hal ini notasi $B \coloneqq B(x,r)$ merupakan bola buka di X yang berpusat di $x \in X$ dengan radius $r > 0$, yaitu $B(x,r) \coloneqq \{y \in X: |x-y| < r\}$, untuk setiap $x \in X$ dan $r > 0$. Ruang $L^{p,\lambda}(X)$ merupakan perumuman dari ruang $L^p(X)$, karena jika dipilih $\lambda = 0$, maka diperoleh bahwa $L^{p,\lambda}(X) = L^p(X)$ (Utoyo, M.I,dkk: 2012; Gunawan, G., & H. Gunawan, 2006: 36; Kevin, 2014: 2).

Contoh 2.2:

Misalkan $X \coloneqq \{x\epsilon\, X: 0 \leq x \leq 2\}$ dan μ adalah ukuran lebesgue. Didefinisikan fungsi $f(x) = x^2 + 2x, \forall x \in X$. Tinjau apakah fungsi $f(x)$ tersebut berada pada ruang Morrey Klasik $L^{p,\lambda}(X)$ untuk $p = 1$ dan $\lambda = \frac{1}{2}$ dengan $B_4(0)$!

Akan ditunjukkan: $\sup\limits_{B\coloneqq(x,r)} \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_B |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$

$$\|f: L^{p,\lambda}(X)\| = \sup_{B\coloneqq(x,r)} \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_B |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{B\coloneqq(x,r)} \left(\frac{1}{r^\lambda}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{B\coloneqq(x,r)} \left(\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}\right) \left(\int_0^2 |f(x)| d\mu(x)\right)$$

$$= \sup_{B\coloneqq(x,r)} r^{-\frac{1}{2}} \left(\int_0^2 |f(x)| d\mu(x)\right)$$

$$= \sup_{B\coloneqq(x,r)} 4^{-\frac{1}{2}} \int_0^2 |x^2 + 2x|\, d\mu(x)$$

$$= \sup_{B\coloneqq(x,r)} 4^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^2$$

$$= \sup_{B\coloneqq(x,r)} \frac{1}{2}\left(\frac{20}{3}\right)$$

$$= \sup_{B\coloneqq(x,r)} \frac{10}{3}$$

$$= \frac{10}{3} < \infty$$

Karena $\left\| f : L^{1,\frac{1}{2}}(X) \right\| = \sup_{B:=(x,r)} \left(\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} \int_B |f(x)|^1 d\mu(x) \right) < \infty$. Dengan demikian maka fungsi f tersebut berada pada ruang Morrey $L^{1,\frac{1}{2}}(X)$ (Nurjannah. 2018: 24-25)

2.8 Perintah Allah untuk Mengembangkan Ilmu

Pada pembahasan sebelumnya telah dijelaskan tentang perintah berfikir di dalam al-Quran. Selanjutnya akan dibahas bahwa setiap manusia memiliki kewajiban untuk memperdalam ilmu dan kemudian membagikannya kepada sesama, sehingga ilmu pun akan terus mengalami perkembangan. Sebab dengan ilmu, seseorang akan dapat memahami berbagai hal dan karena ilmu juga, seseorang akan mendapatkan kedudukan yang lebih tinggi di sisi Allah, serta di kalangan manusia. Berikut beberapa Hadits yang menjelaskannya:

Jalur Ibnu Majjah

حَدَّثَنَا هِشَامُ بْنُ عَمَّارٍ حَدَّثَنَا حَفْصُ بْنُ سُلَيْمَانَ حَدَّثَنَا كَثِيْرُ بْنُ شِنْظِيْرٍ عَنْ مُحَمَّدِ بْنِ شِيْرِيْنَ عَنْ أَنَسِ بْنِ مَالِكٍ قَالَ : قَالَ رَسُوْلُ اللهِ صَلَّ اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ طَلَبُ الْعِلْمِ فَرِيْضَةٌ عَلَى كُلِّ مُسْلِمٍ وَ وَاضَعُ الْعِلْمِ عِنْدَ غَيْرِ أَهْلِهِ كَمُقَلِّدِ الْخَنَازِيْرِ الْجَوْهَرَ وَاللُّؤْلُؤَ وَالذَّهَبَ (رواه إبن ماجة)

"Hisyam bin 'Ammar menceritakan kepada kami, Hafs bin Sulaiman menceritakan kepada kami, Katsir bin Syindzir menceritakan kepada kami dari Muhammad bin Syirin, dari Anas bin Malik berkata, Rasulullah SAW. bersabda : "Mencari ilmu itu wajib bagi setiap muslim, dan orang yang meletakkan ilmu pada selain ahlinya bagaikan menggantungkan permata mutiara dan emas pada babi hutan"(HR. Ibnu Majjah)".

(Software CD, al-kutub at-tis'ah)

Jalur Al-Thabrani

حَدَّثَنَا مُحَمَّدُ بن يَحْيَى بن الْمُنْذِرِ الْقَزَّازُ، وَالْحُسَيْنُ بن إِسْحَاقَ التُّسْتَرِيُّ، قَالا: حَدَّثَنَا الْهُذَيْلُ بن إِبْرَاهِيمَ الْحِمَّانِيُّ، حَدَّثَنَا عُثْمَانُ بن عَبْدِ الرَّحْمَنِ الْقُرَشِيُّ، عَنْ حَمَّادِ بن أَبِي سُلَيْمَانَ، عَنْ أَبِي وَائِلٍ، عَنْ عَبْدِ اللَّهِ بن مَسْعُودٍ، قَالَ: قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ: طَلَبُ الْعِلْمِ فَرِيضَةٌ عَلَى كُلِّ مُسْلِمٍ. (رواه الطبراني)

"Muhammad bin Yahya bin Mundzir Al-Qazzaz dan Husain bin Ishaq berkata, Hudail bin Ibrahim Al-Himmany menceritakan kepada kami, Utsman bin Abdurrahman Al-Qurasyi menceritakan kepada kami, dari Hammad bin Abi Sulaiman, dari Abi Wail, Dari Abdillah bin Mas'ud berkata, Rasulullah SAW. bersabda : "Mencari ilmu itu wajib bagi setiap muslim"(HR. Thobroni).

