# INDEKS EKSENTRISITAS ZAGREB PERTAMA DAN KEDUA PADA GRAF PEMBAGI NOL DARI RING KOMUTATIF DENGAN UNSUR KESATUAN

**SKRIPSI**

**OLEH**
**TIA WAHYU SEPTIANA**
**NIM. 15610082**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2019**

# INDEKS EKSENTRISITAS ZAGREB PERTAMA DAN KEDUA PADA GRAF PEMBAGI NOL DARI RING KOMUTATIF DENGAN UNSUR KESATUAN

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada**
**Fakultas Sains dan Teknologi**
**Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang**
**untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam**
**Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh**
**Tia Wahyu Septiana**
**NIM. 15610082**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2019**

**INDEKS EKSENTRISITAS ZAGREB PERTAMA DAN KEDUA PADA GRAF PEMBAGI NOL DARI RING KOMUTATIF DENGAN UNSUR KESATUAN**

**SKRIPSI**

**Oleh**
**Tia Wahyu Septiana**
**NIM. 15610082**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 07 Mei 2019

| Pembimbing I, | Pembimbing II, |
|---|---|
| Dr. Abdussakir, M.Pd | Mohammad Jamhuri, M.Si |
| NIP. 19751006 200312 1 001 | NIP. 19810502 200501 1 004 |

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

# INDEKS EKSENTRISITAS ZAGREB PERTAMA DAN KEDUA PADA GRAF PEMBAGI NOL DARI RING KOMUTATIF DENGAN UNSUR KESATUAN

**SKRIPSI**

**Oleh**
**Tia Wahyu Septiana**
**NIM. 15610082**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 23 Mei 2019

| | | |
|---|---|---|
| Penguji Utama | : Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D | .......................... |
| Ketua Penguji | : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si | .......................... |
| Sekretaris Penguji | : Dr. Abdussakir, M.Pd | .......................... |
| Anggota Penguji | : Mohammad Jamhuri, M.Si | .......................... |

**Mengetahui,**
**Ketua Jurusan Matematika**

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Tia Wahyu Septiana

NIM : 15610082

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan saya tersebut.

Malang, 07 Mei 2019
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL 93AECAEF064818908 6000 ENAM RIBU RUPIAH

Tia Wahyu Septiana
NIM. 15610082

**MOTO**

Jangan berpikir menjadi yang terbaik,

tetapi berpikir bagaimana melakukan yang terbaik

## PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Imam Basori dan ibunda Mujiati yang senantiasa ikhlas mendoakan dan sabar dalam merawat, mendidik, dan membesarkan penulis hingga mengantarkan sampai pada pendidikan sarjana.

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Segala puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Swt yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan arahan yang terbaik selama penyelesaian skripsi ini.
5. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing II sekaligus dosen wali yang telah memberikan ilmu, nasihat, arahan, dan motivasi kepada penulis sejak semester 1 hingga pada saat penulisan skripsi ini di semester 8.

6. Seluruh dosen Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah ikhlas dan sabar dalam mendidik, memberikan ilmu dan bimbingannya.
7. Kedua orang tua dan seluruh keluarga penulis yang selalu memberikan doa, nasihat, dan motivasi kepada penulis.
8. Teman-teman mahasiswa di Jurusan Matematika angkatan 2015 dan kos "*Savana HS*", terima kasih atas pengalaman berharga yang dirajut bersama.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

*Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Malang, Mei 2019

Penulis

## DAFTAR ISI

## DAFTAR TABEL

## DAFTAR GAMBAR

## ABSTRAK


Septiana, Tia Wahyu. 2019. **Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Mohammad Jamhuri, M.Si.

**Kata kunci**: indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua, graf pembagi nol, ring komutatif dengan unsur kesatuan

Misalkan $R$ ring komutatif dengan unsur kesatuan dan $Z(R)$ adalah himpunan pembagi nol. Graf $\Gamma(R)$ adalah graf dengan titik-titiknya yaitu semua himpunan pembagi nol bukan nol dari $R$ dan untuk dua titik yang berbeda $x, y \in Z(R)$ terhubung langsung jika dan hanya jika $xy = 0$. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan rumus indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{pq}$ dan $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk $p$,$q$ bilangan prima. Metode penelitian yang digunakan adalah studi kepustakaan dengan menggunakan beberapa buku dan jurnal sebagai bahan rujukan. Hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ untuk $p, q$ bilangan prima, $p \geq 3$, dan $p < q$ adalah
$$E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right) = 4(q + p - 2) \text{ dan } E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right) = 4(p-1)(q-1).$$
2. Indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ untuk $p$ bilangan prima dan $p \geq 3$ adalah
$$E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = p - 1 \text{ dan } E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = \frac{(p-2)(p-1)}{2}.$$

# ABSTRACT

Septiana, Tia Wahyu. 2019. **First and Second Zagreb Eccentricity Indices of Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring with Unity**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisor: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Mohammad Jamhuri, M.Si.

**Keywords**: first and second Zagreb eccentricity indices, zero-divisor graph, a commutative ring with unity

Let $R$ be a commutative ring with unity and $Z(R)$ be its set of zero-divisors. Graph $\Gamma(R)$ is a graph with the vertices, that is all sets of non zero-divisors of $R$ and for two distinct vertices $x, y \in Z(R)$ are adjacent if and only if $x \cdot y = 0$. The purpose of this research is to determine the formula of first and second Zagreb eccentricity indices of zero-divisor graph of a commutative ring with unity $\mathbb{Z}_{pq}$ and $\mathbb{Z}_{p^2}$ where $p, q$ are primes. The research method used is a literature study using some books and journals as references. The result of this research are as follows:

1. First and second Zagreb eccentricity indices of graph $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ where $p, q$ are primes, $p \geq 3$, and $p < q$ are
$$E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right) = 4(q + p - 2) \text{ and } E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right) = 4(p - 1)(q - 1).$$
2. First and second Zagreb eccentricity indices of graph $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ where $p$ is prime and $p \geq 3$ are
$$E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = p - 1 \text{ and } E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = \frac{(p-2)(p-1)}{2}.$$

# ملخص

سفتيانا، تيبا وحي. ٢٠١٩. **Zagreb Eccentricity Indices الأول والثاني من مخطط صفر قسري الحلقة التبادلية مع الوحدة**. بحث جامعى. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشار:(١)د. عبد الشاكر، الماجستير.(٢) محمدجمهوري، الماجستير.

**الكلمات الرئسي**: Zagreb eccentricity indices الأول والثاني، مخطط صفر قسري، الحلقة التبادلية مع الوحدة

دع $R$ يكون حلقة تبادلية مع الوحدة و$Z(R)$ تكون مجموعتة من المقسومات الصفرية. مخطط $\Gamma(R)$ عبارة عن مخطط به القسم، وهو كل مجموعات المقسومات غير الصفرية $R$ ولقرتين متميزتين $x,y \in Z(R)$ مجاورتين إذا وفقط إذا $xy = 0$ . الغرض من هذا البحث هو تحديد معادلة Zagreb eccentricity indices الأول والثاني من مخطط صفر قسري الحلقة التبادلية مع الوحدة $\mathbb{Z}_{pq}$ و $\mathbb{Z}_{p^2}$ لـ $p,q$ الأعداد الأولية طريقة البحث المستخدمة هي دراسة الأدب باستخدام بعض الكتب والمجلات كمراجع. نتائج هذه الدراسة هي على النحو التالى:

١. Zagreb eccentricity indices الأول والثاني من مخطط $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ لـ $p,q$ الأعداد الأولية و $q \geq 3$ و $p < q$ هي

$$E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right) = 4(q+p-2) \text{ و } E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right) = 4(p-1)(q-1)$$

٢. Zagreb eccentricity indices الأول والثاني من مخطط $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ لـ $p$ الأعداد الأولية $p \geq 3$ هي

$$E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = p-1 \text{ و } E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = \frac{(p-2)(p-1)}{2}$$

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Graf merupakan salah satu dari banyak cabang ilmu matematika yang aplikasinya banyak digunakan dalam kehidupan manusia. Beberapa permasalahan dapat diselesaian secara lebih mudah dengan terori graf. Manfaat dari teori graf ini dapat dilakukan seseorang dalam meringankan permasalahan orang lain. Sebagaimana dalam firman Allah Swt surat al-Hasyr ayat 9:

وَيُؤْثِرُونَ عَلَىٰٓ أَنفُسِهِمْ وَلَوْ كَانَ بِهِمْ خَصَاصَةٌۚ وَمَن يُوقَ شُحَّ نَفْسِهِۦ فَأُوْلَـٰٓئِكَ هُمُ ٱلْمُفْلِحُونَ ۝٩

"*Dan mereka mengutamakan (orang-orang muhajirin), atas diri mereka sendiri, sekalipun mereka dalam kesusahan. Dan siapa yang dipelihara dari kekikiran dirinya, mereka itulah orang-orang yang beruntung*".

Ayat tersebut menyatakan bahwa sebagai seorang muslim yang baik, salah satu amalan yang paling utama adalah membantu meringankan beban penderitaan orang lain seperti yang dilakukan Euler seorang ahli matematika asal Swiss. Euler menggunakan aplikasi graf untuk merepresentasikan Jembatan Konigsberg yaitu tujuh jembatan dengan empat daratan. Masalah ini merupakan teka-teki orang-orang di sana yang sering berjalan dari daratan satu ke daratan yang lainnya melalui jembatan tersebut. Orang-orang berpikir apakah seseorang dapat berjalan dengan melalui ketujuh jembatan itu masing-masing tepat satu kali. Masalah ini dapat dipecahkan oleh Euler dengan merepresentasikan ke dalam graf yaitu dengan empat titik dan tujuh sisi (Setyawan, 2014).

Graf $G$ adalah pasangan himpunan $(V, E)$ dengan $V$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan $E$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V$ yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik dan sisi di $G$ masing-masing dinotasikan dengan $V(G)$ dan $E(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Sedangkan untuk suatu graf terhubung $G$, maka jarak (*distance*) $d(u, v)$ antara dua titik $u$ dan $v$ di $G$ adalah panjang dari lintasan terpendek yang menghubungkan $u$ dan $v$ di $G$. Adapun eksentrisitas (*eccentricity*) $e(v)$ dari suatu titik $v$ pada graf terhubung $G$ merupakan maksimum $d(u, v), \forall u \in V(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:29). Menurut Vukicevic dan Graovac (2010) indeks eksentrisitas Zagreb pertama $(E_1)$ dan kedua $(E_2)$ secara berturut-turut didefinisikan sebagai $E_1 = \sum_{u \in V(G)} e(u)^2$ dan $E_2 = \sum_{uv \in E(G)} e(u)e(v)$, dengan $e(u)$ dan $e(v)$ adalah eksentrisitas dari titik $u$ dan $v$ di $G$.

Penelitian terkait indeks eksentrisitas Zagreb telah dilakukan oleh Lee (2013) yang meneliti tentang *lower and upper bounds of Zagreb eccentricity indices on unicyclic graphs*. Penelitian *multiplicative Zagreb eccentricity indices of some composite graphs* oleh Luo & Wu (2014). Penelitian *Zagreb eccentricity indices of the generalized hierarchical product graphs and their applications* oleh Luo & Wu (2014).

Ring adalah struktur yang terdiri dari himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang dilambangkan dengan $(R,*,\cdot)$ yang memenuhi sifat grup abelian terhadap operasi $*$, serta $\cdot$ bersifat asosiatif dan distributif terhadap operasi $*$. Suatu ring $(R,*,\cdot)$ disebut ring komutatif dengan unsur kesatuan jika dan hanya jika operasi kedua bersifat komutatif dan $R$ mempunyai unsur identitas terhadap operasi kedua yaitu operasi $\cdot$. Dengan kata lain $R$ merupakan ring komutatif sekaligus ring dengan unsur kesatuan (Raisinghania dan Aggarwal, 1980).

Misalkan $R$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan dan $Z(R)$ adalah himpunan pembagi nol. Graf $\Gamma(R)$ dari $R$ dengan titik-titiknya $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$, yaitu himpunan pembagi nol bukan nol dari $R$, dan $x, y \in Z(R)^*$ terhubung langsung jika dan hanya jika $xy = 0$ (Anderson dan Livingston, 1999).

Penelitian terkait graf pembagi nol telah dilakukan oleh Soleha, dkk (2015) yang meneliti tentang sifat-sifat graf pembagi nol dari ring komutatif dengan elemen satuan. Penelitian sifat-sifat semigrup sebagai graf pembagi nol oleh Patty (2016). Penelitian graf pembagi nol dan graf total pada kode genetik oleh Riyanti, dkk (2018).

Penelitian graf pembagi nol yang diperoleh dari suatu grup juga telah dilakukan. Penelitian analisis automorfisma graf pembagi nol dari ring komutatif dengan elemen satuan oleh Sugiarto, dkk (2018). Penelitian automorfisme graf pembagi nol dari gelanggang himpunan bilangan bulat modulo tak prima oleh Rokhmah (2018). Penelitian terkait jumlah jarak eksentrik graf pembagi nol dari gelanggang $Z_p \times Z_q$ dengan $p, q$ bilangan prima oleh Khasanah (2018).

Sampai saat ini belum ada penelitian terkait indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua yang diperoleh pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan. Oleh karena itu, penulis mengambil judul "Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan".

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, masalah dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana rumus indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan?
2. Bagaimana rumus indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui rumus indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan.
2. Untuk mengetahui rumus indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Memberikan informasi mengenai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan.
2. Memberikan informasi mengenai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan.

## 1.5 Batasan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini dibatasi hanya pada graf pembagi nol dan ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{pq}$ dan $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk $p, q$ bilangan prima, $p \geq 3$, dan $p < q$.

## 1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini metode yang digunakan adalah studi literatur atau studi pustaka, yaitu kegiatan untuk memperoleh informasi yang relevan dengan topik pembahasan dengan bantuan sumber-sumber yang ada di perpustakaan. Sumber-sumber tersebut seperti buku, jurnal, dan lain-lain.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan oleh penulis untuk menentukan indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan sebagai berikut:

1. Menentukan anggota dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{pq}$ dan $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk $p, q$ bilangan prima, $p = 3, 5, 7, 11$, dan $p < q$.
2. Menentukan Tabel Cayley dari ring komutatif dengan unsur kesatuan.
3. Menentukan himpunan pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan.
4. Menggambar graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan.
5. Menentukan jarak dari masing-masing titik pada graf pembagi nol yang telah terbentuk.
6. Menentukan eksentrisitas.
7. Menentukan indeks eksentrisitas Zagreb pertama.
8. Menentukan indeks eksentrisitas Zagreb kedua.

9. Menentukan rumus yang terbentuk.
10. Membuktikan rumus.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan penelitian ini mudah dipahami secara keseluruhan, maka digunakan sistematika penulisan yang dibagi menjadi empat bab yaitu:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini penulis menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini penulis menjelaskan tentang kajian teori yang digunakan dalam penelitian, yaitu meliputi konsep dasar tentang graf, grup, ring, ring dengan pembagi nol, graf pembagi nol, indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua, serta kajian teori graf dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini penulis menjelaskan hasil penelitian tentang indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan.

Bab IV Penutup

Pada bab ini penulis menjelaskan tentang kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan dan saran untuk pembaca.

## BAB II

## KAJIAN PUSTAKA

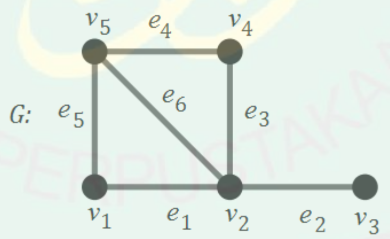
### 2.1 Graf

### 2.1.1 Definisi Graf

Graf $G$ adalah pasangan himpunan $(V, E)$ dengan $V$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan $E$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V$ yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik dan sisi di $G$ masing-masing dinotasikan dengan $V(G)$ dan $E(G)$. Sedangkan banyak unsur di $V(G)$ disebut order dari $G$ yang dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyak unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari $G$ yang dilambangkan dengan $q(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh:

Perhatikan graf $G$ yang memuat himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$. Graf $G$ dapat digambar seperti berikut:




Gambar 2.1 Graf $\boldsymbol{G}$

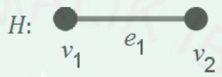
Dari Gambar 2.1 graf $G$ mempunyai 5 titik sehingga order $G$ adalah 5. Graf $G$ mempunyai 6 sisi sehingga ukuran graf $G$ adalah 6.

### 2.1.2 Terhubung Langsung (*Adjacent*) dan Terkait Langsung (*Incident*)

Jika sisi $e = (u, v)$ adalah sisi graf $G$, maka $u$ dan $v$ disebut terhubung langsung (*adjacent*). Jika sisi $e = (u, v)$ menghubungkan titik $u$ dan $v$, maka $u$ dan $e$ serta $v$ dan $e$ disebut terkait langsung (*incident*). Sisi $e = (u, v)$ dapat ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh:

Perhatikan graf $H$ yang memuat himpunan $V = \{v_1, v_2\}$ dan $E = \{e_1\}$ berikut ini:




Gambar 2.2 Graf ***H***

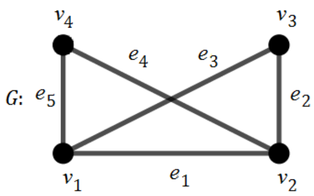
Dari Gambar 2.2 tersebut, titik $v_1$ dan $e_1$ serta $e_1$ dan $v_2$ adalah *incident* (terkait langsung) dan titik $v_1$ dan $v_2$ adalah *adjacent* (terhubung langsung).

### 2.1.3 Derajat (*Degree*)

Derajat dari titik $v$ di graf $G$, dinotasikan dengan $deg(v)$, yaitu banyaknya sisi di $G$ yang terkait langsung (*incident*) dengan $v$. Suatu titik $v$ dapat dikatakan titik genap (*even vertices*) atau titik ganjil (*odd vertices*) tergantung dari $deg(v)$ genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Contoh:

Perhatikan graf $G$ yang memuat himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ berikut ini:




Gambar 2.3 Graf ***G*** dengan Order 4

Dari Gambar 2.3 tersebut diperoleh bahwa

$deg(v_1) = 3$ $\quad$ $deg(v_3) = 2$

$deg(v_2) = 3$ $\quad$ $deg(v_4) = 2$

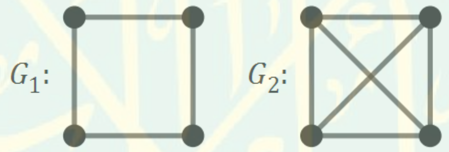
Titik $v_1$ dan $v_2$ adalah titik ganjil, sedangkan titik $v_3$ dan $v_4$ adalah titik genap.

### 2.1.4 Graf Beraturan

Graf beraturan-$r$ adalah graf yang semua titiknya berderajat $r$ dengan $r$ adalah bilangan asli, atau $deg(v) = r$, $\forall v \in V(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:9).

Contoh:

Perhatikan graf $G_1$ dan graf $G_2$ berikut ini:



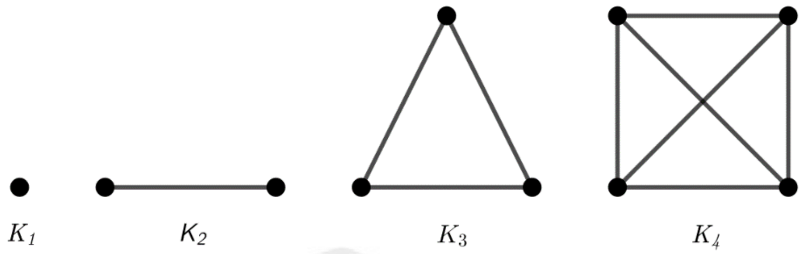

Gambar 2.4 Graf Beraturan

Dari Gambar 2.4 graf $G_1$ disebut graf beraturan-2 karena derajat setiap titiknya adalah 2 dan graf $G_2$ disebut graf beraturan-3 karena derajat setiap titiknya adalah 3.

### 2.1.5 Graf Komplit

Graf $G$ dikatakan komplit jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung. Graf komplit dengan order $n$ titik dinyatakan dengan $K_n$. Dengan demikian, maka graf $K_n$ merupakan graf beraturan-$(n-1)$ dengan order $n$ dan ukuran $\frac{n(n-1)}{2}$ (Abdussakir, dkk, 2009:21).

Contoh:



Gambar 2.5 Graf Komplit

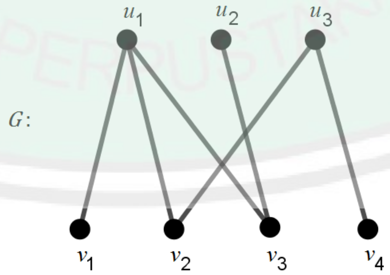
Dari Gambar 2.5 graf $K_1, K_2, K_3$, dan $K_4$ adalah graf komplit karena setiap dua titik yang berbeda dalam graf tersebut saling terhubung langsung.

### 2.1.6 Graf Bipartisi

Graf $G$ dikatakan bipartisi jika himpunan titik pada $G$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong $V_1$ dan $V_2$ sehingga masing-masing sisi pada graf $G$ tersebut menghubungkan satu titik di $V_1$ dengan satu titik di $V_2$ (Abdussakir, dkk, 2009:21).

Contoh:

Perhatikan graf $G$ yang memuat himpunan $V = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ berikut ini:



Gambar 2.6 Graf Bipartisi

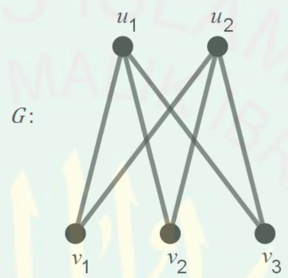
Dari Gambar 2.6 graf $G$ adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $V_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$.

### 2.1.7 Graf Bipartisi Komplit

Graf $G$ disebut bipartisi komplit jika $G$ adalah graf bipartisi dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain. Graf bipartisi komplit dengan $m$ titik pada salah satu partisi dan $n$ titik pada partisi yang lain ditulis $K_{m,n}$ (Abdussakir, dkk, 2009:22).

Contoh:

Perhatikan graf $G$ yang memuat himpunan $V = \{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3\}$ berikut ini:




Gambar 2.7 Graf Bipartisi Komplit $\boldsymbol{K_{3,2}}$

Dari Gambar 2.7 graf $G$ adalah bipartisi karena dapat dipartisi menjadi dua himpunan $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $V_2 = \{u_1, u_2\}$ serta merupakan graf komplit karena masing-masing titik pada $V_1$ dan $V_2$ saling terhubung langsung.

