

**KETERBATASAN OPERATOR BESSEL-RIESZ DI RUANG LEBESGUE
PADA HIPERGRUP YANG KOMUTATIF**

SKRIPSI

**OLEH
M HUSEN AL FARISY
NIM. 15610085**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019**

**KETERBATASAN OPERATOR BESSEL-RIESZ DI RUANG LEBESGUE
PADA HIPERGRUP YANG KOMUTATIF**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
M. Husen Al Farisy
NIM. 15610085**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019**

**KETERBATASAN OPERATOR BESSEL-RIESZ DI RUANG LEBESGUE
PADA HIPERGRUP YANG KOMUTATIF**


SKRIPSI


Oleh
M. Husen Al Farisy
NIM. 15610085

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 03 Mei 2019

Pembimbing I,

Pembimbing II,


Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003


Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
NIPT. 20130902 1 318

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

**KETERBATASAN OPERATOR BESSEL-RIESZ DI RUANG LEBESGUE
PADA HIPERGRUP YANG KOMUTATIF**

SKRIPSI

Oleh
M. Husen Al Farisy
NIM. 15610085

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 29 Mei 2019

Penguji Utama : Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc

Ketua Penguji : Muhammad Khudzaifah, M.Si

Sekretaris Penguji : Hairur Rahman, M.Si

Anggota Penguji : M. Nafie Jauhari, M.Si

Handwritten signatures of the examiners.

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : M. Husen Al Farisy

NIM : 15610085

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Keterbatasan Operator Bessel-Riesz di Ruang Lebesgue
pada Hipergrup yang Komutatif

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 3 Mei 2019
Yang membuat pernyataan



M. Husen Al Farisy
NIM. 15610085

MOTO

“You are what you are thinking about”



PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Ayahanda Imam Kanapi dan Ibunda Almh Umi Cholifah,

yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat,

dan kasih sayang yang tak ternilai, serta saudara kandung M. Arif Zainul Muttaqin

yang selalu mendukung selama ini.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Keterbatasan Operator Bessel-Riesz di Ruang Lebesgue pada Hipergrup yang Komutatif” sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu ad-Din al-Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I dan dosen wali yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.

5. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua.

Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya

bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 3 Mei 2019

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
ABSTRAK	xii
ABSTRACT	xiii
ملخص	xiv
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	4
1.6 Metode Penelitian	4
1.7 Sistematika Penulisan	5
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Aljabar- σ dan Ukuran	7
2.1.1 Aljabar- σ	7
2.1.2 Ukuran	7
2.2 Integral Lebesgue.....	8
2.2.1 Fungsi Sederhana.....	8
2.2.2 Integral Lebesgue	9
2.3 Ruang Metrik	10
2.4 Ruang Lebesgue.....	11
2.5 Hipergrup.....	13
2.6 Operator	14
2.6.1 Operator Integral Fraksional	14
2.6.2 Operator Maximal	15

2.6.3 Operator tipe (p, q)	16
2.7 Perintah untuk selalu berfikir.....	16

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Operator Bessel-Riesz dan Keterbatasannya	19
3.1.1 Keanggotaan kernel $H\alpha, \gamma$ di Ruang Lebesgue	19
3.1.2 Keterbatasan Operator Bessel-Riesz di Ruang Lebesgue ..	22
3.2 Integrasi Keterbatasan Operator Bessel-Riesz dengan Tugas Manusia Sebagai Khalifah di Bumi	25

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan.....	28
4.2 Saran	28

DAFTAR RUJUKAN	29
-----------------------------	----

RIWAYAT HIDUP

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

ABSTRAK

Al Farisy, M. Husen. 2019. **Keterbatasan Operator Bessel-Riesz di Ruang Lebesgue pada Hipergrup yang Komutatif**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata kunci: Hipergrup, keterbatasan operator besse-riesz, ruang Lebesgue

Keterbatasan operator integral fraksional di ruang Lebesgue awalnya dibuktikan oleh Hardy, Littlewood dan Sobolev sekitar tahun 1927, yang kemudian dikenal dengan sebutan ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev. Banyak peneliti yang melanjutkan penelitian tersebut, baik melanjutkan di ruang yang lebih luas atau perluasan operator integral fraksional. Salah satunya dikembangkan oleh Moch. Idris yang menyatakan bahwa operator besse-riesz ini terbatas pada ruang Lebesgue, ruang morrey klasik maupun morrey klasik yang diperumum.

Tujuan penelitian ini adalah membuktikan keterbatasan operator besse-riesz pada hipergrup yang komutatif di ruang Lebesgue dimana pembuktian hasilnya serupa dengan teorema Moch. Idris tetapi dibawa ke suatu hipergrup yang komutatif. Berdasarkan keterbatasan operator maksimal dan ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev diperoleh hasil bahwa $\|I_{\alpha,\gamma}\|_{L^q} \leq C \|H_{\alpha,\gamma}(K, \lambda)\|_{M^{s,t}} \|f\|_{L^p}$ dengan $H_{\alpha,\gamma}$ adalah kernel dari operator besse-riesz. Pada penelitian selanjutnya, diharapkan dapat melakukan kajian untuk keterbatasan operator besse-riesz pada hipergrup yang komutatif di ruang morrey klasik ataupun morrey klasik yang diperumum.

ABSTRACT

Al Farisy, M. Husen. 2019. **Boundedness of Bessel-Riesz Operator in Lebesgue Space on Commutative Hypergroup**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Keywords: Boundedness of bessel-riesz operator, hypergroup, Lebesgue space

The Boundedness of fractional integral operators in Lebesgue space were initially proven by Hardy, Littlewood and Sobolev around 1927, which became known as the Hardy-Littlewood-Sobolev inequality. Many researchers continue the research, either continuing in the wider space or expanding fractional integral operators. One of them was developed by Moch. Idris who states that the bessel-riesz operator is bounded to the Lebesgue space, the classic morrey space and the generalized classic morrey space.

The purpose of this research is to prove the boundedness of the bessel-riesz operator on commutative hypergroup in the Lebesgue space where the proof of results is similar to the Moch. Idris theorem but was taken to a commutative hypergroup. Based on the boundedness of maximum operator and Hardy-Littlewood-Sobolev inequality the results are obtained that $\|I_{\alpha,\gamma}\|_{L^q} \leq C \|H_{\alpha,\gamma}(K, \lambda)\|_{M^{s,t}} \|f\|_{L^p}$ with $H_{\alpha,\gamma}$ is the kernel of the bessel-riesz operator. In further research, it is expected to be able to conduct a study of the constraints of bessel-riesz operators on commutative hypergroups in the classic morrey space or the generalizes classic morrey space.

ملخص

الفارسي، محمد حسن. ٢٠١٩. **حدود المشغل Bessel-Riesz في فضاء Lebesgue على Hypergroup التبديل**. بحث جامعي. شعبة الرياضيات. كلية العلوم و التكنولوجيا. جامعة الإسلامية الحكومية مولانا ملك إبراهيم مالانج. المشرف (١) حيرالرحمن الماجستر (٢) نافع جوهاري الماجستر.