(Software CD, Asy-Syamilah, *Mu'jam al-Kabir li al-Tabrani* (9: 42))

Arif S Sadiman, dkk (2012) menjelaskan hadits di atas bahwa menuntut ilmu merupakan suatu keharusan bagi setiap manusia. Karena dengan menuntut ilmu, seorang bisa berubah dari yang belum tahu menjadi tahu. Selain itu akhlak atau tingka laku seseorang bisa berubah dari buruk menjadi baik dalam perubahan tingkah laku. Hal ini sesuai dengan tujuan pembelajaran, dan kebanyakan seseorang telah belajar kemudian terdapat perubahan tingkah laku pada dirinya.

Menurut M. Fadholi Noer (2014) dari beberapa hadis di atas dapat disimpulkan bahwa subtansi dari teks hadis diatas dapat diambil hikmah bagi kita untuk memberikan dorongan atau pemberi motivasi tentang pentingnya sebuah pengetahuan yang harus dicari dan yang diharapkan nantinya adalah menjadikan seseorang berubah ke arah yang lebih positif, yaitu berubah dari hal yang tidak tahu menjadi tahu, dari yang tadinya tidak bisa menjadi bisa,dan dari seorang yang memiliki sifat tidak arif menjadi bijaksana, karena pengetahuan atau ilmu yang didapatkannya tersebut menunjukkan kepada jalan ke surga sebagai balasannya dari akibat berbuat kebaikan. Dan karena ilmu, manusia dapat mengenal dirinya, tahu tujuannya, tahu tugas dan kewajiban.

Dari hadis-hadis di atas dapat dipahami, bahwa hadis tersebut adalah sebagai proses menuntut ilmu. Menuntut ilmu merupakan proses perubahan untuk menuju sesuatu yang lebih baik, yaitu dengan pengetahuan yang dimiliki dari hasil pencariannya. Seseorang dengan sendirinya akan memperbaiki kesalahan-kesalahan yang pernah dilakukan. Selain itu pula, dari penjelasan hadis-hadis di atas tersirat makna esensial bahwa manusia (umat Islam) didorong untuk selalu mengkaji dan menggali ilmu. Tetapi M. Fadholi Noer (2014) memiliki anggapan bahwa ilmu di sini tidak terbatas hanya pada ilmu agama saja, tetapi semua ilmu.

Lebih dari itu mengacu teks hadis di atas kata العالم yang dimaksudkan adalah perlu adanya prioritas keilmuan yang perlu diutamakan, dalam kasus ini yang dimaksud adalah agama. Tapi bukan berarti ilmu yang lain tidak penting karena penulis memiliki keyakinan kuat bahwa semua pengetahuan baik ilmu agama dan ilmu umum itu bersumber dari satu sumber yaitu Allah swt, selain itu ilmu agama merupakan ilmu yang mendasari keimanan seseorang “sebuah baju yang melekat”. Sehingga maksud kata العالم di atas lebih condong ke arti ilmu agama.

Imam Khomeini (2004) membagi ilmu dari sisi kemanfaatannya menjadi tiga jenis ilmu, yaitu: pertama, ilmu-ilmu yang bermanfaat bagi perkembangan tahap-tahap eksistensi manusia sebagai tujuan akhir penciptaan. Kedua, ilmu-ilmu yang merugikan manusia dan membuat manusia melalaikan kewajiban pokoknya. Ketiga, ilmu-ilmu yang tidak membawa madharat dan tidak pula membawa manfaat. Kebermanfaatan ilmu terkait erat dengan kegunaannya dalam mendukung evolusi kemanusiaan manusia menuju kesempurnaan dirinya. Sampai saat ini, manusia terus menerus berada dalam proses evolusi.

Dari beberapa hadits di atas serta paparan para tokoh, dapat dimaknai bahwa menuntut ilmu itu wajib, ilmu itu luas, ilmu itu banyak, tiada batasnya. Sehingga manusia yang memiliki anugerah otak luar biasa dalam kepalanya diwajibkan untuk belajar dan belajar tanpa henti, serta berkewajiban untuk memperdalam ilmu, untuk berfikir dalam mengembangkan ilmu dan kemudian membagikannya. Hingga Allah jualah yang berkehendak menghentikan nafas hidupnya. Hal ini serupa dengan keterbatasan perumuman operator integral fraksional yang terus dilakukan perkembangan untuk mendapatkan penemuan-penemuan baru sehingga dapat digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Sehingga kajian keterbatasan perumuman operator integral fraksional merupakan salah satu bentuk implementasi dari hasil berfikir dalam mengembangkan ilmu.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dipaparkan mengenai penyelesaian keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada Ruang Morrey Klasik. Penyelesaian keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada Ruang Morrey Klasik yang akan diselesaikan dibagi menjadi dua, yaitu keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada Ruang Morrey Klasik terbatas dari $L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)$ ke $L^{q,\lambda_2}(X)$ dan keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada Ruang Morrey Klasik terbatas dari $L^{p,\lambda}(X)$ ke $L^{q,\lambda}(X)$ yang akan dibuktikan pada subbab 3.1 dan subbab 3.2. Kedua subbab tersebut juga dilengkapi dengan syarat $\mu \in GC(s)$ dengan $s = \frac{pq(n-\alpha)}{pq+p-q}$.

