PENERAPAN METODE EKSPANSI (G'/G) DALAM MENYELESAIKAN PERSAMAAN KORTEWEG-DE VRIES-BURGERS (KdVB)

SKRIPSI

OLEH
LAZATIN 'ANIQOH
NIM. 15610068

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PENERAPAN METODE EKSPANSI (G'/G) DALAM MENYELESAIKAN PERSAMAAN KORTEWEG-DE VRIES-BURGERS (KdVB)

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Lazatin 'Aniqoh
NIM. 15610068

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PENERAPAN METODE EKSPANSI (G'/G) DALAM MENYELESAIKAN PERSAMAAN KORTEWEG-DE VRIES-BURGERS (KdVB)

SKRIPSI

Oleh
Lazatin 'Aniqoh
NIM. 15610068

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 10 Mei 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Mohammad Jamhuri, M.Si	Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIP.19810502 200501 1 004	NIP.19900511 20160801 1 057

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PENERAPAN METODE EKSPANSI (G'/G) DALAM MENYELESAIKAN PERSAMAAN KORTEWEG-DE VRIES-BURGERS (KdVB)

SKRIPSI

Oleh
Lazatin 'Aniqoh
15610068

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai salah satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 27 Mei 2019

Penguji Utama	: Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.	....
Ketua Penguji	: H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	: Mohammad Jamhuri, M.Si	....
Anggota Penguji	: Muhammad Khudzaifah, M.Si	....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Lazatin 'Aniqoh
NIM	:	15610068
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Penerapan Metode Ekspansi (G'/G) Dalam Menyelesaikan Persamaan Korteweg-De Vries-Burgers (KdVB)

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 Mei 2019
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
TGL.
1C2AEAFF708942947
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Lazatin 'Aniqoh
NIM. 15610068

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTO

"Keajaiban Adalah Nama Lain Dari Kerja Keras"

(Kang Tae Joon – *To The Beautiful You*)

"*Love Yourself*"

-BTS -

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Skripsi ini dipersembahkan untuk:

Orang tua penulis Bapak Sunarko dan Ibu Susiani yang selalu menyebutkan penulis dalam doanya, yang selalu memberikan semangat serta kasih sayang tak ternilai, serta untuk kedua adik penulis, Bayhaqi Izuhdin dan Muhammad In’am Attaqi yang selalu menghibur penulis.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Bapak Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

5. Bapak Muhammad Khudzaifah, M.Si. selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Bu Ari Kusumastuti, M.Pd M.Si, selaku dosen wali yang selalu memberikan motivasi dan arahan kepada penulis.
7. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam proses perkuliahan.
8. Bapak dan Ibu serta adik tercinta yang selalu memberikan do'a, semangat dan motivasi demi keberhasilan penulis.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 10 Mei 2019

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

BAB IV PENUTUP

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

‘Aniqoh, Lazatin. 2019. **Penerapan Metode Ekspansi (G’/G) Dalam Menyelesaikan Persamaan Korteweg-De Vries-Burgers (KdVB).** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing : (I) Mohammad Jamhuri, M.Si., (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Kata kunci : Metode Ekspansi (G’/G), Persamaan Korteweg-De Vries-Burgers

Persamaan Korteweg-De Vries-Burgers merupakan salah satu persamaan differensial parsial nonlinier yang membahas mengenai suatu gelombang yang lemah. Persamaan ini merupakan kombinasi dari persamaan KdV dengan Persamaan Burgers. Penelitian ini membahas mengenai penyelesaian persamaan korteweg-de vries-burgers menggunakan metode ekspansi (G’/G). Metode Ekspansi (G’/G) merupakan metode yang menggunakan polinomial (G’/G) sebagai solusi dari persamaan differensial parsial nonlinier. Pertama-tama Persamaan KdVB diubah kedalam bentuk PDB, kemudian mencari kesetimbangan homogen persaman. Selanjutnya mengasumsikan bahwa solusi persamaan KdVB dapat diekspresikan kedalam polinomial (G’/G). Dengan mengumpulkan (G’/G) yang berorde sama, maka akan didapatkan beberapa parameter. Kemudian parameter disubstitusikan kedalam polinomial (G’/G) sehingga diperoleh sebuah solusi umum gelombang berjalan dari persamaan KdVB yang terbukti eksak.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

‘Aniqoh, Lazatin. 2019. **The Application of (G’/G) Expansion Method for Solving Korteweg-De Vries-Burgers Equation.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors : (I) Mohammad Jamhuri, M.Si., (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Keyword : (G’/G) Expansion Method, KdVB Equation

The Korteweg-De Vries-Burgers equation is one of the nonlinear partial differential equations which deals with a weak wave. This equation is a combination of the KdV equation with the Burgers Equation. This study discusses the solution to the korteweg-de-vries-burgers equation using the expansion method (G '/G). This method used polynomials (G '/ G) as a solution for nonlinear partial differential equations. First the KdVB equation is converted into the form of ODE (Ordinary Differential Equation), then we have to looks for a homogeneous equilibrium. Then, we assume that the solution of KdVb equation can be expressed as a polynomial (G '/ G). By collecting (G ’/ G) with the same order, the several parameters will be obtained. The parameters are substituted into the polynimial (G’/G), so we have travelling wave solution of KdVB equation that proven to be exact.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ملخص

عنيقة, لز ت. ٢٠١٩. **تطبيق طريقة التوسع (G '/ G) لحل معادلة *Korteweg-De Vries-Burgers*.**

بحث جامعي. شعبة الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، الجامعة الإسلامية الحكومية في مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشارون: (١) محمد جمهوري ، ماجستير ، (٢) محمد خذيفة ، ماجستير

الكلمة الرئيسية: (G '/ G) طريقة التوسع ، معادلة KdVB

معادلة *Korteweg-De Vries-Burgers* هي معادلة تفاضلية جزئية غير خطية تتعامل مع موجة ضعيفة. هذه المعادلة هي مزيج من معادلة *KdV* مع معادلة *Burgers*. تتناول هذه الدراسة حل معادلة *Korteweg-De Vries-Burgers* باستخدام طريقة التمدد (G'/G) . استخدمت هذه الطريقة كثيرات الحدود (G '/ G) كحل للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية. يتم تحويل معادلة KdVB إلى المعادلة التفاضلية العادية ، ثم يتعين علينا البحث عن توازن متجانس. بعد ذلك ، نفترض أنه يمكن التعبير عن حل معادلة KdVB باعتباره متعدد الحدود (G '/ G). من خلال جمع (G '/ G) بنفس الترتيب ، سيتم الحصول على العديد من المعلمات. ثم يتم استبدال المعلمات في الحدود (G '/ G) بحيث يكون حل السفر لمعادلة KdVB دقيقًا.

.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari, seringkali kita menemukan fenomena alam yang dapat dimodelkan secara matematis dengan suatu persamaan differensial baik persamaan differensial biasa maupun persamaan differensial parsial. Gelombang merupakan salah satu fenomena yang dapat dimodelkan dengan persamaan differensial parsial baik linier maupun nonlinier. Salah satu persamaan yang dapat memodelkan gelombang tersebut adalah persamaan Korteweg-De Vries-Burgers. Persamaan Korteweg-De Vries-Burgers merupakan kombinasi persamaan KdV dengan Persamaan Burgers. Persamaan ini menggambarkan masalah yang lebih kompleks karena memuat suku dispersif pada persamaan KdV dan suku disipatif pada persamaan Burgers. Adapun persamaan ini biasanya terlibat dalam permasalahan fisika seperti aliran cairan yang memuat gelembung udara, seperti aliran air dalam pipa minyak, memodelkan gelombang tsunami, dan sebagainya (Ahmad, 2016).

Solusi analitik dari persamaan KdVB pertama kali ditemukan oleh Xiong pada tahun 1989. Semenjak itu, banyak sekali penelitian yang membahas mengenai penyelesaian persamaan ini, baik dalam penyelesaian secara analitik maupun numerik. Salah satunya adalah penelitian dari Ahmad (2016) dimana dalam penelitian tersebut, Ahmad menyelesaikan persamaan KdVB secara numerik. Seiring berkembangnya waktu metode penyelesaiannya pun semakin beragam,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

diantaranya Metode Analisis Painleve, Metode Ansatz, Metode Fungsi Eliptic Jacobian, dan sebagainya (Feng, 2007).

Allah berfirman dalam surat Az-Zumar ayat 18:

ٱلَّذِينَ يَسۡتَمِعُونَ ٱلۡقَوۡلَ فَيَتَّبِعُونَ أَحۡسَنَهُۥٓۚ أُوْلَٰٓئِكَ ٱلَّذِينَ هَدَىٰهُمُ ٱللَّهُۖ وَأُوْلَٰٓئِكَ هُمۡ أُوْلُواْ ٱلۡأَلۡبَٰبِ ١٨

"*yang mendengarkan perkataan lalu mengikuti apa yang paling baik diantaranya. Mereka itulah orang-orang yang telah diberi petunjuk Allah dan mereka itulah orang-orang yang mempunyai akal*" (Q.S. Az-Zumar : 18).

Menurut Shihab (2002), dalam ayat ini kita dianjurkan untuk selalu berbuat baik kepada siapapun. Seseorang yang senang melakukan kebaikan, akan semakin tertarik dengan kebaikan itu. Apabila dihadapkan dengan dua hal yaitu baik dan buruk, maka ia cenderung memilih mengerjakan yang baik. Lalu apabila ia menemukan hal yang lebih baik, maka ia akan memilih hal yang lebih baik itu. Kemudian apabila mereka menemukan dua hal yang benar dan yang lebih benar, Maka ia akan mengambil jalan yang lebih benar tersebut. Hal itu dikarenakan mereka bersungguh-sungguh dalam mendengarkan sebuah perkataan.

Sejatinya, itulah salah satu hakikat manusia yang diberikan akal supaya berpikir dan bisa menentukan mana yang baik dan mana yang buruk. Demikian pula jika diberikan suatu persoalan. Ada banyak cara yang digunakan untuk menyelesaikannya. Akan tetapi, manusia tentu saja memilih cara yang lebih mudah dalam menyelesaikan persoalan tersebut. Hal ini dapat diimplementasikan dalam matematika. Apabila menemukan sebuah persoalan matematika yang rumit, maka seorang pelajar akan mencari metode yang paling mudah dalam menyelesaikan persamaan tersebut. Adapun caranya adalah dengan mempelajari,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

membuktikan serta membandingkan beberapa metode untuk dicari metode yang paling efektif dalam menyelesaikan masalah tersebut.

Metode Ekspansi (G'/G) pertama kali diperkenalkan pada tahun 2008 oleh Mingliang Wang, Ziangzheng Li, dan Jinliang Zhang. Metode ini sering digunakan dalam mencari solusi gelombang berjalan (*travelling wave*) pada evolusi persamaan nonlinier atau persamaan differensial parsial nonlinier. Ide pokok pada metode ini adalah bahwa solusi dari persamaan differensial nonlinier dapat diekspresikan dengan polinomial $\left(\frac{G'}{G}\right)$, dimana $G = G(\xi)$ yang merupakan persamaan differensial biasa linier orde kedua. Adapun $G' = \frac{dG(\xi)}{d\xi}$ dengan $\xi = x - Vt$. Sehingga akan diperoleh beberapa solusi (Wang., dkk., 2008).