الكلمات الرئيسية: مساحات Lebesgue، حدود المشغل *bessel-riesz*، *Hypergroup*

حدود المشغل التجزئ الجزئي على فضاء Lebesgue ذلك قد ناقش Sobolev ، Hardy و Littlewood في التاريخ ١٩٢٧، الذي عرفت عدم المساواة Hardy-Littlewood-Sobolev. كثير من مباحث الذي يستمر ذلك البحث، في الفضاء الواسع او في المشغل التجزئ الجزئي. تم تطويره من قبل Moch. Idris الذي عمّم أن هذا المشغل *bessel-riesz* يحدود على فضاء Lebesgue و فضاء Classic Morrey و فضاء Classic Morrey العام. يحدود الغرض من هذا البحث الثبت الحدود المشغل *bessel-riesz* على *hypergroup* التبديل في مساحات *lebesgue* والتي تكون نتيجة مماثلة مع نظريه Moch. Idris ويحمل إلى *hypergroup* التبديل. استخدام حدود المشغل الأقصى و عدم المساواة Hardy-Littlewood-Sobolev ينتجان $\|I_{\alpha,\gamma}\|_{L^q} \leq C \|H_{\alpha,\gamma}\|_{M^{s,t}} \|f\|_{L^p}$ هو *kernel* من المشغل *bessel-riesz*. في البحث التالي، توقعنا أن يبحث حدود المشغل *bessel-riesz* على *hypergroup* التبديل في فضاء Classic Morrey او فضاء Classic Morrey العام.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Operator Bessel-Riesz adalah suatu fungsi dengan domain $L^p_{lok}(\mathbb{R}^n)$ yang dinotasikan dengan $I_{\alpha,\gamma}$, misalkan f adalah suatu fungsi dari \mathbb{R}^n ke \mathbb{R}^n maka $I_{\alpha,\gamma}$ didefinisikan sebagai

$$I_{\alpha,\gamma}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} H_{\alpha,\gamma}(x,y)f(y)dy,$$

untuk setiap $f \in L^p_{lok}(\mathbb{R}^n), p \geq 1$, dengan $0 \leq \gamma, 0 < \alpha < n, H_{\alpha,\gamma}(x) = \frac{|x|^{\alpha-n}}{(1+|x|)^\gamma}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Kernel $H_{\alpha,\gamma}$ dipandang sebagai perkalian dua kernel, $H_{\alpha,\gamma} = J_\gamma(x)K_\alpha(x)$, dengan $J_\gamma(x) = \frac{1}{(1+|x|)^\gamma}$ dan $K_\alpha(x) = |x|^{\alpha-n}$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$. Kernel J_γ diketahui sebagai kernel Bessel sedangkan kernel K_α diketahui sebagai kernel Riesz (Idris dkk, 2016).

Notasi $L^p(\mathbb{R}^n)$ menyatakan ruang Lebesgue, yaitu ruang yang terdiri dari fungsi-fungsi dengan domain \mathbb{R}^n yang konvergen terhadap norma $\|\cdot\| : L^p(\mathbb{R}^n)$, yang artinya $\|f\| : L^p(\mathbb{R}^n) < \infty$, untuk $\|f\| : L^p(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai berikut

$$\|f\| : L^p(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} & \text{jika } 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_x \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} & \text{jika } p = \infty \end{cases}.$$

Sekitar tahun 1930, Hardy-Littlewood dan Sobolev telah membuktikan keterbatasan operator integral fraksional I_α di ruang Lebesgue L^p ke L^q , yaitu

$$\|I_\alpha f : L^q\| \leq C_{p,q} \|f : L^p\|$$

untuk $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ dan $0 < \alpha < n$. Setelah masa ini, operator integral fraksional semakin banyak diteliti. Dikarenakan pada suatu kasus tertentu operator integral fraksional merupakan solusi dari persamaan differensial yang mungkin sulit untuk dipecahkan menggunakan solusi analitik, sehingga diperlukan solusi secara numerik. Hal ini tentu perlu memperhatikan bahwa solusi numerik hanya dapat diterapkan pada operator integral fraksional yang kontinu. Dengan menggunakan suatu fakta bahwa suatu operator tertentu dikatakan kontinu jika dan hanya jika operator tersebut terbatas. Ini tentu menjadi sebab pentingnya keterbatasan suatu operator integral (Iskhak, 2013).

Suatu himpunan tak kosong K yang berpasangan dengan $*$ disebut hipergrup jika memenuhi 3 aksioma hipergrup yaitu ketertutupan, asosiatif dan reproduktif (Massouros, 1995). Suatu hipergrup K komutatif jika $\delta_x * \delta_y = \delta_y * \delta_x$ untuk semua $x, y \in K$. Sudah menjadi perkara yang umum bahwa untuk setiap hipergrup yang komutatif memiliki ukuran Haar yang dinotasikan dengan λ . Hal ini, untuk semua fungsi terukur Borel f di K ,

$$\int_K f(\delta_x * \delta_y) d\lambda(y) = \int_K f(y) d\lambda(y) (x \in K).$$

Didefinisikan operator translasi yang diperumum $T^x, x \in K$ dengan

$$T^x f(y) = \int_K f d(\delta_x * \delta_y)$$

untuk semua $y \in K$.

Perkembangan keterbatasan operator integral fraksional salah satunya pada sifat ukurannya. Hal tersebut telah dilakukan oleh banyak matematikawan, salah satunya adalah Mubariz G. Hajibayov (2015) yang telah membuktikan keterbatasan integral fraksional di ruang Lebesgue pada hipergrup komutatif.

Idris (2016) juga telah membuktikan keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue. Berdasarkan hal ini, akan menjadi suatu perkara yang menarik untuk membahas lagi mengenai keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue. Tetapi, dalam penulisan ini, operator Bessel-Riesz akan dibawa ke suatu hipergrup (K, λ) sehingga operator Bessel-Riesz didefinisikan sebagai

$$I_{\alpha, \gamma} f(x) = \int_X T^x H_{\alpha, \gamma}(\rho(x, y)) f(y^*) d\lambda(y)$$

Untuk setiap $f \in L^p(K, \lambda)$ dengan $1 \leq p < t$, $\frac{n}{n+\gamma-\alpha} < t < \frac{n}{n-\alpha}$, dan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{t}$, serta $H_{\alpha, \gamma}(x) = \frac{|x|^{\alpha-n}}{(1+|x|)^\gamma}$, dan di batasi untuk $n = 1$.

Salah satu tujuan penciptaan manusia di bumi telah tersurat dengan jelas dalam al-quran dalam surat al-Baqarah ayat 30 yang artinya: ”*Sesungguhnya aku hendak menjadikan seorang khalifah di muka bumi*”. Sebagai seorang khalifah manusia memiliki beberapa tugas, yaitu: memanfaatkan bumi (*intifa'*), memelihara bumi (*ishlah*), dan mengambil pelajaran di bumi (*i'tibar*) (Abdussakir, 2017). Untuk menjalankan tugas kekhalfahan itu, Allah mengajarkan kepada manusia ilmu pengetahuan, karena dengan ilmu pengetahuan manusia memiliki kemampuan untuk mengatur, menundukkan, dan memanfaatkan benda-benda yang ada di muka bumi (Mu'thi, 2012). Berkenaan dengan ilmu pengetahuan, tentulah manusia harus selalu berfikir untuk mendapatkan ilmu. Kajian tentang perkembangan dalam ilmu matematika terus dilakukan untuk dapat membuktikan suatu kebenaran dari penemuan-penemuan baru, salah satunya pada keterbatasan operator Bessel-Riesz.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka rumusan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini yaitu bagaimana keterbatasan dari operator Bessel-Riesz $I_{\alpha,\gamma}$ pada hipergrup (K, λ) di ruang Lebesgue $L^p(K, \lambda)$ ke $L^q(K, \lambda)$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui syarat perlu untuk keterbatasan dari operator Bessel-Riesz $I_{\alpha,\gamma}$ pada hipergrup (K, λ) di ruang Lebesgue $L^p(K, \lambda)$ ke $L^q(K, \lambda)$.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberi informasi mengenai keterbatasan dari operator Bessel-Riesz $I_{\alpha,\gamma}$ pada hipergrup (K, λ) di ruang Lebesgue $L^p(K, \lambda)$ ke $L^q(K, \lambda)$.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini akan dibuktikan keterbatasan operator Bessel-Riesz $I_{\alpha,\gamma}$ pada hipergrup (K, λ) di ruang Lebesgue $L^p(K, \lambda)$ ke $L^q(K, \lambda)$ dan kernel operator dibatasi untuk $n = 1$ sehingga tidak akan membuktikan atau membahas hasil-hasil yang serupa pada ruang lainnya.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi kepustakaan (*library research*). Metode ini dilakukan dengan mengumpulkan informasi atau rujukan yang berasal

dari buku, jurnal dan sumber lainnya yang berkaitan dengan integral fraksional sebagai landasan teori. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam menyelidiki keterbatasan dari operator Bessel-Riesz $I_{\alpha,\gamma}$ pada hipergrup (K, λ) di ruang Lebesgue $L^p(K, \lambda)$ ke $L^q(K, \lambda)$ ini adalah sebagai berikut