3.1 Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional Pada Ruang Morrey Klasik dari $L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)$ ke $L^{q,\lambda_2}(X)$

Ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev yang berlaku pada ruang Lebesgue menginspirasi penelitian lebih mendalam pada ruang yang lebih umum, salah satunya pada ruang morrey klasik. Dalam penelitian ini, penulis mengasumsikan bahwa μ adalah anggota *growth condition* dengan $s > 0$. Dikatakan bahwa ukuran μ memenuhi $\mu \in GC(s)$, jika terdapat konstanta $C > 0$ sedemikian sehingga untuk semua $B(x,r), \mu\big(B(x,r)\big) \leq Cr^s$. Dengan $B(x,r)$ adalah bola buka di X yang berpusat di $x \in X$ dengan radius $r > 0$, yaitu $B(x,r) := \{y \in X: |x-y| < r\}$, untuk setiap $x \in X$ dan $r > 0$. Teorema yang dibuktikan pada subbab ini adalah teorema keterbatasan perumuman operator integral fraksional $I_\rho f$ pada ruang Morrey Klasik terbatas dari $L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)$ ke $L^{q,\lambda_2}(X)$

Teorema 3.1 Misalkan $\mu \in GC(s);\ s = \frac{pq(n-\alpha)}{pq+p-q},\ 1 < p < q < \infty$ dan $0 < \lambda_1 < \frac{np}{q}$. Operator I_ρ terbatas dari $L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)$ ke $L^{q,\lambda_2}(X)$ jika dan hanya jika $\frac{s\lambda_1}{np} = \frac{\lambda_2}{q}$.

Bukti:

Dengan memanfaatkan ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev pada ruang Morrey Klasik, maka dimisalkan bahwa

$$I_\rho f(x) = \int_X \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} f(y) d\mu(y) = I(x) + II(x)$$

dengan

$I(x) = \int_{\delta(x,y)<r} f(y) \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$ dan $II(x) = \int_{\delta(x,y)\geq r} f(y) \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$.

Berdasarkan **Teorema 2.1 (iii) dan (iv)** serta fakta bahwa $2^k r \leq \delta(x,y)$ sehingga $\rho(2^k r) \leq \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\rho(t)}{t} dt$, diperoleh

$$|I(x)| = \left| \int_{\delta(x,y)<r} f(y) \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) \right|$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)<r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)<\frac{1}{2}r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) + \int_{\frac{1}{2}r\leq\delta(x,y)<r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \int\limits_{\delta(x,y)<\frac{1}{4}\mathrm{r}} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} \mathrm{d\mu(y)} + \int\limits_{\frac{1}{4}r\leq\delta(x,y)<\frac{1}{2}\mathrm{r}} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} \mathrm{d\mu(y)}$$

$$+ \int\limits_{\frac{1}{2}r\leq\delta(x,y)<\mathrm{r}} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} \mathrm{d\mu(y)}$$

$$\leq \int\limits_{\delta(x,y)<\frac{1}{8}\mathrm{r}} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} \mathrm{d\mu(y)} + \int\limits_{\frac{1}{8}r\leq\delta(x,y)<\frac{1}{4}\mathrm{r}} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} \mathrm{d\mu(y)}$$

$$+ \int\limits_{\frac{1}{4}r\leq\delta(x,y)<\frac{1}{2}\mathrm{r}} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} \mathrm{d\mu(y)} + \int\limits_{\frac{1}{2}r\leq\delta(x,y)<\mathrm{r}} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} \mathrm{d\mu(y)}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\frac{1}{2^k r}\leq\delta(x,y)<\frac{1}{2^{k+1}r}} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} \int\limits_{2^k r\leq\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{\rho(2^k r)}{(2^k r)^n} \int\limits_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} \rho(2^k r) \frac{1}{(2^k r)^n} \int\limits_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C \sum_{k=-\infty}^{-1} \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(t)}{t} dt \frac{1}{(2^{k+1}r)^n} \int\limits_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C \sum_{k=-\infty}^{-1} \rho(r) \frac{1}{(2^{k+1}r)^n} \int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C \frac{r^\alpha}{r^n} \sum_{k=-\infty}^{-1} \mu\left(B(x,2^{k+1}r)\right) \frac{1}{\mu\left(B(x,2^{k+1}r)\right)} \int_{B(x,2^{k+1}r)} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C r^\alpha r^{s-n} Mf(x)$$

$$= C r^{\alpha+s-n} Mf(x)$$

Sehingga

$$|I(x)| \leq C r^{\alpha+s-n} Mf(x)$$

Selanjutnya berdasarkan **Teorema 2.1** (**iii**) **dan** (**iv**) serta fakta bahwa $\rho(2^k r) \leq \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(t)}{t} dt$, dan dengan menggunakan ketaksamaan Holder diperoleh

$$|II(x)| = \left| \int_{\delta(x,y)\geq r} f(y) \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) \right|$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)\geq r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)\geq 2r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) + \int_{2r\leq\delta(x,y)\leq r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)\geq 4r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) + \int_{4r\leq\delta(x,y)\leq 2r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$+\int_{2r\leq\delta(x,y)\leq r}|f(y)|\frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n}d\mu(y)$$

$$\leq\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^kr\leq\delta(x,y)\leq 2^{k+1}r}|f(y)|\frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n}d\mu(y)$$

$$\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\rho(2^kr)}{(2^kr)^n}\int_{\delta(x,y)\leq 2^{k+1}r}|f(y)|d\mu(y)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\rho(2^kr)\frac{1}{(2^kr)^n}\int_{\delta(x,y)\leq 2^{k+1}r}|f(y)|d\mu(y)$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^kr}^{2^{k+1}r}\frac{\rho(t)}{t}dt\frac{1}{(2^{k+1}r)^n}\left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r}|f(y)|^pd\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r}1^qd\mu(y)\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\rho(r)\frac{1}{(2^{k+1}r)^n}\left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r}|f(y)|^pd\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r}1^qd\mu(y)\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq C\frac{r^\alpha}{r^n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r}|f(y)|^pd\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r}1^qd\mu(y)\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq Cr^{\alpha-n}\sum_{k=0}^{\infty}\mu(B)^{\frac{s\lambda_1}{np}}\left(\frac{1}{\mu(B)^{\frac{s\lambda_1}{n}}}\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r}|f(y)|^pd\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r}1^qd\mu(y)\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq Cr^{\alpha-n}\left\|f:L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|\mu(B)^{\frac{s\lambda_1}{np}}\sum_{k=0}^{\infty}\mu\Big(B(x,2^{k+1}r)\Big)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq Cr^{\alpha-n}r^{\frac{s(p-1)}{p}}\mu(B)^{\frac{s\lambda_1}{np}}\left\|f:L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|$$

$$\leq Cr^{\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{s\lambda_1}{np}}\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|, \alpha-n+\frac{s}{q}+\frac{s\lambda_1}{np}<0$$