Penelitian mengenai metode ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$ telah banyak dilakukan sebelumnya. Diantaranya adalah penelitian yang dilakukan oleh Hasibun Naher (2011). Pada penelitian tersebut, Prof . Naher mengkontruksi gelombang berjalan pada persamaan Caudrey-Dodd-Gibbon orde 5 menggunakan metode ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$. Dengan metode tersebut, diperoleh tiga bentuk solusi yaitu hiperbolik, trigonometrik, dan fungsi rasional. Selanjutnya adalah Penelitian Wafaa M.Taha., dkk.(2013), mengaplikasikan metode ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$ untuk menyelesaikan model gelombang ion-akustik pada fisika plasma. Pada penelitiannya, metode ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$ berhasil mendapatkan solusi eksak dari persamaan tersebut. Resty Bangun Pratiwi (2015) dalam skripsinya membahas mengenai penyelesaian persamaan KdV orde tinggi menggunakan metode ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$. Adapun hasil yang diperoleh adalah bahwa gelombang yang diperoleh memiliki satu titik puncak

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

serta besarnya amplitudo dipengaruhi oleh besaran koefisien-koefisien orde tingginya.

Metode ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$ serta penerapannya dalam menyelesaikan persamaan differensial parsial nonlinier dalam fisika matematika menjadi topik yang menarik untuk dikaji bagi para peneliti. Seiring berkembangnya zaman, metode ini juga terus berkembang dengan modifikasi-modifikasi serta kombinasi dengan metode lain.

Penelitian ini bertujuan untuk menyelesaikan suatu persamaan yang berupa persamaan nonlinier menggunakan metode ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$. Adapun persamaan nonlinier yang dipilih adalah persamaan Korteweg - de Vries-Burgers yang telah dijelaskan diawal. Sehingga dari pemaparan latar belakang diatas, maka penulis tertarik untuk membuat penelitian yang berjudul "*Penerapan Metode Ekspansi* $\left(\frac{G'}{G}\right)$ *Dalam Menyelesaikan Persamaan Korteweg-De Vries-Burgers (KdVB)*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka rumusan masalah yang dapat dibuat adalah :

1. Bagaimana penerapan Metode Ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$ dalam menyelesaikan Persamaan KdVB?
2. Bagaimana validitas solusi KdVB menggunakan Metode Ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1. Untuk mencari solusi analitik dari Persamaan KdVB menggunakan Metode Ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$.
2. Untuk mengetahui validitas dari solusi KdVB yang dihasilkan dari Metode Ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$.

1.4 Manfaat Penelitian

Beberapa manfaat dalam penelitian ini, diantaranya adalah sebagai berikut :

1. Memperoleh solusi analitik dari Metode Ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$ sebagai alternatif penyelesaian persamaan differensial parsial nonlinier.
2. Mengetahui bahwa metode ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$ adalah metode yang akurat digunakan untuk persamaan KdVB.

1.5 Batasan Masalah

Beberapa batasan masalah yang terdapat dalam penelitian ini adalah :

1. Penelitian ini menggunakan persamaan Korteweg de Vries-Burger (KdVB) yang merupakan differensial parsial nonlinier. Persamaan ini diambil pada sebuah artikel yang berjudul "*Burgers-Korteweg-de Vries Equation and Its Traveling Solitary Waves*" yang ditulis oleh Feng Zhao-sheng dan Meng Qing-guo pada tahun 2008. Adapun persamaannya adalah

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xx} + s u_{xxx} = 0$$

$$\alpha, \beta, s \in \mathbb{R}\ dan\ \alpha, \beta, s \neq 0$$

2. Penelitian ini hanya terfokus pada satu solusi umum dari persamaan KdVB tanpa memperhatikan kondisi tertentu.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur dengan mempelajari beberapa buku, jurnal, dan referensi lain yang mendukung penelitian ini. Studi literatur dimulai dengan mempelajari persamaan KdVB, kemudian mempelajari Metode Ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$.

Langkah-langkah untuk mencari solusi analitik Persamaan KdVB menggunakan Metode Ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$ adalah sebagai berikut :

1. Persamaan KdVB diubah kedalam bentuk PDB. Dengan mengasumsikan bahwa $u(x,t) = u(\xi)$ dan $\xi = x - Vt$, maka akan diperoleh sebuah persamaan differensial biasa yang bergantung pada ξ.
2. Hasil transformasi yang berupa Persamaan Differensial Biasa (PDB) kemudian diintegralkan terhadap ξ. Selanjutnya menentukan m untuk Polinomial $\left(\frac{G'}{G}\right)$ berdasarkan hasil pengintegralan dengan kesetimbangan homogen antara turunan orde tertinggi dengan orde tertinggi suku nonlinier.
3. Menerapkan PDB linier orde 2 yaitu $G'' + \lambda G' + \mu G = 0$ dan polinomial $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ke dalam hasil transformasi PDP ke PDB.
4. Mengumpulkan masing-masing polinomial $\left(\frac{G'}{G}\right)$ yang berorde sama dan masing-masing disamadengankan nol. Maka akan diperoleh persamaan aljabar untuk masing-masing koefisiennya.
5. Mensubstitusikan solusi umum PDB linier orde 2 dan masing-masing koefisien kedalam hasil transformasi PDP ke PDB. Sehingga akan diperoleh solusi umum gelombang KdVB.
6. Membuktikan bahwa solusi umum yang diperoleh adalah solusi eksak

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan digunakan untuk mempermudah dalam memahami penelitian ini. Dalam sistematika penulisan penelitian ini terbagi menjadi empat bab dan masing-masing bab dibagi dalam subbab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bagian ini, dijelaskan gambaran umum Persamaan KdVB, Metode Ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$, Persamaan differensial biasa orde 2, aturan rantai, metode deret pangkat serta kajian berupa integrasi sains dan Al Quran.

Bab III Pembahasan

Bab ini menguraikan tentang penyelesaian Persamaan KdVB menggunakan Metode Ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$ dan Validasi keabsahan solusi KdVB.

Bab IV Penutup

Bagian ini memuat kesimpulan dan saran dari hasil pembahasan penelitian yang dilakukan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Korteweg-De Vries-Burgers

Pada tahun 1969, Su dan Gardner menurunkan sebuah persamaan yang disebut dengan persamaan Korteweg-de Vries-Burgers (KdVB). Persamaan ini pertama kali diturunkan untuk memodelkan permasalahan aproksimasi sistem persamaan gelombang nonlinier yang lemah. Persamaan KdVB adalah persamaan model universal sederhana yang muncul sebagai pendekatan pertama dalam deskripsi gelombang nonlinear dispersif – disipatif dan nonlinieritas dalam gelombang yang merambat dalam tabung elastis yang diisi cairan (Fathy, 2013).

Persamaan Korteweg-De Vries-Burgers dapat dituliskan sebagai :

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xx} + s u_{xxx} = 0 \tag{2.1}$$

Keterangan :

u_t : $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$

u_x : $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$

u_{xx} : $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$

u_{xxx} : $\dfrac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}$

dimana α, β dan s adalah konstanta real serta $\alpha, \beta, s \neq 0$. Persamaan KdVB seringkali diterapkan pada permasalahan fisis yang berhubungan dengan gelombang. Seperti contohnya adalah pada aliran cairan yang memuat gelembung udara seperti aliran dalam pipa minyak, gelombang plasma yang memuat efek disipatif, perambatan undular bores pada air dangkal yang dibahas sebagai salah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

satu model gelombang tsunami, gelombang dengan cairan kental seperti turbulensi dan aliran darah dalam nadi (Ahmad, 2016). Selain itu, juga digunakan sebagai model dalam teori kristal lattice, yaitu teori sirkuit nonlinier dan dinamika atmosfer (Feng & Meng, 2007).

Persamaan KdVB disebut juga kombinasi antara persamaan Korteweg-De Vries dengan Persamaan Burgers. Hal ini disebabkan jika $s \to 0$ maka persamaan direduksi menjadi persamaan burgers yaitu (Feng & Meng, 2007) :

$$u_t - \alpha u u_x + \beta u_{xx} = 0 \tag{2.2}$$

dan jika $\beta \to 0$ maka persamaan akan berubah menjadi persamaan KdV

$$u_t - \alpha u u_x + s u_{xxx} = 0 \tag{2.3}$$

Kedua persamaan diatas dapat diselesaikan secara analitik dan diperoleh solusi eksak untuk gelombang berjalannya adalah

$$u(x,t) = \frac{2k}{\alpha} + \frac{2\beta k}{\alpha} \tanh k(x - 2kt)$$

dan

$$u(x,t) = \frac{12sk^2}{\alpha} \operatorname{sech}^2 k(x - 4sk^2 t)$$

Sejak tahun 1980-an, banyak sekali matematikawan atau fisikawan yang membahas solusi analitik dari persamaan KdVB menggunakan metode tertentu. Xiong pada tahun 1989 mengemukakan solusi persamaan KdVB untuk pertama kalinya (Feng & Meng, 2007).

2.2 Metode Ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$

Metode ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$ adalah salah satu metode yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan differensial parsial non linier, terutama dalam problema

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

matematika fisika. Metode ini diperkenalkan oleh Mingliang Wang, Xiangzheng Li, dan Jinlian Zhang pada tahun 2008. Tujuan diciptakannya metode ini adalah untuk mencari solusi dari gelombang berjalan pada persamaan evolusi nonlinier. Metode ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$ didasarkan pada asumsi bahwa solusi gelombang berjalan dapat dijabarkan dengan polinomial $\left(\frac{G'}{G}\right)$, dimana $G = G(\xi)$ merupakan orde kedua dari persamaan differensial biasa linier dan bergantung pada ξ dengan $\xi = x - Vt$ (Ayati, 2014).

Misal diberikan sebuah persamaan nonlinier dengan dua variabel bebas yaitu x dan t berupa

$$P(u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, \cdots) = 0 \tag{2.4}$$

dimana $u(x,t)$ merupakan fungsi yang tidak diketahui, dan P adalah polinomial dalam $u = u(x,t)$ dengan turunan-turunannya. Maka, langkah-langkah dalam penyelesaian persamaan tersebut menggunakan metode ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$ adalah sebagai berikut :

Langkah 1

Untuk menemukan solusi-solusi dari gelombang berjalan pada persamaan (2.4), maka pertama mengkombinasikan variabel bebas x dan t kedalam suatu variabel baru

$$\xi = x - Vt$$

atau dengan kata lain,

$$u(x,t) = u(\xi), \quad \xi = x - Vt, \tag{2.5}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Konstanta V merupakan suatu kecepatan gelombang. Kemudian, gelombang berjalan pada variabel (2.5) dapat direduksi kedalam sebuah persamaan differensial biasa untuk $u = u(\xi)$.

$$P(u, -Vu', u', V^2u'', -Vu'', u'', \dots) = 0 \tag{2.6}$$

Kemudian persamaan (2.6) diintegralkan untuk mengatur konstanta integrasi supaya menjadi nol untuk kesederhanaan (Akcagil & Aydemir, 2016)

Langkah 2

Misalkan benar bahwa solusi dari persamaan differensial biasa dapat di ekspresikan dengan polinomial $\left(\frac{G'}{G}\right)$, yaitu :

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i \tag{2.7}$$

dimana $\alpha_m \neq 0$ dan $G = G(\xi)$ merupakan persamaan differensial biasa nonlinier orde kedua dalam

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0, \tag{2.8}$$

dengan

$$G' = \frac{dG}{d\xi}, G'' = \frac{d^2G}{d\xi^2}$$

$\alpha_m, \cdots, \lambda$ dan μ merupakan suatu konstanta yang akan ditentukan nanti. Parameter m merupakan bilangan bulat positif yang dapat dicari dengan keseimbangan homogen antara turunan orde tertinggi dan formula nonlinier pada persamaan differensial dalam persamaan (2.7) (Ayati, 2014).