1. Menyelidiki keanggotaan kernel $H_{\alpha,\gamma}$ di ruang Lebesgue.
2. Membuktikan keterbatasan dari operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue dengan memperhatikan kernel dari operator tersebut

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi lebih terarah dan mudah dipahami, digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi atas beberapa subbab dengan sistematika sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

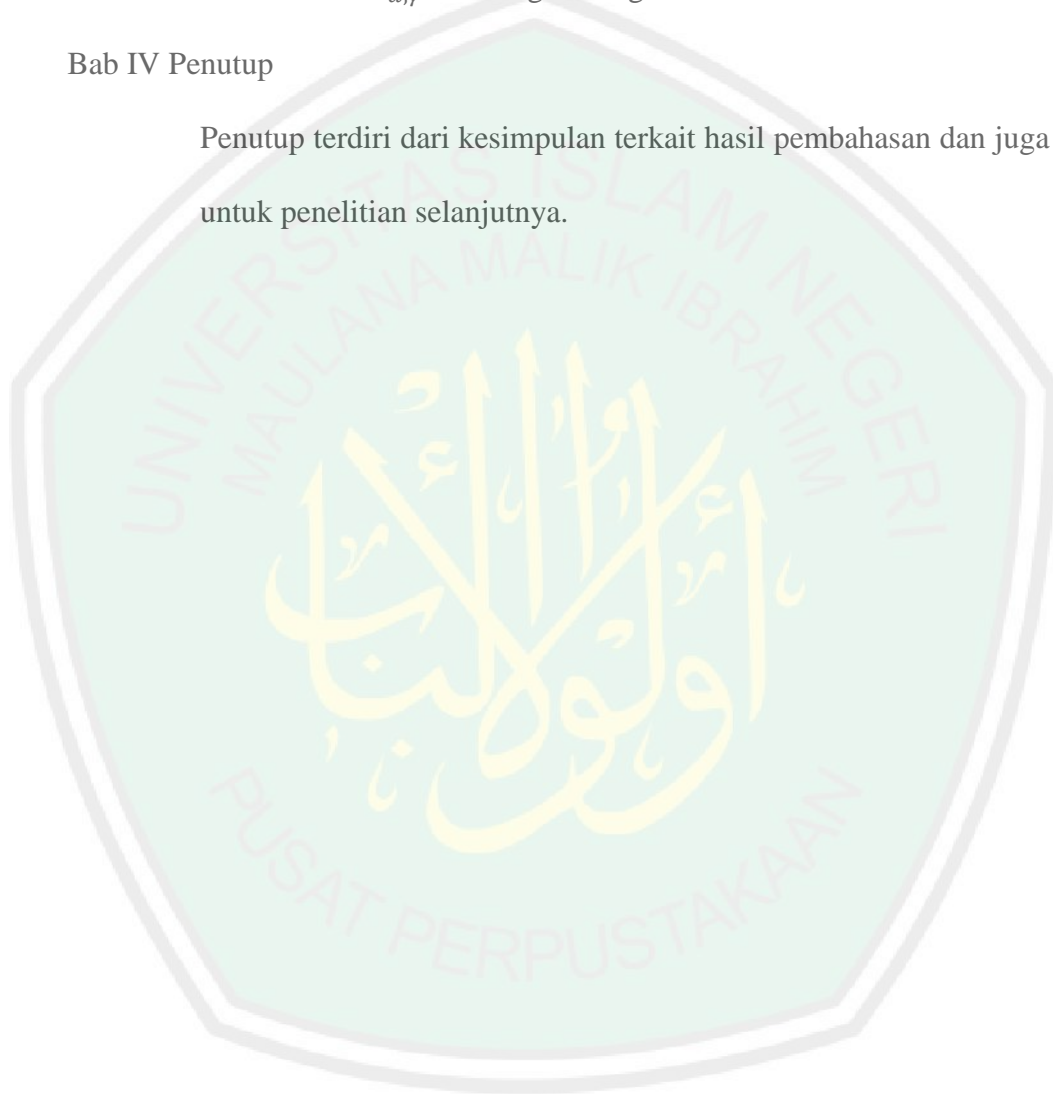
Kajian Pustaka terdiri dari teori-teori yang digunakan untuk mendukung pembahasan dan menjawab rumusan masalah. Kajian Pustaka dalam penelitian ini meliputi: ukuran dan integral, transformasi Fourier, operator integral fraksional, ruang L^p , ruang Morrey klasik, fungsi maksimal Hardy-Littlewood, keterbatasan operator integral fraksional.

Bab III Pembahasan

Pembahasan terdiri dari hasil utama penelitian yang menjawab rumusan masalah. Pembahasan dalam penelitian ini meliputi: bahasan tentang keanggotaan kernel $H_{\alpha,\gamma}$ di ruang Lebesgue dan Keterbatasan operator Bessel-Riesz $I_{\alpha,\gamma}$ di ruang Lebesgue.

Bab IV Penutup

Penutup terdiri dari kesimpulan terkait hasil pembahasan dan juga saran untuk penelitian selanjutnya.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Aljabar- σ dan Ukuran

2.1.1 Aljabar- σ

Definisi 2.1 Kelas himpunan \mathbb{X} yang beranggotakan himpunan-himpunan bagian dari suatu himpunan X dikatakan aljabar- σ jika memenuhi:

- i. \emptyset, X termuat di \mathbb{X} .
- ii. Jika A termuat di \mathbb{X} , maka $X \setminus A$ termuat di \mathbb{X} .
- iii. Jika (A_n) adalah barisan himpunan dalam \mathbb{X} , maka $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ termuat di \mathbb{X} .

Sebuah pasangan terurut (X, \mathbb{X}) yang terdiri dari himpunan X dan aljabar- σ \mathbb{X} dari subhimpunan X disebut ruang terukur. Setiap himpunan pada \mathbb{X} disebut himpunan terukur- \mathbb{X} . Tetapi ketika aljabar- σ \mathbb{X} telah diketahui, maka cukup disebut himpunan terukur (Bartle, 1995: 6).

2.1.2 Ukuran

Definisi 2.2 Ukuran adalah fungsi yang bernilai riil yang di perluas yang dinotasikan dengan μ dan didefinisikan pada aljabar- σ \mathbb{X} , dan memenuhi:

- i. $\mu(\emptyset) = 0$.
- ii. $\mu(E) \geq 0, \quad \forall E \in \mathbb{X}$.
- iii. Jika (E_n) adalah sebarang barisan himpunan yang saling asing dalam \mathbb{X} ,

maka

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Pasangan terurut (X, μ) disebut Ruang Ukuran. (Bartle, 1995: 19)

Teorema 2.3 Jika (Ω, \mathcal{A}) ruang terukur $E \in \mathcal{A}$, dan fungsi $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, maka empat pernyataan di bawah ini ekuivalen (Darmawijaya, 2007: 230):

- (i) $\{x: x \in E | f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}_E$
- (ii) $\{x: x \in E | f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}_E$
- (iii) $\{x: x \in E | f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}_E$
- (iv) $\{x: x \in E | f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}_E$

untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$.

Contoh:

1. Misalkan X himpunan dan \mathcal{A} koleksi semua subhimpunan pada X . Maka \mathcal{A} aljabar- σ pada X .
2. Misalkan X himpunan dan $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$. Maka \mathcal{A} aljabar- σ pada X .

(Cohn, 2013: 2)

2.2 Integral Lebesgue

2.2.1 Fungsi Sederhana

Misalkan $\mu: M \rightarrow \mathbb{R}$ ukuran Lebesgue, dan misalkan $E \subseteq \mathbb{R}$ suatu himpunan terukur, $\mu(E) < \infty$. Fungsi $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ dinamakan fungsi sederhana, jika ada bilangan real a_1, a_2, \dots, a_n , dan himpunan-himpunan terukur E_1, E_2, \dots, E_n , $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$, $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ sehingga

$$f(x) = a_i, \quad x \in E_i (i = 1, 2, \dots, n).$$

Jika $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ suatu fungsi sederhana, $f = \sum_{i=1}^n a_i x_{E_i}$, dan $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ adalah bilangan-bilangan real tak nol yang tak sama di dalam daerah nilai fungsi f , maka

$$f = \sum_{j=1}^k a_{i_j} x_{E_{i_j}}$$

dinamakan representasi kanonik fungsi f (Hutahean, 1989: 9.3).