Berdasarkan fakta hipotesis teorema bahwa $s=\frac{pq(n-\alpha)}{pq+p-q}$ dan $\frac{s\lambda_1}{np}=\frac{\lambda_2}{q}$, diperoleh

$$-\frac{\lambda_2}{q}\alpha-n+\frac{s\lambda_1}{np}+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{s}{q}=0$$

Karena itu

$$\left(\frac{1}{\lambda_2}\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r}|II(x)|^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}} \leq Cr^{-\frac{\lambda_2}{q}\alpha-n+\frac{s\lambda_1}{np}+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{s}{q}}\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|$$

$$= C\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|$$

Sehingga

$$|II(x)| \leq C\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|$$

Dengan menggabungkan persamaan $|I(x)| \leq Cr^{\alpha+s-n}Mf(x)$ dan $|II(x)| \leq C\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|$ dengan pertidaksamaan $|I_\rho f| \leq |I(x)+II(x)|$ dan menggunakan **Teorema 2.1** (**ii**) serta dipilih $r>0 \ni Cr^{\alpha+s-n}Mf(x) = C\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|$ maka

$$Cr^{\alpha+s-n}Mf(x) = C\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|$$

$$\frac{r^0}{r^{\alpha+s-n}} = C\left(\frac{Mf}{\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|}\right)$$

$$r^{-s+n-\alpha} = C\left(\frac{Mf}{\left\|f : L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|}\right)$$

$$r^{-s+s\left(1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} = C\left(\frac{Mf}{\left\|f : L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|}\right)$$

$$r^{s\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} = C\left(\frac{Mf}{\left\|f : L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|}\right)$$

$$r^{s\left(\frac{p-q}{pq}\right)} = C\left(\frac{Mf}{\left\|f : L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|}\right)$$

$$r = C\left(\frac{Mf}{\left\|f : L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|}\right)^{\left(\frac{pq}{p-q}\right)\frac{1}{s}}$$

Dengan $r = C\left(\frac{Mf}{\left\|f : L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|}\right)^{\left(\frac{pq}{p-q}\right)\frac{1}{s}}$ diperoleh

$$|I_\rho f| \leq C\left(\frac{Mf}{\left\|f : L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|}\right)^{\left(\frac{pq}{p-q}\right)\frac{1}{s}(\alpha+s-n)} Mf(x) + C\left\|f : L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|$$

$$= C\left(\frac{1}{\left\|f : L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|}\right)^{\left(\frac{pq}{p-q}\right)\frac{1}{s}(\alpha+s-n)} (Mf)^{1+\left(\frac{pq}{p-q}\right)\frac{1}{s}(\alpha+s-n)}$$

$$+ C\left\|f : L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|$$

$$= C\left(\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|\right)^{-\left(\frac{pq}{p-q}\right)\frac{1}{s}(\alpha+s-n)} (Mf)^{1+\left(\frac{pq}{p-q}\right)\frac{1}{s}(\alpha+s-n)}$$

$$+C\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|$$

$$|I_\rho f|^q \leq C\left(\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|\right)^{-\left(\frac{pq}{p-q}\right)\frac{1}{s}(\alpha+s-n)} (Mf)^{1+\left(\frac{pq}{p-q}\right)\frac{1}{s}(\alpha+s-n)}$$

$$+C\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|$$

$$\int_X |I_\rho f|^q \, d\mu(x)$$

$$= C\left(\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|\right)^{-\left(\frac{pq}{p-q}\right)\frac{1}{s}(\alpha+s-n)} \int_X (Mf)^{1+\left(\frac{pq}{p-q}\right)\frac{1}{s}(\alpha+s-n)} \, d\mu(x)$$

$$+ C\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|$$

$$\leq C\left(\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|\right)^{-\left(\frac{pq}{p-q}\right)\frac{1}{s}(\alpha+s-n)} \left(\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|\right)^{1+\left(\frac{pq}{p-q}\right)\frac{1}{s}(\alpha+s-n)}$$

$$+C\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|$$

$$= C\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\| + C\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|$$

$$= C\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|$$

Oleh karena itu.

$$\left\||I_\rho f|: L^{q,\lambda_2}(X)\right\| \leq C\left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|$$

Karena memenuhi $\left\||I_\rho f|: L^{q,\lambda_2}(X)\right\| \leq C \left\|f: L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|$ maka operator I_ρ terbatas.

Dengan kata lain operator I_ρ terbatas dari $L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)$ ke $L^{q,\lambda_2}(X)$ dengan syarat $\mu(B(x,r)) \leq Cr^s$. Dan jika diambil $s = n$ maka didapatkan bahwa $\left\||I_\rho f|: L^{q,\lambda_2}(X)\right\| \leq C\left\|f: L^{p,\lambda_1}(X)\right\|$ atau dengan kata lain operator I_ρ terbatas dari $L^{p,\lambda_1}(X)$ ke $L^{q,\lambda_2}(X)$ dengan syarat $\mu(B(x,r)) \leq Cr^s$.

3.2 Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional Pada Ruang Morrey Klasik dari $L^{p,\lambda}(X)$ ke $L^{q,\lambda}(X)$

Ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev yang berlaku pada ruang Lebesgue menginspirasi penelitian lebih mendalam pada ruang yang lebih umum, salah satunya pada ruang morrey klasik. Dalam penelitian ini, penulis mengasumsikan bahwa μ adalah anggota *growth condition* dengan $s > 0$. Dikatakan bahwa ukuran μ memenuhi $\mu \in GC(s)$, jika terdapat konstanta $C > 0$ sedemikian sehingga untuk semua $B(x,r), \mu(B(x,r)) \leq Cr^s$. Dengan $B(x,r)$ adalah bola buka di X yang berpusat di $x \in X$ dengan radius $r > 0$, yaitu $B(x,r) := \{y \in X: |x-y| < r\}$, untuk setiap $x \in X$ dan $r > 0$. Teorema yang dibuktikan pada subbab ini adalah teorema keterbatasan perumuman operator integral fraksional $I_\rho f$ pada ruang Morrey Klasik terbatas dari $L^{p,\lambda}(X)$ ke $L^{q,\lambda}(X)$.