Langkah 3

Mensubstitusikan persamaan (2.7) dan (2.8) ke persamaan (2.6), yaitu :

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$U' = -\sum_{i=1}^{m} i\alpha_i \left(\left(\frac{G'}{G}\right)^{i+1} + \lambda \left(\frac{G'}{G}\right)^{i} + \mu \left(\frac{G'}{G}\right)^{i-1} \right)$$

$$U'' = \sum_{i=1}^{m} i\alpha_i \begin{pmatrix} (i+1)\left(\frac{G'}{G}\right)^{i+2} + (2i+1)\lambda \left(\frac{G'}{G}\right)^{i+1} + i(\lambda^2+\mu)\left(\frac{G'}{G}\right)^{i} \\ +(2i-1)\lambda\mu \left(\frac{G'}{G}\right)^{i-1} + (i-1)\mu^2 \left(\frac{G'}{G}\right)^{i-2} \end{pmatrix}$$

(Akcagil & Aydemir, 2016).

Kemudian mengumpulkan semua formulasi dengan orde yang sama $\left(\frac{G'}{G}\right)$. Ruas kiri pada (2.6) diubah ke bentuk polinomial $\left(\frac{G'}{G}\right)$. Kemudian menyamakan masing-masing polinomial dengan nol sehingga diperoleh sebuah himpunan persamaan aljabar untuk $\alpha_m, \cdots, V, \lambda,$ dan μ (Wang, dkk, 2008).

Langkah 4

Mengasumsikan bahwa konstanta $\alpha_m, \cdots, V, \lambda,$ dan μ dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan aljabar pada langkah 3. Karena solusi umum pada orde kedua persamaan differensial biasa linier atau persamaan (2.8) diketahui, maka substitusikan $\alpha_m, \cdots, V,$ ke dan (2.9) persamaan (2.7). Sehingga akan didapatkan lebih dari satu solusi dari gelombang berjalan pada persamaan evolusi nonlinier (Wang, dkk, 2008).

2.3 Persamaan Differensial Biasa Orde 2 Linier

William E. Boyce (2009) mengatakan bahwa persamaan differensial biasa orde 2 sangatlah penting dalam mempelajari persamaan differensial. Terdapat dua alasan mendasar dipelajarinya persamaan ini, diantaranya bahwa persamaan differensial biasa orde dua kaya akan struktur teoritis yang mendasari sejumlah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

metode untuk mendapatkan suatu solusi. Selain itu persamaan tersebut sangat penting dalam penyelidikan kasus tertentu dibidang matematika fisika. Tanpa persamaan ini, ilmu mekanika fluida, konduksi panas, serta gelombang elektromagnetik tidaklah berkembang.

Bentuk umum persamaan differensial biasa orde 2 adalah sebagai berikut :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \tag{2.9}$$

dimana f adalah fungsi yang diberikan dan t yang merupakan variabel bebas. y pada persamaan diatas merupakan variabel terikat yang bergantung pada variabel bebas. Persamaan (2.9) dikatakan persamaan linier bila fungsi f memiliki bentuk

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y \tag{2.10}$$

Dalam persamaan tersebut, $g, p,$ dan q adalah fungsi tertentu terhadap variabel t, akan tetapi tidak bergantung pada y. Persamaan tersebut dapat dituliskan menjadi

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \tag{2.11}$$

Suatu PDB Orde 2 dikatakan nonhomogen bila bentuk $g(t)$ pada persamaan diatas bernilai tidak nol. sebaliknya, jika sama dengan nol, maka persamaan tersebut dinamakan homogen. Sehingga PDB orde 2 yang homogen dapat dituliskan (Boyce, 2009) :

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0 \tag{2.12}$$

Jika $p(t)$, $q(t)$ merupakan suatu konstanta sembarang, maka dapat dikatakan persamaan tersebut adalah PDB orde 2 homogen dengan koefisien konstan. Solusi umum persamaan tersebut dapat dicari menggunakan persamaan karakteristik.

$$ay''(t) + py'(t) + qy(t) = 0 \tag{2.13}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Maka solusi umumnya akan berbentuk

$$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{2.14}$$

Misal

$$y(t) = e^{rt} \tag{2.15}$$

$$y'(t) = re^{rt} \tag{2.16}$$

$$y''(t) = r^2 e^{rt} \tag{2.17}$$

Substitusi persamaan (2.15), (2.16), dan (2.17) ke persamaan (2.13) sehingga diperoleh

$$ar^2 e^{rt} + pre^{rt} + qe^{rt} = 0$$

$$e^{rt}(ar^2 + pr + q) = 0$$

karna $e^{rt} \neq 0$, maka

$$ar^2 + pr + q = 0 \tag{2.18}$$

Setelah itu akan diperoleh nilai r_1 dan r_2. Ada 3 bentuk solusi yang bergantung pada akar-akar r_1 dan r_2 dan diskriminannya $(D = p^2 - 4aq)$ yaitu :

1. Jika akar-akarnya berbeda dan $D > 0$

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \tag{2.19}$$

2. Jika akar-akarnya kembar dan $D = 0$

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t} \tag{2.20}$$

3. Jika akar-akarnya beda dan $D < 0$

   Pada kasus ini, terdapat akar-akar yang kompleks. Sehingga solusinya adalah

$$y(t) = e^{at}\left(c_1 e^{(a+bi)t} + c_2 e^{(a-bi)t}\right) \tag{2.21}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.4 Aturan Rantai

Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$, maka dalam notasi Leibniz aturan rantai dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Bukti :

Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ dan bahwa g terdifferensialkan di x, kemudian f terdifferensialkan di $u = g(x)$. Apabila x menerima pertambahan Δx, maka pertambahan yang bersesuaian dalam u dan y akan diberikan oleh

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

$$\Delta y = f\big(g(x + \Delta x)\big) - f\big(g(x)\big)$$

$$= f(u + \Delta u) - f(u)$$

Sehingga

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Karena x terdifferensialkan di x, maka kontinu. Sehingga $\Delta x \to 0$ memaksa $\Delta u \to 0$, oleh karena itu

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

(Purcell, 1987).

Teorema 2.1 Jika suatu fungsi $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ yang terdiferensialkan pada t, serta suatu fungsi $z = f(x, y)$ yang terdiferensialkan pada $(x, y) = \big(x(t), y(t)\big)$, Sehingga fungsi $z = f(x(t), y(t))$ juga terdiferensialkan di t dan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

(Anton, H.,dkk).

Bukti:

Karena fungsi $z = f(x, y)$ terdiferensialkan di $(x, y) \in D$, sehingga berlaku:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}.\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}.\Delta y + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y$$

Dimana $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ dan $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ dengan

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0$$

Dan

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$$

Untuk $\Delta t \neq 0$ berlaku

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\Delta x}{\Delta t}\varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\Delta t}\varepsilon_2$$

Karena $\Delta x = (t + \Delta t) - x(t)$ dan $\Delta y = (t + \Delta t) - y(t)$ sehingga untuk $t \to 0$ maka $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, mengakibatkan ε_1 dan ε_2 adalah fungsi dari Δt dengan

$$\lim_{\Delta t\to 0} \varepsilon_1(\Delta t) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0$$

Dan

$$\lim_{\Delta t\to 0} \varepsilon_2(\Delta t) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0$$

Untuk $\Delta t \to 0$, diperoleh

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \text{ dan } \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$$

Selanjutnya dari beberapa hasil sebelumnya, maka

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\Delta x}{\Delta t}\varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\Delta t}\varepsilon_2\right]$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga diperoleh

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Berdasarkan rumus diatas, dapat diketahui bahwa z merupakan fungsi satu peubah terhadap t untuk $\frac{dz}{dt}$ dan dapat dipandang juga sebagai suatu fungsi dua peubah terhadap x dan y untuk $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2.5 Metode Deret Pangkat

Metode deret pangkat adalah metode yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan differensial biasa. Solusi dari penyelesaian menggunakan metode tersebut akan menghasilkan formulasi deret pangkat. Adapun deretnya dapat digunakan untuk menghitung nilai, kurva grafik, membuktikan formula dan sebagainya (Kreyzig, 2011).

Pada kalkulus, perlu diingat bahwa deret pangkat merupakan deret tak hingga yang dapat dituliskan sebagai

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

dimana x adalah variabel dan $a_1, a_2, \cdots$ adalah konstanta yang merupakan koefisien dari deret tersebut. x_0 adalah konstanta yang merupakan pusat dari deret tersebut. Apabila $x_0 = 0$, maka deret pangkat akan berubah menjadi

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Dan diasumsikan bahwa semua variabel dan konstanta merupakan bilangan real (Kreyzig, 2011).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Solusi deret pangkat ada jika p, q, r pada persamaan

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{2.22}$$

Memiliki bentuk deret pangkat. Lebih tepatnya suatu fungsi disebut analitik pada suatu titik $x = x_0$ jika dapat dipresentasikan dengan deret pangkat dari $x - x_0$ dengan radius konvergensi yang positif. Dengan menggunakan konsep tersebut, Kreyzig (2011) dalam bukunya menyatakan sebuah teorema untuk bentuk standar persamaan (2.22) yaitu:

Teorema 2.2 Jika $p, q,$ dan r pada persamaan (2.22) analitik pada $x = x_0$, kemudian setiap solusi persamaan merupakan analitik pada $x - x_0$ dan disajikan dalam bentuk deret pangkat dari $x - x_0$ dengan radius konvergensi yang positif.

Teori lebih lanjut mengenai deret pangkat yaitu jika

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m$$

Maka jika diturunkan akan diperoleh hasil

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} m a_m (x - x_0)^{m-1}$$

(Kreyzig, 2011).

2.6 Kajian Islam

Allah berfirman dalam QS. Al Baqoroh : 164,

إِنَّ فِي خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ وَٱلْفُلْكِ ٱلَّتِي تَجْرِي
فِي ٱلْبَحْرِ بِمَا يَنفَعُ ٱلنَّاسَ وَمَآ أَنزَلَ ٱللَّهُ مِنَ ٱلسَّمَآءِ مِن مَّآءٍ فَأَحْيَا بِهِ ٱلْأَرْضَ

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

بَعۡدَ مَوۡتِهَا وَبَثَّ فِيهَا مِن كُلِّ دَآبَّةٖ وَتَصۡرِيفِ ٱلرِّيَٰحِ وَٱلسَّحَابِ ٱلۡمُسَخَّرِ بَيۡنَ ٱلسَّمَآءِ وَٱلۡأَرۡضِ لَأٓيَٰتٖ لِّقَوۡمٖ يَعۡقِلُونَ ١٦٤

" *Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya malam dan siang, bahtera yang berlayar dilaut membawa apa yang berguna bagi manusia, dan apa yang Allah turunkan dari langit berupa air, lalu dengan air itu, Allah hidupkan bumi yang sudah mati(kering-nya). Dan Dia sebarkan dibumi itu segala jenis hewan, serta pengisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi; sungguh terdapat tanda-tanda (keesaan dan kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan.*"

Berikut ini adalah kajian dari masing-masing kalimat dalam surat Al Baqoroh : 164 berdasarkan kajian tafsir Ibnu Katsir :

Yang pertama adalah kalimat "*Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi*". Hal ini dimaksudkan dalam hal ketinggian, kelembutan, dan keluasannya serta bintang-bintangnya yang bergerak dan yang tetap dalam peredaran orbitnya. Dan dalam ketebalan serta kerendahan bumi, gunung, laut, kesunyian, kesenyapan dan keramaiannya serta segala manfaat yang ada didalamnya. Pergantian siang dan malam. yang satu datang, yang lain pergi. Yang satu mengikuti dan menggantikan yang lain. Tanpa terlambat sedetikpun, sebagaimana firman Allah dalam QS. Yasin : 40, yang artinya

"*Tidaklah mungkin bagi matahari mendapatkan bulan dan malam pun tidak dapat mendahului siang. Dan masing-masing beredar pada garis edarnya*" (Yasin: 40).