2.2.2 Integral Lebesgue

Definisi 2.4 Misalkan $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi sederhana, $f = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i)$. Integral Lebesgue fungsi f pada E dinyatakan dengan notasi $\int_E f d\mu$ atau $\int_E f$ dan didefinisikan oleh

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i).$$

(Hutahean, 1989: 9.4)

Teorema 2.5 Misalkan E suatu himpunan terukur yang diketahui, $\mu(E) < \infty$. Jika $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ dan $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ dua fungsi sederhana, α bilangan real yang diketahui, maka:

$$(i) \int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$$

$$(ii) \int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$$

$$(iii) \text{ Jika } f \geq g \text{ maka } \int_E f d\mu \geq \int_E g d\mu$$

(Hutahean, 1989: 9.5)

Contoh

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 3 \leq x \leq 5 \\ 1, & 1 \leq x < 3 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & -1 < x < 0 \\ 0, & -2 < x \leq -1 \\ 1, & -5 \leq x \leq -2 \end{cases}$$

Dari fungsi $f(x)$ diperoleh

$$\int_E f d\mu = 2\mu([3,5]) + 1\mu([1,3)) + 0\mu([0,1)) + 2\mu((-1,0))$$

$$+0\mu((-2, -1]) + 1\mu([-5, -2]) = 11.$$

Jika digunakan representasi kanonik dari fungsi f diperoleh

$$\int_E f d\mu = 2\mu([3,5] \cup (-1,0)) + 1\mu([1,3] \cup [-5, -2]) = 11.$$

(Hutahean, 1989:9.4-9.5)

2.3 Ruang Metrik

Definisi 2.6 Ruang Metrik adalah pasangan (X, d) , di mana X adalah himpunan dan d adalah metrik di X (fungsi jarak pada X), yaitu sebuah fungsi yang didefinisikan pada $X \times X$ sedemikian sehingga untuk semua $x, y, z \in X$ berlaku aksioma:

(M1) d bernilai riil, finit dan non negatif

(M2) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetris)

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (ketaksamaan segitiga)

Sebuah sub ruang (Y, \tilde{d}) dari (Y, d) diperoleh jika diambil subset $Y \subset X$ dan membatasi d ke $Y \times Y$, jadi metrik pada Y adalah batasan.

$$\tilde{d} = d|_{Y \times Y}$$

d disebut metrik yang diinduksi pada Y oleh d (Kreyszig, 1978: 3-4).

Definisi 2.7 Barisan $\{x_n\}$ di dalam suatu ruang metrik (X, d) dikatakan konvergen jika ada $x \in X$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

Barisan yang tak konvergen dikatakan divergen (Darmawijaya, 2007: 58).

Teorema 2.8 Jika barisan $\{x_n\}$ di dalam suatu ruang metrik (X, d) konvergen, maka titik-titiknya tunggal (Darmawijaya, 2007: 58).

Contoh

1. Sistem bilangan real \mathbb{R} merupakan ruang metrik terhadap meterik d :

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Ruang metrik (\mathbb{R}, d) merupakan ruang metrik biasa.

2. Sistem bilangan kompleks \mathbb{C} merupakan ruang metrik terhadap modulusnya,

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

3. Diberikan himpunan tak kosong X dan didefinisikan $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dengan

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } x \neq y \text{ dan } x, y \in X \\ 0 & \text{untuk } x = y \text{ dan } x, y \in X \end{cases}$$

mudah ditunjukkan bahwa (X, d) merupakan ruang metrik. Ruang metrik ini merupakan ruang metrik diskrit. (Darmawijaya, 2007)

2.4 Ruang Lebesgue

Definisi 2.9 Jika V adalah ruang vektor, maka fungsi N yang bernilai riil di V dikatakan norma untuk V jika memenuhi

- i. $N(v) \geq 0$ untuk semua $v \in V$.
- ii. $N(v) = 0$ jika dan hanya jika $v = 0$.
- iii. $N(\alpha v) = |\alpha|N(v)$ untuk semua $v \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.
- iv. $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$ untuk semua $u, v \in V$.

Jika kondisi (ii) tidak terpenuhi, maka fungsi N dikatakan **semi-norma**.

Ruang vektor yang dilengkapi dengan norma disebut **ruang bernorma**.

Misalkan $\mathcal{N}: L(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$\mathcal{N}(f) = \int |f| dx.$$

Kemudian, $L(\mathbb{R})$ membentuk ruang vektor dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan sebagai

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{dan} \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

untuk sebarang $x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$, dan $f, g \in L(\mathbb{R})$. Dan \mathcal{N} adalah semi-norma pada $L(\mathbb{R})$. Lebih jauh lagi, $\mathcal{N}(f) = 0$ jika dan hanya jika $f(x) = 0$ untuk $x \in \mathbb{R}$ (Bartle, 1995: 52).

Untuk selanjutnya, untuk suatu ruang bernorma V , norma dari $v \in V$ akan dituliskan sebagai $\|v\|_V$.

Definisi 2.10 Fungsi f dan g di $L(\mathbb{R})$ dikatakan ekivalen- μ jika $f = g$. Kelas ekivalensi yang ditentukan oleh f dinotasikan dengan $[f]$, yaitu himpunan bagian dari $L(\mathbb{R})$ yang memuat fungsi-fungsi yang ekivalen- μ dengan f (Bartle, 1995: 54).

Ruang Lebesgue $L^1 = L^1(\mathbb{R})$ adalah himpunan yang memuat semua kelas-kelas ekivalen- μ dalam $L(\mathbb{R})$. Jika $[f] \in L^1$, didefinisikan norma dari f sebagai

$$\|[f]_{L^1}\| = \int |f| d\mu$$

(Bartle, 1995: 54).

Untuk selanjutnya, notasi $[f]$ cukup dituliskan sebagai f saja.

Definisi 2.11 Untuk $1 \leq p < \infty$ didefinisikan ruang $L^p = L^p(\mathbb{R})$ sebagai himpunan yang memuat semua kelas-kelas ekivalen- μ dari fungsi f terukur yang bernilai riil sedemikian sehingga

$$\int |f|^p d\mu < \infty.$$

Kemudian didefinisikan

$$\|f_{L^p}\| = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

(Bartle, 1995: 55).

2.5 Hipergrup

Misalkan K himpunan. Sebuah fungsi $\rho: K \times K \rightarrow [0, \infty)$ disebut quasi-metrik jika:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. Terdapat konstanta $c \geq 1$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in K$

$$\rho(x, y) \leq c(\rho(x, z) + \rho(z, y))$$

(Hajibayov, 2015).

Misalkan semua bola $B(x, r) = \{y \in K: \rho(x, y) < r\}$ terukur- λ dan asumsikan λ memenuhi kondisi ganda (*doubling condition*)

$$0 < \lambda B(x, 2r) \leq D\lambda B(x, r) < \infty.$$

Sebuah ruang (K, ρ, λ) yang memenuhi semua kondisi yang disebut di atas disebut ruang tipe homogen (Hajibayov, 2015).

Dalam teori grup kompak lokal terdapat ruang tertentu yang mana meskipun bukan grup, tetapi memiliki beberapa struktur grup. Seringkali, struktur dapat ditulis dalam pengertian konvolusi abstrak ukuran dalam ruang (Hajibayov, 2015).

Suatu himpunan tak kosong K yang berpasangan dengan $*$ disebut sebagai hipergrup jika memenuhi aksioma berikut:

- i. Hasil dari $a * b$ adalah subset dari K , untuk setiap $a, b \in K$
- ii. $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk setiap $a, b, c \in K$
- iii. $a * K = K * a = K$ untuk setiap $a \in K$

(Massaouros, 1997).

Suatu hipergrup K disebut komutatif jika $\delta_x * \delta_y = \delta_y * \delta_x$ untuk semua $x, y \in K$. Ini sudah menjadi hal yang umum bahwa setiap hypergrup yang komutatis memiliki ukuran Haar yang mana akan dinotasikan dengan λ . Hal ini, untuk semua fungsi terukur Borel f di K ,

$$\int_K f(\delta_x * \delta_y) d\lambda(y) = \int_K f(y) d\lambda(y) \quad (x \in K)$$

(Hajibayov, 2015).