Teorema 3.2 Misalkan $1 < p < q < \infty$ dan $0 < \lambda < s$. Operator I_ρ terbatas dari $L^{p,\lambda}(X)$ ke $L^{q,\lambda}(X)$ jika dan hanya jika $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha - n + s}{s - \lambda}$.

Bukti:

Dengan memanfaatkan ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev pada ruang Morrey Klasik, maka dimisalkan bahwa

$$I_\rho f(x) = \int_X \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} f(y)d\mu(y) = I(x) + II(x)$$

dengan

$I(x) = \int_{\delta(x,y)<r} f(y)\frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n}d\mu(y)$ dan $II(x) = \int_{\delta(x,y)\geq r} f(y)\frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n}d\mu(y)$.

Berdasarkan **Teorema 2.1 (iii) dan (iv)** serta fakta bahwa $\rho(2^k r) \leq \int_{2^k r}^{2^{k+1}r}\frac{\rho(t)}{t}dt$, diperoleh

$$|I(x)| = \left|\int_{\delta(x,y)<r} f(y)\frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n}d\mu(y)\right|$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)<\mathrm{r}} |f(y)|\frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n}\mathrm{d\mu(y)}$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)<\frac{1}{2}\mathrm{r}} |f(y)|\frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n}\mathrm{d\mu(y)} + \int_{\frac{1}{2}r\leq\delta(x,y)<\mathrm{r}} |f(y)|\frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n}\mathrm{d\mu(y)}$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)<\frac{1}{4}\mathrm{r}} |f(y)|\frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n}\mathrm{d\mu(y)} + \int_{\frac{1}{4}r\leq\delta(x,y)<\frac{1}{2}\mathrm{r}} |f(y)|\frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n}\mathrm{d\mu(y)}$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}r\leq\delta(x,y)<\mathrm{r}} |f(y)|\frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n}\mathrm{d\mu(y)}$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)<\frac{1}{8}r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} \mathrm{d}\mu(y) + \int_{\frac{1}{8}r\leq\delta(x,y)<\frac{1}{4}r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} \mathrm{d}\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{4}r\leq\delta(x,y)<\frac{1}{2}r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} \mathrm{d}\mu(y) + \int_{\frac{1}{2}r\leq\delta(x,y)<r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} \mathrm{d}\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^k r}\leq\delta(x,y)<\frac{1}{2^{k+1}r}} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} \int_{2^k r\leq\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{\rho(2^k r)}{(2^k r)^n} \int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} \rho(2^k r) \frac{1}{(2^k r)^n} \int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C \sum_{k=-\infty}^{-1} \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(t)}{t} \frac{1}{(2^{k+1}r)^n} \int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C \sum_{k=-\infty}^{-1} \rho(r) \frac{1}{(2^{k+1}r)^n} \int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C \frac{r^\alpha}{r^n} \sum_{k=-\infty}^{-1} \mu\Big(B(x, 2^{k+1}r)\Big) \frac{1}{\mu\big(B(x, 2^{k+1}r)\big)} \int_{B(x,2^{k+1}r)} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C r^\alpha r^{s-n} Mf(x)$$

$$= C r^{\alpha+s-n} Mf(x)$$

Sehingga

$$|I(x)| \leq Cr^{\alpha+s-n}Mf(x)$$

Selanjutnya berdasarkan **Teorema 2.1** (**iii**) **dan** (**iv**) serta fakta bahwa $\rho(2^k r) \leq \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(t)}{t} dt$, dan dengan menggunakan ketaksamaan Holder diperoleh

$$|II(x)| = \left| \int_{\delta(x,y)\geq r} f(y) \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) \right|$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)\geq r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)\geq 2r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) + \int_{2r\leq\delta(x,y)\leq r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)\geq 4r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) + \int_{4r\leq\delta(x,y)\leq 2r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$+ \int_{2r\leq\delta(x,y)\leq r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k r\leq\delta(x,y)\leq 2^{k+1}r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho(2^k r)}{(2^k r)^n} \int_{\delta(x,y)\leq 2^{k+1}r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \rho(2^k r) \frac{1}{(2^k r)^n} \int_{\delta(x,y)\leq 2^{k+1}r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k r}^{2^{k+1}r}\frac{\rho(t)}{t}dt\frac{1}{(2^{k+1}r)^n}\int_{\delta(x,y)\leq 2^{k+1}r}|f(y)|d\mu(y)$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\infty}\rho(r)\frac{1}{(2^{k+1}r)^n}\left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r}|f(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r}1^q d\mu(y)\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq C\frac{r^\alpha}{r^n}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r}|f(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r}1^q d\mu(y)\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq Cr^{\alpha-n}\sum_{k=0}^{\infty}\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}}\left(\frac{1}{\mu(B)^\lambda}\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r}|f(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r}1^q d\mu(y)\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq Cr^{\alpha-n}\|f:L^{p,\lambda}(X)\|\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}}\sum_{k=0}^{\infty}\mu\left(B(x,2^{k+1}r)\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq Cr^{\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}}\mu(B)^{\frac{\lambda}{p}}\|f:L^{p,\lambda}(X)\|$$

$$\leq Cr^{\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{\lambda}{p}}\|f:L^{p,\lambda}(X)\|$$

Sehingga

$$|II(x)|\leq Cr^{\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{\lambda}{p}}\|f:L^{p,\lambda}(X)\|$$