Kadang-kadang yang satu panjang, dan yang lain pendek. Terkadang yang satu mengambil, kemudian saling menggantikan, sebagaimana Allah Ta'ala berfirman, "*Dia memasukkan malam kedalam siang dan memasukkan siang kedalam malam*," artinya menambah yang satu dan mengurangi yang lain serta sebaliknya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

"*Dan bahtera yang berlayar dilaut membawa apa yang berguna bagi manusia.*" Maksudnya adalah dalam perbuatan, Allah menaklukkan lautan melalui penggerakan bahtera dari satu sisi ke sisi yang lain adalah demi penghidupan manusia dan perolehan manfaat dari musim tersebut, serta pengangkutan barang ini kepada mereka dan pengangkutan barang dari mereka kepada pihak lain.

"*Dan apa yang Allah turunkan dari langit berupa air, kemudian dengan air itu Allah menghidupkan bumi setelah ia mati*". Hal ini sesuai firman Allah dalam QS. Yasin : 33-36, "*Dan suatu tanda (kekuasaan Allah yang besar) bagi mereka adalah bumi yang mati. Kami hidupkan bumi itu dan Kami keluarkan darinya biji-bijian, maka darinyalah mereka makan. dan dari diri mereka maupun dari apa yang tidak mereka ketahui*".

"*Dan dia sebarkan dibumi semua jenis hewan*" dalam segala perkara dan berbagai keragamannya. Dia mengetahui semua itu, memberinya rizki, dan tidak ada satu binatangpun yang tidak diketahui-Nya.

"Dan mengisarkan angin," yakni kadang-kadang angin itu membawa rahmat, terkadang membawa adzab dan terkadang membawa kegembiraan berupa hujan yang kemudian mengalir ke berbagai tujuannya. *"Dan penaklukan awan antara langit dan bumi,"* maksudnya bergerak antara langit dan bumi dan ditaklukkan kepada wilayah dan daerah yang dikehendaki Allah sebagai perkara yang dikelola-Nya. *"Benar-benar terdapat tanda-tanda bagi kaum yang memikirkan."* Menunjukkan kepada kewahdaniatan Allah, sebagaimana Dia berfirman, *"Sesungguhnya dalam penciptaan langit, bumi, dan pergantian malam dan siang merupakan tanda-tanda kebesaran Allah bagi orang-orang yang mau bernalar"* (Ar-Rifa'i, 1999).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini terdiri dari dua subbab yaitu subbab 3.1 yang menjelaskan mengenai penerapan metode ekspansi (G'/G) pada persamaan KdVB dan subbab 3.2 yang menjelaskan uji validasi solusi yang diperoleh dari penerapan metode tersebut.

3.1 Penerapan Metode Ekspansi $\left(\frac{G'}{G}\right)$ pada Persamaan KdVB

Pada penelitian ini, persamaan KdVB yang digunakan adalah persamaan yang diambil dalam sebuah jurnal yang ditulis oleh Zhao-sheng FENG dan Qing-guo MENG pada tahun 2007. Adapun persamaannya adalah

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xx} + s u_{xxx} = 0 \tag{3.1}$$

dimana, $\alpha, \beta, s \neq 0$

$$u = u(x,t) \tag{3.2}$$

Langkah 1

Solusi dari persamaan KdVB dapat dimisalkan sebagai sebuah paket gelombang. Sedangkan profil dari gelombang itu sendiri memiliki bilangan gelombang, periode gelombang, dan panjang gelombang. Adapun bentuk gelombangnya masih akan dicari. Profil gelombang sendiri dapat dinyatakan dalam bentuk sebuah fungsi yang tidak diketahui yaitu $u(x,t) = u(kx - \omega t)$. Dimana k adalah bilangan gelombang dan ω merupakan kecepatan gelombang. Dalam fisika, gelombang yang dikenal dirumuskan sebagai $y = \pm A \sin(\omega t \pm kx)$. Ini menunjukkan bahwa solusi gelombang, solusinya bisa bermacam-macam bentuk fungsinya asalkan memuat nilai x dan t atau dengan kata lain bergantung

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

pada kedua variabel tersebut. Pada penelitian ini, profil gelombang dari persamaan KdVB masih belum diketahui, sehingga perlu dicari.

$$u(x,t) = u(kx - \omega t)$$

Penelitian ini mengacu pada sebuah artikel Feng dan Meng yang juga membahas tentang persamaan KdVB. Artikel tersebut menggunakan bilangan gelombang yang bernilai 1 dalam satu periode gelombang. Sehingga nilai kecepatan dalam fungsi tersebut akan bernilai $\frac{\omega}{k}$. Selanjutnya memisalkan nilai $\frac{\omega}{k} = V$ untuk efektifitas penulisan. Dengan kata lain,

$$u(x,t) = u\left(x - \frac{\omega}{k}t\right)$$

$$u(x,t) = u(x - Vt)$$

Penggunaan permisalan gelombang pada persamaan tersebutlah yang digunakan sebagai acuan untuk mentransformasikan bentuk persamaan KdVB ke dalam persamaan differensial biasa. Artinya solusi yang seharusnya bergantung pada dua variabel bebas, diubah terlebih dahulu kedalam bentuk solusi yang hanya bergantung pada satu variabel bebas. Dengan memisalkan $\xi = x - Vt$ maka solusi persamaan dapat dituliskan sebagai

$$u(x,t) = u(\xi) \tag{3.3}$$

sehingga dari permisalan tersebut, maka langkah selanjutnya adalah mentransformasikan dari Persamaan KdVB ke PDB yang dapat di selesaikan menggunakan aturan rantai sesuai teori pada subbab (2.4).

Selanjutnya gelombang berjalan pada persamaan (3.3) dapat direduksi kedalam sebuah persamaan differensial biasa (Akcagil & Aydemir, 2016). Untuk mentransformasikan persamaan (3.1) kedalam persamaan differensial biasa

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

digunakan aturan rantai sebagaimana yang telah dijelaskan pada subbab (2.4) yaitu:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{du(\xi)}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = u'(\xi)(-V) = -Vu'(\xi)$$

$$u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = u(\xi)\left(\frac{du(\xi)}{d\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = u(\xi)\cdot u'(\xi)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{du(\xi)}{d\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial u'(\xi)}{\partial x} = \frac{d(\xi)}{d\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} = u''(\xi) \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial u''(\xi)}{\partial x} = \frac{d(\xi)}{d\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} = u'''(\xi)$$

Selanjutnya persamaan (3.4) disubstitusi ke persamaan (3.1) sehingga menjadi

$$-Vu'(\xi) + \alpha u(\xi)\, u'(\xi) + \beta u''(\xi) + su'''(\xi) = 0 \tag{3.5}$$

Kemudian mengintegralkan masing-masing ruas terhadap ξ untuk mendapatkan nilai pangkat tertinggi dan orde tertinggi persamaan. Hal ini dilakukan untuk mencari suatu nilai yang akan dibahas selanjutnya.

$$\int \left(-Vu'(\xi) + \alpha u(\xi)\, u'(\xi) + \beta u''(\xi) + su'''(\xi)\right) d\xi = \int 0\, d\xi$$

$$\int -Vu'(\xi)\, d\xi + \int \alpha u(\xi) u'(\xi)\, d\xi + \int \beta u''(\xi) d\xi + \int su'''(\xi) d\xi = C$$

$$\int -V\frac{du(\xi)}{d\xi} d\xi + \int \alpha u(\xi)\frac{du(\xi)}{d\xi} d\xi + \int \beta\frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} d\xi + \int s\frac{d^3u(\xi)}{d\xi^3}\, d\xi = C$$

$$-Vu(\xi) + \frac{1}{2}\alpha u^2(\xi) + \beta u'(\xi) + su''(\xi) = C \tag{3.6}$$

$$C - Vu(\xi) + \frac{1}{2}\alpha u^2(\xi) + \beta u'(\xi) + su''(\xi) = 0 \tag{3.7}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Langkah 2

Solusi persamaan KdVB diasumsikan dapat diekspresikan dengan polinomial $\left(\frac{G'}{G}\right)$ yaitu

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^i \tag{3.8}$$

Asumsi sebuah solusi persamaan differensial biasa dapat diekspresikan sebagai deret, valid berdasarkan teori dari metode deret pangkat yang telah diuraikan dalam subbab (2.5). Adapun deret pangkat yang dimaksud adalah

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

Dimana x adalah variabel dan $a_1, a_2, \cdots$ adalah konstanta (Kreyzig,2011). Apabila $x_0 = 0$ maka deret pangkat dari x adalah

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Selanjutnya, dianalogikan nilai x sama dengan $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ sehingga diperoleh persamaan (3.8). Adapun $\alpha_m \neq 0 \ dan \ G = G(\xi)$ merupakan persamaan differensial biasa linier orde dua yang didefinisikan sebagai

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0 \tag{3.9}$$

Dengan λ dan μ adalah konstanta. Adapun m merupakan bilangan positif dengan $m \leq m - 1$. Bilangan m dapat dicari dengan menyelesaikan nilai pangkat tertinggi suku nonlinier serta orde tertinggi turunan pada fungsi yang disajikan pada persamaan (3.7). Oleh karena itu penulis perlu menurunkan persamaan (3.8) sesuai dengan kebutuhan pada persamaan (3.7).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\left(\alpha_m \left(\frac{G'(\xi)}{G\xi}\right)^m + \cdots + \alpha_0\right)$$

$$= m\,\alpha_m \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} \cdot \frac{d}{d\xi}\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right) + \cdots + 0$$

$$= \ m\,\alpha_m \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} \cdot \left[\frac{\left(\frac{d\,(G'(\xi)}{d\xi}\cdot G(\xi) - G'(\xi)\cdot\frac{d(G(\xi))}{d\xi}\right)}{G(\xi)^2}\right] + \cdots + 0$$

$$= \ m\,\alpha_m \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} \cdot \left[\frac{\left(G''(\xi)\cdot G(\xi) - G'(\xi)\cdot G'(\xi)\right)}{G(\xi)^2}\right] + \cdots + 0$$

$$= m\alpha_m \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} \cdot \left[\frac{G''(\xi)}{G(\xi)} - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^2\right] + \cdots + 0$$

$$= m\alpha_m \left[\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} \cdot \frac{G''(\xi)}{G(\xi)} - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} \cdot \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^2\right] + \cdots + 0 \qquad (3.10)$$

Karena persamaan tersebut mengandung nilai $G''(\xi)$, maka nilai tersebut perlu diubah agar dalam persamaan hanya terdapat nilai $G'(\xi)$ dan $G(\xi)$ saja. Sehingga berdasarkan persamaan (3.9), diperoleh

$$G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0$$

$$G''(\xi) = -\lambda G'(\xi) - \mu G(\xi) \qquad (3.11)$$

Substitusi persamaan (3.11) ke persamaan (3.10) yang mengandung nilai $G''(\xi)$, sehingga nilai $\frac{du}{d\xi}$ menjadi,

$$\frac{du}{d\xi} = m\alpha_m \left[\frac{G'(\xi)^{m-1}G''(\xi)}{G(\xi)^m} - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m+1}\right] + \cdots + 0$$

$$= -m\alpha_m \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m+1} + m\alpha_m \left(\frac{G'(\xi)^{m-1}\left(-\lambda G'(\xi) - \mu G(\xi)\right)}{G(\xi)^m}\right)$$

$$+ \cdots + 0$$

$$= -m\alpha_m \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m+1} - m\alpha_m\lambda \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^m - m\alpha_m\mu \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} \qquad (3.12)$$

$$+ \cdots + 0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selanjutnya melakukan perhitungan untuk turunan kedua dari persamaan (3.8). Karena turunan pertama sudah didapatkan, maka untuk mencari turunan kedua hanya perlu menurunkan persamaan (3.12) sekali.

$$\begin{aligned}\frac{d^2u(\xi)}{d\xi^2} &= \frac{d}{d\xi}\left(\frac{d}{d\xi}\left(\alpha_m\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^m + \cdots + 0\right)\right)\\ &= \frac{d}{d\xi}\left[-m\,\alpha_m\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m+1} - m\,\alpha_m\lambda\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^m\right.\\ &\qquad \left. - m\,\alpha_m\mu\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} + \cdots + 0\right]\end{aligned} \tag{3.13}$$