### 2.1.8 Graf Isomorfik dan Graf Identik

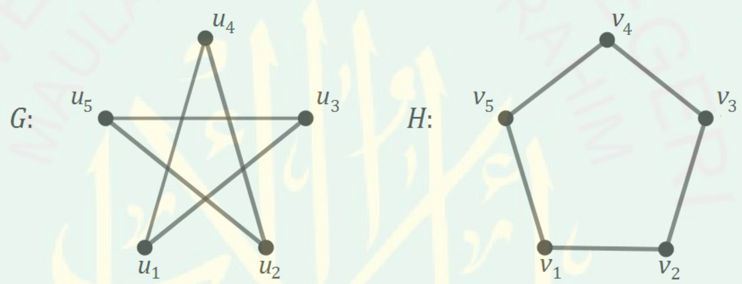
Misalkan $G$ dan $H$ graf. Graf $G$ disebut isomorfik dengan graf $H$, jika terdapat fungsi $\phi$ yang bersifat bijektif dari $V(G)$ ke $V(H)$, yang disebut isomorfisme, sedemikian hingga $uv \in E(G)$ jika dan hanya jika $\phi(u)\phi(v) \in E(H)$. Jika graf $G$ isomorfik dengan graf $H$, maka dinotasikan dengan $G \cong H$ (Abdussakir, dkk, 2009:24).

Untuk mengecek dua graf isomorfik atau tidak, terkadang diperlukan banyak waktu untuk melakukannya. Berikut diberikan beberapa sifat yang mudah dicek untuk menentukan dua graf isomorfik atau tidak. Jika dua graf isomorfik, maka akan dipenuhi sifat-sifat berikut:

a. Keduanya mempunyai order yang sama
b. Keduanya mempunyai ukuran yang sama
c. Keduanya mempunyai banyak titik berderajat $i$ yang sama, untuk $i \in \mathbb{N}$ (Abdussakir, dkk, 2009:26).

Contoh:

Perhatikan graf $G$ yang memuat himpunan $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ dan graf $H$ yang memuat himpunan $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ berikut ini:




Gambar 2.8 Graf Isomorfik

Dari Gambar 2.8, graf $G$ dan graf $H$ adalah isomorfik karena kedua graf tersebut mempunyai order yang sama yaitu 5 dan ukuran yang sama yaitu 5, serta mempunyai derajat setiap titiknya yang sama yaitu 2.

Dua graf $G$ dan $H$ disebut identik, dinotasikan dengan $G = H$, jika $V(G) = V(H)$ dan $E(G) = E(H)$. Dengan kata lain, graf $G$ identik dengan $H$ jika keduanya memuat himpunan titik yang sama dan memuat himpunan sisi yang sama. Jika $G = H$, maka jelas $G \cong H$. Di lain pihak, jika $G \cong H$, maka belum tentu $G = H$ (Abdussakir, dkk, 2009:27). Pada Gambar 2.8, graf $G$ tidak identik dengan graf $H$, karena $V(G) \neq V(H)$ dan $E(G) \neq E(H)$.

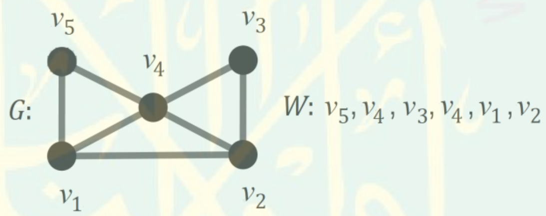
### 2.1.9 Graf Terhubung

#### 2.1.9.1 Jalan

Jalan (*walk*) $u$-$v$ di graf $G$ adalah barisan berhingga (tak kosong). $W: u = u_0 e_1, u_1 e_2, u_2 e_3, \dots, u_{n-1} e_n, u_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang diawali dari titik $u$ dan diakhiri dengan titik $v$, dengan $e_i = u_{i-1} u_i$ untuk $i = 0,1,2, \dots, n$ adalah sisi di $G$. $u_0$ disebut titik awal, $u_n$ disebut titik akhir, $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ disebut titik internal, dan $n$ menyatakan panjang dari $W$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Contoh:

Perhatikan graf $G$ yang memuat himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ berikut ini:




Gambar 2.9 Jalan pada Graf

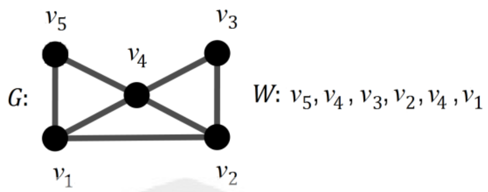
Dari Gambar 2.9 diperoleh $W: v_5, v_4, v_3, v_4, v_1, v_2$ adalah jalan $v_5$-$v_2$ dengan panjang 5.

#### 2.1.9.2 Jejak

Jalan $u$-$v$ yang semua sisinya berbeda disebut jejak (*trail*) $u$-$v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Contoh:

Perhatikan graf $G$ yang memuat himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ berikut ini:




Gambar 2.10 Jejak pada Graf

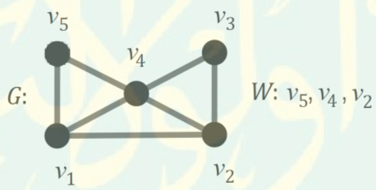
Dari Gambar 2.10 diperoleh $W: v_5, v_4, v_3, v_2, v_4, v_1$ adalah jejak $v_5$-$v_1$.

### 2.1.9.3 Lintasan

Jalan $u$-$v$ yang semua titiknya berbeda disebut lintasan (*path*) $u$-$v$. Dengan demikian semua lintasan adalah jejak (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Contoh:

Perhatikan graf $G$ yang memuat himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ berikut ini:




Gambar 2.11 Lintasan pada Graf

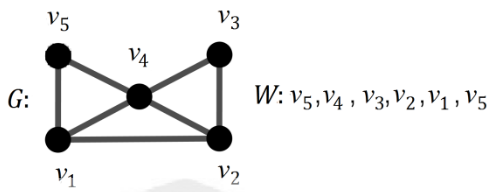
Dari Gambar 2.11 diperoleh $W: v_5, v_4, v_2$ adalah lintasan $v_5$-$v_2$.

### 2.1.9.4 Sirkuit

Jalan tertutup (*closed trail*) dan tak *trivial* pada graf $G$ disebut sirkuit $G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:

Perhatikan graf $G$ yang memuat himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ berikut ini:




Gambar 2.12 Sirkuit pada Graf

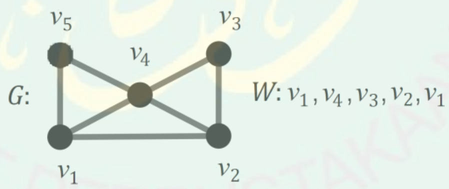
Dari Gambar 2.12diperoleh $W: v_5, v_4, v_3, v_2, v_1, v_5$ adalah sirkuit $v_5$-$v_5$.

**2.1.9.5 Sikel**

Sirkuit $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1 (n \geq 3)$ yang memiliki $n$ titik dengan $v_i$ adalah titik-titik berbeda untuk $1 \leq i \leq n$ disebut sikel (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:

Perhatikan graf $G$ yang memuat himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ berikut ini:




Gambar 2.13 Sikel pada Graf

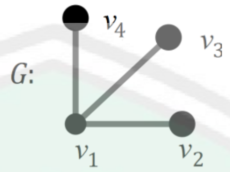
Dari Gambar 2.13 diperoleh $W: v_1, v_4, v_3, v_2, v_1$ adalah sikel $v_1$-$v_1$.

**2.1.9.6 Graf Terhubung**

Misalkan $u$ dan $v$ titik berbeda pada graf $G$. Maka titik $u$ dan $v$ dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u$-$v$ di $G$. Sedangkan suatu graf $G$ dapat dikatakan terhubung, jika untuk setiap 2 titik berbeda $u$ dan $v$ di $G$ terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:

Perhatikan graf $G$ yang memuat himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ berikut ini:




Gambar 2.14 Graf Terhubung

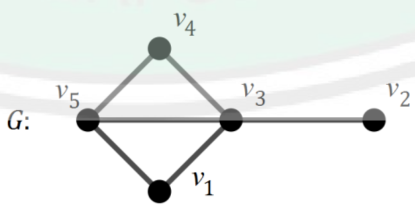
Dari Gambar 2.14 diperoleh titik-titik yang terhubung adalah $v_1$ dan $v_2$, $v_1$ dan $v_3$, $v_1$ dan $v_4$, $v_2$ dan $v_3$, $v_2$ dan $v_4$, serta $v_3$ dan $v_4$ sehingga graf $G$ merupakan graf terhubung.

### 2.1.10 Jarak

Untuk suatu graf terhubung $G$, maka jarak (*distance*) $d(u, v)$ antara dua titik $u$ dan $v$ di $G$ adalah panjang dari lintasan terpendek yang menghubungkan $u$ dan $v$ di $G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

Contoh:

Perhatikan graf $G$ yang memuat himpunan $V = \{v_1, v_2 v_3, v_4, v_5\}$ berikut ini:




Gambar 2.15 Graf ***G*** dengan Order 5

Dari Gambar 2.15 tersebut diperoleh:

$d(v_1, v_2) = 2,\ d(v_1, v_4) = 2,\ d(v_1, v_3) = 1,\ d(v_1, v_5) = 1$

$d(v_2, v_1) = 2,\ d(v_2, v_3) = 1,\ d(v_2, v_4) = 2,\ d(v_2, v_5) = 2$

$d(v_3, v_1) = 1,\ d(v_3, v_2) = 1,\ d(v_3, v_4) = 1,\ d(v_3, v_5) = 1$

$d(v_4, v_1) = 2,\ d(v_4, v_2) = 2,\ d(v_4, v_3) = 1,\ d(v_4, v_5) = 1$

$d(v_5, v_1) = 1,\ d(v_5, v_2) = 2,\ d(v_5, v_3) = 1,\ d(v_5, v_4) = 1.$

### 2.1.11 Eksentrisitas

Eksentrisitas (*eccentricity*) $e(v)$ dari suatu titik $v$ pada graf terhubung $G$ merupakan maksimum $d(u, v), \forall uv \in V(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

Contoh:

Eksentrisitas titik pada graf $G$ di contoh sebelumnya adalah:

$e(v_1) = 2, e(v_2) = 2, e(v_3) = 1, e(v_4) = 2$, dan $e(v_5) = 2$.

## 2.2 Grup

### 2.2.1 Definisi Grup

Misalkan $G$ adalah suatu himpunan tak kosong dengan operasi biner $\cdot$ dinotasikan dengan $(G,\cdot)$ disebut grup jika memenuhi aksioma-aksioma:

1. Untuk setiap $a, b, c \in G$ maka $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ operasi $\cdot$ bersifat assosiatif di $G$.
2. $G$ mempunyai unsur identitas terhadap operasi $\cdot$.

   Misalkan $e$ unsur di $G$ sedemikian hingga $a \cdot e = e \cdot a, \forall a \in G$ maka $e$ disebut unsur identitas.
3. Setiap unsur di $G$ mempunyai invers terhadap operasi $\cdot$, untuk setiap $a \in G$ ada $a^{-1} \in G$ yang disebut sebagai invers dari $a$, sehingga $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$, dengan $e$ adalah unsur identitas (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:31).

Contoh:

$(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup, dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat dan $+$ adalah operasi penjumlahan. Karena $(\mathbb{Z}, +)$ memenuhi:

i. Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$.

   Jadi operasi penjumlahan bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$.

ii. Terdapat $0 \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + 0 = 0 + a = a,\ \forall a \in \mathbb{Z}$.

   Jadi 0 adalah identitas penjumlahan.

iii. Untuk masing-masing $a \in \mathbb{Z}$ ada $(-a) \in \mathbb{Z}$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

   Jadi invers dari $a$ adalah $-a$.

### 2.2.2 Grup Komutatif

Suatu grup $(G,\cdot)$ disebut grup komutatif atau grup abelian jika pada operasi biner $\cdot$ berlaku sifat komutatif, yaitu $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap $a, b, \in G$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:31).

Contoh:

$(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup komutatif, dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat dan $+$ adalah operasi penjumlahan. Diketahui $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup. Misal $x, y \in \mathbb{Z}$, maka $x + y = y + x$.

Jadi, $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup komutatif.

## 2.3 Ring

### 2.3.1 Definisi Ring

Ring adalah struktur yang terdiri dari himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang dilambangkan dengan $(R,*,\cdot)$ yaitu operasi pertama dilambangkan dengan $*$ dan operasi kedua dilambangkan dengan $\cdot$ yang keduanya memenuhi aksioma berikut:

i. $(R,*)$ adalah grup abelian.

ii. Operasi $\cdot$ bersifat asosiatif di $R$.

iii. Operasi $\cdot$ bersifat distributif terhadap $*$ di $R$, baik distributif kiri maupun distributif kanan (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:313).

Contoh:

$(\mathbb{Z},+,\times)$ adalah ring, dengan $\mathbb{Z}$ adalah bilangan bulat, $+$ adalah operasi penjumlahan, dan $\times$ adalah operasi perkalian. Karena $(\mathbb{Z},+,\times)$ memenuhi:

i. $(\mathbb{Z},+)$ adalah grup abelian karena sudah dibuktikan pada contoh sebelumnya.

ii. Operasi $\times$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$.

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c),\ \forall a, b, c \in \mathbb{Z}.$

iii. Operasi $\times$ bersifat distributif terhadap $+$ .

$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z}.$

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z}.$

### 2.3.2 Ring Komutatif

Suatu ring $(R,*,\cdot)$ disebut ring komutatif jika dan hanya jika operasi kedua $(\cdot)$ bersifat komutatif di $R$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:314).

Contoh:

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring komutatif, karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $a \times b = b \times a$, yang berarti operasi kedua $(\times)$ bersifat komutatif di $\mathbb{Z}$.

Jadi, $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring komutatif.

### 2.3.3 Ring dengan Unsur Kesatuan

Suatu ring $(R, *, \cdot)$ disebut ring dengan unsur kesatuan jika dan hanya jika $R$ mempunyai unsur identitas terhadap operasi kedua $(\cdot)$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:314).

Contoh:

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring dengan unsur kesatuan, karena ada $1 \in \mathbb{Z}$ sehingga untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, maka $a \times 1 = 1 \times a = a$, yang berarti terdapat unsur identitas di $\mathbb{Z}$ terhadap operasi kedua $(\times)$.

Jadi, $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring dengan unsur kesatuan.

### 2.3.4 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan

Suatu ring $(R, *, \cdot)$ disebut ring komutatif dengan unsur kesatuan jika dan hanya jika operasi kedua bersifat komutatif dan $R$ mempunyai unsur identitas terhadap operasi kedua yaitu operasi $\cdot$. Dengan kata lain $R$ merupakan ring komutatif sekaligus ring dengan unsur kesatuan (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:314).

Contoh:

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring komutatif sekaligus ring dengan unsur kesatuan, sehingga $(\mathbb{Z}, +, \times)$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan.

**2.4 Ring dengan Pembagi Nol**

Misalkan $(R,*,\cdot)$ adalah ring, jika $a$ dan $b$ keduanya unsur tidak nol di $R$ sehingga $a \cdot b = 0$, maka $a$ dan $b$ disebut pembagi nol (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:314).

Contoh:

Misalkan $(\mathbb{Z}_6, +, \times)$ adalah ring, dengan $\mathbb{Z}_6$ adalah himpunan bilangan bulat modulo 6.

$\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$\bar{0} = \bar{6} = \overline{12} = \overline{18} = \overline{24} = \overline{30}$

$\bar{2}$ merupakan pembagi nol karena terdapat $\bar{3}$ sehingga $\bar{2} \times \bar{3} = \bar{6} = \bar{0}$

$\bar{3}$ merupakan pembagi nol karena terdapat $\bar{2}$ sehingga $\bar{3} \times \bar{2} = \bar{6} = \bar{0}$

$\bar{4}$ merupakan pembagi nol karena terdapat $\bar{3}$ sehingga $\bar{4} \times \bar{3} = \overline{12} = \bar{0}$

Jadi, pembagi nol dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $\bar{2}$, $\bar{3}$, dan $\bar{4}$.

**2.5 Graf Pembagi Nol**

Misalkan $R$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan dan $Z(R)$ adalah himpunan pembagi nol. Graf $\Gamma(R)$ dari $R$ dengan titik-titiknya $Z(R)^* = Z(R) - \{0\}$, yaitu himpunan pembagi nol bukan nol dari $R$, dan $x, y \in Z(R)^*$ terhubung langsung jika dan hanya jika $xy = 0$ (Anderson dan Livingston, 1999).

Contoh:

Ring bilangan bulat modulo 4 ($\mathbb{Z}_4$) dengan anggotanya adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dapat membentuk graf pembagi nol yang berupa sebuah titik, karena pembagi nol dari ring tersebut hanya satu yaitu 2. Sedangkan pada ring bilangan bulat modulo 3

($\mathbb{Z}_3$) dengan anggotanya adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ tidak dapat membentuk graf pembagi nol, karena tidak memiliki pembagi nol.

## 2.6 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua

Indeks eksentrisitas Zagreb pertama $(E_1)$ dan kedua $(E_2)$ didefinisikan sebagai berikut:

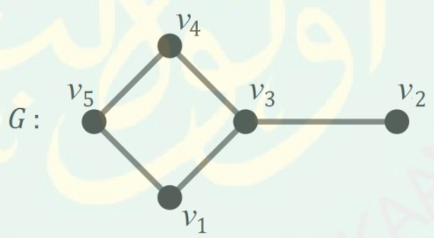
$$E_1 = E_1(G) = \sum_{v \in V(G)} e(v)^2 \text{ dan}$$

$$E_2 = E_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} e(u)e(v),$$

dengan $e(u)$ dan $e(v)$ adalah eksentrisitas dari titik $u$ dan $v$ di $G$ (Vukicevic dan Graovac, 2010:525).

Contoh:

Perhatikan graf $G$ yang memuat himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ seperti berikut:




Gambar 2.16 Graf $\boldsymbol{G}$ untuk Mencari Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua

Dari Gambar 2.16 diperoleh:

$d(v_1, v_2) = 2,\quad d(v_1, v_3) = 1,\quad d(v_1, v_4) = 2,\quad d(v_1, v_5) = 1$

$d(v_2, v_1) = 2,\quad d(v_2, v_3) = 1,\quad d(v_2, v_4) = 2,\quad d(v_2, v_5) = 3$

$d(v_3, v_1) = 1,\quad d(v_3, v_2) = 1,\quad d(v_3, v_4) = 1,\quad d(v_3, v_5) = 2$

$d(v_4, v_1) = 2,\quad d(v_4, v_2) = 2,\quad d(v_4, v_3) = 1,\quad d(v_4, v_5) = 1$

$d(v_5, v_1) = 1,\quad d(v_5, v_2) = 3,\quad d(v_5, v_3) = 2,\quad d(v_5, v_4) = 1$

Eksentrisitas dari graf $G$ pada Gambar 2.16 adalah:

$e(v_1) = 2,\ e(v_2) = 3,\ e(v_3) = 2,\ e(v_4) = 2$, dan $e(v_5) = 3$.

Selanjutnya dihitung nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama dari eksentrisitas tersebut, sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
E_1(G) &= \sum_{v \in V(G)} e(v)^2 \\
&= e^2(v_1) + e^2(v_2) + e^2(v_3) + e^2(v_4) + e^2(v_5) \\
&= 2^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 \\
&= 30
\end{aligned}
$$

Kemudian dihitung nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
E_2(G) &= \sum_{uv \in E(G)} e(u)e(v) \\
&= e(v_1)e(v_2) + e(v_1)e(v_4) + e(v_2)e(v_3) + e(v_3)e(v_4) \\
&\quad + e(v_3)e(v_5) \\
&= 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\
&= 26.
\end{aligned}
$$

## 2.7 Konsep Tolong Menolong dalam Al-Quran

Manusia sebagai makhluk Allah dianjurkan untuk selalu berbuat kebaikan di mana dan kapan pun berada. Dalam Islam antara seorang muslim terhadap muslim lain adalah saudara dan tentunya ada kewajiban yang harus dipenuhi yaitu tidak boleh membuat saudaranya kesusahan, sehingga berkewajiban untuk mempermudah dan menolong urusan saudaranya. Sebagaimana yang termuat dalam al-Quran surat al-Hasyr ayat 9 sebagai berikut:

وَٱلَّذِينَ تَبَوَّءُو ٱلدَّارَ وَٱلۡإِيمَـٰنَ مِن قَبۡلِهِمۡ

"*Dan orang-orang yang telah menempati kota Madinah dan telah beriman (Anshor) sebelum (kedatangan) mereka (Muhajirin)" (QS. al-Hasyr/59:9).*

Menurut tafsir Ibnu Katsir dalam (Ghoffar, dkk, 2004) menjelaskan bahwa mereka telah mendiami negeri Madinah sebelum kaum Muhajirin itu datang dan mereka telah beriman sebelum kebanyakan dari mereka beriman.

Dalam ayat selanjutnya Allah Swt berfirman:

يُحِبُّونَ مَنۡ هَاجَرَ إِلَيۡهِمۡ

*"mereka (Anshor) 'mencintai' orang yang berhijrah kepada mereka (Muhajirin)" (QS. al-Hasyr/59:9).*

Maksudnya, karena kemuliaan dan keagungan jiwa mereka, mereka mencintai kaum Muhajirin dan memberikan bantuan dengan harta benda. Firman Allah selanjutnya:

وَلَا يَجِدُونَ فِي صُدُورِهِمۡ حَاجَةً مِّمَّآ أُوتُواْ

*"dan mereka (Anshor) tiada menaruh keinginan dalam hati mereka terhadap apa-apa yang diberikan kepada mereka (Muhajirin)" (QS. al-Hasyr/59:9).*

Mereka sama sekali tidak menaruh rasa dengki terhadap kaum Muhajirin atas keutamaan yang dikaruniakan Allah kepada mereka berupa kedudukan, kemuliaan dan penyebutan lebih awal, serta urutan (Ghoffar, dkk, 2004).