Didefinisikan operator translasi yang diperumum $T^x, x \in K$ dengan

$$T^x f(y) = \int_K f d(\delta_x * \delta_y)$$

untuk semua $y \in K$. Jika K adalah hipergrup yang komutatif, maka $T^x f(y) = T^y f(x)$ dan konvolusi dari dua fungsi didefinisikan sebagai

$$(f * g)(x) = \int_K T^x f(y) g(y^*) d\lambda(y)$$

(Hajibayov, 2015).

Misalkan $(K, *)$ adalah komutatif hipergrup, dengan quasi metrik ρ , ukuran Haar λ dan $N \in (0, \infty)$. Kita akan katakan K adalah *upper Ahlfors N -regular* dengan identitas, jika ada konstanta $C > 0$, yang tidak bergantung $r > 0$ sedemikian sehingga $\lambda B(e, r) \leq Cr^N$ (Hajibayov, 2015).

2.6 Operator

2.6.1 Operator Integral Fraksional

Misalkan f adalah suatu fungsi yang bernilai real yang terdefinisi pada \mathbb{R}^n , dengan $0 < \alpha < n$ serta $x \in \mathbb{R}^n$, suatu operator I_α yang memetakan fungsi $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ke $I_\alpha f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

Operator ini sering disebut dengan sebutan operator integral fraksional (Gunawan, 2003).

Ditunjukkan dengan bola $B = B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$ dengan pusat x dan jari-jari $r > 0$, dan $|B(x, r)|$ ukuran Lebesgue, yaitu $|B(x, r)| = \omega_n r^n$ dengan ω_n adalah volume dari suatu bola di \mathbb{R}^n .

Lemma 2. 12

Jika $0 < a < b$, maka

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(u^k R)^a}{(1 + u^k R)^b} < \infty$$

dengan $u > 1$ dan $R > 0$.

Bukti.

Diketahui $0 < a < b$ sehingga $b - a > 0$. Ambil sembarang $u > 1$ dan $R > 0$.

Selanjutnya, nyatakan

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(u^k R)^a}{(1 + u^k R)^b} &= \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{(u^k R)^a}{(1 + u^k R)^b} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u^k R)^a}{(1 + u^k R)^b} \\ &\leq \sum_{k=-1}^{-\infty} (u^k R)^a + \sum_{k=0}^{\infty} (u^k R)^{a-b}. \end{aligned}$$

Karena $\sum_{k=-1}^{-\infty} (u^k R)^a < \infty$ dan $\sum_{k=0}^{\infty} (u^k R)^{a-b} < \infty$. Maka $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(u^k R)^a}{(1 + u^k R)^b} < \infty$

(Idris, 2016).

2.6.2 Operator Maximal

Untuk setiap $f \in L^p(K, \lambda), p \geq 1$, dengan $H_{\alpha, \gamma}(x) = \frac{|x|^{\alpha-n}}{(1+|x|)^\gamma}$. Fungsi maksimal di hipergrup di definisikan sebagai

$$\begin{aligned}
 Mf(x) &= \sup_{R>0} \frac{1}{\lambda B(e,r)} (|f| * \chi_{B(e,r)})(x) \\
 &= \sup_{R>0} \frac{1}{\lambda B(e,r)} \int_{B(e,r)} T^x |f(y^*)| d\lambda(y)
 \end{aligned}$$

(Hajibayov, 2015).

2.6.3 Operator tipe (p, q)

Anggap bahwa T operator sublinear dan $1 \leq p, q \leq \infty$. T dikatakan tipe lemah (p, q) jika T operator terbatas dari $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke $L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Yaitu, terdapat konstanta $C > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $\lambda > 0$ dan $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda} \|f\|_p\right)^q;$$

T dikatakan tipe (p, q) jika T operator terbatas dari $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke $L^q(\mathbb{R}^n)$. Yaitu, terdapat konstanta $C > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$\|Tf\|_q \leq C \|f\|_p;$$

di mana $\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ menotasikan norm L^p dari $f(x)$ (Lu, 2007: 5).

2.7 Perintah untuk selalu berfikir

Pada pembahasan sebelumnya telah dipaparkan bahwa manusia memerlukan ilmu pengetahuan untuk memenuhi tugasnya sebagai khalifah di bumi. Selanjutnya akan dibahas tentang perintah untuk selalu berfikir. Karena dengan berfikir manusia dapat memperoleh dan mengembangkan ilmu pengetahuan. Perintah untuk berfikir untuk memperdalam dan mengembangkan ilmu pengetahuan telah tersurat dalam salah satu ayat al-Qur'an, pada surat Ali 'Imran ayat 189-191 yang artinya :

“Kepunyaan Allah-lah kerajaan langit dan bumi, dan Allah Maha Perkasa atas segala sesuatu. Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam

dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal. (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka."

Ahmad Bin Muhammad ash Showy al Mashry al Kholwaty al Maliky

(1241-1175H:260) berpendapat bahwa lafad *الَّذِينَ يَذْكُرُونَ وَيَتَفَكَّرُونَ* menjadi badal

dari lafad sebelumnya yaitu lafad *لِأُولِي الْأَلْبَابِ* hal ini menunjukkan bahwa orang-

orang yang memiliki akal yang sempurna adalah orang-orang yang mau berpikir dan berdzikir. Sedangkan Ibnu Katsir (2004) berpendapat bahwa dengan akal-akal yang sempurna dan memiliki kecerdasan, yang dapat dengan mudah mengetahui segala sesuatu hakikat dari apa yang dicari secara jelas dan gamblang.

Perintah untuk mencari ilmu juga tertulis dalam salah satu hadits sebagai berikut:

Jalur Al-Tabrani

حَدَّثَنَا مُحَمَّدُ بْنُ يَحْيَى بْنِ الْمُنْذِرِ الْقَزَّازُ، وَالْحُسَيْنُ بْنُ إِسْحَاقَ التُّسْتَرِيُّ، قَالَا: حَدَّثَنَا الْهَدَيْلُ بْنُ إِبْرَاهِيمَ الْحِمِّيُّ، حَدَّثَنَا عُثْمَانُ بْنُ عَبْدِ الرَّحْمَنِ الْفَرَشِيُّ، عَنْ حَمَّادِ بْنِ أَبِي سُلَيْمَانَ، عَنْ أَبِي وَايِلٍ، عَنْ عَبْدِ اللَّهِ بْنِ مَسْعُودٍ، قَالَ: قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ: طَلَبَ الْعِلْمِ فَرِيضَةٌ عَلَى كُلِّ مُسْلِمٍ. (رواه الطبراني)

(*Mu'jam al-Kabir li al-Tabrani* (9: 42))

Artinya : Muhammad bin Yahya bin Mundzir Al-Qazzaz dan Husain bin Ishaq berkata, Hudail bin Ibrahim Al-Himmany menceritakan kepada kami, Utsman bin Abdurrahman Al-Qurasyi menceritakan kepada kami, dari Hammad bin Abi Sulaiman, dari Abi Wail, Dari Abdillah bin Mas'ud berkata, Rasulullah SAW. bersabda : "Mencari ilmu itu wajib bagi setiap muslim". (HR. Thobroni).

Dari beberapa dalil di atas, dapat diartikan bahwa menuntut ilmu wajib, dan ilmu itu tiada batasnya. Sehingga manusia yang haruslah untuk selalu berfikir dan mengembangkan ilmu pengetahuan untuk memenuhi tugasnya sebagai khalifah di bumi. Hingga Allah jualah yang berkehendak menghentikan nafas hidupnya. Hal ini serupa dengan keterbatasan operator integral fraksional yang terus dilakukan perkembangan untuk mendapatkan penemuan-penemuan baru sehingga dapat digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Sehingga kajian keterbatasan operator Bessel-Riesz pada hipergrup komutatif di ruang Lebesgue merupakan salah satu bentuk implementasi dari hasil berfikir dalam mengembangkan ilmu.



BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Operator Bessel-Riesz dan Keterbatasannya

Pada bab ini akan dijelaskan tentang kernel $H_{\alpha,\gamma}$ beserta sifat-sifatnya yang mendukung pembuktian dalam pembahasan ini, dan pembuktian keterbatasan operator Bessel-Riesz $I_{\alpha,\gamma}$ di ruang Lebesgue $L^p(K, \lambda)$, $1 < p < \infty$.

3.1.1 Keanggotaan kernel $H_{\alpha,\gamma}$ di Ruang Lebesgue

Kernel $H_{\alpha,\gamma}$ yang di definisikan sebagai $H_{\alpha,\gamma} = \frac{|x|^{\alpha-n}}{(1+|x|)^\gamma}$ dengan $n = 1$, akan diselidiki keanggotaannya di ruang Lebesgue. Berikut ini hal-hal yang mendukung penyelidikan tersebut.

Teorema 3. 1

Jika $0 < \alpha < 1$ dan $\gamma > 0$, maka

- i. $H_{\alpha,\gamma} \in L^t(K, \lambda)$ dengan $\frac{1}{1+\gamma-\alpha} < t < \frac{1}{1-\alpha}$,
- ii. $\|H_{\alpha,\gamma}\|_{L^t} \sim \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(2^k R)^{(\alpha-1)t+1}}{(1+2^k R)^{\gamma t}} \right)^{\frac{1}{t}}$ dengan $R > 0$.

Bukti.

Misalkan $0 < \alpha < 1$ dan $\gamma > 0$. Kemudian pilih $t \in \left(\frac{1}{1+\gamma-\alpha}, \frac{1}{1-\alpha} \right)$, sehingga $(\alpha - 1)t + 1 > 0$.

(i) Nyatakan

$$\int_X H_{\alpha,\gamma}^t(x) d\lambda(x) = \int_{B(x,r)} H_{\alpha,\gamma}^t(x) d\lambda(x) + \int_{X \setminus B(x,r)} H_{\alpha,\gamma}^t(x) d\lambda(x).$$

Periksa bahwa $\frac{1}{1+\gamma-\alpha} < t < \frac{1}{1-\alpha}$, diperoleh

$$\int_{B(x,r)} H_{\alpha,\gamma}^t(x) d\lambda(x) \leq \int_{B(x,r)} |x|^{(\alpha-1)t} d\lambda(x) \leq C\lambda(b)^{(\alpha-1)t+1}$$

dan

$$\int_{X \setminus B(x,r)} H_{\alpha,\gamma}^t(x) dx \leq \int_{X \setminus B(x,r)} |x|^{(\alpha-\gamma-1)t} dx \leq C\lambda(b)^{(\alpha-\gamma-1)t+1}$$

dengan demikian $\int_X H_{\alpha,\gamma}^t(x) dx < \infty$.

(ii) Ambil sebarang $R > 0$ diperoleh

$$\begin{aligned} \int_X H_{\alpha,\gamma}^t(y) dy &= \int_X \frac{|y|^{(\alpha-1)t}}{(1+|y|)^{\gamma t}} d\lambda(y) \\ &= C \int_X \frac{r^{(\alpha-1)t+1-1}}{(1+r)^{\gamma t}} d\lambda(r) \\ &= C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2^k R \leq r < 2^{k+1} R} \frac{r^{(\alpha-1)t+1-1}}{(1+r)^{\gamma t}} d\lambda(r), C > 0 \end{aligned}$$

diperoleh $\int_X H_{\alpha,\gamma}^t(y) d\lambda(y)$ adalah

$$\begin{aligned} \int_X H_{\alpha,\gamma}^t(y) d\lambda(y) &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1+2^k R)^{\gamma t}} \int_{2^k R \leq r < 2^{k+1} R} r^{(\alpha-1)t+1-1} d\lambda(r) \\ &= C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(2^k R)^{(\alpha-1)t+1}}{(1+2^k R)^{\gamma t}}. \end{aligned}$$

Sementara itu

$$\begin{aligned} \int_X H_{\alpha,\gamma}^t(y) d\lambda(y) &\geq \frac{C}{2^{\gamma t}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1+2^k R)^{\gamma t}} \int_{2^k R \leq r < 2^{k+1} R} r^{(\alpha-1)t+1-1} d\lambda(r) \\ &= C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(2^k R)^{(\alpha-1)t+1}}{(1+2^k R)^{\gamma t}}. \end{aligned}$$

Akibatnya $\int_X H_{\alpha,\gamma}^t(y) d\lambda(y) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(2^k R)^{(\alpha-1)t+1}}{(1+2^k R)^{\gamma t}}$. Pilih $u = 2, a = (\alpha - 1)t$,

dan $b = \gamma t$ pada $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(2^k R)^{(\alpha-1)t}}{(1+2^k R)^{\gamma t}}$. Berdasarkan Lemma 2.12, berakibat $H_{\alpha,\gamma} \in L^t(K, \lambda)$.

Dari ekivalensi antara $\|H_{\alpha,\gamma}\|_{L^t}$ dan $\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(2^k R)^{(\alpha-1)t+1}}{(1+2^k R)^{\gamma t}} \right)^{\frac{1}{t}}$ diperoleh

$$\frac{(2^k R)^{(\alpha-1)t + \frac{1}{t}}}{(1 + 2^k R)^\gamma} \leq C \|H_{\alpha,\gamma}\|_{L^t}$$

untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$.

Selanjutnya untuk $\gamma = 0$, telah diketahui $H_{\alpha,0} = H_\alpha$ bukan anggota ruang Lebesgue. Oleh karena itu, H_α akan di investigasi keanggotaannya di ruang Morrey.

Lemma 3.2

Jika $0 < \alpha < 1$, maka $H_\alpha \in \mathcal{M}^{s,t}(K, \lambda)$ dengan $1 \leq s < t = \frac{1}{1-\alpha}$.

Bukti.

Diberikan $0 < \alpha < 1$. Ambil sebarang $B = B(a, R)$ dengan $a \in K$ dan $R >$

0. Untuk $1 \leq s < t = \frac{1}{1-\alpha}$, berlaku

$$|B|^{\frac{s}{t}-1} \int_B H_\alpha^s(x) d\lambda(x) \leq |B_0|^{\frac{s}{t}-1} \int_{B_0=B(0,R)} |x|^{(\alpha-1)s} d\lambda(x) \leq C |B_0|^{\frac{s}{t}-1} |B_0|^{1-\frac{s}{t}}.$$

Ambil supremum atas B untuk mendapatkan $\|H_\alpha\|_{\mathcal{M}^{s,t}}^s \leq C$.

Perhitungan norma H_α tidak bergantung pada jari-jari bola. Dengan demikian untuk $R > 0$,

$$C_2 \|H_\alpha\|_{\mathcal{M}^{s,t}}^s \leq |B(0,2R)|^{\frac{s}{t}-1} \int_{B(0,2R)-B(0,R)} H_\alpha^s(x) d\lambda(x) \leq C_1 \|H_\alpha\|_{\mathcal{M}^{s,t}}^s,$$

dengan $C_1, C_2 > 0$.

Berdasarkan dekomposisi diadik, diperoleh

$$R^{\frac{1}{t}-\frac{1}{s}} \sum_{k=-1}^{-\infty} H_{\alpha}(2^k R)(2^k R)^{\frac{1}{s}} \leq C \|H_{\alpha}\|_{\mathcal{M}^{s,t}}$$

dan

$$H_{\alpha}(2^k R) \leq C(2^k R)^{-\frac{1}{t}} \|H_{\alpha}\|_{\mathcal{M}^{s,t}}$$

untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$.

Akibat 3.3

Jika $0 < \alpha < 1$ dan $\gamma > 0$, maka $H_{\alpha,\gamma} \in \mathcal{M}^{s,t}(K, \lambda)$ dengan $1 \leq s \leq t$ dan

$$\frac{1}{1+\gamma-\alpha} < t < \frac{1}{1-\alpha} \text{ atau } 1 \leq s < t \text{ dan } \frac{1}{1+\gamma-\alpha} < t < \frac{1}{1-\alpha}.$$

Bukti. Diberikan $0 < \alpha < 1$ dan $\gamma > 0$. Berdasarkan inklusi ruang Morrey, $H_{\alpha,\gamma}$

termuat di $\mathcal{M}^{s,t}(K, \lambda)$ dengan $1 \leq s \leq t$ dan $\frac{1}{1+\gamma-\alpha} < t < \frac{1}{1-\alpha}$.

Selain itu, karena $H_{\alpha,\gamma} \leq H_{\alpha}$ dan $H_{\alpha} \in \mathcal{M}^{s,t}(K, \lambda)$ dengan $1 \leq s < t = \frac{1}{1-\alpha}$, maka

$H_{\alpha,\gamma}$ menjadi anggota $\mathcal{M}^{s,t}(K, \lambda)$ dengan $1 \leq s < t = \frac{1}{1-\alpha}$. Dengan demikian

$$H_{\alpha,\gamma} \in \mathcal{M}^{s,t}(K, \lambda) \text{ dengan } 1 \leq s < t \text{ dan } \frac{1}{1+\gamma-\alpha} < t \leq \frac{1}{1-\alpha}.$$

3.1.2 Keterbatasan Operator Bessel-Riesz di Ruang Lebesgue

Keterbatasan operator Bessel-Riesz $I_{\alpha,\gamma}$ di ruang Lebesgue ditunjukkan oleh

akibat berikut.

Akibat 3.4

Jika $0 < \alpha < 1$ dan $\gamma > 0$, maka

$$\|I_{\alpha,\gamma} f\|_{L^q} \leq \|H_{\alpha,\gamma}\|_{L^t} \|f\|_{L^p},$$

untuk setiap $f \in L^p(K, \lambda)$ dengan $1 \leq p < t'$, $\frac{1}{1+\gamma-\alpha} < t < \frac{1}{1-\alpha}$, dan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{t'}$

$$I_{\alpha,\gamma}f(x) = \int_X T^x H_{\alpha,\gamma}(\rho(x,y)) f(y^*) d\lambda(y)$$

untuk setiap $f \in L^p(K, \lambda)$, $p \geq 1$, dengan $H_{\alpha,\gamma}(x) = \frac{|x|^{\alpha-1}}{(1+|x|)^\gamma}$.

$$\begin{aligned} Mf(x) &= \sup_{R>0} \frac{1}{\lambda B(e,r)} (|f| * \chi_{B(e,r)})(x) \\ &= \sup_{R>0} \frac{1}{\lambda B(e,r)} \int_{B(e,r)} T^x |f(y^*)| d\lambda(y). \end{aligned}$$

Teorema 3.5

Misalkan $0 < \alpha < 1$ dan $\gamma > 0$. Jika $1 \leq s < t$ (dengan $\frac{1}{1+\gamma-\alpha} < t \leq \frac{1}{1-\alpha}$)

atau $1 \leq s \leq t$. Maka terdapat $C_p > 0$ sehingga

$$\|I_{\alpha,\gamma}f\|_{L^p} \leq C_p \|H_{\alpha,\gamma}(K, \lambda)\|_{M^{s,t}} \|f\|_{L^p}$$

untuk setiap $f \in L^p(K, \lambda)$ dengan $1 < p < t'$ dan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{t'}$

Bukti

$$I_{\alpha,\gamma}f(x) = I_1(x) + I_2(x)$$

dengan $I_1 = \int_{\rho(x,y) < R} H_{\alpha,\gamma}(\rho(x,y)) T^x f(y) d\lambda(y)$

dan $I_2 = \int_{\rho(x,y) \geq R} H_{\alpha,\gamma}(\rho(x,y)) T^x f(y) d\lambda(y)$

Untuk taksiran I_1

$$\begin{aligned} |I_1(x)| &= \sum_{k=-1}^{-\infty} \int_{2^k R \leq \rho(x,y) < 2^{k+1} R} H_{\alpha,\gamma}(\rho(x,y)) T^x f(y) d\lambda(y) \\ &\leq \sum_{k=-1}^{-\infty} H_{\alpha,\gamma}(2^k R) \int_{2^k R \leq \rho(x,y) < 2^{k+1} R} T^x f(y) d\lambda(y) \\ &\leq \sum_{k=-1}^{-\infty} H_{\alpha,\gamma}(2^k R) \int_{B(e, 2^{k+1} R)} T^x f(y^*) d\lambda(y). \end{aligned}$$

Karena untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$ berlaku

$$H_{\alpha,\gamma}(2^k R)(2^k R)^{\frac{1}{t}} \leq C \|H_{\alpha,\gamma}\|_{M^{s,t}}$$

dan

$$(2^{k+1}R)^{-1} \int_{B(e,2^{k+1}R)} T^x f(y^*) d\lambda(y) \leq C Mf(x)$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} |I_1(x)| &\leq C \|H_{\alpha,\gamma}(K, \lambda)\|_{M^{s,t}} Mf(x) \sum_{k=-1}^{-\infty} (2^k R)^{\frac{1}{t'}} \\ &\leq C \|H_{\alpha,\gamma}(K, \lambda)\|_{M^{s,t}} Mf(x) R^{\frac{1}{t'}}. \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk estimasi I_2

$$\begin{aligned} |I_2(x)| &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k R \leq \rho(x,y) < 2^{k+1} R} H_{\alpha,\gamma}(\rho(x,y)) T^x f(y) d\lambda(y) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} H_{\alpha,\gamma}(2^k R) \int_{2^k R \leq \rho(x,y) < 2^{k+1} R} T^x f(y) d\lambda(y) \\ &\leq \sum_{k=-1}^{-\infty} H_{\alpha,\gamma}(2^k R) \int_{B(e,2^{k+1}R)} T^x f(y^*) d\lambda(y) \end{aligned}$$

dengan menggunakan ketaksamaan Holder diperoleh

$$\begin{aligned} |I_2(x)| &\leq \sum_{k=-1}^{-\infty} H_{\alpha,\gamma}(2^k R) (2^k R)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{B(e,2^{k+1}R)} T^x |f(y^*)|^p d\lambda(y) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \|f\|_{L^p} \sum_{k=-1}^{-\infty} H_{\alpha,\gamma}(2^k R) (2^k R)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C \|H_{\alpha,\gamma}(K, \lambda)\|_{M^{s,t}} \|f\|_{L^p} R^{\frac{1}{t'} - \frac{1}{p}} \end{aligned}$$

dengan memilih $R = \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{Mf(x)} \right)^p$, diperoleh ketaksamaan Hedberg

$$\begin{aligned}
|I_{\alpha,\gamma}f(x)| &\leq |I_1(x)| + |I_2(x)| \\
&\leq C \|H_{\alpha,\gamma}(K, \lambda)\|_{M^{s,t}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{t'}} (Mf(x))^{1-\frac{p}{t'}}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{t'}$ untuk menghitung

$$\int_K |I_{\alpha,\gamma}f(x)|^q d\lambda(x) \leq C \|H_{\alpha,\gamma}(K, \lambda)\|_{M^{s,t}}^q \|f\|_{L^p}^{q-p} \|Mf(x)\|_{L^p}^p$$

karena operator maksimal terbatas di $L^p(K)$ dengan $p > 1$, maka

$$\|I_{\alpha,\gamma}f\|_{L^q} \leq C_p \|H_{\alpha,\gamma}(K, \lambda)\|_{M^{s,t}} \|f\|_{L^p}$$

selain itu diperoleh

$$\|I_{\alpha}f\|_{L^q} \leq C_p \|H_{\alpha}(K, \lambda)\|_{M^{s,t}} \|f\|_{L^p},$$

untuk kasus dengan $\gamma = 0$ dan $1 \leq s < t = \frac{1}{1-\alpha}$.

3.2 Intergrasi Keterbatasan Operator Bessel-Riesz dengan Tugas Manusia Sebagai Khalifah di Bumi

Keterbatasan operator besseL-riesz pada awalnya terinspirasi dari keterbatasan operator integral fraksional yang pada mulanya hanya berlaku pada ruang khusus yang salah satunya ruang Lebesgue. Penelitian mengenai keterbatasan operator integral fraksional pertama kali diteliti oleh G.H Hardy dan J.E Littlewood yang berhasil membuktikan bahwa operator integral fraksional I_{α} terbatas di ruang Lebesgue dengan memanfaatkan operator maksimal yang kemudian dikenal dengan ketaksamaan Hardy-Littlewood. Selang beberapa waktu kemudian, Sergei Sobolev berhasil mengembangkan mengenai ketaksamaan tersebut yang kemudian dikenal sebagai ketaksamaan Hardy-Littlewood Sobolev. Seiring berjalannya waktu, banyak ilmuwan yang meneliti tentang keterbatasan operator integral fraksional,

salah satunya Hajibayov yang berhasil membuktikan keterbatasan operator integral fraksional di ruang Lebesgue pada hipergrup yang komutatif. Idris juga berhasil membuktikan keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue. Berkembangnya hal ini bisa dikatakan sebagai bentuk memperoleh kesempurnaan dari sesuatu yang sudah ada dan bisa dikatakan juga sebagai bentuk implementasi hasil pemikiran manusia mengenai ilmu pengetahuan. Seperti yang telah dijelaskan dalam surat Ali 'Imran ayat 189-190 bahwa manusia yang memiliki akal sempurna adalah manusia yang mau berfikir.

Pelajaran yang dapat diambil dari ayat tersebut adalah jika seseorang ingin memiliki akal yang sempurna maka orang tersebut haruslah selalu berfikir dan berdzikir, dan Allah sudah memberikan bantuan kepada orang-orang tersebut salah satunya berupa tanda-tanda dalam penciptaan langit dan bumi dan silih bergantinya siang dan malam. Sedangkan, pada surat al-Baqarah ayat 30 dijelaskan bahwa penciptaan manusia di bumi adalah untuk menjadi khalifah di bumi, tetapi untuk menjadi khalifah di bumi diperlukan ilmu pengetahuan yang tak terbatas agar dapat menundukan dan memelihara apa yang sudah dan akan ada di bumi. Untuk memperoleh ilmu pengetahuan yang tak terbatas ini tentulah manusia harus terus berfikir untuk mengembangkan ilmu pengetahuan yang sudah ada. Hal ini semata-mata agar manusia mampu untuk menjadi khalifah di bumi.

Berdasarkan uraian tersebut, terdapat suatu korelasi dalam pengembangan keterbatasan operator Bessel-Riesz dalam penelitian ini dan pandangan Islam. Dalam penelitian ini keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang Lebesgue dibawa dan dikembangkan ke hipergrup yang komutatif yang merupakan hasil proses berfikir dari manusia dan proses mengembangkan ilmu pengetahuan yang sudah ada, sedangkan

dalam pandangan islam manusia harus selalu berfikir tentang apa yang ada di bumi dan selalu mengembangkan ilmu pengetahuan untuk memenuhi tugasnya sebagai khalifah di bumi.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh hasil bahwa untuk $0 < \alpha < 1$, operator Bessel-Riesz $I_{\alpha,\gamma}$ pada hipergrup (K, λ) yang didefinisikan oleh

$$I_{\alpha,\gamma}f(x) = \int_x T^x H_{\alpha,\gamma}(\rho(x, y)) f(y^*) d\lambda(y)$$

merupakan operator yang terbatas pada ruang Lebesgue $L^p(\lambda)$ ke $L^q(\lambda)$ dengan $1 \leq$

$p < t'$, $\frac{1}{1+\gamma-\alpha} < t < \frac{1}{1-\alpha}$, dan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{t'}$, serta $H_{\alpha,\gamma}(x) = \frac{|x|^{\alpha-1}}{(1+|x|)^\gamma}$, atau dapat

dikatakan untuk $f \in L^p(\lambda)$ terdapat konstanta $C > 0$ sehingga diperoleh ketaksamaan

$$\|I_{\alpha,\gamma}\|_{L^q} \leq C \|H_{\alpha,\gamma}(K, \lambda)\|_{M^{s,t}} \|f\|_{L^p}$$

Dengan syarat $\lambda(B) \leq Cr$.

4.2 Saran

Berdasarkan pembahasan di atas, disarankan untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan telaahan lebih lanjut terhadap keterbatasan operator Bessel-Riesz di ruang Morrey klasik atau Morrey diperumum.

DAFTAR RUJUKAN

- Abdussakir. 2017. *Model Integrasi Matematika dan Al-Quran serta Praktik Pembelajarannya*. Makalah Seminar Nasional Integrasi Matematika di dalam Al-Quran. April 26. Bukittinggi
- Ahmad Bin Muhammad ash Showy al Mashry al Kholwaty al Maliky, Hasyiyatu ash Showi, (Bairut: Darul Kutub al ‘Ilmiyah, 1241-1175 H), Juz 1, hlm. 260
- Bartle, Robert G. 1995. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Willey & Sons, Inc.
- Cohn, Donald L. 2013. *Measure Theory : Second Edition*. Springer Science+Business Media, LLC.
- Darmawijaya, Soeparna. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.
- Gunawan, H. 2003. A note on the generalized fractional integral operators. Bandung: Departement of Mathematics, ITB.
- Hajibayov, Mubariz G. 2015. *Global Journal of Mathematical Analysis*. 3(1) 18-25. “Boundedness in Lebesgue Spaces of Riesz Potentials on Commutative Hypergroups”
- Hutaean, Effendi. 1989. *Materi Pokok : Analisis Real II*. Jakarta: Universitas Terbuka.
- Idris, M. 2016. *The boundedness of Bessel-Riesz operators on Morrey spaces*. AIP Conference Proceedings 1729, 020006 (2016); 10.1063/1.4946909
- Iskhak, Widi Eko Zanuvar. 2013. *Teorema Interpolasi Marcinkiewicz dan Penerapannya*. Skripsi. Tidak Diterbitkan. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Airlangga: Sueabaya.
- Katsir, Ibnu. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 1*. Terjemahan oleh Abdullah. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi’i
- Kreyszig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Willey & Sons.
- Lu, Shanzhen, dkk. 2007. *Singular Integrals and Related Topics*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd
- Massouros, Gerasimos G. 1995. *Romanian Academy Publishing House*. 2(4). “On The Hypergroup Theory”

Mu'thi, W. 2012. *Penciptaan Manusia Sebagai Khalifah Allah di Muka Bumi*. (online) <http://psq.or.id/artikel/penciptaan-manusia-sebagai-khalifah-allah-di-muka-bumi/> (Di akses 10 Maret 2017)



RIWAYAT HIDUP

M. Husen Al Farisy, lahir di Bojonegoro pada tanggal 03 September 1997. Biasa dipanggil Husen atau Faris. Adik dari M. Arif Zainul Muttaqin, dan yang merupakan anak kedua dari 2 bersaudara dari pasangan Bapak Imam Kanapi dan Ibu Umi Cholifah. Selama di Malang pernah bertempat tinggal di daerah Sumber sari, pernah juga di Perumahan PNS Tlogomas, setelah itu pindah ke di daerah Karang Besuki dan terakhir pindah ke Jl. Merto Joyo Selatan blok C-1 no C 5 Merjosari Lowokwaru Kota Malang.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MIM 23 Palembang dan lulus pada tahun 2009. Setelah itu melanjutkan ke Mts At-Tanwir Talun, lulus pada tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMAN 1 Bojonegoro dan lulus pada tahun 2015. Selanjutnya, pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang Jurusan Matematika.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : M. Husen Al Farisy
NIM : 15610085
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Keterbatasan Operator Bessel-Riesz di Ruang Lebesgue pada Hipergrup yang Komutatif
Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	1 Februari 2019	Konsultasi Bab I	1. ✓
2.	8 Maret 2019	Konsultasi Agama Bab I	2. ✓
3.	3 Februari 2019	Konsultasi Bab II	3. ✓
4.	15 Februari 2019	ACC Bab I & Bab II	4. ✓
5.	11 Maret 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	5. ✓
6.	5 April 2019	Konsultasi Bab III	6. ✓
7.	12 April 2019	Konsultasi Bab IV & Abstrak	7. ✓
8.	30 April 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	8. ✓
9.	3 Mei 2019	ACC Bab III, IV & Abstrak	9. ✓
10.	3 Mei 2019	ACC Kajian Keagamaan	10. ✓
11.	3 Mei 2019	ACC Keseluruhan	11. ✓

Malang, 3 Mei 2019

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001