Untuk mempermudah perhitungan, maka suku-suku dari persamaan (3.13) dapat di misalkan dengan suatu variabel lain sebagai berikut :

$$a_1(\xi) =- m\,\alpha_m\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m+1}$$

$$a_2(\xi) = - m\,\alpha_m\lambda\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^m$$

$$a_3(\xi) = -m\,\alpha_m\mu\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1}$$

Karena perhitungan yang panjang, maka penurunan hanya hanya dihitung sampai suku ketiga saja. Hal ini dikarenakan, dari perhitungan ketiga suku tersebut kita sudah mendapatkan pangkat tertinggi penurunan.

$$\begin{aligned}\frac{da_1(\xi)}{d\xi} &= (-m)(m+1)\alpha_m\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^m\left(\frac{G''(\xi)}{G(\xi)} - \frac{G'(\xi)^2}{G(\xi)^2}\right)\\ &= (-m)(m+1)\alpha_m\left[\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^m\left(\frac{G''(\xi)}{G(\xi)}\right) - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^m\frac{G'(\xi)^2}{G(\xi)^2}\right]\end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= (-m)(m+1)\alpha_m \left[\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^m \left(\frac{(-\lambda G'(\xi) - \mu G(\xi))}{G(\xi)}\right) - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^m \frac{G'(\xi)^2}{G(\xi)^2} \right]$$

$$= (-m)(m+1)\alpha_m \left[-\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^m \left(\frac{\lambda G'(\xi)}{G(\xi)}\right) - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^m \left(\frac{\mu G(\xi)}{G(\xi)}\right) - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m+2} \right]$$

$$= (-m)(m+1)\alpha_m \left[-\lambda \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m+1} - \mu \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^m - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m+2} \right]$$

$$= (m)(m+1)\alpha_m \lambda \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m+1} + m(m+1)\alpha_m \mu \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^m + m(m+1)\alpha_m \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m+2} \quad (3.14)$$

$$\frac{da_2(\xi)}{d\xi} = (-m)\alpha_m \lambda\, m \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} \left[\frac{G''(\xi)}{G(\xi)} - \frac{G'(\xi)^2}{G(\xi)^2}\right]$$

$$= (-m)\alpha_m \lambda\, m \left[\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} \frac{G''(\xi)}{G(\xi)} - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} \frac{G'(\xi)^2}{G(\xi)^2} \right]$$

$$= (-m)\alpha_m \lambda\, m \left[\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} \frac{G''(\xi)}{G(\xi)} - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} \frac{G'(\xi)^2}{G(\xi)^2} \right]$$

$$= (-m)\alpha_m \lambda\, m \left[\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} \left(\frac{-\lambda G'(\xi) - \mu G(\xi)}{G(\xi)}\right) - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} \frac{G'(\xi)^2}{G(\xi)^2} \right]$$

$$= (-m)\alpha_m \lambda m \left[\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} \left(\frac{-\lambda G'(\xi)}{G(\xi)}\right) - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} \left(\frac{\mu G(\xi)}{G(\xi)}\right) - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} \frac{G'(\xi)^2}{G(\xi)^2} \right]$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= (-m)\alpha_m\lambda\, m\left[\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1}\left(\frac{-\lambda G'(\xi)}{G(\xi)}\right) - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1}\left(\frac{\mu G(\xi)}{G(\xi)}\right) - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1}\frac{G'(\xi)^2}{G(\xi)^2}\right]$$

$$= -(m^2\alpha_m\lambda)\left[-\lambda\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m} - \mu\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m+1}\right]$$

$$= m^2\alpha_m\lambda^2\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m} + m^2\alpha_m\lambda\mu\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} + m^2\alpha_m\lambda\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m+1} \tag{3.15}$$

$$\frac{da_3(\xi)}{d\xi} = (-m)(m-1)\alpha_m\mu\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-2}\left[\frac{G''(\xi)}{G(\xi)} - \frac{G'(\xi)^2}{G(\xi)^2}\right]$$

$$= (-m)(m-1)\alpha_m\mu\left[\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-2}\frac{G''(\xi)}{G(\xi)} - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-2}\frac{G'(\xi)^2}{G(\xi)^2}\right]$$

$$= (-m)(m-1)\alpha_m\mu\left[\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-2}\left(\frac{-\lambda G'(\xi) - \mu G(\xi)}{G(\xi)}\right) - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m}\right]$$

$$= (-m)(m-1)\alpha_m\mu\left[-\lambda\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-2}\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right) - \mu\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-2} - \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m}\right]$$

$$= (m)(m-1)\alpha_m\mu\lambda\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} + (m)(m-1)\alpha_m\mu^2\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-2} + (m)(m-1)\alpha_m\mu\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m} \tag{3.16}$$

Dari penjabaran diatas, maka diperoleh turunan kedua dari persamaan (3.8) yaitu :

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$u''(\xi) = \frac{da_1(\xi)}{d\xi} + \frac{da_2(\xi)}{d\xi} + \frac{da_3(\xi)}{d\xi} + \cdots$$

$$\begin{aligned} u''(\xi) = (m)(m+1)\alpha_m\lambda\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m+1} &+ m(m+1)\alpha_m\mu\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m} \\ &+ m(m+1)\alpha_m\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m+2} + m^2\alpha_m\lambda^2\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m} \\ &+ m^2\alpha_m\lambda\mu\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} + m^2\alpha_m\lambda\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m+1} \\ &+ m(m-1)\alpha_m\lambda\mu\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m-1} \\ &+ m(m-1)\alpha_m\mu^2\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m} + \cdots + 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Penjabaran persamaan (3.12) dan (3.17) nilainya adalah ekuivalen dengan persamaan yang telah dirumuskan oleh Akcagil & Aydemir (2016) yaitu :

$$u' = -\sum_{i=1}^{m} i\alpha_i\left(\left(\frac{G'}{G}\right)^{i+1} + \lambda\left(\frac{G'}{G}\right)^{i} + \mu\left(\frac{G'}{G}\right)^{i-1}\right) \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} u'' = \sum_{i=1}^{m} i\alpha_i \Bigg((i+1)\left(\frac{G'}{G}\right)^{i+2} &+ (2i+1)\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)^{i+1} \\ &+ i(\lambda^2+2\mu)\left(\frac{G'}{G}\right)^{i} + (2i-1)\mu\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)^{i-1} \\ &+ (i-1)\mu^2\left(\frac{G'}{G}\right)^{i-2}\Bigg) \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} u(\xi)^2 &= \left(\alpha_m\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{m} + \cdots + \alpha_0\right)^2 \\ &= \alpha_m^2\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{2m} + \cdots + \alpha_0^2 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Langkah selanjutnya adalah mencari kesetimbangan homogen dengan mengambil pangkat tertinggi suku nonlinier dan orde tertinggi turunan. Yaitu u'' dan u^2, dimana $u'' = m + 2$ dan $u^2 = 2m$. Sehingga,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$2m = m + 2$$

$$m = 2$$

substitusi nilai m kedalam persamaan (3.8) maka diperoleh solusi dengan polinomial $\left(\frac{G'}{G}\right)$,

$$u(\xi) = \alpha_2\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^2 + \alpha_1\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right) + \alpha_0 \tag{3.21}$$

Selanjutnya mensubstitusi persamaan (3.21) ke persamaan (3.7). Untuk memudahkan perhitungan, maka u^2, u', dan u'' dijabarkan terlebih dahulu. Serta penulisan $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ selanjutnya cukup ditulis dengan $\frac{G'}{G}$ agar lebih ringkas.

$$\begin{aligned} u^2 &= \alpha_2^2\left(\frac{G'}{G}\right)^4 + \alpha_1\alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^3 + \alpha_0\alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + \alpha_1\alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^3 \\ &\quad + \alpha_1^2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + \alpha_0\alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right) + \alpha_0\alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + \alpha_0\alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right) \\ &\quad + \alpha_0^2 \\ &= \alpha_2^2\left(\frac{G'}{G}\right)^4 + 2\alpha_1\alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^3 + 2\alpha_0\alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + \alpha_1^2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 \\ &\quad + 2\alpha_0\alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right) + \alpha_0^2 \end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} u' &= -2\alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^3 - 2\lambda\alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 - 2\alpha_2\mu\left(\frac{G'}{G}\right) - \alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right)^2 - \lambda\alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right) \\ &\quad - \alpha_1\mu \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} u'' &= 6\alpha_2\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)^3 + 6\alpha_2\mu\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + 6\alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^4 + 4\alpha_2\lambda^2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 \\ &\quad +4\alpha_2\lambda\mu\left(\frac{G'}{G}\right) + 4\alpha_2\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)^3 + 2\alpha_2\mu\lambda\left(\frac{G'}{G}\right) + 2\alpha_2\mu^2 \\ &\quad +2\alpha_2\mu\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + 2\alpha_1\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + 2\alpha_1\mu\left(\frac{G'}{G}\right) \\ &\quad +2\alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right)^3 + \alpha_1\lambda^2\left(\frac{G'}{G}\right) + \alpha_1\lambda\mu + \alpha_1\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)^2 \end{aligned} \tag{3.24}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Langkah 3

Mensubstitusikan persamaan (3.22), (3.23), dan (3.24) ke persamaan (3.7)

$$
\begin{aligned}
C - V &\left(\alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + \alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right) + \alpha_0\right) \\
&+ \frac{1}{2}\alpha\left[\alpha_2^2\left(\frac{G'}{G}\right)^4 + 2\alpha_1\alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^3 + 2\alpha_0\alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right. \\
&\left. + \alpha_1^2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + 2\alpha_0\alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right) + \alpha_0^2\right] \\
&+ \beta\left[-2\alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^3 - 2\lambda\alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 - 2\alpha_2\mu\left(\frac{G'}{G}\right)\right. \\
&\left. - \alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right)^2 - \lambda\alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right) - \alpha_1\mu\right] + s[6\alpha_2\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)^3 \\
&+ 6\alpha_2\mu\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + 6\alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^4 + 4\alpha_2\lambda^2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 \\
&+ 4\alpha_2\lambda\mu\left(\frac{G'}{G}\right) + 4\alpha_2\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)^3 + 2\alpha_2\mu\lambda\left(\frac{G'}{G}\right) + 2\alpha_2\mu^2 \\
&+ 2\alpha_2\mu\left(\frac{G'}{G}\right)^2 2\alpha_1\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + 2\alpha_1\mu\left(\frac{G'}{G}\right) + 2\alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right)^3 \\
&+ \alpha_1\lambda^2\left(\frac{G'}{G}\right) + \alpha_1\lambda\mu + \alpha_1\lambda\left(\frac{G'}{G}\right)^2] = 0
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Kemudian mengumpulkan $\left(\frac{G'}{G}\right)$ yang berorde sama,

$$
\begin{aligned}
&\left(C + \alpha_1\lambda\mu s + 2\alpha_2\mu^2 s - \alpha_1\beta\mu + \frac{1}{2}\alpha\alpha_0 - V\alpha_0\right)\left(\frac{G'}{G}\right)^0 \\
&+(\alpha_1\lambda^2 s + 6\alpha_2\lambda\mu s + \alpha\alpha_0\alpha_1 - \alpha_1\beta\lambda + 2\alpha_1\mu s - 2\alpha_2\beta\mu - V\alpha_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^1
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$+\left(\alpha\alpha_0\alpha_2 - 2\alpha_2\beta\lambda + 4\alpha_2\lambda^2 s + 3\alpha_1\lambda s + 8\alpha_2\mu s + \frac{1}{2}\alpha\alpha_1^2 - V\alpha_2 - \alpha_1\beta\right)\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + (\alpha\alpha_1\alpha_2 + 10\alpha_2\lambda s + 2\alpha_1 s - 2\alpha_2\beta)\left(\frac{G'}{G}\right)^3 + \left(6\alpha_2 s + \frac{1}{2}\alpha\alpha_2^2\right)\left(\frac{G'}{G}\right)^4 = 0$$