Allah Swt berfirman dalam ayat selanjutnya:

وَيُؤۡثِرُونَ عَلَىٰٓ أَنفُسِهِمۡ وَلَوۡ كَانَ بِهِمۡ خَصَاصَةٞۚ وَمَن يُوقَ شُحَّ نَفۡسِهِۦ

فَأُوْلَـٰٓئِكَ هُمُ ٱلۡمُفۡلِحُونَ ٩

*"dan mereka mengutamakan (orang-orang muhajirin), atas diri mereka sendiri, sekalipun mereka dalam kesusahan dan siapa yang dipelihara dari kekikiran dirinya, mereka itulah orang orang yang beruntung" (QS. al-Hasyr/59:9).*

Maksudnya, mereka lebih mendahulukan orang-orang yang membutuhkan daripada kebutuhan diri mereka sendiri. Dan mereka memulai dengan orang lain sebelum diri mereka sendiri, meskipun mereka sendiri membutuhkannya. Barangsiapa yang bersih dari sifat kikir, maka dia benar-benar beruntung dan berhasil (Ghoffar, dkk, 2004).

Dari Abu Hurairah, Rasulullah Saw bersabda:

*"Barangsiapa memberikan jalan keluar atas kesusahan dunia yang dihadapi oleh seorang mukmin, maka Allah akan memberinya jalan keluar atas kesusahan yang dihadapinya di hari kiamat kelak. Barangsiapa memudahkan kesulitan seseorang, maka Allah akan memudahkan kesulitannya baik di dunia maupun di akhirat. Allah akan selalu membantu hamba-Nya selama hambanya tersebut membantu saudaranya. Dan barangsiapa melewati jalan untuk mencari ilmu, maka Allah akan memudahkan jalan ke surga baginya" (HR. Muslim dalam Prasetyo, 2014).*

Hadits tersebut menjelaskan bahwa dalam Islam dianjurkan setiap muslim hendaknya dapat saling membantu dan meringankan permasalahan muslim lainnya karena segala sesuatu yang diberikan akan kembali pada diri sendiri dan Allah (HR. Muslim dalam Prasetyo, 2014).

Berdasarkan penjelasan tafsir Ibnu Katsir pada firman Allah Swt surat al-Hasyr ayat 9 dan HR. Muslim dapat dinyatakan dalam konsep teori graf yaitu sebagai umat muslim harus saling tolong menolong dengan meringankan atau mempermudah beban muslim lainnya. Seperti halnya pada konsep teori graf, beberapa permasalahan dapat diselesaikan secara lebih mudah dengan menggunakan graf.

## BAB III

## PEMBAHASAN

### 3.1 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk $p, q$ Bilangan Prima

#### 3.1.1 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}$

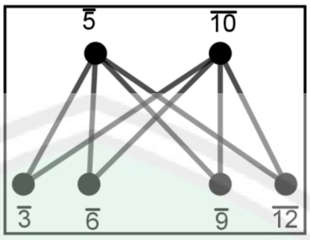
##### 3.1.1.1 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{15}$

Anggota dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{15} = \mathbb{Z}_{3\cdot 5} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{14}\}$. Dua anggota di ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{15}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian dapat disajikan dalam Tabel Cayley berikut:

Tabel 3.1 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{15}$

| $\cdot$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{5}$ | $\overline{6}$ | $\overline{7}$ | $\overline{8}$ | $\overline{9}$ | $\overline{10}$ | $\overline{11}$ | $\overline{12}$ | $\overline{13}$ | $\overline{14}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ |
| $\overline{1}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{5}$ | $\overline{6}$ | $\overline{7}$ | $\overline{8}$ | $\overline{9}$ | $\overline{10}$ | $\overline{11}$ | $\overline{12}$ | $\overline{13}$ | $\overline{14}$ |
| $\overline{2}$ | $\overline{0}$ | $\overline{2}$ | $\overline{4}$ | $\overline{6}$ | $\overline{8}$ | $\overline{10}$ | $\overline{12}$ | $\overline{14}$ | $\overline{1}$ | $\overline{3}$ | $\overline{5}$ | $\overline{7}$ | $\overline{9}$ | $\overline{11}$ | $\overline{13}$ |
| $\overline{3}$ | $\overline{0}$ | $\overline{3}$ | $\overline{6}$ | $\overline{9}$ | $\overline{12}$ | $\overline{0}$ | $\overline{3}$ | $\overline{6}$ | $\overline{9}$ | $\overline{12}$ | $\overline{0}$ | $\overline{3}$ | $\overline{6}$ | $\overline{9}$ | $\overline{12}$ |
| $\overline{4}$ | $\overline{0}$ | $\overline{4}$ | $\overline{8}$ | $\overline{12}$ | $\overline{1}$ | $\overline{5}$ | $\overline{9}$ | $\overline{13}$ | $\overline{2}$ | $\overline{6}$ | $\overline{10}$ | $\overline{14}$ | $\overline{3}$ | $\overline{7}$ | $\overline{11}$ |
| $\overline{5}$ | $\overline{0}$ | $\overline{5}$ | $\overline{10}$ | $\overline{0}$ | $\overline{5}$ | $\overline{10}$ | $\overline{0}$ | $\overline{5}$ | $\overline{10}$ | $\overline{0}$ | $\overline{5}$ | $\overline{10}$ | $\overline{0}$ | $\overline{5}$ | $\overline{10}$ |
| $\overline{6}$ | $\overline{0}$ | $\overline{6}$ | $\overline{12}$ | $\overline{3}$ | $\overline{9}$ | $\overline{0}$ | $\overline{6}$ | $\overline{12}$ | $\overline{3}$ | $\overline{9}$ | $\overline{0}$ | $\overline{6}$ | $\overline{12}$ | $\overline{3}$ | $\overline{9}$ |
| $\overline{7}$ | $\overline{0}$ | $\overline{7}$ | $\overline{14}$ | $\overline{6}$ | $\overline{13}$ | $\overline{5}$ | $\overline{12}$ | $\overline{4}$ | $\overline{11}$ | $\overline{3}$ | $\overline{10}$ | $\overline{2}$ | $\overline{9}$ | $\overline{1}$ | $\overline{8}$ |
| $\overline{8}$ | $\overline{0}$ | $\overline{8}$ | $\overline{1}$ | $\overline{9}$ | $\overline{2}$ | $\overline{10}$ | $\overline{3}$ | $\overline{11}$ | $\overline{4}$ | $\overline{12}$ | $\overline{5}$ | $\overline{13}$ | $\overline{6}$ | $\overline{14}$ | $\overline{7}$ |
| $\overline{9}$ | $\overline{0}$ | $\overline{9}$ | $\overline{3}$ | $\overline{12}$ | $\overline{6}$ | $\overline{0}$ | $\overline{9}$ | $\overline{3}$ | $\overline{12}$ | $\overline{6}$ | $\overline{0}$ | $\overline{9}$ | $\overline{3}$ | $\overline{12}$ | $\overline{6}$ |
| $\overline{10}$ | $\overline{0}$ | $\overline{10}$ | $\overline{5}$ | $\overline{0}$ | $\overline{10}$ | $\overline{5}$ | $\overline{0}$ | $\overline{10}$ | $\overline{5}$ | $\overline{0}$ | $\overline{10}$ | $\overline{5}$ | $\overline{0}$ | $\overline{10}$ | $\overline{5}$ |
| $\overline{11}$ | $\overline{0}$ | $\overline{11}$ | $\overline{7}$ | $\overline{3}$ | $\overline{14}$ | $\overline{10}$ | $\overline{6}$ | $\overline{2}$ | $\overline{13}$ | $\overline{9}$ | $\overline{5}$ | $\overline{1}$ | $\overline{12}$ | $\overline{8}$ | $\overline{4}$ |
| $\overline{12}$ | $\overline{0}$ | $\overline{12}$ | $\overline{9}$ | $\overline{6}$ | $\overline{3}$ | $\overline{0}$ | $\overline{12}$ | $\overline{9}$ | $\overline{6}$ | $\overline{3}$ | $\overline{0}$ | $\overline{12}$ | $\overline{9}$ | $\overline{6}$ | $\overline{3}$ |
| $\overline{13}$ | $\overline{0}$ | $\overline{13}$ | $\overline{11}$ | $\overline{9}$ | $\overline{7}$ | $\overline{5}$ | $\overline{3}$ | $\overline{1}$ | $\overline{14}$ | $\overline{12}$ | $\overline{10}$ | $\overline{8}$ | $\overline{6}$ | $\overline{4}$ | $\overline{2}$ |
| $\overline{14}$ | $\overline{0}$ | $\overline{14}$ | $\overline{13}$ | $\overline{12}$ | $\overline{11}$ | $\overline{10}$ | $\overline{9}$ | $\overline{8}$ | $\overline{7}$ | $\overline{6}$ | $\overline{5}$ | $\overline{4}$ | $\overline{3}$ | $\overline{2}$ | $\overline{1}$ |

Berdasarkan Tabel 3.1 diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{15}) = \{\bar{3}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{12}\}$, sehingga graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{15}$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.1 Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{15})$

Dari Gambar 3.1 diperoleh jarak dari masing-masing titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{15})$ yaitu:

$d(\bar{3}, \bar{6}) = 2$ $\quad d(\bar{3}, \bar{9}) = 2$ $\quad d(\bar{3}, \overline{12}) = 2$ $\quad d(\bar{3}, \bar{5}) = 1$ $\quad d(\bar{3}, \overline{10}) = 1$

$d(\bar{6}, \bar{3}) = 2$ $\quad d(\bar{6}, \bar{9}) = 2$ $\quad d(\bar{6}, \overline{12}) = 2$ $\quad d(\bar{6}, \bar{5}) = 1$ $\quad d(\bar{6}, \overline{10}) = 1$

$d(\bar{9}, \bar{3}) = 2$ $\quad d(\bar{9}, \bar{6}) = 2$ $\quad d(\bar{9}, \overline{12}) = 2$ $\quad d(\bar{9}, \bar{5}) = 1$ $\quad d(\bar{9}, \overline{10}) = 1$

$d(\overline{12}, \bar{3}) = 2$ $\quad d(\overline{12}, \bar{6}) = 2$ $\quad d(\overline{12}, \bar{9}) = 2$ $\quad d(\overline{12}, \bar{5}) = 1$ $\quad d(\overline{12}, \overline{10}) = 1$

$d(\bar{5}, \bar{3}) = 1$ $\quad d(\bar{5}, \bar{6}) = 1$ $\quad d(\bar{5}, \bar{9}) = 1$ $\quad d(\bar{5}, \overline{12}) = 1$ $\quad d(\bar{5}, \overline{10}) = 2$

$d(\overline{10}, \bar{3}) = 1$ $\quad d(\overline{10}, \bar{6}) = 1$ $\quad d(\overline{10}, \bar{9}) = 1$ $\quad d(\overline{10}, \overline{12}) = 1$ $\quad d(\overline{10}, \bar{5}) = 2$

Selanjutnya diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik yaitu:

$e(\bar{3}) = 2$ $\quad e(\bar{6}) = 2$ $\quad e(\bar{9}) = 2$

$e(\overline{12}) = 2$ $\quad e(\bar{5}) = 2$ $\quad e(\overline{10}) = 2$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{15})$ sebagai berikut:

$$E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{15})) = \sum_{v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{15}))} e(v)^2$$

$$= e(\bar{3})^2 + e(\bar{5})^2 + e(\bar{6})^2 + e(\bar{9})^2 + e(\overline{10})^2 + e(\overline{12})^2$$

$= 2^2 \cdot 6$

$= 24$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{15})$ sebagai berikut:

$$E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{15})) = \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{15}))} e(u)e(v)$$

$$= e(\bar{5})e(\bar{3}) + e(\bar{5})e(\bar{6}) + e(\bar{5})e(\bar{9}) + e(\bar{5})e(\overline{12})$$

$$+e(\overline{10})e(\bar{3}) + e(\overline{10})e(\bar{6}) + e(\overline{10})e(\bar{9}) + e(\overline{10})e(\overline{12})$$

$$= (2 \cdot 2) \cdot 8$$

$$= 32.$$

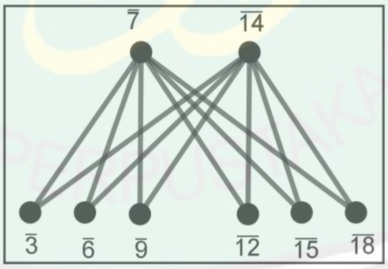
**3.1.1.2 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{21}$**

Anggota dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{21} = \mathbb{Z}_{3\cdot 7} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{20}\}$. Dua anggota di ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{21}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian dapat disajikan dalam Tabel Cayley berikut:

Tabel 3.2 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{\mathbf{21}}$

| $\cdot$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{5}$ | $\overline{6}$ | $\overline{7}$ | $\overline{8}$ | $\overline{9}$ | $\overline{10}$ | $\overline{11}$ | $\overline{12}$ | $\overline{13}$ | $\overline{14}$ | $\overline{15}$ | $\overline{16}$ | $\overline{17}$ | $\overline{18}$ | $\overline{19}$ | $\overline{20}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ |
| $\overline{1}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{5}$ | $\overline{6}$ | $\overline{7}$ | $\overline{8}$ | $\overline{9}$ | $\overline{10}$ | $\overline{11}$ | $\overline{12}$ | $\overline{13}$ | $\overline{14}$ | $\overline{15}$ | $\overline{16}$ | $\overline{17}$ | $\overline{18}$ | $\overline{19}$ | $\overline{20}$ |
| $\overline{2}$ | $\overline{0}$ | $\overline{2}$ | $\overline{4}$ | $\overline{6}$ | $\overline{8}$ | $\overline{10}$ | $\overline{12}$ | $\overline{14}$ | $\overline{16}$ | $\overline{18}$ | $\overline{20}$ | $\overline{1}$ | $\overline{3}$ | $\overline{5}$ | $\overline{7}$ | $\overline{9}$ | $\overline{11}$ | $\overline{13}$ | $\overline{15}$ | $\overline{17}$ | $\overline{19}$ |
| $\overline{3}$ | $\overline{0}$ | $\overline{3}$ | $\overline{6}$ | $\overline{9}$ | $\overline{12}$ | $\overline{15}$ | $\overline{18}$ | $\overline{0}$ | $\overline{3}$ | $\overline{6}$ | $\overline{9}$ | $\overline{12}$ | $\overline{15}$ | $\overline{18}$ | $\overline{0}$ | $\overline{3}$ | $\overline{6}$ | $\overline{9}$ | $\overline{12}$ | $\overline{15}$ | $\overline{18}$ |
| $\overline{4}$ | $\overline{0}$ | $\overline{4}$ | $\overline{8}$ | $\overline{12}$ | $\overline{16}$ | $\overline{20}$ | $\overline{3}$ | $\overline{7}$ | $\overline{11}$ | $\overline{15}$ | $\overline{19}$ | $\overline{2}$ | $\overline{6}$ | $\overline{10}$ | $\overline{14}$ | $\overline{18}$ | $\overline{1}$ | $\overline{5}$ | $\overline{9}$ | $\overline{13}$ | $\overline{17}$ |
| $\overline{5}$ | $\overline{0}$ | $\overline{5}$ | $\overline{10}$ | $\overline{15}$ | $\overline{20}$ | $\overline{4}$ | $\overline{9}$ | $\overline{14}$ | $\overline{19}$ | $\overline{3}$ | $\overline{8}$ | $\overline{13}$ | $\overline{18}$ | $\overline{2}$ | $\overline{7}$ | $\overline{12}$ | $\overline{17}$ | $\overline{1}$ | $\overline{6}$ | $\overline{11}$ | $\overline{16}$ |
| $\overline{6}$ | $\overline{0}$ | $\overline{6}$ | $\overline{12}$ | $\overline{18}$ | $\overline{3}$ | $\overline{9}$ | $\overline{15}$ | $\overline{0}$ | $\overline{6}$ | $\overline{12}$ | $\overline{18}$ | $\overline{3}$ | $\overline{9}$ | $\overline{15}$ | $\overline{0}$ | $\overline{6}$ | $\overline{12}$ | $\overline{18}$ | $\overline{3}$ | $\overline{9}$ | $\overline{15}$ |
| $\overline{7}$ | $\overline{0}$ | $\overline{7}$ | $\overline{14}$ | $\overline{0}$ | $\overline{7}$ | $\overline{14}$ | $\overline{0}$ | $\overline{7}$ | $\overline{14}$ | $\overline{0}$ | $\overline{7}$ | $\overline{14}$ | $\overline{0}$ | $\overline{7}$ | $\overline{14}$ | $\overline{0}$ | $\overline{7}$ | $\overline{14}$ | $\overline{0}$ | $\overline{7}$ | $\overline{14}$ |
| $\overline{8}$ | $\overline{0}$ | $\overline{8}$ | $\overline{16}$ | $\overline{3}$ | $\overline{11}$ | $\overline{19}$ | $\overline{6}$ | $\overline{14}$ | $\overline{1}$ | $\overline{9}$ | $\overline{17}$ | $\overline{4}$ | $\overline{12}$ | $\overline{20}$ | $\overline{7}$ | $\overline{15}$ | $\overline{2}$ | $\overline{10}$ | $\overline{18}$ | $\overline{5}$ | $\overline{13}$ |
| $\overline{9}$ | $\overline{0}$ | $\overline{9}$ | $\overline{18}$ | $\overline{6}$ | $\overline{15}$ | $\overline{3}$ | $\overline{12}$ | $\overline{0}$ | $\overline{9}$ | $\overline{18}$ | $\overline{6}$ | $\overline{15}$ | $\overline{3}$ | $\overline{12}$ | $\overline{0}$ | $\overline{9}$ | $\overline{18}$ | $\overline{6}$ | $\overline{15}$ | $\overline{3}$ | $\overline{12}$ |
| $\overline{10}$ | $\overline{0}$ | $\overline{10}$ | $\overline{20}$ | $\overline{9}$ | $\overline{19}$ | $\overline{8}$ | $\overline{18}$ | $\overline{7}$ | $\overline{17}$ | $\overline{6}$ | $\overline{16}$ | $\overline{5}$ | $\overline{15}$ | $\overline{4}$ | $\overline{14}$ | $\overline{3}$ | $\overline{13}$ | $\overline{2}$ | $\overline{12}$ | $\overline{1}$ | $\overline{11}$ |
| $\overline{11}$ | $\overline{0}$ | $\overline{11}$ | $\overline{1}$ | $\overline{12}$ | $\overline{2}$ | $\overline{13}$ | $\overline{3}$ | $\overline{14}$ | $\overline{4}$ | $\overline{15}$ | $\overline{5}$ | $\overline{16}$ | $\overline{6}$ | $\overline{17}$ | $\overline{7}$ | $\overline{18}$ | $\overline{8}$ | $\overline{19}$ | $\overline{9}$ | $\overline{20}$ | $\overline{10}$ |
| $\overline{12}$ | $\overline{0}$ | $\overline{12}$ | $\overline{3}$ | $\overline{15}$ | $\overline{6}$ | $\overline{18}$ | $\overline{9}$ | $\overline{0}$ | $\overline{12}$ | $\overline{3}$ | $\overline{15}$ | $\overline{6}$ | $\overline{18}$ | $\overline{9}$ | $\overline{0}$ | $\overline{12}$ | $\overline{3}$ | $\overline{15}$ | $\overline{6}$ | $\overline{18}$ | $\overline{9}$ |
| $\overline{13}$ | $\overline{0}$ | $\overline{13}$ | $\overline{5}$ | $\overline{18}$ | $\overline{10}$ | $\overline{2}$ | $\overline{15}$ | $\overline{7}$ | $\overline{20}$ | $\overline{12}$ | $\overline{4}$ | $\overline{17}$ | $\overline{9}$ | $\overline{1}$ | $\overline{14}$ | $\overline{6}$ | $\overline{19}$ | $\overline{11}$ | $\overline{3}$ | $\overline{16}$ | $\overline{8}$ |
| $\overline{14}$ | $\overline{0}$ | $\overline{14}$ | $\overline{7}$ | $\overline{0}$ | $\overline{14}$ | $\overline{7}$ | $\overline{0}$ | $\overline{14}$ | $\overline{7}$ | $\overline{0}$ | $\overline{14}$ | $\overline{7}$ | $\overline{0}$ | $\overline{14}$ | $\overline{7}$ | $\overline{0}$ | $\overline{14}$ | $\overline{7}$ | $\overline{0}$ | $\overline{14}$ | $\overline{7}$ |
| $\overline{15}$ | $\overline{0}$ | $\overline{15}$ | $\overline{9}$ | $\overline{3}$ | $\overline{18}$ | $\overline{12}$ | $\overline{6}$ | $\overline{0}$ | $\overline{15}$ | $\overline{9}$ | $\overline{3}$ | $\overline{18}$ | $\overline{12}$ | $\overline{6}$ | $\overline{0}$ | $\overline{15}$ | $\overline{9}$ | $\overline{3}$ | $\overline{18}$ | $\overline{12}$ | $\overline{6}$ |
| $\overline{16}$ | $\overline{0}$ | $\overline{16}$ | $\overline{11}$ | $\overline{6}$ | $\overline{1}$ | $\overline{17}$ | $\overline{12}$ | $\overline{7}$ | $\overline{2}$ | $\overline{18}$ | $\overline{13}$ | $\overline{8}$ | $\overline{3}$ | $\overline{19}$ | $\overline{14}$ | $\overline{9}$ | $\overline{4}$ | $\overline{20}$ | $\overline{15}$ | $\overline{10}$ | $\overline{5}$ |
| $\overline{17}$ | $\overline{0}$ | $\overline{17}$ | $\overline{13}$ | $\overline{9}$ | $\overline{5}$ | $\overline{1}$ | $\overline{18}$ | $\overline{14}$ | $\overline{10}$ | $\overline{6}$ | $\overline{2}$ | $\overline{19}$ | $\overline{15}$ | $\overline{11}$ | $\overline{7}$ | $\overline{3}$ | $\overline{20}$ | $\overline{16}$ | $\overline{12}$ | $\overline{8}$ | $\overline{4}$ |
| $\overline{18}$ | $\overline{0}$ | $\overline{18}$ | $\overline{15}$ | $\overline{12}$ | $\overline{9}$ | $\overline{6}$ | $\overline{3}$ | $\overline{0}$ | $\overline{18}$ | $\overline{15}$ | $\overline{12}$ | $\overline{9}$ | $\overline{6}$ | $\overline{3}$ | $\overline{0}$ | $\overline{18}$ | $\overline{15}$ | $\overline{12}$ | $\overline{9}$ | $\overline{6}$ | $\overline{3}$ |
| $\overline{19}$ | $\overline{0}$ | $\overline{19}$ | $\overline{17}$ | $\overline{15}$ | $\overline{13}$ | $\overline{11}$ | $\overline{9}$ | $\overline{7}$ | $\overline{5}$ | $\overline{3}$ | $\overline{1}$ | $\overline{20}$ | $\overline{18}$ | $\overline{16}$ | $\overline{14}$ | $\overline{12}$ | $\overline{10}$ | $\overline{8}$ | $\overline{6}$ | $\overline{4}$ | $\overline{2}$ |
| $\overline{20}$ | $\overline{0}$ | $\overline{20}$ | $\overline{19}$ | $\overline{18}$ | $\overline{17}$ | $\overline{16}$ | $\overline{15}$ | $\overline{14}$ | $\overline{13}$ | $\overline{12}$ | $\overline{11}$ | $\overline{10}$ | $\overline{9}$ | $\overline{8}$ | $\overline{7}$ | $\overline{6}$ | $\overline{5}$ | $\overline{4}$ | $\overline{3}$ | $\overline{2}$ | $\overline{1}$ |

Berdasarkan Tabel 3.2 diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{21}) = \{\overline{3}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{18}\}$, sehingga graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{21}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.2 Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{21})$

Dari Gambar 3.2 diperoleh jarak dari masing-masing titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{21})$ sebagai berikut:

$d(\overline{3}, \overline{6}) = 2$ $\quad d(\overline{6}, \overline{3}) = 2$ $\quad d(\overline{9}, \overline{3}) = 2$ $\quad d(\overline{12}, \overline{3}) = 2$ $\quad d(\overline{15}, \overline{3}) = 2$

$d(\overline{3}, \overline{9}) = 2$ $\quad d(\overline{6}, \overline{9}) = 2$ $\quad d(\overline{9}, \overline{6}) = 2$ $\quad d(\overline{12}, \overline{6}) = 2$ $\quad d(\overline{15}, \overline{6}) = 2$

$d(\bar{3},\overline{12}) = 2$ $d(\bar{6},\overline{12}) = 2$ $d(\bar{9},\overline{12}) = 2$ $d(\overline{12},\bar{9}) = 2$ $d(\overline{15},\bar{9}) = 2$

$d(\bar{3},\overline{15}) = 2$ $d(\bar{6},\overline{15}) = 2$ $d(\bar{9},\overline{15}) = 2$ $d(\overline{12},\overline{15}) = 2$ $d(\overline{15},\overline{12}) = 2$

$d(\bar{3},\overline{18}) = 2$ $d(\bar{6},\overline{18}) = 2$ $d(\bar{9},\overline{18}) = 2$ $d(\overline{12},\overline{18}) = 2$ $d(\overline{15},\overline{18}) = 2$

$d(\bar{3},\bar{7}) = 1$ $d(\bar{6},\bar{7}) = 1$ $d(\bar{9},\bar{7}) = 1$ $d(\overline{12},\bar{7}) = 1$ $d(\overline{15},\bar{7}) = 1$

$d(\bar{3},\overline{14}) = 1$ $d(\bar{6},\overline{14}) = 1$ $d(\bar{9},\overline{14}) = 1$ $d(\overline{12},\overline{14}) = 1$ $d(\overline{15},\overline{14}) = 1$

$d(\overline{18},\bar{3}) = 2$ $d(\bar{7},\bar{3}) = 1$ $d(\overline{14},\bar{3}) = 1$

$d(\overline{18},\bar{7}) = 2$ $d(\bar{7},\bar{6}) = 1$ $d(\overline{14},\bar{6}) = 1$

$d(\overline{18},\overline{14}) = 2$ $d(\bar{7},\bar{9}) = 1$ $d(\overline{14},\bar{9}) = 1$

$d(\overline{18},\overline{12}) = 2$ $d(\bar{7},\overline{12}) = 1$ $d(\overline{14},\overline{12}) = 1$

$d(\overline{18},\overline{15}) = 2$ $d(\bar{7},\overline{15}) = 1$ $d(\overline{14},\overline{15}) = 1$

$d(\overline{18},\bar{7}) = 1$ $d(\bar{7},\overline{18}) = 1$ $d(\overline{14},\overline{18}) = 1$

$d(\overline{18},\overline{14}) = 1$ $d(\bar{7},\overline{14}) = 2$ $d(\overline{14},\bar{7}) = 2$

Selanjutnya diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik yaitu:

$e(\bar{3}) = 2$ $e(\bar{6}) = 2$ $e(\bar{9}) = 2$ $e(\overline{12}) = 2$

$e(\overline{15}) = 2$ $e(\overline{18}) = 2$ $e(\bar{7}) = 2$ $e(\overline{14}) = 2$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{21})$ sebagai berikut:

$$E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{21})) = \sum_{v\in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{21}))} e(v)^2$$

$$= e(\bar{3})^2 + e(\bar{6})^2 + e(\bar{7})^2 + e(\bar{9})^2 + e(\overline{10})^2 + e(\overline{12})^2 + e(\overline{15})^2$$

$$+e(\overline{18})^2$$

$$= 2^2 \cdot 8$$

$$= 32$$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{21})$ sebagai berikut:

$$E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{21})) = \sum_{uv\in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{21}))} e(u)e(v)$$

$$= e(\bar{7})e(\bar{3}) + e(\bar{7})e(\bar{6}) + e(\bar{7})e(\bar{9}) + e(\bar{7})e(\overline{12})$$

$$+e(\bar{7})e(\overline{15}) + e(\bar{7})e(\overline{18}) + e(\overline{14})e(\bar{3}) + e(\overline{14})e(\bar{6})$$

$$+e(\overline{14})e(\bar{9}) + e(\overline{14})e(\overline{12}) + e(\overline{14})e(\overline{15}) + e(\overline{14})e(\overline{18})$$

$$= (2 \cdot 2) \cdot 12$$

$$= 48.$$

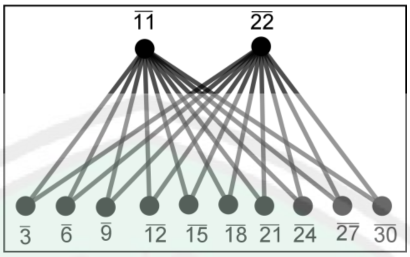
**3.1.1.3 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{33}$**

Anggota dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{33} = \mathbb{Z}_{3\cdot 11} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{32}\}$. Dua anggota di ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{33}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian dapat disajikan dalam Tabel Cayley berikut:

Tabel 3.3 Tabel Cayley Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{33}$

| · | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{5}$ | $\overline{6}$ | $\overline{7}$ | $\overline{8}$ | $\overline{9}$ | $\overline{10}$ | $\overline{11}$ | $\overline{12}$ | $\overline{13}$ | $\overline{14}$ | $\overline{15}$ | $\overline{16}$ | $\overline{17}$ | $\overline{18}$ | $\overline{19}$ | $\overline{20}$ | $\overline{21}$ | $\overline{22}$ | $\overline{23}$ | $\overline{24}$ | $\overline{25}$ | $\overline{26}$ | $\overline{27}$ | $\overline{28}$ | $\overline{29}$ | $\overline{30}$ | $\overline{31}$ | $\overline{32}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ | $\overline{0}$ |
| $\overline{1}$ | $\overline{0}$ | $\overline{1}$ | $\overline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\overline{5}$ | $\overline{6}$ | $\overline{7}$ | $\overline{8}$ | $\overline{9}$ | $\overline{10}$ | $\overline{11}$ | $\overline{12}$ | $\overline{13}$ | $\overline{14}$ | $\overline{15}$ | $\overline{16}$ | $\overline{17}$ | $\overline{18}$ | $\overline{19}$ | $\overline{20}$ | $\overline{21}$ | $\overline{22}$ | $\overline{23}$ | $\overline{24}$ | $\overline{25}$ | $\overline{26}$ | $\overline{27}$ | $\overline{28}$ | $\overline{29}$ | $\overline{30}$ | $\overline{31}$ | $\overline{32}$ |
| $\overline{2}$ | $\overline{0}$ | $\overline{2}$ | $\overline{4}$ | $\overline{6}$ | $\overline{8}$ | $\overline{10}$ | $\overline{12}$ | $\overline{14}$ | $\overline{16}$ | $\overline{18}$ | $\overline{20}$ | $\overline{22}$ | $\overline{24}$ | $\overline{26}$ | $\overline{28}$ | $\overline{30}$ | $\overline{32}$ | $\overline{1}$ | $\overline{3}$ | $\overline{5}$ | $\overline{7}$ | $\overline{9}$ | $\overline{11}$ | $\overline{13}$ | $\overline{15}$ | $\overline{17}$ | $\overline{19}$ | $\overline{21}$ | $\overline{23}$ | $\overline{25}$ | $\overline{27}$ | $\overline{29}$ | $\overline{31}$ |
| $\overline{3}$ | $\overline{0}$ | $\overline{3}$ | $\overline{6}$ | $\overline{9}$ | $\overline{12}$ | $\overline{15}$ | $\overline{18}$ | $\overline{21}$ | $\overline{24}$ | $\overline{27}$ | $\overline{30}$ | $\overline{0}$ | $\overline{3}$ | $\overline{6}$ | $\overline{9}$ | $\overline{12}$ | $\overline{15}$ | $\overline{18}$ | $\overline{21}$ | $\overline{24}$ | $\overline{27}$ | $\overline{30}$ | $\overline{0}$ | $\overline{3}$ | $\overline{6}$ | $\overline{9}$ | $\overline{12}$ | $\overline{15}$ | $\overline{18}$ | $\overline{21}$ | $\overline{24}$ | $\overline{27}$ | $\overline{30}$ |
| $\overline{4}$ | $\overline{0}$ | $\overline{4}$ | $\overline{8}$ | $\overline{12}$ | $\overline{16}$ | $\overline{20}$ | $\overline{24}$ | $\overline{28}$ | $\overline{32}$ | $\overline{3}$ | $\overline{7}$ | $\overline{11}$ | $\overline{15}$ | $\overline{19}$ | $\overline{23}$ | $\overline{27}$ | $\overline{31}$ | $\overline{2}$ | $\overline{6}$ | $\overline{10}$ | $\overline{14}$ | $\overline{18}$ | $\overline{22}$ | $\overline{26}$ | $\overline{30}$ | $\overline{1}$ | $\overline{5}$ | $\overline{9}$ | $\overline{13}$ | $\overline{17}$ | $\overline{21}$ | $\overline{25}$ | $\overline{29}$ |
| $\overline{5}$ | $\overline{0}$ | $\overline{5}$ | $\overline{10}$ | $\overline{15}$ | $\overline{20}$ | $\overline{25}$ | $\overline{30}$ | $\overline{2}$ | $\overline{7}$ | $\overline{12}$ | $\overline{17}$ | $\overline{22}$ | $\overline{27}$ | $\overline{32}$ | $\overline{4}$ | $\overline{9}$ | $\overline{14}$ | $\overline{19}$ | $\overline{24}$ | $\overline{29}$ | $\overline{1}$ | $\overline{6}$ | $\overline{11}$ | $\overline{16}$ | $\overline{21}$ | $\overline{26}$ | $\overline{31}$ | $\overline{3}$ | $\overline{8}$ | $\overline{13}$ | $\overline{18}$ | $\overline{23}$ | $\overline{28}$ |
| $\overline{6}$ | $\overline{0}$ | $\overline{6}$ | $\overline{12}$ | $\overline{18}$ | $\overline{24}$ | $\overline{30}$ | $\overline{3}$ | $\overline{9}$ | $\overline{15}$ | $\overline{21}$ | $\overline{27}$ | $\overline{0}$ | $\overline{6}$ | $\overline{12}$ | $\overline{18}$ | $\overline{24}$ | $\overline{30}$ | $\overline{3}$ | $\overline{9}$ | $\overline{15}$ | $\overline{21}$ | $\overline{27}$ | $\overline{0}$ | $\overline{6}$ | $\overline{12}$ | $\overline{18}$ | $\overline{24}$ | $\overline{30}$ | $\overline{3}$ | $\overline{9}$ | $\overline{15}$ | $\overline{21}$ | $\overline{27}$ |
| $\overline{7}$ | $\overline{0}$ | $\overline{7}$ | $\overline{14}$ | $\overline{21}$ | $\overline{28}$ | $\overline{2}$ | $\overline{9}$ | $\overline{16}$ | $\overline{23}$ | $\overline{30}$ | $\overline{4}$ | $\overline{11}$ | $\overline{18}$ | $\overline{25}$ | $\overline{32}$ | $\overline{6}$ | $\overline{13}$ | $\overline{20}$ | $\overline{27}$ | $\overline{1}$ | $\overline{8}$ | $\overline{15}$ | $\overline{22}$ | $\overline{29}$ | $\overline{3}$ | $\overline{10}$ | $\overline{17}$ | $\overline{24}$ | $\overline{31}$ | $\overline{5}$ | $\overline{12}$ | $\overline{19}$ | $\overline{26}$ |
| $\overline{8}$ | $\overline{0}$ | $\overline{8}$ | $\overline{16}$ | $\overline{24}$ | $\overline{32}$ | $\overline{7}$ | $\overline{15}$ | $\overline{23}$ | $\overline{31}$ | $\overline{6}$ | $\overline{14}$ | $\overline{22}$ | $\overline{30}$ | $\overline{5}$ | $\overline{13}$ | $\overline{21}$ | $\overline{29}$ | $\overline{4}$ | $\overline{12}$ | $\overline{20}$ | $\overline{28}$ | $\overline{3}$ | $\overline{11}$ | $\overline{19}$ | $\overline{27}$ | $\overline{2}$ | $\overline{10}$ | $\overline{18}$ | $\overline{26}$ | $\overline{1}$ | $\overline{9}$ | $\overline{17}$ | $\overline{25}$ |
| $\overline{9}$ | $\overline{0}$ | $\overline{9}$ | $\overline{18}$ | $\overline{27}$ | $\overline{3}$ | $\overline{12}$ | $\overline{21}$ | $\overline{30}$ | $\overline{6}$ | $\overline{15}$ | $\overline{24}$ | $\overline{0}$ | $\overline{9}$ | $\overline{18}$ | $\overline{27}$ | $\overline{3}$ | $\overline{12}$ | $\overline{21}$ | $\overline{30}$ | $\overline{6}$ | $\overline{15}$ | $\overline{24}$ | $\overline{0}$ | $\overline{9}$ | $\overline{18}$ | $\overline{27}$ | $\overline{3}$ | $\overline{12}$ | $\overline{21}$ | $\overline{30}$ | $\overline{6}$ | $\overline{15}$ | $\overline{24}$ |
| $\overline{10}$ | $\overline{0}$ | $\overline{10}$ | $\overline{20}$ | $\overline{30}$ | $\overline{7}$ | $\overline{17}$ | $\overline{27}$ | $\overline{4}$ | $\overline{14}$ | $\overline{24}$ | $\overline{1}$ | $\overline{11}$ | $\overline{21}$ | $\overline{31}$ | $\overline{8}$ | $\overline{18}$ | $\overline{28}$ | $\overline{5}$ | $\overline{15}$ | $\overline{25}$ | $\overline{2}$ | $\overline{12}$ | $\overline{22}$ | $\overline{32}$ | $\overline{9}$ | $\overline{19}$ | $\overline{29}$ | $\overline{6}$ | $\overline{16}$ | $\overline{26}$ | $\overline{3}$ | $\overline{13}$ | $\overline{23}$ |
| $\overline{11}$ | $\overline{0}$ | $\overline{11}$ | $\overline{22}$ | $\overline{0}$ | $\overline{11}$ | $\overline{22}$ | $\overline{0}$ | $\overline{11}$ | $\overline{22}$ | $\overline{0}$ | $\overline{11}$ | $\overline{22}$ | $\overline{0}$ | $\overline{11}$ | $\overline{22}$ | $\overline{0}$ | $\overline{11}$ | $\overline{22}$ | $\overline{0}$ | $\overline{11}$ | $\overline{22}$ | $\overline{0}$ | $\overline{11}$ | $\overline{22}$ | $\overline{0}$ | $\overline{11}$ | $\overline{22}$ | $\overline{0}$ | $\overline{11}$ | $\overline{22}$ | $\overline{0}$ | $\overline{11}$ | $\overline{22}$ |
| $\overline{12}$ | $\overline{0}$ | $\overline{12}$ | $\overline{24}$ | $\overline{3}$ | $\overline{15}$ | $\overline{27}$ | $\overline{6}$ | $\overline{18}$ | $\overline{30}$ | $\overline{9}$ | $\overline{21}$ | $\overline{0}$ | $\overline{12}$ | $\overline{24}$ | $\overline{3}$ | $\overline{15}$ | $\overline{27}$ | $\overline{6}$ | $\overline{18}$ | $\overline{30}$ | $\overline{9}$ | $\overline{21}$ | $\overline{0}$ | $\overline{12}$ | $\overline{24}$ | $\overline{3}$ | $\overline{15}$ | $\overline{27}$ | $\overline{6}$ | $\overline{18}$ | $\overline{30}$ | $\overline{9}$ | $\overline{21}$ |
| $\overline{13}$ | $\overline{0}$ | $\overline{13}$ | $\overline{26}$ | $\overline{6}$ | $\overline{19}$ | $\overline{32}$ | $\overline{12}$ | $\overline{25}$ | $\overline{5}$ | $\overline{18}$ | $\overline{31}$ | $\overline{11}$ | $\overline{24}$ | $\overline{4}$ | $\overline{17}$ | $\overline{30}$ | $\overline{10}$ | $\overline{23}$ | $\overline{3}$ | $\overline{16}$ | $\overline{29}$ | $\overline{9}$ | $\overline{22}$ | $\overline{2}$ | $\overline{15}$ | $\overline{28}$ | $\overline{8}$ | $\overline{21}$ | $\overline{1}$ | $\overline{14}$ | $\overline{27}$ | $\overline{7}$ | $\overline{20}$ |
| $\overline{14}$ | $\overline{0}$ | $\overline{14}$ | $\overline{28}$ | $\overline{9}$ | $\overline{23}$ | $\overline{4}$ | $\overline{18}$ | $\overline{32}$ | $\overline{13}$ | $\overline{27}$ | $\overline{8}$ | $\overline{22}$ | $\overline{3}$ | $\overline{17}$ | $\overline{31}$ | $\overline{12}$ | $\overline{26}$ | $\overline{7}$ | $\overline{21}$ | $\overline{2}$ | $\overline{16}$ | $\overline{30}$ | $\overline{11}$ | $\overline{25}$ | $\overline{6}$ | $\overline{20}$ | $\overline{1}$ | $\overline{15}$ | $\overline{29}$ | $\overline{10}$ | $\overline{24}$ | $\overline{5}$ | $\overline{19}$ |
| $\overline{15}$ | $\overline{0}$ | $\overline{15}$ | $\overline{30}$ | $\overline{12}$ | $\overline{27}$ | $\overline{9}$ | $\overline{24}$ | $\overline{6}$ | $\overline{21}$ | $\overline{3}$ | $\overline{18}$ | $\overline{0}$ | $\overline{15}$ | $\overline{30}$ | $\overline{12}$ | $\overline{27}$ | $\overline{9}$ | $\overline{24}$ | $\overline{6}$ | $\overline{21}$ | $\overline{3}$ | $\overline{18}$ | $\overline{0}$ | $\overline{15}$ | $\overline{30}$ | $\overline{12}$ | $\overline{27}$ | $\overline{9}$ | $\overline{24}$ | $\overline{6}$ | $\overline{21}$ | $\overline{3}$ | $\overline{18}$ |
| $\overline{16}$ | $\overline{0}$ | $\overline{16}$ | $\overline{32}$ | $\overline{15}$ | $\overline{31}$ | $\overline{14}$ | $\overline{30}$ | $\overline{13}$ | $\overline{29}$ | $\overline{12}$ | $\overline{28}$ | $\overline{11}$ | $\overline{27}$ | $\overline{10}$ | $\overline{26}$ | $\overline{9}$ | $\overline{25}$ | $\overline{8}$ | $\overline{24}$ | $\overline{7}$ | $\overline{23}$ | $\overline{6}$ | $\overline{22}$ | $\overline{5}$ | $\overline{21}$ | $\overline{4}$ | $\overline{20}$ | $\overline{3}$ | $\overline{19}$ | $\overline{2}$ | $\overline{18}$ | $\overline{1}$ | $\overline{17}$ |
| $\overline{17}$ | $\overline{0}$ | $\overline{17}$ | $\overline{1}$ | $\overline{18}$ | $\overline{2}$ | $\overline{19}$ | $\overline{3}$ | $\overline{20}$ | $\overline{4}$ | $\overline{21}$ | $\overline{5}$ | $\overline{22}$ | $\overline{6}$ | $\overline{23}$ | $\overline{7}$ | $\overline{24}$ | $\overline{8}$ | $\overline{25}$ | $\overline{9}$ | $\overline{26}$ | $\overline{10}$ | $\overline{27}$ | $\overline{11}$ | $\overline{28}$ | $\overline{12}$ | $\overline{29}$ | $\overline{13}$ | $\overline{30}$ | $\overline{14}$ | $\overline{31}$ | $\overline{15}$ | $\overline{32}$ | $\overline{16}$ |
| $\overline{18}$ | $\overline{0}$ | $\overline{18}$ | $\overline{3}$ | $\overline{21}$ | $\overline{6}$ | $\overline{24}$ | $\overline{9}$ | $\overline{27}$ | $\overline{12}$ | $\overline{30}$ | $\overline{15}$ | $\overline{0}$ | $\overline{18}$ | $\overline{3}$ | $\overline{21}$ | $\overline{6}$ | $\overline{24}$ | $\overline{9}$ | $\overline{27}$ | $\overline{12}$ | $\overline{30}$ | $\overline{15}$ | $\overline{0}$ | $\overline{18}$ | $\overline{3}$ | $\overline{21}$ | $\overline{6}$ | $\overline{24}$ | $\overline{9}$ | $\overline{27}$ | $\overline{12}$ | $\overline{30}$ | $\overline{15}$ |
| $\overline{19}$ | $\overline{0}$ | $\overline{19}$ | $\overline{5}$ | $\overline{24}$ | $\overline{10}$ | $\overline{29}$ | $\overline{15}$ | $\overline{1}$ | $\overline{20}$ | $\overline{6}$ | $\overline{25}$ | $\overline{11}$ | $\overline{30}$ | $\overline{16}$ | $\overline{2}$ | $\overline{21}$ | $\overline{7}$ | $\overline{26}$ | $\overline{12}$ | $\overline{31}$ | $\overline{17}$ | $\overline{3}$ | $\overline{22}$ | $\overline{8}$ | $\overline{27}$ | $\overline{13}$ | $\overline{32}$ | $\overline{18}$ | $\overline{4}$ | $\overline{23}$ | $\overline{9}$ | $\overline{28}$ | $\overline{14}$ |
| $\overline{20}$ | $\overline{0}$ | $\overline{20}$ | $\overline{7}$ | $\overline{27}$ | $\overline{14}$ | $\overline{1}$ | $\overline{21}$ | $\overline{8}$ | $\overline{28}$ | $\overline{15}$ | $\overline{2}$ | $\overline{22}$ | $\overline{9}$ | $\overline{29}$ | $\overline{16}$ | $\overline{3}$ | $\overline{23}$ | $\overline{10}$ | $\overline{30}$ | $\overline{17}$ | $\overline{4}$ | $\overline{24}$ | $\overline{11}$ | $\overline{31}$ | $\overline{18}$ | $\overline{5}$ | $\overline{25}$ | $\overline{12}$ | $\overline{32}$ | $\overline{19}$ | $\overline{6}$ | $\overline{26}$ | $\overline{13}$ |
| $\overline{21}$ | $\overline{0}$ | $\overline{21}$ | $\overline{9}$ | $\overline{30}$ | $\overline{18}$ | $\overline{6}$ | $\overline{27}$ | $\overline{15}$ | $\overline{3}$ | $\overline{24}$ | $\overline{12}$ | $\overline{0}$ | $\overline{21}$ | $\overline{9}$ | $\overline{30}$ | $\overline{18}$ | $\overline{6}$ | $\overline{27}$ | $\overline{15}$ | $\overline{3}$ | $\overline{24}$ | $\overline{12}$ | $\overline{0}$ | $\overline{21}$ | $\overline{9}$ | $\overline{30}$ | $\overline{18}$ | $\overline{6}$ | $\overline{27}$ | $\overline{15}$ | $\overline{3}$ | $\overline{24}$ | $\overline{12}$ |
| $\overline{22}$ | $\overline{0}$ | $\overline{22}$ | $\overline{11}$ | $\overline{0}$ | $\overline{22}$ | $\overline{11}$ | $\overline{0}$ | $\overline{22}$ | $\overline{11}$ | $\overline{0}$ | $\overline{22}$ | $\overline{11}$ | $\overline{0}$ | $\overline{22}$ | $\overline{11}$ | $\overline{0}$ | $\overline{22}$ | $\overline{11}$ | $\overline{0}$ | $\overline{22}$ | $\overline{11}$ | $\overline{0}$ | $\overline{22}$ | $\overline{11}$ | $\overline{0}$ | $\overline{22}$ | $\overline{11}$ | $\overline{0}$ | $\overline{22}$ | $\overline{11}$ | $\overline{0}$ | $\overline{22}$ | $\overline{11}$ |
| $\overline{23}$ | $\overline{0}$ | $\overline{23}$ | $\overline{13}$ | $\overline{3}$ | $\overline{26}$ | $\overline{16}$ | $\overline{6}$ | $\overline{29}$ | $\overline{19}$ | $\overline{9}$ | $\overline{32}$ | $\overline{22}$ | $\overline{12}$ | $\overline{2}$ | $\overline{25}$ | $\overline{15}$ | $\overline{5}$ | $\overline{28}$ | $\overline{18}$ | $\overline{8}$ | $\overline{31}$ | $\overline{21}$ | $\overline{11}$ | $\overline{1}$ | $\overline{24}$ | $\overline{14}$ | $\overline{4}$ | $\overline{27}$ | $\overline{17}$ | $\overline{7}$ | $\overline{30}$ | $\overline{20}$ | $\overline{10}$ |
| $\overline{24}$ | $\overline{0}$ | $\overline{24}$ | $\overline{15}$ | $\overline{6}$ | $\overline{30}$ | $\overline{21}$ | $\overline{12}$ | $\overline{3}$ | $\overline{27}$ | $\overline{18}$ | $\overline{9}$ | $\overline{0}$ | $\overline{24}$ | $\overline{15}$ | $\overline{6}$ | $\overline{30}$ | $\overline{21}$ | $\overline{12}$ | $\overline{3}$ | $\overline{27}$ | $\overline{18}$ | $\overline{9}$ | $\overline{0}$ | $\overline{24}$ | $\overline{15}$ | $\overline{6}$ | $\overline{30}$ | $\overline{21}$ | $\overline{12}$ | $\overline{3}$ | $\overline{27}$ | $\overline{18}$ | $\overline{9}$ |
| $\overline{25}$ | $\overline{0}$ | $\overline{25}$ | $\overline{17}$ | $\overline{9}$ | $\overline{1}$ | $\overline{26}$ | $\overline{18}$ | $\overline{10}$ | $\overline{2}$ | $\overline{27}$ | $\overline{19}$ | $\overline{11}$ | $\overline{3}$ | $\overline{28}$ | $\overline{20}$ | $\overline{12}$ | $\overline{4}$ | $\overline{29}$ | $\overline{21}$ | $\overline{13}$ | $\overline{5}$ | $\overline{30}$ | $\overline{22}$ | $\overline{14}$ | $\overline{6}$ | $\overline{31}$ | $\overline{23}$ | $\overline{15}$ | $\overline{7}$ | $\overline{32}$ | $\overline{24}$ | $\overline{16}$ | $\overline{8}$ |
| $\overline{26}$ | $\overline{0}$ | $\overline{26}$ | $\overline{19}$ | $\overline{12}$ | $\overline{5}$ | $\overline{31}$ | $\overline{24}$ | $\overline{17}$ | $\overline{10}$ | $\overline{3}$ | $\overline{29}$ | $\overline{22}$ | $\overline{15}$ | $\overline{8}$ | $\overline{1}$ | $\overline{27}$ | $\overline{20}$ | $\overline{13}$ | $\overline{6}$ | $\overline{32}$ | $\overline{25}$ | $\overline{18}$ | $\overline{11}$ | $\overline{4}$ | $\overline{30}$ | $\overline{23}$ | $\overline{16}$ | $\overline{9}$ | $\overline{2}$ | $\overline{28}$ | $\overline{21}$ | $\overline{14}$ | $\overline{7}$ |
| $\overline{27}$ | $\overline{0}$ | $\overline{27}$ | $\overline{21}$ | $\overline{15}$ | $\overline{9}$ | $\overline{3}$ | $\overline{30}$ | $\overline{24}$ | $\overline{18}$ | $\overline{12}$ | $\overline{6}$ | $\overline{0}$ | $\overline{27}$ | $\overline{21}$ | $\overline{15}$ | $\overline{9}$ | $\overline{3}$ | $\overline{30}$ | $\overline{24}$ | $\overline{18}$ | $\overline{12}$ | $\overline{6}$ | $\overline{0}$ | $\overline{27}$ | $\overline{21}$ | $\overline{15}$ | $\overline{9}$ | $\overline{3}$ | $\overline{30}$ | $\overline{24}$ | $\overline{18}$ | $\overline{12}$ | $\overline{6}$ |
| $\overline{28}$ | $\overline{0}$ | $\overline{28}$ | $\overline{23}$ | $\overline{18}$ | $\overline{13}$ | $\overline{8}$ | $\overline{3}$ | $\overline{31}$ | $\overline{26}$ | $\overline{21}$ | $\overline{16}$ | $\overline{11}$ | $\overline{6}$ | $\overline{1}$ | $\overline{29}$ | $\overline{24}$ | $\overline{19}$ | $\overline{14}$ | $\overline{9}$ | $\overline{4}$ | $\overline{32}$ | $\overline{27}$ | $\overline{22}$ | $\overline{17}$ | $\overline{12}$ | $\overline{7}$ | $\overline{2}$ | $\overline{30}$ | $\overline{25}$ | $\overline{20}$ | $\overline{15}$ | $\overline{10}$ | $\overline{5}$ |
| $\overline{29}$ | $\overline{0}$ | $\overline{29}$ | $\overline{25}$ | $\overline{21}$ | $\overline{17}$ | $\overline{13}$ | $\overline{9}$ | $\overline{5}$ | $\overline{1}$ | $\overline{30}$ | $\overline{26}$ | $\overline{22}$ | $\overline{18}$ | $\overline{14}$ | $\overline{10}$ | $\overline{6}$ | $\overline{2}$ | $\overline{31}$ | $\overline{27}$ | $\overline{23}$ | $\overline{19}$ | $\overline{15}$ | $\overline{11}$ | $\overline{7}$ | $\overline{3}$ | $\overline{32}$ | $\overline{28}$ | $\overline{24}$ | $\overline{20}$ | $\overline{16}$ | $\overline{12}$ | $\overline{8}$ | $\overline{4}$ |
| $\overline{30}$ | $\overline{0}$ | $\overline{30}$ | $\overline{27}$ | $\overline{24}$ | $\overline{21}$ | $\overline{18}$ | $\overline{15}$ | $\overline{12}$ | $\overline{9}$ | $\overline{6}$ | $\overline{3}$ | $\overline{0}$ | $\overline{30}$ | $\overline{27}$ | $\overline{24}$ | $\overline{21}$ | $\overline{18}$ | $\overline{15}$ | $\overline{12}$ | $\overline{9}$ | $\overline{6}$ | $\overline{3}$ | $\overline{0}$ | $\overline{30}$ | $\overline{27}$ | $\overline{24}$ | $\overline{21}$ | $\overline{18}$ | $\overline{15}$ | $\overline{12}$ | $\overline{9}$ | $\overline{6}$ | $\overline{3}$ |
| $\overline{31}$ | $\overline{0}$ | $\overline{31}$ | $\overline{29}$ | $\overline{27}$ | $\overline{25}$ | $\overline{23}$ | $\overline{21}$ | $\overline{19}$ | $\overline{17}$ | $\overline{15}$ | $\overline{13}$ | $\overline{11}$ | $\overline{9}$ | $\overline{7}$ | $\overline{5}$ | $\overline{3}$ | $\overline{1}$ | $\overline{32}$ | $\overline{30}$ | $\overline{28}$ | $\overline{26}$ | $\overline{24}$ | $\overline{22}$ | $\overline{20}$ | $\overline{18}$ | $\overline{16}$ | $\overline{14}$ | $\overline{12}$ | $\overline{10}$ | $\overline{8}$ | $\overline{6}$ | $\overline{4}$ | $\overline{2}$ |
| $\overline{32}$ | $\overline{0}$ | $\overline{32}$ | $\overline{31}$ | $\overline{30}$ | $\overline{29}$ | $\overline{28}$ | $\overline{27}$ | $\overline{26}$ | $\overline{25}$ | $\overline{24}$ | $\overline{23}$ | $\overline{22}$ | $\overline{21}$ | $\overline{20}$ | $\overline{19}$ | $\overline{18}$ | $\overline{17}$ | $\overline{16}$ | $\overline{15}$ | $\overline{14}$ | $\overline{13}$ | $\overline{12}$ | $\overline{11}$ | $\overline{10}$ | $\overline{9}$ | $\overline{8}$ | $\overline{7}$ | $\overline{6}$ | $\overline{5}$ | $\overline{4}$ | $\overline{3}$ | $\overline{2}$ | $\overline{1}$ |

Berdasarkan Tabel 3.3 dapat diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{33}) = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{27}, \overline{30}\}$, sehingga graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{33}$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.3 Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{33})$

Dari Gambar 3.3 diperoleh jarak dari masing-masing titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{33})$ sebagai berikut:

$d(\bar{3},\bar{6}) = 2$ $d(\bar{6},\bar{3}) = 2$ $d(\bar{9},\bar{3}) = 2$ $d(\overline{12},\bar{3}) = 2$ $d(\overline{15},\bar{3}) = 2$

$d(\bar{3},\bar{9}) = 2$ $d(\bar{6},\bar{9}) = 2$ $d(\bar{9},\bar{6}) = 2$ $d(\overline{12},\bar{6}) = 2$ $d(\overline{15},\bar{6}) = 2$

$d(\bar{3},\overline{12}) = 2$ $d(\bar{6},\overline{12}) = 2$ $d(\bar{9},\overline{12}) = 2$ $d(\overline{12},\bar{9}) = 2$ $d(\overline{15},\bar{9}) = 2$

$d(\bar{3},\overline{15}) = 2$ $d(\bar{6},\overline{15}) = 2$ $d(\bar{9},\overline{15}) = 2$ $d(\overline{12},\overline{15}) = 2$ $d(\overline{15},\overline{12}) = 2$

$d(\bar{3},\overline{18}) = 2$ $d(\bar{6},\overline{18}) = 2$ $d(\bar{9},\overline{18}) = 2$ $d(\overline{12},\overline{18}) = 2$ $d(\overline{15},\overline{18}) = 2$

$d(\bar{3},\overline{21}) = 2$ $d(\bar{6},\overline{21}) = 2$ $d(\bar{9},\overline{21}) = 2$ $d(\overline{12},\overline{21}) = 2$ $d(\overline{15},\overline{21}) = 2$

$d(\bar{3},\overline{24}) = 2$ $d(\bar{6},\overline{24}) = 2$ $d(\bar{9},\overline{24}) = 2$ $d(\overline{12},\overline{24}) = 2$ $d(\overline{15},\overline{24}) = 2$

$d(\bar{3},\overline{27}) = 2$ $d(\bar{6},\overline{27}) = 2$ $d(\bar{9},\overline{27}) = 2$ $d(\overline{12},\overline{27}) = 2$ $d(\overline{15},\overline{27}) = 2$

$d(\bar{3},\overline{30}) = 2$ $d(\bar{6},\overline{30}) = 2$ $d(\bar{9},\overline{30}) = 2$ $d(\overline{12},\overline{30}) = 2$ $d(\overline{15},\overline{30}) = 2$

$d(\bar{3},\overline{11}) = 1$ $d(\bar{6},\overline{11}) = 1$ $d(\bar{9},\overline{11}) = 1$ $d(\overline{12},\overline{11}) = 1$ $d(\overline{15},\overline{11}) = 1$

$d(\bar{3},\overline{22}) = 1$ $d(\bar{6},\overline{22}) = 1$ $d(\bar{9},\overline{22}) = 1$ $d(\overline{12},\overline{22}) = 1$ $d(\overline{15},\overline{22}) = 1$

$d(\overline{18},\bar{3}) = 2$ $d(\overline{21},\bar{3}) = 2$ $d(\overline{24},\bar{3}) = 2$ $d(\overline{27},\bar{3}) = 2$ $d(\overline{30},\bar{3}) = 2$

$d(\overline{18},\bar{6}) = 2$ $d(\overline{21},\bar{6}) = 2$ $d(\overline{24},\bar{6}) = 2$ $d(\overline{27},\bar{6}) = 2$ $d(\overline{30},\bar{6}) = 2$

$d(\overline{18},\bar{9}) = 2$ $d(\overline{21},\bar{9}) = 2$ $d(\overline{24},\bar{9}) = 2$ $d(\overline{27},\bar{9}) = 2$ $d(\overline{30},\bar{9}) = 2$

$d(\overline{18},\overline{12})=2$ $d(\overline{21},\overline{12})=2$ $d(\overline{24},\overline{12})=2$ $d(\overline{27},\overline{12})=2$ $d(\overline{30},\overline{12})=2$

$d(\overline{18},\overline{15})=2$ $d(\overline{21},\overline{15})=2$ $d(\overline{24},\overline{15})=2$ $d(\overline{27},\overline{15})=2$ $d(\overline{30},\overline{15})=2$

$d(\overline{18},\overline{21})=2$ $d(\overline{21},\overline{18})=2$ $d(\overline{24},\overline{18})=2$ $d(\overline{27},\overline{18})=2$ $d(\overline{30},\overline{18})=2$

$d(\overline{18},\overline{24})=2$ $d(\overline{21},\overline{24})=2$ $d(\overline{24},\overline{21})=2$ $d(\overline{27},\overline{21})=2$ $d(\overline{30},\overline{21})=2$

$d(\overline{18},\overline{27})=2$ $d(\overline{21},\overline{27})=2$ $d(\overline{24},\overline{27})=2$ $d(\overline{27},\overline{24})=2$ $d(\overline{30},\overline{24})=2$

$d(\overline{18},\overline{30})=2$ $d(\overline{21},\overline{30})=2$ $d(\overline{24},\overline{30})=2$ $d(\overline{27},\overline{30})=2$ $d(\overline{30},\overline{27})=2$

$d(\overline{18},\overline{11})=1$ $d(\overline{21},\overline{11})=1$ $d(\overline{24},\overline{11})=1$ $d(\overline{27},\overline{11})=1$ $d(\overline{30},\overline{11})=1$

$d(\overline{18},\overline{22})=1$ $d(\overline{21},\overline{22})=1$ $d(\overline{24},\overline{22})=1$ $d(\overline{27},\overline{22})=1$ $d(\overline{30},\overline{22})=1$

$d(\overline{11},\overline{3})=1$ $d(\overline{11},\overline{18})=1$ $d(\overline{22},\overline{3})=1$ $d(\overline{22},\overline{18})=1$

$d(\overline{11},\overline{6})=1$ $d(\overline{11},\overline{21})=1$ $d(\overline{22},\overline{6})=1$ $d(\overline{22},\overline{21})=1$

$d(\overline{11},\overline{9})=1$ $d(\overline{11},\overline{24})=1$ $d(\overline{22},\overline{9})=1$ $d(\overline{22},\overline{24})=1$

$d(\overline{11},\overline{12})=1$ $d(\overline{11},\overline{27})=1$ $d(\overline{22},\overline{12})=1$ $d(\overline{22},\overline{27})=1$

$d(\overline{11},\overline{15})=1$ $d(\overline{11},\overline{30})=1$ $d(\overline{22},\overline{15})=1$ $d(\overline{22},\overline{30})=1$

$d(\overline{11},\overline{22})=2$ $d(\overline{22},\overline{11})=2$

Selanjutnya diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik yaitu:

$e(\overline{3})=2$ $e(\overline{6})=2$ $e(\overline{9})=2$ $e(\overline{12})=2$ $e(\overline{15})=2$ $e(\overline{18})=2$

$e(\overline{21})=2$ $e(\overline{24})=2$ $e(\overline{27})=2$ $e(\overline{30})=2$ $e(\overline{11})=2$ $e(\overline{22})=2$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{33})$ sebagai berikut:

$$E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{33}))=\sum_{v\in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{33}))} e(v)^2$$

$$=e(\overline{3})^2+e(\overline{6})^2+e(\overline{9})^2+e(\overline{11})^2+e(\overline{12})^2+e(\overline{15})^2+e(\overline{18})^2$$

$$+e(\overline{21})^2+e(\overline{22})^2+e(\overline{24})^2+e(\overline{27})^2+e(\overline{30})^2$$

$= 2^2 \cdot 12$

$= 48$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{33})$ sebagai berikut:

$$E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{33})) = \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{33}))} e(u)e(v)$$

$$= e(\overline{11})e(\overline{3}) + e(\overline{11})e(\overline{6}) + e(\overline{11})e(\overline{9}) + e(\overline{11})e(\overline{12})$$

$$+e(\overline{11})e(\overline{15}) + e(\overline{11})e(\overline{18}) + e(\overline{11})e(\overline{21}) + e(\overline{11})e(\overline{24})$$

$$+e(\overline{11})e(\overline{27}) + e(\overline{11})e(\overline{30}) + e(\overline{22})e(\overline{3}) + e(\overline{22})e(\overline{6})$$

$$+e(\overline{22})e(\overline{9}) + e(\overline{22})e(\overline{12}) + e(\overline{22})e(\overline{15}) + e(\overline{22})e(\overline{18})$$

$$+e(\overline{22})e(\overline{21}) + e(\overline{22})e(\overline{24}) + e(\overline{22})e(\overline{27}) + e(\overline{22})e(\overline{30})$$

$$= (2 \cdot 2) \cdot 20$$

$$= 80.$$

#### 3.1.1.4 Rumus Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}$

Berdasarkan perhitungan beberapa sampel graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{15}, \mathbb{Z}_{21}, \mathbb{Z}_{33}$ maka didapatkan pola eksentrisitas pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})$ sebagai berikut:

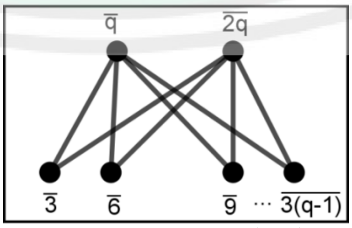
Tabel 3.4 Eksentrisitas Titik pada Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{3q})$

| $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{3q})$ | $\boldsymbol{q}$ | $\boldsymbol{e(v)}$ |
|---|---|---|
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{15})$ | 5 | 2 |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{21})$ | 7 | 2 |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{33})$ | 11 | 2 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})$ | $q$ | 2 |

**Lemma 3.1** Eksentrisitas titik $v$ pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})$ dengan $q$ bilangan prima dan $q \geq 5$ adalah $e(v) = 2$ untuk $\forall v \in V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})\right)$

**Bukti:**

Misalkan anggota ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}$ adalah $\mathbb{Z}_{3q} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{3q-1}\}$, untuk $q$ bilangan prima, dan $q \geq 5$. Berdasarkan definisi pembagi nol, maka $\mathbb{Z}_{3q}$ memiliki himpunan pembagi nol yaitu $Z\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})\right) = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \dots, \overline{3q-1}, \bar{q}, \overline{2q}\}$. Banyaknya anggota dari $Z\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})\right)$ adalah $\left|Z\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})\right)\right| = (q-1) + 2 = q + 1$. Jadi, graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})$ mempunyai order $q + 1$. Berdasarkan definisi graf pembagi nol, titik $\overline{3i}$ dengan $i = 1,2, \dots, q-1$ hanya akan terhubung langsung ke titik $\overline{qj}$ dengan $j = 1,2$, sehingga graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.4 Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{3q})$

Jadi, $\Gamma(\mathbb{Z}_{3q}) \cong K_{q-1,2}$ dengan $V_1 = \{\overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \dots, \overline{3q-1}\}$ dan $V_2 = \{\overline{q}, \overline{2q}\}$. Jika $v \in V_1$, maka jarak terjauh dari $v$ adalah jarak untuk titik di $V_1$ selain $v$ sendiri. Jadi, $e(v) = 2$ untuk $\forall v \in V_1$. Jika $v \in V_2$, maka jarak terjauh dari $v$ adalah jarak untuk titik di $V_2$ selain $v$ sendiri. Jadi, $e(v) = 2$ untuk $\forall v \in V_2$. ∎

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}$ diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 3.5 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}$ untuk $\boldsymbol{q}$ Bilangan Prima

| $\mathbb{Z}_{3q}$ | $q$ | $\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})$ | $E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{3q}))$ | $E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{3q}))$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{Z}_{15}$ | 5 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{15})$ | $24 = 4 \cdot 6 = 4(5+1)$ | $32 = 8 \cdot 4 = 8(5-1)$ |
| $\mathbb{Z}_{21}$ | 7 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{21})$ | $32 = 4 \cdot 8 = 4(7+1)$ | $48 = 8 \cdot 6 = 8(7-1)$ |
| $\mathbb{Z}_{33}$ | 11 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{33})$ | $48 = 4 \cdot 12 = 4(11+1)$ | $80 = 8 \cdot 10 = 8(11-1)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\mathbb{Z}_{3q}$ | $q$ | $\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})$ | $4(q+1)$ | $8(q-1)$ |

**Teorema 3.1** Misalkan $\mathbb{Z}_{3q}$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan untuk $q$ bilangan prima dan $q \geq 5$, maka $E_1$ adalah indeks eksentrisitas Zagreb pertama yaitu $E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})\right) = 4(q+1)$ dan $E_2$ adalah indeks eksentrisitas Zagreb kedua yaitu $E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})\right) = 8(q-1)$

**Bukti:**

Berdasarkan Lemma 3.1, maka indeks eksentrisitas Zagreb pertama adalah:

$$E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})\right) = \sum_{v \in V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})\right)} e(v)^2$$

$$= (q+1) \cdot 2^2$$

$$= 4(q+1)$$

Karena $\Gamma(\mathbb{Z}_{3q}) \cong K_{q-1,2}$, maka banyaknya sisi pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})$ adalah $2(q-1)$. Jadi, indeks eksentrisitas Zagreb kedua adalah:

$$E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})\right) = \sum_{uv \in E\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})\right)} e(u)e(v)$$

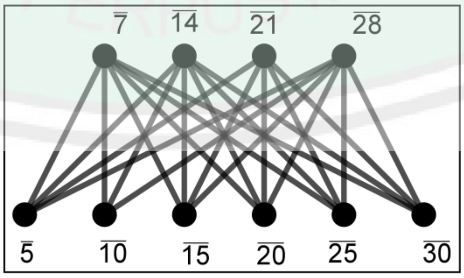
$$= 2(q-1) \cdot 2 \cdot 2$$

$$= 8(q-1).$$ ■

### 3.1.2 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{5q}$

#### 3.1.2.1 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{35}$

Anggota dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{35} = \mathbb{Z}_{5 \cdot 7} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{34}\}$. Seperti cara sebelumnya pada ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}$, dua anggota di $\mathbb{Z}_{35}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian maka diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{35}) = \{\bar{5}, \bar{7}, \overline{10}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{25}, \overline{28}, \overline{30}\}$, sehingga graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{35}$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.5 Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{35})$

Dari Gambar 3.5 diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{35})$ yaitu:

$e(\overline{5}) \;= 2$ $\quad e(\overline{10}) \;= 2$ $\quad e(\overline{15}) \;= 2$ $\quad e(\overline{20}) = 2$ $\quad e(\overline{25}) = 2$

$e(\overline{30}) \;= 2$ $\quad e(\overline{7}) \;= 2$ $\quad e(\overline{14}) \;= 2$ $\quad e(\overline{21}) = 2$ $\quad e(\overline{28}) = 2$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{35})$ sebagai berikut:

$$E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{35})) = \sum_{v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{35}))} e(v)^2$$

$$= 2^2 \cdot 10$$

$$= 40$$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{35})$ sebagai berikut:

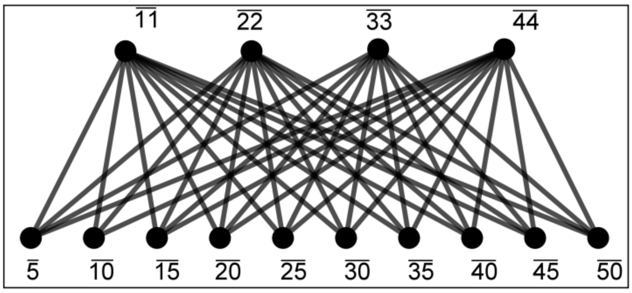
$$E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{35})) = \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{35}))} e(u)e(v)$$

$$= (2 \cdot 2) \cdot 24$$

$$= 96.$$

**3.1.2.2 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{55}$**

Anggota dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{55} = \mathbb{Z}_{5 \cdot 11} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{54}\}$. Seperti cara sebelumnya pada ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}$, dua anggota di $\mathbb{Z}_{55}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian maka diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{55}) = \{\overline{5}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{25}, \overline{30}, \overline{33}, \overline{35}, \overline{40}, \overline{44}, \overline{45}, \overline{50}\}$, sehingga graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{55}$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.6 Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{55})$

Dari Gambar 3.6 diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{55})$ yaitu:

$e(\overline{5}) = 2$ $e(\overline{10}) = 2$ $e(\overline{15}) = 2$ $e(\overline{20}) = 2$ $e(\overline{25}) = 2$

$e(\overline{30}) = 2$ $e(\overline{35}) = 2$ $e(\overline{40}) = 2$ $e(\overline{45}) = 2$ $e(\overline{50}) = 2$

$e(\overline{11}) = 2$ $e(\overline{33}) = 2$ $e(\overline{22}) = 2$ $e(\overline{44}) = 2$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{55})$ sebagai berikut:

$$E_1\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{55})\big) = \sum_{v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{55}))} e(v)^2$$

$$= 2^2 \cdot 14$$

$$= 56$$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{55})$ sebagai berikut:

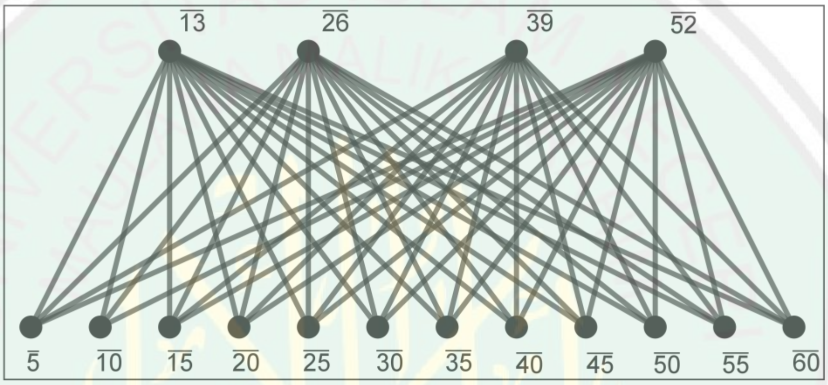
$$E_2\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{55})\big) = \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{55}))} e(u)e(v)$$

$$= (2 \cdot 2) \cdot 40$$

$$= 160.$$

### 3.1.2.3 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{65}$

Anggota dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{65} = \mathbb{Z}_{5\cdot 13} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{64}\}$. Seperti cara sebelumnya pada ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}$, dua anggota di $\mathbb{Z}_{65}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian maka diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{65}) = \{\overline{5}, \overline{10}, \overline{13}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{30}, \overline{35}, \overline{39}, \overline{40}, \overline{45}, \overline{50}, \overline{52}, \overline{55}, \overline{60}\}$, sehingga graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{65}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.7 Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{65})$

Dari Gambar 3.7 diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{65})$ yaitu:

$e(\overline{5}) = 2$ $e(\overline{10}) = 2$ $e(\overline{15}) = 2$ $e(\overline{20}) = 2$ $e(\overline{25}) = 2$ $e(\overline{30}) = 2$

$e(\overline{35}) = 2$ $e(\overline{40}) = 2$ $e(\overline{45}) = 2$ $e(\overline{50}) = 2$ $e(\overline{55}) = 2$ $e(\overline{60}) = 2$

$e(\overline{13}) = 2$ $e(\overline{26}) = 2$ $e(\overline{39}) = 2$ $e(\overline{52}) = 2$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{65})$ sebagai berikut:

$$E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{65})) = \sum_{v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{65}))} e(v)^2$$

$$= 2^2 \cdot 16$$

$$= 64$$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{65})$ sebagai berikut:

$$E_2\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{65})\big) = \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{65}))} e(u)e(v)$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 48$$

$$= 192.$$

**3.1.2.4 Rumus Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{5q}$**

Berdasarkan perhitungan beberapa sampel graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{35}, \mathbb{Z}_{55}, \mathbb{Z}_{65}$ maka didapatkan pola eksentrisitas pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})$ sebagai berikut:

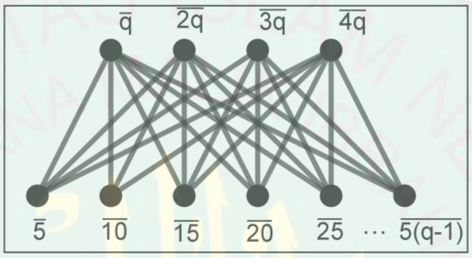
Tabel 3.6 Eksentrisitas Titik pada Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{5q})$

| $\boldsymbol{\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})}$ | $\boldsymbol{q}$ | $\boldsymbol{e(v)}$ |
|---|---|---|
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{35})$ | 7 | 2 |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{55})$ | 11 | 2 |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{65})$ | 13 | 2 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})$ | $q$ | 2 |

**Lemma 3.2** Eksentrisitas titik $v$ pada graf $\Gamma\big(\mathbb{Z}_{5q}\big)$ dengan $q$ bilangan prima dan $q \geq 7$ adalah $e(v) = 2$ untuk $\forall v \in V\Big(\Gamma\big(\mathbb{Z}_{5q}\big)\Big)$

**Bukti:**

Misalkan anggota ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{5q}$ adalah $\mathbb{Z}_{5q} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{5q-1}\}$, untuk $q$ bilangan prima, dan $q \geq 7$. Berdasarkan definisi pembagi nol, maka $\mathbb{Z}_{5q}$ memiliki himpunan pembagi nol yaitu $Z\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})\right) = \{\overline{5}, \overline{10}, \overline{15}, \dots, \overline{5q-1}, \overline{q}, \overline{2q}, \overline{3q}, \overline{4q}\}$. Banyaknya anggota dari $Z\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})\right)$ adalah $\left|Z\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})\right)\right| = (q-1) + 4 = q + 3$. Jadi, graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})$ mempunyai order $q+3$. Berdasarkan definisi graf pembagi nol, titik $\overline{5i}$ dengan $i = 1,2,\dots,q-1$ hanya akan terhubung langsung ke titik $\overline{qj}$ dengan $j = 1,2,3,4$, sehingga graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.8 Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})$

Jadi, $\Gamma(\mathbb{Z}_{5q}) \cong K_{q-1,4}$ dengan $V_1 = \{\overline{5}, \overline{10}, \overline{15}, \dots, \overline{5q-1}\}$ dan $V_2 = \{\overline{q}, \overline{2q}, \overline{3q}, \overline{4q}\}$. Jika $v \in V_1$, maka jarak terjauh dari $v$ adalah jarak untuk titik di $V_1$ selain $v$ sendiri. Jadi, $e(v) = 2$ untuk $\forall v \in V_1$. Jika $v \in V_2$, maka jarak terjauh dari $v$ adalah jarak untuk titik di $V_2$ selain $v$ sendiri. Jadi, $e(v) = 2$ untuk $\forall v \in V_2$. ■

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{5q}$ diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 3.7 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan kedua pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{5q}$ untuk $\boldsymbol{q}$ Bilangan Prima

| $\mathbb{Z}_{5q}$ | $q$ | $\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})$ | $E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})\right)$ | $E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{Z}_{35}$ | 7 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{35})$ | $40 = 4 \cdot 10 = 4(7+3)$ | $96 = 16 \cdot 6 = 16(7-1)$ |
| $\mathbb{Z}_{55}$ | 11 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{55})$ | $56 = 4 \cdot 14 = 4(11+3)$ | $160 = 16 \cdot 10 = 16(11-1)$ |
| $\mathbb{Z}_{65}$ | 13 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{65})$ | $64 = 4 \cdot 16 = 4(13+3)$ | $192 = 16 \cdot 12 = 16(13-1)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\mathbb{Z}_{5q}$ | $q$ | $\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})$ | $4(q+3)$ | $16(q-1)$ |

**Teorema 3.2** Misalkan $\mathbb{Z}_{5q}$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan untuk $q$ bilangan prima dan $q \geq 7$, maka $E_1$ adalah indeks eksentrisitas Zagreb pertama yaitu $E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})\right) = 4(q+3)$ dan $E_2$ adalah indeks eksentrisitas Zagreb kedua yaitu $E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})\right) = 16(q-1)$

**Bukti:**

Berdasarkan Lemma 3.2, maka indeks eksentrisitas Zagreb pertama adalah:

$$\begin{aligned} E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})\right) &= \sum_{v \in V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})\right)} e(v)^2 \\ &= (q+3) \cdot 2^2 \\ &= 4(q+3) \end{aligned}$$

Karena $\Gamma(\mathbb{Z}_{5q}) \cong K_{q-1,4}$, maka banyaknya sisi pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})$ adalah $4(q-1)$. Jadi, indeks eksentrisitas Zagreb kedua adalah:

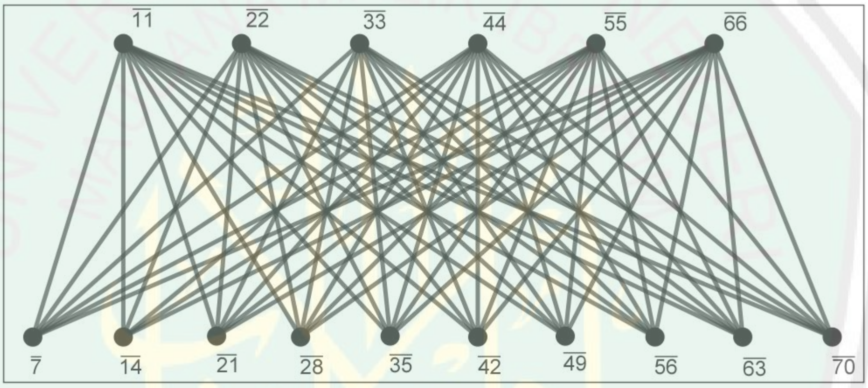
$$\begin{aligned} E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})\right) &= \sum_{uv \in E\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})\right)} e(u)e(v) \\ &= 4(q-1) \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 16(q-1). \end{aligned}$$

■

### 3.1.3 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{7q}$

#### 3.1.3.1 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{77}$

Anggota dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{77} = \mathbb{Z}_{7\cdot 11} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{76}\}$. Seperti cara sebelumnya pada ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}$, dua anggota di $\mathbb{Z}_{77}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian maka diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{77}) = \{\overline{7}, \overline{11}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{28}, \overline{33}, \overline{35}, \overline{42}, \overline{44}, \overline{49}, \overline{55}, \overline{56}, \overline{63}, \overline{66}, \overline{70}\}$, sehingga graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{77}$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.9 Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{77})$

Dari Gambar 3.9 diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{77})$ yaitu:

$e(\overline{7}) = 2$ $\quad e(\overline{14}) = 2$ $\quad e(\overline{21}) = 2$ $\quad e(\overline{28}) = 2$ $\quad e(\overline{35}) = 2$ $\quad e(\overline{42}) = 2$

$e(\overline{49}) = 2$ $\quad e(\overline{56}) = 2$ $\quad e(\overline{63}) = 2$ $\quad e(\overline{70}) = 2$ $\quad e(\overline{11}) = 2$ $\quad e(\overline{22}) = 2$

$e(\overline{33}) = 2$ $\quad e(\overline{44}) = 2$ $\quad e(\overline{55}) = 2$ $\quad e(\overline{66}) = 2$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{77})$ sebagai berikut:

$$E_1\big(\Gamma(\mathbb{Z}_{77})\big) = \sum_{v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{77}))} e(v)^2$$

$$= 2^2 \cdot 16$$

$$= 64$$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{77})$ sebagai berikut:

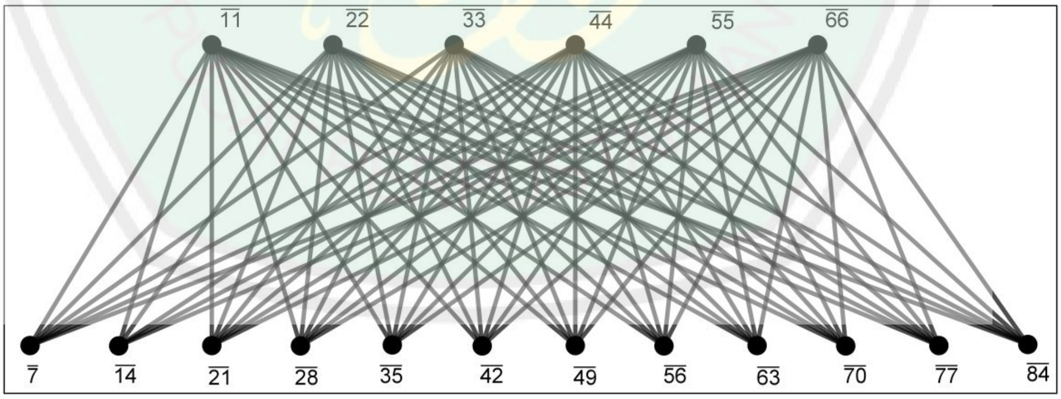
$$E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{77})) = \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{77}))} e(u)e(v)$$

$$= (2 \cdot 2) \cdot 60$$

$$= 240.$$

#### 3.1.3.2 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{91}$

Anggota dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{91} = \mathbb{Z}_{7 \cdot 13} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{90}\}$. Seperti cara sebelumnya pada ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}$, dua anggota di $\mathbb{Z}_{91}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian maka diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{91}) = \{\overline{7}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{26}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{39}, \overline{42}, \overline{49}, \overline{52}, \overline{56}, \overline{63}, \overline{65}, \overline{70}, \overline{77}, \overline{78}, \overline{84}\}$, sehingga graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{91}$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.10 Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{91})$

Dari Gambar 3.10 diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{91})$ yaitu:

$e(\overline{7}) = 2$ $e(\overline{14}) = 2$ $e(\overline{21}) = 2$ $e(\overline{28}) = 2$ $e(\overline{35}) = 2$ $e(\overline{42}) = 2$

$e(\overline{49}) = 2$ $e(\overline{56}) = 2$ $e(\overline{63}) = 2$ $e(\overline{70}) = 2$ $e(\overline{77}) = 2$ $e(\overline{84}) = 2$

$e(\overline{13}) = 2$ $e(\overline{26}) = 2$ $e(\overline{39}) = 2$ $e(\overline{52}) = 2$ $e(\overline{65}) = 2$ $e(\overline{78}) = 2$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{91})$ sebagai berikut:

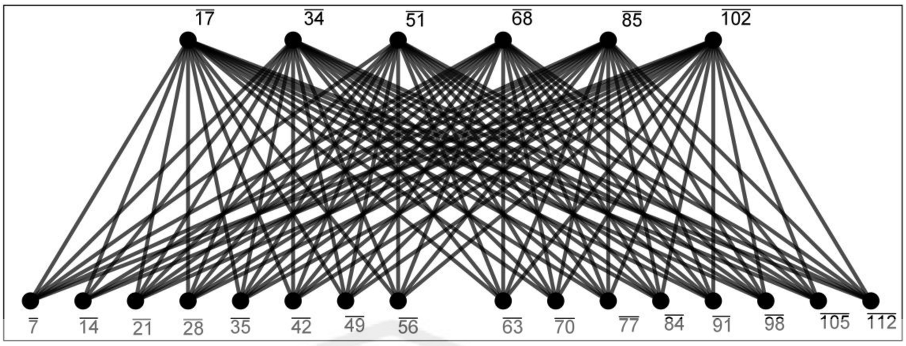
$$\begin{aligned} E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{91})) &= \sum_{v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{91}))} e(v)^2 \\ &= 2^2 \cdot 18 \\ &= 72 \end{aligned}$$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{91})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{91})) &= \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{91}))} e(u)e(v) \\ &= (2 \cdot 2) \cdot 72 \\ &= 288. \end{aligned}$$

**3.1.3.3 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{119}$**

Anggota dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{119} = \mathbb{Z}_{7\cdot 17} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{118}\}$. Seperti cara sebelumnya pada ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}$, dua anggota di $\mathbb{Z}_{119}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian maka diperoleh $(\mathbb{Z}_{119}) = \{\overline{7}, \overline{14}, \overline{17}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{34}, \overline{35}, \overline{42}, \overline{49}, \overline{51}, \overline{56}, \overline{63}, \overline{68}, \overline{70}, \overline{77}, \overline{84}, \overline{85}, \overline{91}, \overline{98}, \overline{102}, \overline{105}, \overline{112}\}$, sehingga graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{119}$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.11 Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{119})$

Dari Gambar 3.11 diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{119})$ yaitu:

$e(\overline{7}) = 2$ $e(\overline{14}) = 2$ $e(\overline{21}) = 2$ $e(\overline{28}) = 2$ $e(\overline{35}) = 2$

$e(\overline{42}) = 2$ $e(\overline{49}) = 2$ $e(\overline{56}) = 2$ $e(\overline{63}) = 2$ $e(\overline{70}) = 2$

$e(\overline{77}) = 2$ $e(\overline{84}) = 2$ $e(\overline{91}) = 2$ $e(\overline{98}) = 2$ $e(\overline{105}) = 2$

$e(\overline{112}) = 2$ $e(\overline{17}) = 2$ $e(\overline{34}) = 2$ $e(\overline{51}) = 2$ $e(\overline{68}) = 2$

$e(\overline{85}) = 2$ $e(\overline{102}) = 2$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{119})$ sebagai berikut:

$$E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{119})) = \sum_{v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{119}))} e(v)^2$$

$$= 2^2 \cdot 22$$

$$= 88$$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{119})$ sebagai berikut:

$$E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{119})) = \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{119}))} e(u)e(v)$$

$$= (2 \cdot 2) \cdot 96$$

$$= 384.$$

### 3.1.3.4 Rumus Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{7q}$

Berdasarkan perhitungan beberapa sampel graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{77}, \mathbb{Z}_{91}, \mathbb{Z}_{119}$ maka didapatkan pola eksentrisitas pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})$ sebagai berikut:

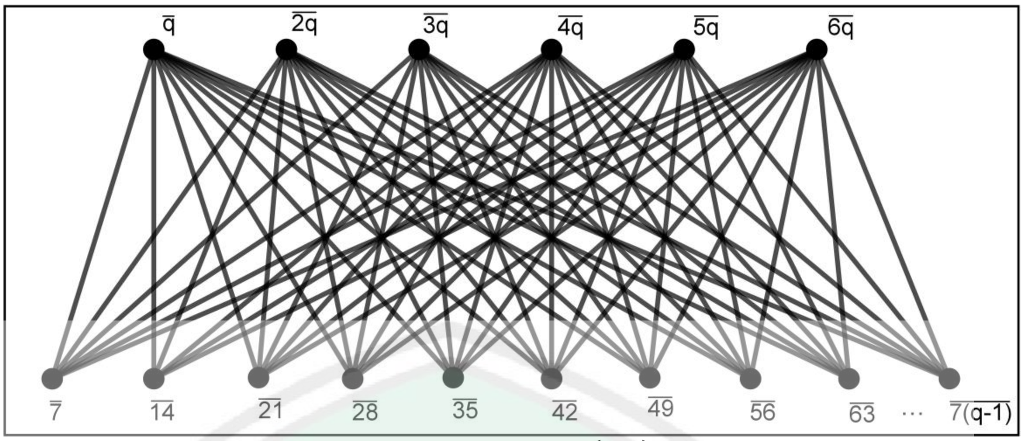
Tabel 3.8 Eksentrisitas Titik pada Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{7q})$

| $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{7q})$ | $\boldsymbol{q}$ | $\boldsymbol{e(v)}$ |
|---|---|---|
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{77})$ | 11 | 2 |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{91})$ | 13 | 2 |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{119})$ | 17 | 2 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})$ | $q$ | 2 |

**Lemma 3.3** Eksentrisitas titik $v$ pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})$ dengan $q$ bilangan prima dan $q \geq 11$ adalah $e(v) = 2$ untuk $\forall v \in V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})\right)$

**Bukti:**

Misalkan anggota ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{7q}$ adalah $\mathbb{Z}_{7q} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{7q-1}\}$, untuk $q$ bilangan prima, dan $q \geq 11$. Berdasarkan definisi pembagi nol, maka $\mathbb{Z}_{7q}$ memiliki himpunan pembagi nol yaitu $Z\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})\right) = \{\bar{7}, \overline{14}, \overline{21}, \dots, \overline{7q-1}, \bar{q}, \overline{2q}, \overline{3q}, \dots, \overline{6q}\}$. Banyaknya anggota dari $Z\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})\right)$ adalah $\left|Z\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})\right)\right| = (q-1) + 6 = q + 5$. Jadi, graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})$ mempunyai order $q + 5$. Berdasarkan definisi graf pembagi nol, titik $\overline{7i}$ dengan $i = 1,2, \dots, q-1$ hanya akan terhubung langsung ke titik $\overline{qj}$ dengan $j = 1,2,\dots,6$, sehingga graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.12 Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{7q})$

Jadi, $\Gamma(\mathbb{Z}_{7q}) \cong K_{q-1,6}$ dengan $V_1 = \{\overline{7}, \overline{14}, \overline{21}, \dots, \overline{7q-1}\}$ dan $V_2 = \{\overline{q}, \overline{2q}, \overline{3q}, \dots, \overline{6q}\}$. Jika $v \in V_1$, maka jarak terjauh dari $v$ adalah jarak untuk titik di $V_1$ selain $v$ sendiri. Jadi, $e(v) = 2$ untuk $\forall v \in V_1$. Jika $v \in V_2$, maka jarak terjauh dari $v$ adalah jarak untuk titik di $V_2$ selain $v$ sendiri. Jadi, $e(v) = 2$ untuk $\forall v \in V_2$. ■

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{7q}$ diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 3.9 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{7q}$ untuk $\boldsymbol{q}$ Bilangan Prima

| $\mathbb{Z}_{7q}$ | $q$ | $\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})$ | $E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{7q}))$ | $E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{7q}))$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{Z}_{77}$ | 11 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{77})$ | $64 = 4 \cdot 16 = 4(11+5)$ | $240 = 24 \cdot 10 = 24(11-1)$ |
| $\mathbb{Z}_{91}$ | 13 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{91})$ | $72 = 4 \cdot 18 = 4(13+5)$ | $288 = 24 \cdot 12 = 24(13-1)$ |
| $\mathbb{Z}_{119}$ | 17 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{119})$ | $88 = 4 \cdot 22 = 4(17+5)$ | $384 = 24 \cdot 16 = 24(17-1)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\mathbb{Z}_{7q}$ | $q$ | $\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})$ | $4(q+5)$ | $24(q-1)$ |

**Teorema 3.3** Misalkan $\mathbb{Z}_{7q}$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan untuk $q$ bilangan prima dan $q \geq 11$, maka $E_1$ adalah indeks eksentrisitas Zagreb pertama yaitu $E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})\right) = 4(q+5)$ dan $E_2$ adalah indeks eksentrisitas Zagreb kedua yaitu $E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})\right) = 24(q-1)$

**Bukti:**

Berdasarkan Lemma 3.3, maka indeks eksentrisitas Zagreb pertama adalah:

$$E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})\right) = \sum_{v\in V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})\right)} e(v)^2$$

$$= (q+5)\cdot 2^2$$

$$= 4(q+5)$$

Karena $\Gamma(\mathbb{Z}_{7q}) \cong K_{q-1,6}$, maka banyaknya sisi pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})$ adalah $6(q-1)$. Jadi, indeks eksentrisitas Zagreb kedua adalah:

$$E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})\right) = \sum_{uv\in E\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})\right)} e(u)e(v)$$

$$= 6(q-1)\cdot 2\cdot 2$$

$$= 24(q-1).$$

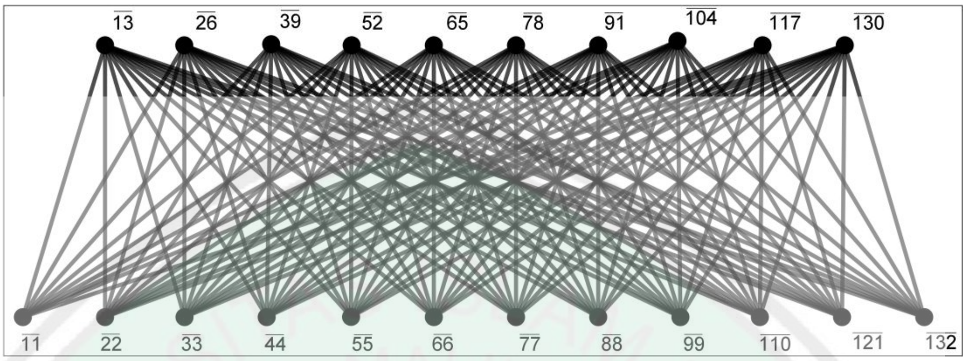
■

### 3.1.4 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{11q}$

#### 3.1.4.1 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{143}$

Anggota dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{143} = \mathbb{Z}_{11\cdot 13} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{142}\}$. Seperti cara sebelumnya pada ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}$, dua anggota di $\mathbb{Z}_{143}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian maka diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{143}) = \{\overline{11}, \overline{13}, \overline{22}, \overline{26}, \overline{33}, \overline{39}, \overline{44}, \overline{52}, \overline{55}, \overline{65},$

$\overline{66}, \overline{77}, \overline{78}, \overline{88}, \overline{91}, \overline{99}, \overline{104}, \overline{110}, \overline{117}, \overline{121}, \overline{130}, \overline{132}\}$, sehingga graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{143}$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.13 Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{143})$

Dari Gambar 3.13 diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{143})$ yaitu:

$e(\overline{11}) = 2$ $e(\overline{22}) = 2$ $e(\overline{33}) = 2$ $e(\overline{44}) = 2$ $e(\overline{55}) = 2$

$e(\overline{66}) = 2$ $e(\overline{77}) = 2$ $e(\overline{88}) = 2$ $e(\overline{99}) = 2$ $e(\overline{110}) = 2$

$e(\overline{121}) = 2$ $e(\overline{132}) = 2$ $e(\overline{13}) = 2$ $e(\overline{26}) = 2$ $e(\overline{39}) = 2$

$e(\overline{52}) = 2$ $e(\overline{65}) = 2$ $e(\overline{78}) = 2$ $e(\overline{91}) = 2$ $e(\overline{104}) = 2$

$e(\overline{117}) = 2$ $e(\overline{130}) = 2$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{143})$ sebagai berikut:

$$E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{143})) = \sum_{v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{143}))} e(v)^2$$

$$= 2^2 \cdot 22$$

$$= 88$$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{143})$ sebagai berikut:

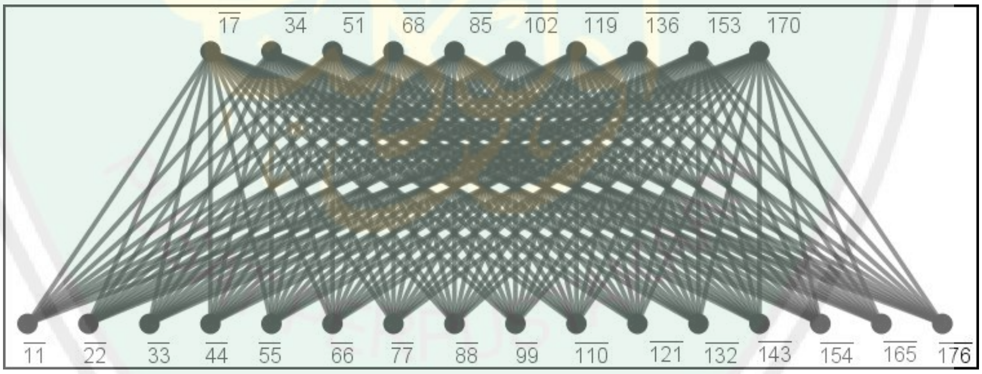
$$E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{143})) = \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{143}))} e(u)e(v)$$

$$= (2 \cdot 2) \cdot 120$$

$$= 480.$$

**3.1.4.2 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{187}$**

Anggota dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{187} = \mathbb{Z}_{11 \cdot 17} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{186}\}$. Seperti cara sebelumnya pada ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}$, dua anggota di $\mathbb{Z}_{187}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian maka diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{187}) = \{\overline{11}, \overline{17}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{34}, \overline{44}, \overline{51}, \overline{55}, \overline{68}, \overline{66}, \overline{77}, \overline{85}, \overline{88}, \overline{99}, \overline{102}, \overline{110}, \overline{119}, \overline{121}, \overline{132}, \overline{136}, \overline{143}, \overline{153}, \overline{154}, \overline{165}, \overline{170}, \overline{176}\}$, sehingga graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{187}$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.14 Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{187})$

Dari Gambar 3.14 diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{187})$ yaitu:

$e(\overline{11}) = 2$ $\quad e(\overline{22}) = 2$ $\quad e(\overline{33}) = 2$ $\quad e(\overline{44}) = 2$ $\quad e(\overline{55}) = 2$

$e(\overline{66}) = 2$ $\quad e(\overline{77}) = 2$ $\quad e(\overline{88}) = 2$ $\quad e(\overline{99}) = 2$ $\quad e(\overline{110}) = 2$

$e(\overline{121}) = 2$ $\quad e(\overline{132}) = 2$ $\quad e(\overline{143}) = 2$ $\quad e(\overline{154}) = 2$ $\quad e(\overline{165}) = 2$

$e(\overline{176}) = 2$ $e(\overline{17}) = 2$ $e(\overline{34}) = 2$ $e(\overline{51}) = 2$ $e(\overline{68}) = 2$

$e(\overline{85}) = 2$ $e(\overline{102}) = 2$ $e(\overline{119}) = 2$ $e(\overline{136}) = 2$ $e(\overline{153}) = 2$

$e(\overline{170}) = 2$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{187})$ sebagai berikut:

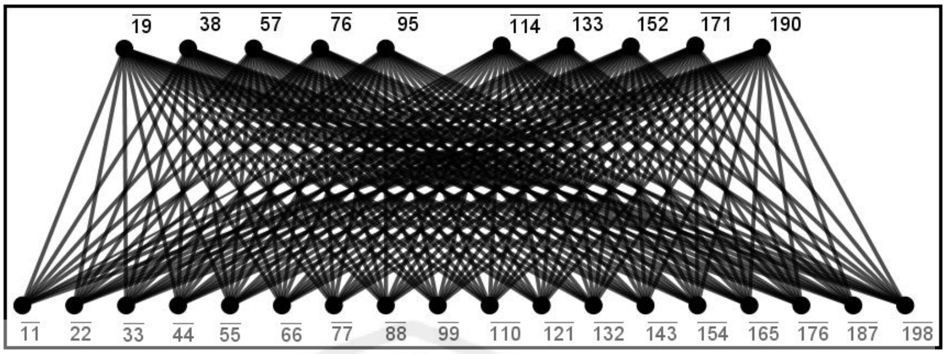
$$\begin{aligned} E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{187})) &= \sum_{v\in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{187}))} e(v)^2 \\ &= 2^2 \cdot 26 \\ &= 104 \end{aligned}$$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{187})$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{187})) &= \sum_{uv\in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{187}))} e(u)e(v) \\ &= (2\cdot 2)\cdot 160 \\ &= 640. \end{aligned}$$

**3.1.4.3 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{209}$**

Anggota dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{209} = \mathbb{Z}_{11\cdot 19} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{208}\}$. Seperti cara sebelumnya pada ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}$, dua anggota di $\mathbb{Z}_{209}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian maka diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{209}) = \{\overline{11}, \overline{17}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{34}, \overline{44}, \overline{51}, \overline{55}, \overline{68}, \overline{66}, \overline{77}$ $\overline{85}, \overline{88}, \overline{99}, \overline{102}, \overline{110}, \overline{119}, \overline{121}, \overline{132}, \overline{136}, \overline{143}, \overline{153}, \overline{154}, \overline{165}, \overline{170}, \overline{176}\}$, sehingga graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{209}$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.15 Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{209})$

Dari Gambar 3.15 diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{209})$ yaitu:

$e(\overline{11}) = 2$ $e(\overline{22}) = 2$ $e(\overline{33}) = 2$ $e(\overline{44}) = 2$ $e(\overline{55}) = 2$ $e(\overline{66}) = 2$

$e(\overline{77}) = 2$ $e(\overline{88}) = 2$ $e(\overline{99}) = 2$ $e(\overline{110}) = 2$ $e(\overline{121}) = 2$ $e(\overline{132}) = 2$

$e(\overline{143}) = 2$ $e(\overline{154}) = 2$ $e(\overline{165}) = 2$ $e(\overline{176}) = 2$ $e(\overline{187}) = 2$ $e(\overline{198}) = 2$

$e(\overline{19}) = 2$ $e(\overline{38}) = 2$ $e(\overline{57}) = 2$ $e(\overline{76}) = 2$ $e(\overline{95}) = 2$ $e(\overline{114}) = 2$

$e(\overline{133}) = 2$ $e(\overline{152}) = 2$ $e(\overline{171}) = 2$ $e(\overline{190}) = 2$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{209})$ sebagai berikut:

$$E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{209})) = \sum_{v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{209}))} e(v)^2$$

$$= 2^2 \cdot 28$$

$$= 112$$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{209})$ sebagai berikut:

$$E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{209})) = \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{209}))} e(u)e(v)$$

$$= (2 \cdot 2) \cdot 180$$

$$= 720.$$

#### 3.1.4.4 Rumus Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{11q}$

Berdasarkan perhitungan beberapa sampel graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{143}, \mathbb{Z}_{187}, \mathbb{Z}_{209}$ maka didapatkan pola eksentrisitas pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})$ sebagai berikut:

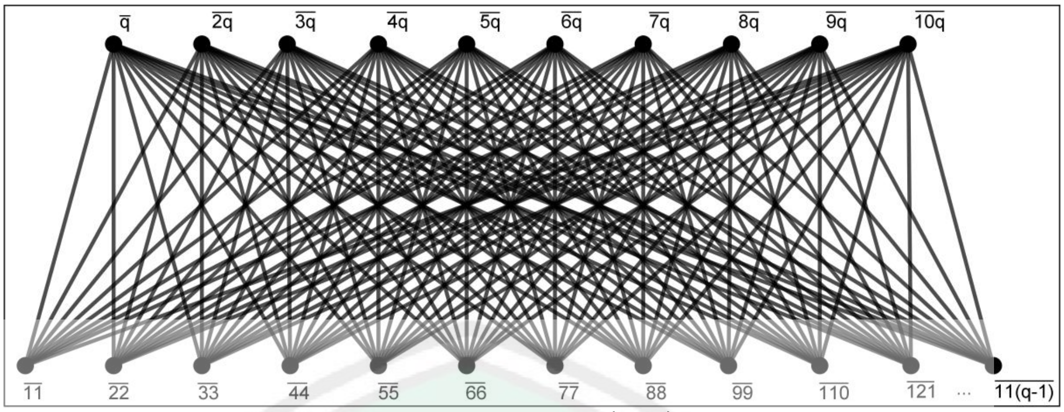
Tabel 3.10 Eksentrisitas Titik pada Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})$

| $\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})$ | $q$ | $e(v)$ |
|---|---|---|
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{143})$ | 13 | 2 |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{187})$ | 17 | 2 |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{209})$ | 19 | 2 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})$ | $q$ | 2 |

**Lemma 3.4** Eksentrisitas titik $v$ pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})$ dengan $q$ bilangan prima dan $q \geq 13$ adalah $e(v) = 2$ untuk $\forall v \in V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})\right)$

**Bukti:**

Misalkan anggota ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{11q}$ adalah $\mathbb{Z}_{11q} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{11q-1}\}$, untuk $q$ bilangan prima, dan $q \geq 13$. Berdasarkan definisi pembagi nol, maka $\mathbb{Z}_{11q}$ memiliki himpunan pembagi nol yaitu $Z\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})\right) = \{\overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \dots, \overline{11q-1}, \overline{q}, \overline{2q}, \overline{3q}, \dots, \overline{10q}\}$. Banyaknya anggota dari $Z\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})\right)$ adalah $\left|Z\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})\right)\right| = (q-1) + 10 = q + 9$. Jadi, graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})$ mempunyai order $q + 9$. Berdasarkan definisi graf pembagi nol, titik $\overline{11i}$ dengan $i = 1,2, \dots, q-1$ hanya akan terhubung langsung ke titik $\overline{qj}$ dengan $j = 1,2, \dots, 10$, sehingga graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.16 Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{\boldsymbol{11q}})$

Jadi, $\Gamma(\mathbb{Z}_{11q}) \cong K_{q-1,10}$ dengan $V_1 = \{\overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \dots, \overline{11q-1}\}$ dan $V_2 = \{\overline{q}, \overline{2q}, \overline{3q}, \dots, \overline{10q}\}$. Jika $v \in V_1$, maka jarak terjauh dari $v$ adalah jarak untuk titik di $V_1$ selain $v$ sendiri. Jadi, $e(v) = 2$ untuk $\forall v \in V_1$. Jika $v \in V_2$, maka jarak terjauh dari $v$ adalah jarak untuk titik di $V_2$ selain $v$ sendiri. Jadi, $e(v) = 2$ untuk $\forall v \in V_2$. ■

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{11q}$ diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 3.11 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{11q}}$ untuk $\boldsymbol{q}$ Bilangan Prima

| $\mathbb{Z}_{11q}$ | $\boldsymbol{q}$ | $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{11q})$ | $\boldsymbol{E_1}\left(\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{11q})\right)$ | $\boldsymbol{E_2}\left(\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{11q})\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{Z}_{143}$ | 13 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{143})$ | $88 = 4 \cdot 22 = 4(13+9)$ | $480 = 40 \cdot 12 = 40(13-1)$ |
| $\mathbb{Z}_{187}$ | 17 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{187})$ | $104 = 4 \cdot 26 = 4(17+9)$ | $640 = 40 \cdot 16 = 40(17-1)$ |
| $\mathbb{Z}_{209}$ | 19 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{209})$ | $112 = 4 \cdot 28 = 4(19+9)$ | $720 = 40 \cdot 18 = 40(19-1)$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\mathbb{Z}_{11q}$ | $q$ | $\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})$ | $4(q+9)$ | $40(q-1)$ |

**Teorema 3.4** Misalkan $\mathbb{Z}_{11q}$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan untuk $q$ bilangan prima dan $q \geq 13$, maka $E_1$ adalah indeks eksentrisitas Zagreb pertama yaitu $E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})\right) = 4(q+9)$ dan $E_2$ adalah indeks eksentrisitas Zagreb kedua yaitu $E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})\right) = 40(q-1)$

**Bukti:**

Berdasarkan Lemma 3.4, maka indeks eksentrisitas Zagreb pertama adalah:

$$E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})\right) = \sum_{v \in V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})\right)} e(v)^2$$

$$= (q+9) \cdot 2^2$$

$$= 4(q+9)$$

Karena $\Gamma(\mathbb{Z}_{11q}) \cong K_{q-1,10}$, maka banyaknya sisi pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})$ adalah $10(q-1)$. Jadi, indeks eksentrisitas Zagreb kedua adalah:

$$E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})\right) = \sum_{uv \in E\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})\right)} e(u)e(v)$$

$$= 10(q-1) \cdot 2 \cdot 2$$

$$= 40(q-1)$$

■

### 3.1.5 Rumus Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk $p, q$ Bilangan Prima

Berdasarkan perhitungan beberapa sampel graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}, \mathbb{Z}_{5q}, \mathbb{Z}_{7q}, \mathbb{Z}_{11q}$ maka didapatkan pola eksentrisitas pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ sebagai berikut:

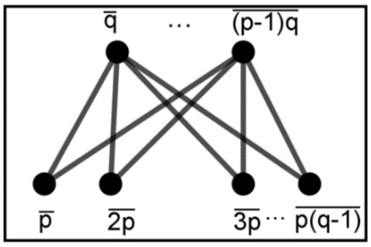
Tabel 3.12 Eksentrisitas Titik pada Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{pq})$

| $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{pq})$ | $\boldsymbol{p}$ | $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{v})$ |
|---|---|---|
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})$ | 3 | 2 |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})$ | 5 | 2 |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})$ | 7 | 2 |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})$ | 11 | 2 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ | $p$ | 2 |

**Lemma 3.5** Eksentrisitas titik $v$ pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ dengan $p, q$ bilangan prima, $p \geq 3$, dan $p < q$ adalah $e(v) = 2$ untuk $\forall v \in V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right)$

**Bukti:**

Misalkan anggota ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{pq}$ adalah $\mathbb{Z}_{pq} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{pq-1}\}$, untuk $p, q$ bilangan prima, $p \geq 3$ dan $p < q$. Berdasarkan definisi pembagi nol, maka $\mathbb{Z}_{pq}$ memiliki himpunan pembagi nol yaitu $Z\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \{\bar{p}, \overline{2p}, \overline{3p}, \dots, \overline{p(q-1)}, \bar{q}, \overline{2q}, \overline{3q}, \dots, \overline{(p-1)q}\}$. Banyaknya anggota dari $Z\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right)$ adalah $\left|Z\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right)\right| = (q-1) + (p-1) = q + p - 2$. Jadi, graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ mempunyai order $q + p - 2$. Berdasarkan definisi graf pembagi nol, titik $\overline{pi}$ dengan $i = 1,2, \dots, q-1$ hanya akan terhubung langsung ke titik $\overline{qj}$ dengan $j = 1,2, \dots, p-1$, sehingga graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.17 Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{pq})$

Jadi, $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq}) \cong K_{q-1,p-1}$ dengan $V_1 = \{\bar{p}, \overline{2p}, \overline{3p}, \dots, \overline{p(q-1)}\}$ dan $V_2 = \{\bar{q}, \overline{2q}, \overline{3q}, \dots, \overline{(p-1)q}\}$. Jika $v \in V_1$, maka jarak terjauh dari $v$ adalah jarak untuk titik di $V_1$ selain $v$ sendiri. Jadi, $e(v) = 2$ untuk $\forall v \in V_1$. Jika $v \in V_2$, maka jarak terjauh dari $v$ adalah jarak untuk titik di $V_2$ selain $v$ sendiri. Jadi, $e(v) = 2$ untuk $\forall v \in V_2$. ■

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{pq}$ secara umum diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 3.13 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk $\boldsymbol{p,q}$ Bilangan Prima

| $\mathbb{Z}_{pq}$ | $p$ | $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ | $E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq}))$ | $E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq}))$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{Z}_{3q}$ | 3 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})$ | $4(q+1) = 4(q+3-2)$ | $8(q-1) = 4\cdot 2(q-1)$ $= 4(3-1)(q-1)$ |
| $\mathbb{Z}_{5q}$ | 5 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})$ | $4(q+3) = 4(q+5-2)$ | $16(q-1) = 4\cdot 4(q-1)$ $= 4(5-1)(q-1)$ |
| $\mathbb{Z}_{7q}$ | 7 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{7q})$ | $4(q+5) = 4(q+7-2)$ | $24(q-1) = 4\cdot 6(q-1)$ $= 4(7-1)(q-1)$ |
| $\mathbb{Z}_{11q}$ | 11 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{11q})$ | $4(q+9) = 4(q+11-2)$ | $40(q-1) = 4\cdot 10(q-1)$ $= 4(11-1)(q-1)$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\mathbb{Z}_{pq}$ | $p$ | $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ | $4(q+p-2)$ | $4(p-1)(q-1)$ |

**Teorema 3.5** Misalkan $\mathbb{Z}_{pq}$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan untuk $p, q$ bilangan prima, $p \geq 3$, dan $p < q$, maka $E_1$ adalah indeks eksentrisitas Zagreb pertama yaitu $E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right) = 4(q+p-2)$ dan $E_2$ adalah indeks eksentrisitas Zagreb kedua yaitu $E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right) = 4(p-1)(q-1)$

**Bukti:**

Berdasarkan Lemma 3.5, maka indeks eksentrisitas Zagreb pertama adalah:

$$E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \sum_{v \in V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right)} e(v)^2$$

$$= (q + p - 2) \cdot 2^2$$

$$= 4(q + p - 2)$$

Karena $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq}) \cong K_{q-1,p-1}$, maka banyaknya sisi pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah $(p-1)(q-1)$. Jadi, indeks eksentrisitas Zagreb kedua adalah:

$$E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right) = \sum_{uv \in E\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right)} e(u)e(v)$$

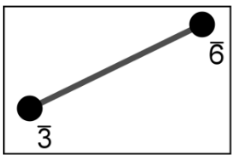
$$= (p-1)(q-1) \cdot 2 \cdot 2$$

$$= 4(p-1)(q-1). \qquad \blacksquare$$

## 3.2 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk $p$ Bilangan Prima

### 3.2.1 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_9$

Anggota dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_9 = \mathbb{Z}_{3^2} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{8}\}$. Seperti cara sebelumnya pada ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}$, dua anggota di $\mathbb{Z}_9$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian maka diperoleh $Z(\mathbb{Z}_9) = \{\bar{3}, \bar{6}\}$, sehingga graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_9$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.18 Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_9)$

Dari Gambar 3.18 diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_9)$ yaitu $e(\bar{3}) = 1$ dan $e(\bar{6}) = 1$.

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_9)$ sebagai berikut:

$$E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_9)) = \sum_{v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_9))} e(v)^2$$

$$= 1^2 \cdot 2$$

$$= 2$$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_9)$ sebagai berikut:

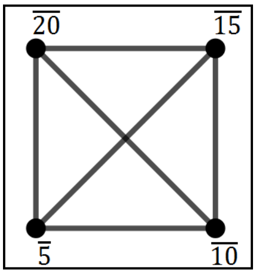
$$E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_9)) = \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_9))} e(u)e(v)$$

$$= (1 \cdot 1) \cdot 1$$

$$= 1$$

### 3.2.2 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{25}$

Anggota dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{25} = \mathbb{Z}_{5^2} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{25}\}$. Seperti cara sebelumnya pada ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}$, dua anggota di $\mathbb{Z}_{25}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian maka diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{25}) = \{\bar{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}\}$, sehingga graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{25}$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.19 Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{25})$

Dari Gambar 3.19 diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$ yaitu:

$e(\overline{5}) = 1 \qquad e(\overline{10}) = 1$

$e(\overline{15}) = 1 \qquad e(\overline{20}) = 1$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$ sebagai berikut:

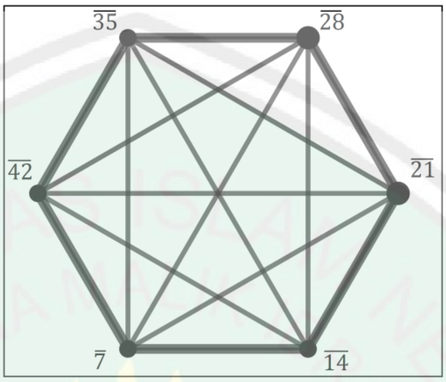
$$
\begin{aligned}
E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{25})) &= \sum_{v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{25}))} e(v)^2 \\
&= 1^2 \cdot 4 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$ sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{25})) &= \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{25}))} e(u)e(v) \\
&= (1 \cdot 1) \cdot 6 \\
&= 6.
\end{aligned}
$$

### 3.2.3 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{49}$

Anggota dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{49} = \mathbb{Z}_{7^2} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{48}\}$. Seperti cara sebelumnya pada ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}$, dua anggota di $\mathbb{Z}_{49}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian maka diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{49}) = \{\overline{7}, \overline{14}, \overline{21}, \overline{28}, \overline{35}, \overline{42}\}$, sehingga graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{49}$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.20 Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{49})$

Dari Gambar 3.20 diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{49})$ yaitu:

$e(\overline{7}) = 1 \qquad e(\overline{14}) = 1 \qquad e(\overline{21}) = 1$

$e(\overline{28}) = 1 \qquad e(\overline{35}) = 1 \qquad e(\overline{42}) = 1$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{49})$ sebagai berikut:

$$E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{49})) = \sum_{v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{49}))} e(v)^2$$

$$= 1^2 \cdot 6$$

$$= 6$$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{49})$ sebagai berikut:

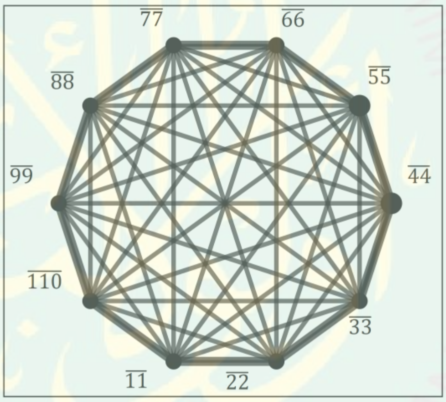
$$E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{49})) = \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{49}))} e(u)e(v)$$

$= (1 \cdot 1) \cdot 15$

$= 15.$

### 3.2.4 Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{121}$

Anggota dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{121} = \mathbb{Z}_{11^2} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{120}\}$. Seperti cara sebelumnya pada ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{3q}$, dua anggota di $\mathbb{Z}_{121}$ jika dioperasikan menggunakan operasi perkalian maka diperoleh $Z(\mathbb{Z}_{121}) = \{\overline{11}, \overline{22}, \overline{33}, \overline{44}, \overline{55}, \overline{66}, \overline{77}, \overline{88}, \overline{99}, \overline{110}\}$, sehingga graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{121}$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.21 Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{121})$

Dari Gambar 3.21 diperoleh nilai eksentrisitas dari masing-masing titik pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{121})$ yaitu:

$e(\overline{11}) = 1$ $e(\overline{22}) = 1$ $e(\overline{33}) = 1$ $e(\overline{44}) = 1$ $e(\overline{55}) = 1$

$e(\overline{66}) = 1$ $e(\overline{77}) = 1$ $e(\overline{88}) = 1$ $e(\overline{99}) = 1$ $e(\overline{110}) = 1$

Dengan demikian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{121})$ sebagai berikut:

$$E_1(\Gamma(\mathbb{Z}_{121})) = \sum_{v \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_{121}))} e(v)^2$$

$= 1^2 \cdot 10$

$= 10$

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{121})$ sebagai berikut:

$$E_2(\Gamma(\mathbb{Z}_{121})) = \sum_{uv \in E(\Gamma(\mathbb{Z}_{121}))} e(u)e(v)$$

$= (1 \cdot 1) \cdot 45$

$= 45.$

### 3.2.5 Rumus Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk $p$ Bilangan Prima

Berdasarkan perhitungan beberapa sampel graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_{25}, \mathbb{Z}_{49}, \mathbb{Z}_{121}$ maka didapatkan pola eksentrisitas pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ sebagai berikut:

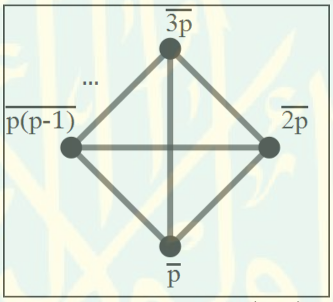
Tabel 3.14 Eksentrisitas Titik pada Graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$

| $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ | $p$ | $e(v)$ |
|---|---|---|
| $\Gamma(\mathbb{Z}_9)$ | 3 | 1 |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$ | 5 | 1 |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{49})$ | 7 | 1 |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{121})$ | 11 | 1 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ | $p$ | 1 |

**Lemma 3.6** Eksentrisitas titik $v$ pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ dengan $p$ bilangan prima dan $p \geq 3$ adalah $e(v) = 1$ untuk $\forall v \in V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right)$

**Bukti:**

Misalkan anggota ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{p^2}$ adalah $\mathbb{Z}_{p^2} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p(p-1)}\}$, untuk $p$ bilangan prima, dan $p \geq 3$. Berdasarkan definisi pembagi nol, maka $\mathbb{Z}_{p^2}$ memiliki himpunan pembagi nol yaitu $Z\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = \{\bar{p}, \overline{2p}, \overline{3p}, \dots, \overline{p(p-1)}\}$. Banyaknya anggota dari $Z\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right)$ adalah $\left|Z\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right)\right| = p - 1$. Jadi, graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ mempunyai order $p - 1$. Berdasarkan definisi graf pembagi nol, antar titik di $\overline{pi}$ dengan $i = 1,2, \dots, p-1$ akan saling terhubung langsung, sehingga graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.22 Graf $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbb{Z}_{p^2})$

Jadi, $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2}) \cong K_{p-1}$ dengan $V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = \{\bar{p}, \overline{2p}, \overline{3p}, \dots, \overline{p(p-1)}\}$. Jika $v \in V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right)$, maka jarak terjauh dari $v$ adalah jarak untuk titik di $V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right)$ selain $v$ sendiri. Jadi, $e(v) = 1$ untuk $\forall v \in V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right)$. ■

Kemudian nilai indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{p^2}$ secara umum diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 3.15 Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk $\boldsymbol{p}$ Bilangan Prima

| $\mathbb{Z}_{p^2}$ | $p$ | $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ | $E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right)$ | $E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{Z}_9$ | 3 | $\Gamma(\mathbb{Z}_9)$ | $2 = 3 - 1$ | $1 = 1 \cdot (3-2) = \frac{(3-1)}{2}(3-2)$ |
| $\mathbb{Z}_{25}$ | 5 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$ | $4 = 5 - 1$ | $6 = 2 \cdot (5-2) = \frac{(5-1)}{2}(5-2)$ |
| $\mathbb{Z}_{49}$ | 7 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{49})$ | $6 = 7 - 1$ | $15 = 3 \cdot (7-2) = \frac{(7-1)}{2}(7-2)$ |
| $\mathbb{Z}_{121}$ | 11 | $\Gamma(\mathbb{Z}_{121})$ | $10 = 11 - 1$ | $45 = 5 \cdot (11-2) = \frac{(11-1)}{2}(11-2)$ |
| $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $\mathbb{Z}_{p^2}$ | $p$ | $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ | $p - 1$ | $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ |

**Teorema 3.6** Misalkan $\mathbb{Z}_{p^2}$ adalah ring komutatif dengan unsur kesatuan untuk $p$ bilangan prima dan $p \geq 3$, maka $E_1$ adalah indeks eksentrisitas Zagreb pertama yaitu $E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = (p-1)$ dan $E_2$ adalah indeks eksentrisitas Zagreb kedua yaitu $E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$

**Bukti:**

Berdasarkan Lemma 3.6, maka indeks eksentrisitas Zagreb pertama adalah:

$$E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = \sum_{v \in V\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right)} e(v)^2$$

$$= (p-1) \cdot 1^2$$

$$= p - 1$$

Karena $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2}) \cong K_{p-1}$, maka banyaknya sisi pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ adalah $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$. Jadi, indeks eksentrisitas Zagreb kedua adalah:

$$E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = \sum_{uv\in E\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right)} e(u)e(v)$$

$$= \frac{(p-1)(p-2)}{2} \cdot 1 \cdot 1$$

$$= \frac{(p-1)(p-2)}{2}. \qquad \blacksquare$$

**3.3 Konsep Tolong Menolong dalam Pandangan Islam**

Kajian teori graf dalam al-Quran telah dijelaskan dalam Bab II, QS. al-Hasyr ayat 9 di mana setiap manusia dianjurkan untuk saling tolong menolong terhadap orang lain. Berdasarkan penjelasan ayat وَيُؤْثِرُونَ عَلَىٰ أَنْفُسِهِمْ وَلَوْ كَانَ بِهِمْ خَصَاصَةٌ ۚ "*dan mereka mengutamakan (orang-orang muhajirin), atas diri mereka sendiri, sekalipun mereka dalam kesusahan*" di dalam tafsir Ibn Katsir, bahwa mereka (Anshor) lebih mendahulukan orang-orang yang membutuhkan daripada kebutuhan diri mereka sendiri. Dan mereka memulai dengan orang lain sebelum diri mereka sendiri, meskipun mereka sendiri membutuhkannya. HR. Muslim dalam Prasetyo (2014) juga menjelaskan dari Abu Hurairah, Rasulullah Saw bersabda:

"*Barangsiapa memberikan jalan keluar atas kesusahan dunia yang dihadapi oleh seorang mukmin, maka Allah akan memberinya jalan keluar atas kesusahan yang dihadapinya di hari kiamat kelak. Barangsiapa memudahkan kesulitan seseorang, maka Allah akan memudahkan kesulitannya baik di dunia maupun di akhirat. Allah akan selalu membantu hamba-Nya selama hambanya tersebut membantu saudaranya*".

Ini menunjukkan bahwa Allah menganjurkan setiap muslim hendaknya dapat saling membantu dan meringankan permasalahan muslim lainnya.

Dengan demikian, berdasarkan penjelasan tafsir surat al-Hasyr ayat 9 dan HR. Muslim tentang tolong menolong dalam pandangan Islam, Allah telah menyuruh kita untuk saling tolong menolong kepada sesama manusia dalam mengerjakan kebaikan. Sebagai umat muslim, maka selayaknya anjuran tersebut ditaati dan diamalkan, termasuk oleh ilmuwan matematika dalam menghasilkan rumus baru agar dapat menyelesaikan suatu permasalahan matematika. Hal ini dimaksudkan untuk meringankan atau mempermudah pembaca dalam melakukan perhitungan berdasarkan teorema-teorema baru yang telah terbentuk.

# BAB IV

# PENUTUP

## 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan maka dapat disimpulkan beberapa rumus umum indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan $\mathbb{Z}_{pq}$ dan $\mathbb{Z}_{p^2}$ untuk $p$,$q$ bilangan prima sebagai berikut:

1. Indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ untuk $p, q$ bilangan prima, $p \geq 3$, dan $p < q$ adalah
$$E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right) = 4(q + p - 2) \text{ dan } E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})\right) = 4(p - 1)(q - 1).$$
2. Indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ untuk $p$ bilangan prima dan $p \geq 3$ adalah
$$E_1\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = p - 1 \text{ dan } E_2\left(\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})\right) = \frac{(p-2)(p-1)}{2}.$$

## 4.2 Saran

Berdasarkan kesimpulan, pada penelitian ini indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua diperoleh dari graf pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan. Penelitian selanjutnya diharapkan dapat menemukan teorema terkait indeks eksentrisitas Zagreb pertama dan kedua pada graf yang lainnya atau pada graf dari grup lainnya.

## DAFTAR RUJUKAN


Abdussakir, Azizah, N.N., dan Nofandika, F.F. 2009. *Teori Graf: Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi*. Malang: UIN Malang Press.

Anderson, D.F. & Livingston, P.S. 1999. The Zero-Divisor Graph of A Commutative Ring. *Journal of Algebra*, 217 (2): 434–447.

Chartrand, Gery dan Lesniak, Linda. 1986. *Graph and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Ghoffar, A., dkk. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Khasanah, I.N. 2018. *Jumlah Jarak Eksentrik Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $Z_p \times Z_q$ dengan p,q Bilangan Prima*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Lee, D.W. 2013. Lower and Upper Bounds of Zagreb Eccentricity Indices on Unicyclic Graphs. *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, 12 (7): 403–410.

Luo, Z. & Wu, J. 2014a. Multiplicative Zagreb Eccentricity Indices of Some Composite Graphs. *Transactions on Combinatorics*, 3 (2): 21–29.

Luo, Z. & Wu, J. 2014b. Zagreb Eccentricity Indices of the Generalized Hierarchical Product Graphs and Their Applications. *Journal of Applied Mathematics*, 10 (1): 1–9.

Patty, H.W.M. 2016. Sifat-Sifat Semigrup Sebagai Graf Pembagi Nol. Prosiding Seminar Nasional Aljabar, Penerapan, dan Pembelajarannya. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma. 16-17 September 2016.

Prasetyo, N.F. 2014. *Altruisme dalam Perspektif Islam pada Karyawan Perpustakaan "X"*. Skripsi tidak dipublikasikan. Surakarta: Universitas Muhammadiyah Surakarta.

Raisinghania, M.D. & Aggarwal, R, S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar.

Riyanti, B., Mariatul, K. & Fransiskus, F. 2018. Graf Pembagi Nol dan Graf Total pada Kode Genetik. *Jurnal BIMASTER*, 7 (4): 369-378.

Rokhmah, N.F. 2018. *Automorfisme Graf Pembagi Nol dari Gelanggang Himpunan Bilangan Bulat Modulo Tak Prima*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Setyawan, Yudi. 2014. Visualisasi Graf dan Algoritma-Algoritma dalam Teori Graf menggunakan Beberapa Paket Software. Prosiding Seminar Nasional Aplikasi Sains & Teknologi. Yogyakarta: IST AKPRIND. 15 November 2014.

Soleha, Dian W.S. & Satrio A.W. 2015. Kajian Sifat–Sifat Graf Pembagi-Nol dari Ring Komutatif dengan Elemen Satuan. Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika. Surabaya: Universitas Negeri Surabaya. 25 April 2015.

Sugiarto, K., Mamika, U.R. & Ni, W.S. 2018. Analisis Automorfisma Graf Pembagi-nol dari Ring Komutatif dengan Elemen Satuan. *Jurnal Eigen Mathematics*, 1 (1): 1–9.

Vukicevic, D. & Graovac, A. 2010. Note On The Comparison of The First and Second Normalized Zagreb Eccentricity Indices. *Acta Chimica Slovenica*, 57 (3): 524–528.

## RIWAYAT HIDUP

Tia Wahyu Septiana, lahir di Kabupaten Ponorogo pada tanggal 14 September 1996 dan biasa dipanggil Tia. Tinggal di Dukuh Nglodo RT/RW 01/03 Desa Bancar Kecamatan Bungkal Ponorogo. Anak tunggal dari pasangan bapak Imam Basori dan ibu Mujiati.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN 2 Bancar dan lulus pada tahun 2009. Setelah itu melanjutkan sekolah di SMPN 1 Bungkal dan lulus pada tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMAN 3 Ponorogo dan lulus pada tahun 2015. Selanjutnya pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, dia berperan aktif pada organisasi intra kampus dalam rangka mengembangkan kompetensi akademiknya. Dia pernah menjadi anggota Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika pada periode 2016/2017.

**KEMENTERIAN AGAMA RI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI**
**MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933**

## BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Tia Wahyu Septiana
NIM : 15610082
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Indeks Eksentrisitas Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Unsur Kesatuan
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Mohammad Jamhuri, M.Si

| No | Tanggal | Hal | Tanda Tangan |
|---|---|---|---|
| 1. | 8 Februari 2019 | Konsultasi BAB I dan II | 1. |
| 2. | 12 Februari 2019 | Konsultasi Kajian Keagamaan BAB I dan II | 2. |
| 3. | 18 Februari 2019 | Konsultasi BAB I, II, dan III | 3. |
| 4. | 13 Maret 2019 | ACC untuk Seminar Proposal | 4. |
| 5. | 13 Maret 2019 | ACC untuk Seminar Proposal | 5. |
| 6. | 18 April 2019 | Konsultasi BAB III | 6. |
| 7. | 26 April 2019 | Revisi BAB III dan Konsultasi BAB IV | 7. |
| 8. | 29 April 2019 | Konsultasi Kajian Keagamaan BAB III | 8. |
| 9. | 7 Mei 2019 | ACC Keseluruhan | 9. |
| 10. | 7 Mei 2019 | ACC Kajian Keagamaan Keseluruhan | 10. |

Malang, 7 Mei 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001