Dengan menggabungkan persamaan $|I(x)|\leq Cr^{\alpha+s-n}Mf(x)$ dan $|II(x)|\leq Cr^{\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{\lambda}{p}}\|f:L^{p,\lambda}(X)\|$ dengan pertidaksamaan $|I_\rho f|\leq|I(x)+II(x)|$ dan menggunakan **Teorema 2.1 (ii)** serta dipilih $r>0\ni Cr^{\alpha+s-n}Mf(x)=Cr^{\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{\lambda}{p}}\|f:L^{p,\lambda}(X)\|$ maka

$$Cr^{\alpha+s-n}Mf(x) = Cr^{\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{\lambda}{p}}\|f:L^{p,\lambda}(X)\|$$

$$\frac{r^{\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{\lambda}{p}}}{r^{\alpha+s-n}} = C\left(\frac{Mf}{\|f:L^{p,\lambda}(X)\|}\right)$$

$$r^{\frac{s(p-1)}{p}+\frac{\lambda}{p}-s} = C\left(\frac{Mf}{\|f:L^{p,\lambda}(X)\|}\right)$$

$$r^{\frac{\lambda-s}{p}} = C\left(\frac{Mf}{\|f:L^{p,\lambda}(X)\|}\right)$$

$$r = C\left(\frac{Mf}{\|f:L^{p,\lambda}(X)\|}\right)^{\frac{p}{\lambda-s}}$$

Dengan $r = C\left(\frac{Mf}{\|f:L^{p,\lambda}(X)\|}\right)^{\frac{p}{\lambda-s}}$ diperoleh

$$|I_\rho f| \le C\left(\frac{Mf}{\|f:L^{p,\lambda}(X)\|}\right)^{\frac{p}{\lambda-s}(\alpha+s-n)} Mf$$

$$+C\left(\frac{Mf}{\|f:L^{p,\lambda}(X)\|}\right)^{\frac{p}{\lambda-s}\left(\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{\lambda}{p}\right)} \|f:L^{p,\lambda}(X)\|$$

$$= C\left(\frac{1}{\|f:L^{p,\lambda}(X)\|}\right)^{\frac{p}{\lambda-s}(\alpha+s-n)} Mf^{1+\frac{p}{\lambda-s}(\alpha+s-n)}$$

$$+ C\left(\frac{1}{\|f:L^{p,\lambda}(X)\|}\right)^{\frac{p}{\lambda-s}\left(\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{\lambda}{p}\right)} Mf^{\frac{p}{\lambda-s}\left(\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{\lambda}{p}\right)}\|f:L^{p,\lambda}(X)\|$$

$$= C\left(\|f:L^{p,\lambda}(X)\|\right)^{-\frac{p}{\lambda-s}(\alpha+s-n)}(Mf)^{1+\frac{p}{\lambda-s}(\alpha+s-n)}$$

$$+ C\left(\|f:L^{p,\lambda}(X)\|\right)^{-\frac{p}{\lambda-s}\left(\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{\lambda}{p}\right)} Mf^{\frac{p}{\lambda-s}\left(\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{\lambda}{p}\right)}\|f:L^{p,\lambda}(X)\|$$

$$|I_\rho f|^q \leq C\left(\|f: L^{p,\lambda}(X)\|\right)^{-\frac{p}{\lambda-s}(\alpha+s-n)}(Mf)^{1+\frac{p}{\lambda-s}(\alpha+s-n)}$$

$$+C\left(\|f: L^{p,\lambda}(X)\|\right)^{-\frac{p}{\lambda-s}\left(\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{\lambda}{p}\right)} Mf^{\frac{p}{\lambda-s}\left(\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{\lambda}{p}\right)}\|f: L^{p,\lambda}(X)\|$$

$$\int_X |I_\rho f|^q \, d\mu(x) = C\left(\|f: L^{p,\lambda}(X)\|\right)^{-\frac{p}{\lambda-s}(\alpha+s-n)} \int_X (Mf)^{1+\frac{p}{\lambda-s}(\alpha+s-n)} \, d\mu(x)$$

$$+C\left(\|f: L^{p,\lambda}(X)\|\right)^{-\frac{p}{\lambda-s}\left(\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{\lambda}{p}\right)} \int_X (Mf)^{\frac{p}{\lambda-s}\left(\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{\lambda}{p}\right)} \, d\mu(x)\|f: L^{p,\lambda}(X)\|$$

$$\leq C\left(\|f: L^{p,\lambda}(X)\|\right)^{-\frac{p}{\lambda-s}(\alpha+s-n)}\left(\|f: L^{p,\lambda}(X)\|\right)^{1+\frac{p}{\lambda-s}(\alpha+s-n)}$$

$$+ C\left(\|f: L^{p,\lambda}(X)\|\right)^{-\frac{p}{\lambda-s}\left(\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{\lambda}{p}\right)}\left(\|f: L^{p,\lambda}(X)\|\right)^{\frac{p}{\lambda-s}\left(\alpha-n+\frac{s(p-1)}{p}+\frac{\lambda}{p}\right)}\|f: L^{p,\lambda}(X)\|$$

$$= C\|f: L^{p,\lambda}(X)\| + C\|f: L^{p,\lambda}(X)\|$$

$$= C\|f: L^{p,\lambda}(X)\|$$

Oleh karena itu.

$$\||I_\rho f|: L^{q,\lambda}(X)\| \leq C\|f: L^{p,\lambda}(X)\|$$

Karena memenuhi $\||I_\rho f|: L^{q,\lambda}(X)\| \leq C\|f: L^{p,\lambda}(X)\|$ maka operator I_ρ terbatas. Dengan kata lain operator I_ρ terbatas dari $L^{p,\lambda}(X)$ ke $L^{q,\lambda}(X)$ dengan syarat $\mu\left(B(x,r)\right) \leq Cr^s$.

3.3 Integrasi Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional Pada Ruang Morrey Klasik dengan Kewajiban Manusia untuk Menuntut Ilmu serta berfikir dalam pengembangkan Ilmu

Keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada awalnya terinspirasi dari keterbatasan operator integral fraksional I_α yang didefinisikan pada ruang lebesgue. Kemudian C.B. Morrey memperluas pendefinisian operator integral fraksional dari ruang Lebesgue ke ruang Morrey. Selanjutnya Spanne serta Adams dan Chiarenza dan Frasca membuktikan sifat keterbatasan I_α pada ruang morrey klasik yang merupakan perumuman dari ruang Lebesgue. Pada pengembangan penelitian selanjutnya Nakai mengembangkan keterbatasan operator integral fraksional ke keterbatasan perumuman operator tersebut pada ruang Morrey. Seiring berjalannya waktu, banyak ilmuan yang meneliti tentang keterbatasan perumuman operator integral fraksional, salah satunya Utoyo yang membuktikan keterbatasan perumuman operator integral fraksional di ruang Lebesgue pada ruang kuasi metrik tak homogen serta *Fractional Integral Operator and Olsen Inequality in the Non-Homogen Classic Morrey Space*. Dengan berkembangnya penelitian dari zaman ke zaman ini, baik dari segi ruang, orde, dimensi maupun operatornya sebagaimana penjelasan sebelumnya bahwa manusia berkewajiban untuk berfikir dalam mengembangkan ilmu. Manusia dapat membuktikan suatu kebenaran dari akal-akal yang sempurna serta kecerdasan yang pada akhirnya sampai kepada hakikat dari apa yang dicari dari hasil pemikiran manusia mengenai ilmu pengetahuan. Seperti yang telah dijelaskan dalam surat Al Imran ayat 189-191 bahwa manusia yang memiliki akal sempurna adalah manusia yang mau berfikir serta berdasarkan hadits bahwa manusia berkewajiban menuntut ilmu.

Pelajaran yang dapat diambil dari ayat dan hadits tersebut adalah jika seseorang ingin memiliki akal-akal yang sempurna serta memiliki kecerdasan maka orang tersebut haruslah selalu senantiasa befikir dan berdzkir dalam menuntut ilmu, agar berakhir pada hakikat dari apa yang dicari. Allah sudah memberikan bantuan kepada orang-orang senantiasa befikir dan berdzkir dalam menuntut ilmu salah satunya berupa tanda-tanda dalam penciptaan langit dan bumi dan silih bergantinya siang dan malam. Untuk memperoleh ilmu pengetahuan yang tak terbatas ini tentulah manusia harus senantiasa berfikir untuk mengembangkan ilmu pengetahuan yang sudah ada.

Berdasarkan uraian tersebut, terdapat suatu korelasi dalam pengembangan keterbatasan perumuman operator integral fraksional dalam penelitian ini dan pandangan islam. Dalam penelitian ini keterbatasan perumuman operator integral fraksional di kembangkan ke ruang morrey klasik yang merupakan hasil proses berfikir dari manusia dan proses pengembangan ilmu pengetahuan yang sudah ada sebelumnya, sedangkan dalam pandangan islam manusia harus selalu befikir dan berdzkir tentang apa yang ada di bumi dan selalu mengembangkan ilmu pengetahuan untuk memenuhi tugasnya sebagai khalifah di bumi dengan suatu kewajiban dalam menuntut ilmu. Karena menuntut ilmu merupakan satu hal yang sangat dianjurkan, dimana hanya dengan ilmu manusia memperoleh kebahagiaan hidup. edudukan menuntut ilmu dalam Islam juga menempati posisi yang sangat penting. Dalam kerangka religi, perjalanan menuntut ilmu memiliki nilai seperti halnya orang yang sedang berjihad di jalan Allah, di mana balasan bagi orang yang berjihad itu adalah surga. Begitu juga dalam langkahnya, penuntut ilmu akan dimudahkan jalannya menuju surga.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Adapun kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan ini adalah sebagai berikut:

1. Keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada Ruang Morrey Klasik dari $L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)$ ke $L^{q,\lambda_2}(X)$ telah diselesaikan dengan memilih ukuran $\mu \in GC(s); s = \frac{pq(n-\alpha)}{pq+p-q}$, $1 < p < q < \infty$ dan $0 < \lambda_1 < \frac{np}{q}$, serta untuk $\frac{s\lambda_1}{np} = \frac{\lambda_2}{q}$ dimana $0 < \lambda_1 < \frac{np}{q}$. Sehingga diperoleh ketaksamaan $\|I_\rho f : L^{q,\lambda_2}(X)\| \leq C\left\|f : L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)\right\|$ oleh karena itu, ketaksamaan tersebut berlaku pada ruang Morrey Klasik terbatas dari $L^{p,\frac{s\lambda_1}{n}}(X)$ ke $L^{q,\lambda_2}(X)$.
2. Keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada Ruang Morrey Klasik dari $L^{p,\lambda}(X)$ ke $L^{q,\lambda}(X)$ telah diselesaikan dengan memilih ukuran $\mu \in GC(s);\ s = \frac{pq(n-\alpha)}{pq+p-q}$, $1 < p < q < \infty$ dan $0 < \lambda < s$, serta untuk $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha-n+s}{s-\lambda}$. Sehingga diperoleh ketaksamaan $\|I_\rho f : L^{q,\lambda}(X)\| \leq C\|f : L^{p,\lambda}(X)\|$ oleh karena itu, ketaksamaan tersebut berlaku pada ruang Morrey Klasik terbatas dari $L^{p,\lambda}(X)$ ke $L^{q,\lambda}(X)$.

4.2 Saran

Penelitian ini membahas pokok masalah keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada ruang Morrey klasik. Pada penelitian selanjutnya dapat dilanjutkan ke ruang yang lebih luas yaitu ruang campanato.

DAFTAR RUJUKAN

Agama, Departemen. 1985. *Muqaddimah al-Quran dan Tafsirnya*. Jakarta: Departemen Agama.

Ahmad Bin Muhammad ash Showy al Mashry al Kholwaty al Maliky, Hasyiyatu ash Showi, (Bairut: Darul Kutub al 'Ilmiyah, 1241-1175 H), Juz 1, hlm. 260.

Arif S Sadiman, dkk. 2012. *Media Pendidikan (pengertian, pengembangan dan pemanfaatannya)*. (Jakarta: Raja Grafindo Permata). Hal 3.

Badi, J dan Tajdin, M. 2004. *Islamic Creative Thinking-Berpikir Kreatif Berdasarkan Metode Qurani*. Bandung: Mizania.

Bartle, Robert G. 1966. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Willey & Sons, Inc.

Burkill, J. C., 1963. *The Lebesgue Integral*. Peterhouse: University Press.

Duoandikoetxea. 2001. *Fourier Analysis.* American Mathematical Society: Providence, Rhode Island.

Eridani,dkk, 2004. *On Generalized Fractional Integrals Operators.*

Gunawan, G., dan H. Gunawan. 2006. *Keterbatasan Operator Riesz di Ruang Morrey.*

Gunawan, H., dan Yudi Soeharyadi. 2014. *Untuk Operator On Riesz.*

Gunawan, H., Eridani, Nakai. 2004. *A note on the generalized fractional integral operators, Scientiae Mathematicae Japanicae Online.*

Gunawan, H., Eridani. 2009. *Fractional Integral and Generalized Olsen Inequalities. Kyungpook Math. J*. 49. 31-39.

Gunawan, H., Sihwaningrum. 2014. *Fractional Integral Operator On Lebesgue and Morrey Klasik Spaces.*

Gunawan, H. 2003. *A note on the generalized fractional integral operators, J. Indonesian Math. Soc. (MIHMI)* 9(1), 39-43.

Gunawan, H.. *Generalized Fractional Integral Operators and Their Modified Versions.*

Gunawan, H., Hakim, D. I., & Idris, M. 2018. *Proper inclusions of Morrey spaces. Glasnik Matematički*, *53*(1), 143–151.

Hartanto, Susan. 2014. *Keterbatasan operator integral fraksional pada ruang morrey klasik atas ruang metrik.*ADLN Perpustakaan Universitas Airlangga.

Imam Khomeini. 2004. Insan Ilahiah. Jakarta : Pustaka. Zahra

Katsir, Ibnu. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 1*. Terjemahan oleh Abdullah. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Kevin Mandira Limanta. 2014. *Ruang Morrey Kuat dan Lemah*. ITB.

M. Fadholi Noer. *Menuntut Ilmu sebagai Transormasi Perubaan Paradigma (Studi Matan Hadis Nabi saw*. dalam Sunan al-Tarmidzi, Kitab al ilm an Rasulullah,Bab Fadhl Thallab al-Ilm. No. Hadis 2572. 2014.

Nakai, E. 2001. *Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces. Math. Nachr*. 166. 95-103

Nurjannah, Prameswari. 2018. *Syarat Perlu Keterbatasan Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Klasik*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Royden, H. L. 1988. *Real Analysis, Third Edition*. Macmillan Publishing Company: New York.

Royden, H. L. dan Fitzpatrick, P.M. 2010. *Real Analysis, Fourth Edition*. Chin Machine Press: China.

Samko, Stefan G, dkk. 1987. *Fractional Integrals and Derivatives*. OPA (Amsterdam)

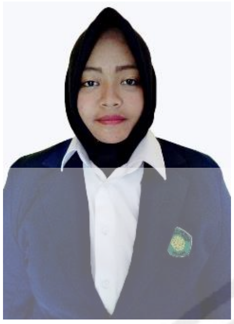
Software CD, al-kutub at-tis'ah

Utoyo M.I, dkk. 2012. *Syarat Perlu dan Cukup untuk Ketrbatasan Potensial Riez di Ruang Morrey Klasik.*

Utoyo M.I. 2016. *Ketrbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional Di Ruang Lebesgue Pada Ruang Kuasi Metrik Tak Homogen*. Seminar Nasional Matematika X Universitas Negeri Semarang.

http://www.dic.or.id/hadist-tentang-kewajiban-menuntut-ilmu/

RIWAYAT HIDUP



Evana Dyah Purnamastuti, lahir di Malang pada tanggal 10 Desember, biasa dipanggil Ndut. Ia tinggal di Polowijen, kecamatan Blimbing, kota Malang. Ia merupakan anak ketujuh dari tujuh bersaudara yakni dari pasangan Seno Poernomo dan Endang Sulistyowati.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Polowijen 1 Malang lulus pada tahun 2009, melanjutkan ke SMPN 11 Malang lulus pada tahun 2012, dan melanjutkan ke SMAI Malang lulus pada tahun 2015. Selanjutnya menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2015.

Selama menjadi mahasiswa telah mengikuti beberapa penelitian, diantaranya adalah PKM pada tahun 2018, Lomba Karya Tulis Ilmiah Nasional pada tahun 2018. Selain itu disela-sela kesibukan menjadi mahasiswa, dia juga aktif dalam organisasi intra yakni JDFI, El-Marifah, PSM, asisten laboratorium, Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika, dan Dema Fakultas Sains dan Teknologi, sedangkan untuk ekstra kampus yakni PMII "Pencerahan Galileo", Beasiswa 10.000 wilayah Malang, *Rotract* Malang, Berbagi Tak Pernah Rugi "*Community",* LS (Laskar Sedekah), dan JPI (Jejak Pengabdi Indonesia).

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Evana Dyah Purnamastuti
NIM : 15610097
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional Pada Ruang Morrey Klasik
Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, MA

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	14 Maret 2019	Konsultasi Bab I	1.
2.	14 Maret 2019	Konsultasi Agama Bab I	2.
3.	15 Maret 2019	Konsultasi Bab II	3.
4.	17 Maret 2019	ACC Bab I & Bab II	4.
5.	18 Maret 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	5.
6.	26 April 2019	Konsultasi Bab III	6.
7.	30 April 2019	Konsultasi Bab IV & Abstrak	7.
8.	2 Mei 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	8.
9.	3 Mei 2019	ACC Bab III, IV & Abstrak	9.
10.	3 Mei 2019	ACC Kajian Keagamaan	10.
11.	3 Mei 2019	ACC Keseluruhan	11.

Malang, 3 Mei 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001