Setelah itu, mencari masing-masing parameter $\alpha_2, \alpha_1, \mu, \cdots$ dengan cara mengumpulkan suku-suku polinomial $\left(\frac{G'}{G}\right)$ yang berorde sama. Ruas kiri pada (3.26) diubah ke bentuk polinomial $\left(\frac{G'}{G}\right)$. Perhatikan ruas kiri pada persamaan (3.26) hasilnya adalah nol. Karena $\left(\frac{G'}{G}\right)^0$ tidak sama dengan nol, maka pengalinya yang lain haruslah sama dengan nol agar memenuhi persamaan (3.26) yang bernilai nol. Begitu pula pada suku yang lain, $\left(\frac{G'}{G}\right)$ pangkat bilangan positif dan pengalinya memungkinkan nilainya sama dengan nol. Sehingga terbentuklah sistem baru yang dapat dapat dituliskan sebagai berikut :

$$C + \alpha_1\lambda\mu s + 2\alpha_2\mu^2 s - \alpha_1\beta\mu + (1/2)\,\alpha\alpha_0 - V\alpha_0 = 0 \tag{3.27}$$

$$\alpha_1\lambda^2 s + 6\alpha_2\lambda\mu s + \alpha\alpha_0\alpha_1 - \alpha_1\beta\lambda + 2\alpha_1\mu s - 2\alpha_2\beta\mu - V\alpha_1 = 0 \tag{3.28}$$

$$\alpha\alpha_0\alpha_2 - 2\alpha_2\beta\lambda + 4\alpha_2\lambda^2 s + 3\alpha_1\lambda s + 8\alpha_2\mu s + \frac{1}{2}\alpha\alpha_1^2 - V\alpha_2 - \alpha_1\beta = 0 \tag{3.29}$$

$$\alpha\alpha_1\alpha_2 + 10\alpha_2\lambda s + 2\alpha_1 s - 2\alpha_2\beta = 0 \tag{3.30}$$

$$6\alpha_2 s + \frac{1}{2}\alpha\alpha_2^2 = 0 \tag{3.31}$$

Selanjutnya mencari nilai-nilai parameter $\alpha_2, \alpha_1,$ dan V dari sistem tersebut.

a. Mencari nilai α_2

Dari persamaan (3.31) nilai α_2 secara mudah dapat diperoleh, yaitu :

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$6\alpha_2 s + \frac{1}{2}\alpha\alpha_2^2 = 0$$
$$\frac{1}{2}\alpha\alpha_2^2 = -6\alpha_2 s \qquad (3.32)$$
$$\alpha_2 = -\frac{12s}{\alpha}$$

b. Mencari nilai α_1

Adapun nilai α_1 dapat diperoleh dengan mensubstitusi parameter α_2 ke dalam persamaan (3.30).

$$\alpha\alpha_1\alpha_2 + 10\alpha_2\lambda s + 2\alpha_1 s - 2\alpha_2\beta = 0$$
$$\alpha\alpha_1\left(-\frac{12s}{\alpha}\right) + 10\left(-\frac{12s}{\alpha}\right)\lambda s + 2\alpha_1 s - 2\left(-\frac{12s}{\alpha}\right)\beta = 0 \qquad (3.33)$$
$$\alpha_1 = -\frac{12s\lambda}{\alpha} + \frac{12\beta}{5\alpha}$$

c. Mencari nilai V dan μ

Untuk mendapatkan nilai V dan μ , dapat digunakan eliminasi substitusi pada dua persamaan, yaitu persamaan (3.28) dan persamaan (3.29). Pertama, substitusi nilai α_2 dan α_1 yang telah diperoleh kedalam persamaan (3.28) dan (3.29) diperoleh

$$\left(-\frac{12s\lambda}{\alpha} + \frac{12\beta}{5\alpha}\right)\lambda^2 s + 6\left(-\frac{12s}{\alpha}\right)\lambda\mu s + \alpha\alpha_0\left(-\frac{12s\lambda}{\alpha} + \frac{12\beta}{5\alpha}\right)$$
$$-\left(-\frac{12s\lambda}{\alpha} + \frac{12\beta}{5\alpha}\right)\beta\lambda + 2\left(-\frac{12s\lambda}{\alpha} + \frac{12\beta}{5\alpha}\right)\mu s \qquad (3.34)$$
$$-2\left(-\frac{12s}{\alpha}\right)\beta\mu - V\left(-\frac{12s\lambda}{\alpha} + \frac{12\beta}{5\alpha}\right) = 0$$

$$\alpha\alpha_0\left(-\frac{12s}{\alpha}\right) - 2\left(-\frac{12s}{\alpha}\right)\beta\lambda + 4\left(-\frac{12s}{\alpha}\right)\lambda^2 s + 3\left(-\frac{12s\lambda}{\alpha} + \frac{12\beta}{5\alpha}\right)\lambda s$$
$$+8\left(-\frac{12s}{\alpha}\right)\mu s + \frac{1}{2}\alpha\left(-\frac{12s\lambda}{\alpha} + \frac{12\beta}{5\alpha}\right)^2 - V\left(-\frac{12s}{\alpha}\right) \qquad (3.35)$$
$$-\left(-\frac{12s\lambda}{\alpha} + \frac{12\beta}{5\alpha}\right)\beta = 0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selanjutnya mengeliminasi nilai μ supaya hanya tersisa nilai V saja. Sehingga untuk mempermudah perhitungan, maka kumpulkan nilai μ dan V pada persamaan (3.34) dan (3.35) terlebih dahulu.

$$\left(-\frac{72s^2\lambda}{\alpha}+\left(\frac{24}{5}\right)\frac{(-5\lambda\, s+\beta)s}{\alpha}+\frac{24s\beta}{\alpha}\right)\mu+\left(\frac{12}{5}\right)\frac{(-5\lambda\, s+\beta)\lambda^2 s}{\alpha} +\left(\frac{12}{5}\right)(-5\lambda\, s+\beta)\,\alpha_0-\left(\frac{12}{5}\right)\frac{(-5\lambda\, s+\beta)\beta\lambda}{\alpha} -\left(\frac{12}{5}\right)\frac{(-5\lambda\, s+\beta)}{\alpha}V = 0 \tag{3.36}$$

$$-12\alpha_0\, s+\frac{24s\beta\lambda}{\alpha}-\frac{48s^2\lambda^2}{\alpha}+\left(\frac{36}{5}\right)(-5\lambda\, s+\beta)\lambda\frac{s}{\alpha}-96\frac{s^2\mu}{\alpha} +\left(\frac{72}{25}\right)\frac{(-5\lambda\, s+\beta)^2}{\alpha}+\frac{12Vs}{\alpha}-\frac{\left(\frac{12}{5}\right)(-5\lambda\, s+\beta)\beta}{\alpha} = 0 \tag{3.37}$$

Selanjutnya untuk mengeliminasi μ, masing-masing persamaan dikalikan dengan koefisien pada μ. Dengan kata lain, persamaan (3.36) dikalikan dengan koefisien μ pada persamaan (3.37) begitupun sebaliknya.

$$\left[\left(-\frac{72s^2\lambda}{\alpha}+\frac{\left(\frac{24}{5}\right)(-5\lambda\, s+\beta)s}{\alpha}+\frac{24s\beta}{\alpha}\right)\mu \frac{\left(\frac{12}{5}\right)(-5\lambda\, s+\beta)\lambda^2 s}{\alpha}+\left(\frac{12}{5}\right)(-5\lambda\, s+\beta)\,\alpha_0 -\left(\frac{12}{5}\right)\frac{(-5\lambda\, s+\beta)\beta\lambda}{\alpha}-\left(\frac{12}{5}\right)\frac{(-5\lambda\, s+\beta)}{\alpha}V = 0\right]\cdot\left[-96\frac{s^2}{\alpha}\right] \tag{3.38}$$

$$\left[-12\alpha_0\, s+\frac{24s\beta\lambda}{\alpha}-\frac{48s^2\lambda^2}{\alpha}+\left(\frac{36}{5}\right)(-5\lambda\, s+\beta)\lambda\frac{s}{\alpha} -96\frac{s^2\mu}{\alpha}+\left(\frac{72}{25}\right)\frac{(-5\lambda\, s+\beta)^2}{\alpha}+ +\frac{12Vs}{\alpha}-\frac{\left(\frac{12}{5}\right)(-5\lambda\, s+\beta)\beta}{\alpha} = 0\right] \cdot\left[-\frac{72s^2\lambda}{\alpha}+\frac{\left(\frac{24}{5}\right)(-5\lambda\, s+\beta)s}{\alpha}+\frac{24s\beta}{\alpha}\right] \tag{3.39}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Setelah dikalikan, maka dilakukan operasi aritmatika yaitu pengurangan dari persamaan (3.38) dan persamaan (3.39), sehingga diperoleh

$$\left(-\frac{72s^2\lambda}{\alpha}+\frac{\left(\frac{24}{5}\right)(-5\lambda\, s+\beta)s}{\alpha}+\frac{24s\beta}{\alpha}\right)\left(-12\alpha_0 s+\frac{24s\beta\lambda}{\alpha}\right.$$
$$-\frac{48s^2\lambda^2}{\alpha}+\left(\frac{36}{5}\right)\frac{(-5\lambda\, s+\beta)\lambda s}{\alpha}-96\frac{s^2\mu}{\alpha}$$
$$\left.+\left(\frac{72}{25}\right)\frac{(-5\lambda\, s+\beta)^2}{\alpha}+\frac{12Vs}{\alpha}-\left(\frac{12}{5}\right)\frac{(-5\lambda\, s+\beta)\beta}{\alpha}\right)$$
$$+\frac{1}{\alpha}\left(-96s^2\left(\left(\frac{12}{5}\right)\frac{(-5\lambda\, s+\beta)\lambda^2 s}{\alpha}-\frac{72s^2\lambda\mu}{\alpha}\right.\right. \tag{3.40}$$
$$+\left(\frac{12}{5}(-5\lambda\, s+\beta\,)\right)\alpha_0-\left(\frac{12}{5}\right)\frac{(-5\lambda\, s+\beta)\beta\lambda}{\alpha}$$
$$+\left(\frac{24}{5}\right)\frac{(-5\lambda\, s+\beta)\mu s}{\alpha}+\frac{24s\beta\mu}{\alpha}$$
$$\left.\left.-\left(\frac{12}{5}\right)\frac{V(-5\lambda\, s+\beta)}{\alpha}\right)\right)=0$$

$$\frac{576}{125}\;\frac{s\beta(-75\lambda^2 s^2-25\alpha\alpha_0 s+30\beta\lambda s+25Vs+3\beta^2)}{\alpha^2}=0 \tag{3.41}$$

Kemudian persamaan (3.41) diselesaikan sehingga diperoleh nilai V yaitu:

$$V=3\lambda^2 s-\frac{6\beta\lambda}{5}+\alpha_0\alpha-\frac{3\beta^2}{25s} \tag{3.42}$$

Setelah nilai V didapatkan, substitusikan ke persamaan (3.37) untuk mencari nilai μ.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$-12\alpha_0 s+\frac{24s\beta\lambda}{\alpha}-\frac{48s^2\lambda^2}{\alpha}+\left(\frac{36}{5}\right)(-5\lambda\, s+\beta)\lambda\frac{s}{\alpha}-96\frac{s^2\mu}{\alpha}$$
$$+\left(\frac{72}{25}\right)\frac{(-5\lambda\, s+\beta)^2}{\alpha}$$
$$+\left(\frac{12}{25}\right)\frac{(75\lambda^2 s^2+25\alpha\alpha_0 s-30\beta\lambda\, s-3\,\beta^2)}{\alpha} \tag{3.43}$$
$$-\left(\frac{12}{5}\right)\frac{(-5\lambda\, s+\beta)\beta}{\alpha}\;=\;0$$

$$\mu=\frac{\lambda^2}{4}-\frac{\beta^2}{100s^2} \tag{3.44}$$

Langkah 4

Substitusi parameter (3.32) dan (3.33) kedalam persamaan (3.21) sehingga

$$u(\xi)=-\frac{12s}{\alpha}\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^2+\left(-\frac{12s\lambda}{\alpha}+\frac{12\beta}{5\alpha}\right)\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)+\alpha_0 \tag{3.45}$$

Nilai $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ dapat diperoleh dari solusi umum persamaan (3.9), yaitu :

$$G''(\xi)+\lambda G'(\xi)+\mu G(\xi)=0$$

Substitusi nilai μ pada persamaan (3.44) ke dalam persamaan (3.9)

$$G''(\xi)+\lambda G'(\xi)+\left(\frac{\lambda^2}{4}-\frac{\beta^2}{100s^2}\right)G(\xi)=0 \tag{3.46}$$

Untuk mencari solusi umum dari persamaan tersebut, pertama memisalkan

$$G(\xi)=e^{r\xi}$$
$$G'(\xi)=r\cdot e^{r\xi} \tag{3.47}$$
$$G''(\xi)=r^2e^{r\xi}$$

Kemudian mensubstitusikan permisalan diatas kedalam persamaan (3.9) menjadi

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$r^2 e^{r\xi} + \lambda r e^{r\xi} + \left(\frac{\lambda^2}{4} - \frac{\beta^2}{100s^2}\right) e^{r\xi} = 0 \tag{3.48}$$

$$\left(r^2 + \lambda r + \left(\frac{\lambda^2}{4} - \frac{\beta^2}{100s^2}\right)\right) e^{r\xi} = 0 \tag{3.49}$$

karena $e^{r\xi} \neq 0$, maka

$$r^2 + \lambda r + \left(\frac{\lambda^2}{4} - \frac{\beta^2}{100s^2}\right) = 0 \tag{3.50}$$

dan mempunyai akar-akar

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= -\frac{\lambda}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\left(\frac{\lambda^2}{4} - \frac{\beta^2}{100s^2}\right)} \\ r_{1,2} &= -\frac{\lambda}{2} \pm \frac{\beta}{10s} \end{aligned} \tag{3.51}$$

Sehingga solusi persamaan differensial biasa linier orde dua tersebut adalah

$$\begin{aligned} G(\xi) &= C_1 e^{r_1 \xi} + C_2 e^{r_2 \xi} \\ G(\xi) &= C_1 e^{\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\beta}{10s}\right)\xi} + C_2 e^{\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{\beta}{10s}\right)\xi} \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$G'(\xi) = C_1\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\beta}{10s}\right) e^{\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\beta}{10s}\right)\xi} + C_2\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{\beta}{10s}\right) e^{\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{\beta}{10s}\right)\xi} \tag{3.53}$$

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{C_1\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\beta}{10s}\right) e^{\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\beta}{10s}\right)\xi} + C_2\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{\beta}{10s}\right) e^{\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{\beta}{10s}\right)\xi}}{C_1 e^{\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\beta}{10s}\right)\xi} + C_2 e^{\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{\beta}{10s}\right)\xi}} \tag{3.54}$$

Substitusi persamaan (3.54) kedalam persamaan (3.45) diperoleh solusi sebagai berikut :

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$u(\xi) = -\frac{12s}{\alpha}\left(\frac{C_1\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{10s}\right)e^{\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{10s}\right)\xi} + C_2\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{\beta}{10s}\right)e^{\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{\beta}{10s}\right)\xi}}{C_1 e^{\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{10s}\right)\xi} + C_2 e^{\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{\beta}{10s}\right)\xi}}\right)^2 + \left(-\frac{12s\lambda}{\alpha}+\frac{12\beta}{5\alpha}\right)\left(\frac{C_1\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{10s}\right)e^{\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{10s}\right)\xi} + C_2\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{\beta}{10s}\right)e^{\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{\beta}{10s}\right)\xi}}{C_1 e^{\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{10s}\right)\xi} + C_2 e^{\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{\beta}{10s}\right)\xi}}\right) + \alpha_0 \qquad (3.55)$$

Solusi pada persamaan (3.55) merupakan solusi umum yang masih bergantung pada ξ. Selanjutnya, perlu mengubah persamaan (3.55) menjadi sebuah solusi yang bergantung pada x dan t.

$$u(x,t) = -\frac{12s}{\alpha}\left(\frac{C_1\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{10s}\right)e^{\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{10s}\right)(x-Vt)} + C_2\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{\beta}{10s}\right)e^{\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{\beta}{10s}\right)(x-Vt)}}{C_1 e^{\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{10s}\right)(x-Vt)} + C_2 e^{\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{\beta}{10s}\right)(x-Vt)}}\right)^2 + \left(-\frac{12s\lambda}{\alpha}+\frac{12\beta}{5\alpha}\right)\left(\frac{C_1\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{10s}\right)e^{\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{10s}\right)(x-Vt)} + C_2\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{\beta}{10s}\right)e^{\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{\beta}{10s}\right)(x-Vt)}}{C_1 e^{\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{10s}\right)(x-Vt)} + C_2 e^{\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{\beta}{10s}\right)(x-Vt)}}\right) + \alpha_0 \qquad (3.56)$$

Solusi diatas merupakan solusi umum persamaan KdVB dengan nilai $V = 3\lambda^2 s - \frac{6\beta\lambda}{5} + \alpha_0\alpha - \frac{3\beta^2}{25s}$. Solusi khusus dapat diperoleh dengan memberikan suatu kondisi pada konstanta C_1 atau C_2. Kemudian untuk membuktikan bahwa solusi tersebut benar terbukti eksak, maka dilakukan validasi yang akan dijelaskan pada subbab 3.2.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.2 Uji Validitas Solusi KdVB

Suatu solusi dianggap sah sebagai solusi analitik apabila disubstitusi ke persamaan awal akan memenuhi persamaan tersebut. Oleh sebab itu setiap ditemukan solusi, maka akan dicek apakah persamaan tersebut memenuhi persamaan awal. Pada subbab ini akan dijelaskan pembuktian bahwa solusi pada persamaan (3.56) memenuhi persamaan awal (3.1).

Nilai V pada persamaan (3.42) dapat dituliskan dalam bentuk lain yaitu

$$V = \frac{1}{25s}\left(75\lambda^2 s^2 + 25\alpha\alpha_0 s - 30\beta\lambda s - 3\beta^2\right) \tag{3.57}$$

Selanjutnya substitusi persamaan tersebut kedalam persamaan (3.56) sehingga diperoleh

$u(x,t)$

$$= -\frac{12s\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)} - \frac{1}{10s}C_2(-5\lambda s+\beta)e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^2}{\alpha\left(C_1e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)} + C_2e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^2}$$

$$+ \frac{\left(-\frac{12\lambda s}{\alpha}+\frac{12\beta}{5\alpha}\right)\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)} - \frac{1}{10s}C_2(-5\lambda s+\beta)e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)}{C_1e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)} + C_2e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}} + \alpha_0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Masing-masing nilai suku pada persamaan (3.1) dicari terlebih dahulu satu per satu.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\left(24s\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\left(-\frac{1}{2500s^3}\left(C_1(-5\lambda s+\beta)^2(75\lambda^2s^2+25\alpha\alpha_0 s-30\beta\lambda s-3\beta^2)e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)-\frac{1}{2500s^3}\left(C_2(5\lambda s+\beta)^2(75\lambda^2s^2+25\alpha\alpha_0 s-30\beta\lambda s-3\beta^2)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\right)\right)}{\left(\alpha\left(C_1e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\right)^2}$$

$$+\frac{\left(24s\left(\frac{1}{10s}\left(C_1(-5\lambda s+\beta)e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)-\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^2\left(-\frac{1}{250s^2}\left(C_1(-5\lambda s+\beta)(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)+\frac{1}{250s}\left(C_2(5\lambda s+\beta)(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\right)\right)}{\left(\alpha\left(C_1e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\right)^3}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$+\frac{\left(-\frac{12\lambda s}{\alpha}+\frac{12\beta}{5\alpha}\right)\left(-\frac{1}{2500s^3}\left(C_1(-5\lambda s+\beta)^2(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)-\frac{1}{2500s^3}\left(C_2(5\lambda s+\beta)^2(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\right)}{\left(C_1e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)}$$

$$-\frac{\left(-\frac{12\lambda s}{\alpha}+\frac{12\beta}{5\alpha}\right)\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\left(-\frac{1}{250s^2}\left(C_1(-5\lambda s+\beta)(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)+\frac{1}{250s^2}\left(C_2(5\lambda s+\beta)(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\right)}{\left(C_1e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^2} \quad (3.58)$$

$$\alpha u\frac{\partial u}{\partial x}=(\alpha(-\frac{\left(12s\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^2\right)}{\left(\alpha\left(C_1e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^2\right)}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\left(\frac{\left(-\frac{12\lambda s}{\alpha}+\frac{12\beta}{5\alpha}\right)\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)}{\left(C_1e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)}+\alpha_0\right)$$

$$\left(-\frac{24s\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\left(\frac{1}{100s^2}C_1(-5\lambda s+\beta)^2e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+\frac{1}{100s^2}C_2(5\lambda s+\beta)^2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)}{\left(\alpha\left(C_1e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^2\right)}\right)$$

$$+\left(\frac{24\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)}{\left(\alpha\left(C_1e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^3\right)}\right)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$+\frac{\left(-\frac{12\lambda s}{\alpha}+\frac{12\beta}{5\alpha}\right)\left(\frac{1}{100s^2}C_1(-5\lambda s+\beta)^2 e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+\frac{1}{100s^2}C_2(5\lambda s+\beta)^2 \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)}{\left(C_1 e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)}$$

$$-\frac{\left(-\frac{12\lambda s}{\alpha}+\frac{12\beta}{5\alpha}\right)\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^2}{\left(C_1 e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^2} \tag{3.59}$$

$$\beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$=\beta\Bigg(-\frac{\left(24s\left(\frac{1}{100s^2}C_1(-5\lambda s+\beta)^2 e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+\frac{1}{100s^2}C_2(5\lambda s+\beta)^2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^2\right)}{\left(\alpha\left(C_1 e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^2\right)}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$+\frac{\left(120s\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)e^{\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}}-\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}}\right)^2\left(\frac{1}{100s^2}C_1(-5\lambda s+\beta)^2e^{\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}}+\frac{1}{100s^2}C_2(5\lambda s+\beta)^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}}\right)\right)}{\left(\alpha\left(C_1\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}}+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}}\right)^3\right)}$$

$$-\frac{\left(24s\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)e^{\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}}-\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}}\right)\left(\frac{1}{1000s^3}C_1(-5\lambda s+\beta)^2e^{\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}}+\frac{1}{1000s^3}C_2(5\lambda s+\beta)^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}}\right)\right)}{\left(\alpha\left(C_1e^{\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}}+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}}\right)^2\right)}$$

$$-\frac{\left(72s\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}}-\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}}\right)^4\right)}{\left(\alpha\left(C_1\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}}+C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}}\right)^4\right)}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{\left(-\frac{12\lambda s}{\alpha}+\frac{12\beta}{5\alpha}\right)\left(\begin{array}{l}\frac{1}{1000s^3}C_1(-5\lambda s+\beta)^3 e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\\ -\frac{1}{1000s^3}C_2(5\lambda s+\beta)^3 e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{l}C_1 e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\\ +C_2 e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\end{array}\right)}\right)\\
&-\frac{3\left(-\frac{12\lambda s}{\alpha}+\frac{12\beta}{5\alpha}\right)\left(\begin{array}{l}\frac{1}{100s^2}C_1(-5\lambda s+\beta)^2 e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\\ +\frac{1}{100s^2}C_2(5\lambda s+\beta)^2 e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{l}\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\\ -\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{l}C_1 e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\\ +C_2 e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\end{array}\right)^2}\\
&+\left(\frac{2\left(-\frac{12\lambda s}{\alpha}+\frac{12\beta}{5\alpha}\right)\left(\begin{array}{l}\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\\ -\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\end{array}\right)^3}{\left(\begin{array}{l}C_1 e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\\ +C_2 e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\end{array}\right)^3}\right)
\end{aligned}
\qquad (3.60)
$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$s\frac{\partial^3u(x,t)}{\partial x^3}=s\Bigg(-\frac{72s\left(\frac{1}{100s^2}C_1(-5\lambda s+\beta)^2e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+\frac{1}{100s^2}C_2(5\lambda s+\beta)^2e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\left(\frac{1}{1000s^3}C_1(-5\lambda s+\beta)^3e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{1000s^3}C_2(5\lambda s+\beta)^3e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)}{\left(\alpha\left(C_1e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\right)^2}$$

$$+\frac{288s\left(\frac{1}{100s^2}C_1(-5\lambda s+\beta)^2e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+\frac{1}{100s^2}C_2(5\lambda s+\beta)^2e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^2\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)}{\left(\alpha\left(C_1e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\right)^3}$$

$$-\frac{648s\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^3\left(\frac{1}{100s^2}C_1(-5\lambda s+\beta)^2e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+\frac{1}{100s^2}C_2(5\lambda s+\beta)^2e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)}{\left(\alpha\left(C_1e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2e^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\right)^4}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$
\begin{aligned}
&+\frac{168s\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^2\left(\frac{1}{1000s^3}C_1(-5\lambda s+\beta)^3e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{1000s^3}C_2(5\lambda s+\beta)^3\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)}{\left(\alpha\left(C_1\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\right)^3}\\
&-\frac{24s\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\left(\frac{1}{10000s^4}C_1(-5\lambda s+\beta)^4e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{10000s^4}C_2(5\lambda s+\beta)^4\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)}{\left(\alpha\left(C_1\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\right)^2}\\
&+\frac{\left(288s\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^5\right)}{\left(\alpha\left(C_1\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\right)^5}
\end{aligned}
$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$+\frac{\left(-\frac{12\lambda s}{\alpha}+\frac{12\beta}{5\alpha}\right)\left(\frac{1}{10000s^4}C_1(-5\lambda s+\beta)^4e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{10000s^4}C_2(5\lambda s+\beta)^4\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)}{C1\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}}$$

$$-\frac{4\left(-\frac{12\lambda s}{\alpha}+\frac{12\beta}{5\alpha}\right)\left(\frac{1}{1000s^3}C_1(-5\lambda s+\beta)^3e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{1000s^3}C_2(5\lambda s+\beta)^3\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)}{\left(C_1\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^2}$$

$$+\frac{12\left(-\frac{12\lambda s}{\alpha}+\frac{12\beta}{5\alpha}\right)\left(\frac{1}{100s^2}C_1(-5\lambda s+\beta)^2e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+\frac{1}{100s^2}C_2(5\lambda s+\beta)^2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)\left(\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}-\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^2}{\left(C_1\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}+C_2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\right)^3}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$
-\frac{\left(3\left(-\frac{12\lambda s}{\alpha}+\frac{12\beta}{5\alpha}\right)\left(\begin{array}{l}\frac{1}{100s^2}C_1(-5\lambda s+\beta)^2 e^{\left(\frac{1}{10}\frac{(-5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2 s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\\ +\frac{1}{100s^2}C_2(5\lambda s+\beta)^2 \mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2 s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\end{array}\right)^2\right)}{\left(\begin{array}{l}C_1\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2 s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\\ +C_2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2 s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\end{array}\right)^2}
-\frac{\left(6\left(-\frac{12\lambda s}{\alpha}+\frac{12\beta}{5\alpha}\right)\left(\begin{array}{l}\frac{1}{10s}C_1(-5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2 s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\\ -\frac{1}{10s}C_2(5\lambda s+\beta)\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2 s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\end{array}\right)^4\right)}{\left(\begin{array}{l}C_1\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2 s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\\ +C_2\mathrm{e}^{\left(-\frac{1}{10}\frac{(5\lambda s+\beta)\left(x-\frac{1}{25s}(75\lambda^2 s^2-30\beta\lambda s+25\alpha_0\alpha s-3\beta^2)t\right)}{s}\right)}\end{array}\right)^4}
\tag{3.61}
$$

Selanjutnya menjumlahkan persamaan (3.58), (3.59), (3.60) dan (3.61)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\alpha u\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\beta\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+s\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3}=0 \tag{3.62}$$

Substitusi persamaan (3.62) kedalam persamaan (3.1) sehingga diperoleh

$$0=0$$

Karna persamaan (3.62) telah memenuhi persamaan (3.1), maka terbukti bahwa solusi (3.56) merupakan solusi analitik dari persamaan KdVB.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Adapun kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian ini yaitu:

1. Metode Ekspansi (G'/G) telah berhasil diterapkan dalam menyelesaikan persamaan differensial parsial nonlinier terutama dalam persamaan Korteweg-De Vries-Burgers. Dari penelitian ini diperoleh solusi analitik dari persamaan Korteweg-De Vries-Burgers yang masih umum yaitu

$$u(x,t) = -\frac{12s}{\alpha}\left(\frac{C_1\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{10s}\right)e^{\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{10s}\right)(x-Vt)} + C_2\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{\beta}{10s}\right)e^{\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{\beta}{10s}\right)(x-Vt)}}{C_1 e^{\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{10s}\right)(x-Vt)} + C_2 e^{\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{\beta}{10s}\right)(x-Vt)}}\right)^2 + \left(-\frac{12s\lambda}{\alpha}+\frac{12\beta}{5\alpha}\right)\left(\frac{C_1\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{10s}\right)e^{\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{10s}\right)(x-Vt)} + C_2\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{\beta}{10s}\right)e^{\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{\beta}{10s}\right)(x-Vt)}}{C_1 e^{\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\beta}{10s}\right)(x-Vt)} + C_2 e^{\left(-\frac{\lambda}{2}-\frac{\beta}{10s}\right)(x-Vt)}}\right) + \alpha_0$$

dengan $V = 3\lambda^2 s - \frac{6\beta\lambda}{5} + \alpha_0\alpha - \frac{3\beta^2}{25s}$.

2. Solusi umum Persamaan KdVB yang dihasilkan berdasakan metode ekspansi (G'/G) telah terbukti eksak.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, disarankan untuk membahas lebih detail mengenai solusi khusus dari persamaan Korteweg-De Vries-Burgers menggunakan metode ekspansi (G'/G). Yaitu dengan cara memberikan kondisi pada C_1 dan C_2 .

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR RUJUKAN

Ahmad, Defri. 2016. Solusi Numerik Persamaan Korteweg-De Vries-Burgers dengan Metode Spektral. *EKSAKTA*, 92-98.

Akcagil, S., dan Aydemir, T. 2016. Comparison Between The (G'/G) - Expansion Method and The Modified Extended Tanh Method. *DE GRUYTER*, 88-94

Anton, Howard.dkk.2012. *Calculus : Early Transcendentals 10th Edition*. USA: John Willey and Son, Inc.

Ar-rifa'i, M. N. 1999. *Ringkasan Tafsir Ibnu Katsir Jilid 1*. Jakarta: Gema Insani Press.

Ayati, Zainab. 2014. Comparing Between G'/G Expansion Method and Tanh Method. *Central European Journal of Engineering*, 334-340.

Boyce, W. E. 2009. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* . New York: John Willey and Son, Inc.

Fathy,H.E. 2013. Chebyshev and Legendre via Galerkin Method for Solving KdV Burgers' Equation. *Hikari Ltd*, 441-457.

Feng, Z. & Meng, Q. 2007. Burgers-Korteweg-de Vries Equation and Its Travelling Solitary Waves. *Springer-Verlag*, 412-422.

Kreyzig, Erwin. 2011. *Advanced Engineering Mathematics.* USA: John Wiley & Sons., Inc.

Naher, Hasibun., Abdullah, F.A., & Akbar, M.A. 2011. The (G'/G)-Expansion Method for Abundant Travelling Wave Solutions of Caudrey-Dodd-Gibbon Equation. *Hindawi Publishing Corporation*.

Pratiwi, Resty B. 2015. Penyelesaian Persamaan Korteweg-De Vries Orde Tinggi Dengan Metode Ekspansi G'/G. *Skripsi* . Bogor: Respository IPB.

Purcell, Edwin, dkk. 1987. *Kakulus dan Geometri Analitis*. Jakarta: Erlangga.

Shihab, M. Q. 2002. *Tafsir Al Misbah Volume 12*. Jakarta : Lentera Hati

Taha, M. Waafa. 2013. New Exact Solutions of Ion-Acoustic Wave Equations by (G'/G) Expansion Method. *Hindawi Publishing Corporation*.

Wang, Mingliang, dkk. 2008. The (G'/G)-Expansion Method and Travelling wave Solutions of Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physics. *Science Direct*, 417-423.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

RIWAYAT HIDUP

Lazatin 'Aniqoh, lahir di Malang tanggal 15 Mei 1997. Anak pertama dari 3 bersaudara dari pasangan Bapak Sunarko dan Ibu Susiani. Memiliki 2 Adik laki-laki yang bernama Bayhaqi Izuhdin dan Muhammad In'am Attaqi. Pendidikan dasar ditempuh di daerah perantauan, yaitu Pondok Pesantren Nurul Huda Kediri. Selama dipesantren penulis bersekolah di MI Asy-Syafi'iyah Jarak dan melanjutkan sekolah di MTs. Sunan Ampel Panjer, Kediri. Selanjutnya pada tahun 2012, penulis kembali ke Malang dan menempuh pendidikan SMA di MAN 1 Kota malang. Setelah lulus Aliyah, penulis melanjutkan studi S1 Jurusan Matematika di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama menjadi mahasiswa, penulis juga aktif mengikuti beberapa kegiatan. Seperti menjadi asisten laboratorium serta mengikuti beberapa kompetisi (Mag-D ITB 2018, PKRM). Selain itu penulis juga mengikuti beberapa komunitas, yakni komunitas Bahasa Arab Alfarazi, komunitas Bahasa Inggris (MEC), dan IPPNU (Ikatan Pelajar Putri Nahdlatul Ulama) PAC Dau dan PR Petungsewu hingga sekarang.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lazatin 'Aniqoh
NIM : 15610068
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Penerapan Metode Ekspansi (G'/G) dalam Menyelesaikan Persamaan Korteweg-De Vries-Burgers (KdVB)
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	15 Maret 2019	Konsultasi Kajian Agama	1.
2.	21 Maret 2019	Revisi Bab I	2.
3.	22 Maret 2019	Revisi Bab II	3.
4.	28 Maret 2019	Konsultasi Keagamaan Bab I	4.
5.	02 April 2019	Revisi Bab III	5.
6.	05 April 2019	ACC Bab III	6.
7.	05 April 2019	Revisi Kajian Agama Bab II	7.
8.	02 Mei 2019	ACC Bab IV	8.
9.	03 Mei 2019	Konsultasi Abstrak	9.
10.	07 Mei 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	10.
11.	09 Mei 2019	ACC Kajian Keagamaan	11.
12.	10 Mei 2019	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 10 Mei 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG