KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL PADA RUANG MORREY KLASIK TAK HOMOGEN

SKRIPSI

OLEH
ANISATUR RIZQIYAH
NIM. 15610037

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL PADA RUANG MORREY KLASIK TAK HOMOGEN

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Anisatur Rizqiyah
NIM. 15610037

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL PADA RUANG MORREY KLASIK TAK HOMOGEN

SKRIPSI

Oleh
Anisatur Rizqiyah
NIM. 15610037

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 3 Mei 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si.	Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19900511 20160801 1 057

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 19650414 200312 1 001

KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL PADA RUANG MORREY KLASIK TAK HOMOGEN

SKRIPSI

Oleh
Anisatur Rizqiyah
NIM. 15610037

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 29 Mei 2019

Penguji Utama	: Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc	....
Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji	: Muhammad Khudzaifah, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Anisatur Rizqiyah

NIM : 15610037

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Keterbatasan Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Klasik Tak Homogen

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi yang saya tulis benar-benar merupakan hasil karya mandiri dan bukan plagiasi. Apabila terdapat pemikiran orang lain, maka akan saya sertakan sumber yang jelas. Jika dikemudian hari terbukti bahwa skripsi ini mengandung hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan plagiasi tersebut.

Malang, 02 Mei 2019
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
TGL.
6A39AAFF707952155
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Anisatur Rizqiyah
NIM. 15610037

MOTO

لاحول ولاقوة إلاّبالله علي العظيم

Tiada daya dan upaya kecuali dengan kekuatan

Allah Yang Maha Tinggi lagi Maha Agung

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Bermula ketika penulis berproses dalam ruang rahim hingga detik beranjak usia, kasih Ibu tak pernah pupus dirasa. Teruntuk wanita mulia dimana surga penulis berada di bawah telapak kakinya, Ibunda Hj. Siti Aisyah yang tiada lelah mendoakan dan mengasihi penulis. Terima kasih tiada terhingga atas segala jerih upaya dan setiap air mata yang harus menetes tumpah demi kebahagiaan buah hatinya. Teruntuk sosok ayah, H. Achmad Sholeh, kehadirannya membuat penulis selalu berupaya tumbuh menjadi remaja tangguh atas segala ujian dan tantangan yang ada.

Skripsi ini penulis persembahkan sebagai wujud sebersit kasih untuk kedua orang tua, karena melihat buah hatinya diwisuda dengan harapan ilmu bermanfaat menjadi salah satu bagian dari potongan cita. Teruntuk dua insan yang dilahirkan dari rahim yang sama setelah sekian masa kedatangan penulis di dunia, Adik Nur Chayati dan Adik Wardatul Hani'ah yang menjadi sebab penulis untuk selalu belajar dewasa hingga akhirnya skripsi ini dapat terselesaikan pada waktunya.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *"Keterbatasan Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Klasik Homogen"* sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si., selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, dan nasihat berharga kepada penulis.
5. Muhammad Khudzaifah, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Mohammad Jamhuri, M.Si., selaku dosen wali yang selalu memberikan motivasi dan arahan kepada penulis.

7. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam proses perkuliahan.
8. Orang tua serta adik-adik tercinta yang selalu memberikan do'a, semangat dan motivasi demi keberhasilan penulis.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 03 Mei 2019

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR vii

DAFTAR ISI ix

ABSTRAK xi

ABSTRACT xii

ملخص xiii

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 3
1.3 Tujuan Penelitian 3
1.4 Manfaat Penelitian 3
1.5 Batasan Masalah 4
1.6 Metode Penelitian 4
1.7 Sistematika Penulisan 4

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Transformasi Fourier 6
2.2 Integral Fraksional 7
2.3 Operator Integral Fraksional 8
2.4 Ruang Quasi-Metrik 9
2.5 Ukuran Lebesgue 10
2.6 Ruang Lebesgue 11
2.7 Ruang Morrey Klasik 11
2.8 Hardy-Littlewood 12
2.9 Hardy-Littlewood-Sobolev 14
2.10 Operator Maksimal Hardy-Littlewood yang Dimodifikasi 15
2.11 Doubling Condition dan Growth Condition 16
2.12 Kajian Integrasi Sains dan Islam 16

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Keterbatasan Keterbatasan Operator Integral Fraksional pada Ruang Lebesgue Tak Homogen 18
3.2 Keterbatasan Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Klasik Tak Homogen 23
3.3 Keterbatasan Manusia dalam Alquran..28

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan..32
4.2 Saran..32

DAFTAR RUJUKAN

RIWAYAT HIDUP

ABSTRAK

Rizqiyah, Anisatur. 2019. **Keterbatasan Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Klasik Tak Homogen.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Muhamad Khudzaifah, M.Si.

Kata kunci: Keterbatasan Operator. Integral Fraksional. Ruang Morrey Klasik.

Operator integral fraksional merupakan salah satu perkembangan ilmu analisis modern yang masih diteliti hingga saat ini. Pada tahun 2012, Imam Utoyo, dkk. telah membuktikan bahwa operator integral fraksional dapat diaplikasikan dalam ruang morrey klasik tak homogen. Selanjutnya tahun 2018, Iaffei dan Nitti membuktikan bahwa operator integral fraksional juga dapat diaplikasikan di ruang lebesgue dengan menggunakan operator maksimal Hardy-Littlewood yang dimodifikasi.

Tujuan penelitian ini adalah mengetahui keterbatasan operator integral fraksional pada Ruang Lebesgue dan Ruang Morrey Klasik tak homogen. Pada proses pembahasan, penulis melakukan pembuktian ulang penelitian Iaffei dan Nitti (2018) yaitu membuktikan syarat perlu keterbatasan operator integral fraksional pada Ruang Lebesgue dengan memanfaatkan operator maksimal Hardy-Littlewood-Sobolev yang dimodifikasi tetapi dengan syarat konstanta jari-jari pangkat s. Kemudian, penulis melanjutkan penelitian Iaffei dan Nitti (2018) menuju ruang morrey klasik tak homogen. Hasil penelitian ini adalah pembuktian teorema keterbatasan operator integral fraksional pada Ruang Lebesgue dan Ruang Morrey Klasik tak homogen.

ABSTRACT

Rizqiyah, Anisatur. 2019. **Boundedness of Fractional Integral Operator on Non-Homogeneous Classic Morrey Space.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Muhamad Khudzaifah, M.Si.

Keywords: Boundedness of Operator. Fractional Integral. Classic Morrey Space.

Fractional integral operators are one of the developments in modern analysis that are still being investigated to this day. In 2012, Imam Utoyo et al. has proven that fractional integral operators can be applied in a non-homogeneous classic morrey space. Furthermore, in 2018, Iaffei and Nitti proved that fractional integral operators can also be applied in the Lebanese space by using a modified Hardy-Littlewood operator.

The purpose of this study is to determine the boundedness of fractional integral operators in Classic and Homogeneous Space and Morrey Space. In the discussion process, the authors re-prove the research of Iaffei and Nitti (2018), which proves the necessary condition for the boundedness of fractional integral operators in the lebesgue space by utilizing the modified Hardy-Littlewood-Sobolev operator but with the terms of the constant radius of s. Then, the author continues the research of Iaffei and Nitti (2018) towards the classic homogeneous morrey space. The results of this study are proof of the theorem of the boundedness of fractional integral operators in the Classic and Non-homogeneous Space Space and Morrey Space.

ملخص

الرزقية ، أنيسة. ٢٠١٩. قيود مشغل التكامل الجزئي في الفراغات الكلاسيكية المتجانسة لموري. بحث التخرج. جامعي شعبة الرياضيات, كلية العلوم والتكنولوجيا, الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف (الأول) خير الرحمن ، الماجستير، المشرف (الثاني) مُحَمَّد خديفة ، ماجستير

الكلمات الرئيسية : حدود المشغل, جزء لا يتجزأ. فضاء كلاسيكية موري

تعتبر العوامل الأساسية الجزئية إحدى التطورات في التحليل الحديثي التي لا تزال على قيد التحقيق حتى يومنا هذا. في عام ٢٠١٢, إمام اوتايا وأصحابه أثبت على أنه يمكن تطبيق عوامل التشغيل المتكاملة التجزيئية في فضاء غير تقليدية من طراز مورى الكلاسيكي. ثم في عام ٢٠١٨ ، أثبتت إيافي و نتي على أنه يمكن أيضًا تطبيق عوامل التشغيل التجزيئية المتكاملة في الفضاء اللبناني باستخدام مشغل *Hardy-Littlewood* المعدل.

الغرض من هذه الدراسة هو تحديد حدود العوامل التكاملية الجزئي في الفضاءات الكلاسيكية والمتجانسة وفضاء موري. وأثناء البحث، أعاد الباحث إثبات البحث الذي أجراه إيافي و نتي يعني إثبات شرط قيود مشغل التكامل الجزئي في فضاء *Lebesgue* من خلال استخدام مشغل *Hardy-Littlewood-Sobolev* المعدل ولكن مع شروط دائرة نصف قطرها ثابت s. وبعد ذلك ، واصل الباحث بحث إيافي و نتي نحو فضاء موري الكلاسيكية المتجانسة. نتيجة هذا البحث هي إثبات نظرية القيود المفروضة على مشغلي لا يتجزأ كسور في الفضاء الكلاسيكي وغير المتجانسة الفضاء وموري الفضاء.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Integral fraksional dalam (Adam, 1996) dinotasikan dengan I_{α}. Diberikan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dimana $\hat{f}$ merupakan transformasi fourier dari f dan ξ adalah fungsi yang terintegral lokal pada $\mathbb{R}$. Sehingga fungsi ξ transformasi fourier dinotasikan $\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f(x)]$. Invers ξ yaitu $|\xi|^{-\alpha}$, dalam invers transformasi fourier dinotasikan $\mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{-\alpha}\hat{f}\right)$. Dalam hal ini berlaku bahwa $\mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{-\alpha}\hat{f}\right) = I_{\alpha}f$. Adapun $I_{\alpha}f(x)$ menjadi suatu perkembangan ilmu analisis modern yang dikenal dengan sebutan operator integral fraksional. Operator integral fraksional orde $\boldsymbol{\alpha}$ dalam (Hardy, n.d.) didefinisikan sebagai

$$I_{\alpha}f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}}dy$$

dimana $X \in \mathbb{R}$ dan f disimbolkan sebagai fungsi terukur pada $\mathbb{R}$ dengan $0 < \alpha < 1$. I_{α} merupakan fungsi yang memetakan $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ menuju $I_{\alpha}f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Penelitian mengenai operator integral fraksional masih terus dilakukan oleh para pakar analisis matematika. Salah satunya (Utoyo, Nusantara, Widodo, & Suhariningsih, 2012) telah membuktikan bahwa operator integral fraksional dapat diaplikasikan dalam ruang morrey klasik tak homogen. Hasil dari penelitian Utoyo, dkk (2012) adalah pembuktian syarat cukup dan perlu keterbatasan operator integral fraksional I_{α} dari $L^{p,\frac{s,\lambda_1}{n}(\mu)}$ ke $L^{p,\lambda_2}(\mu)$. Lebih lanjut, operator integral fraksional juga dapat diaplikasikan di ruang lebesgue dengan menggunakan operator maksimal Hardy-Littlewood yang dimodifikasi (Iaffei & Nitti, 2018).

Adapun operator integral fraksional yang digunakan dalam penelitian (Iaffei & Nitti, 2018) bersifat tak homogen yang didefinisikan

$$I_\alpha^\lambda f(x) = \int_X \frac{d(x,y)^\alpha}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} f(y) d\mu(y)$$

(X, d, μ) dalam definisi $I_\alpha^\lambda f(x)$ merupakan ruang quasi-metrik dengan X himpunan tak kosong di ℝ, d adalah quasi-metrik dan μ merupakan simbol dari ukuran lebesgue. Sedangkan ξ merupakan ukuran penggandaan atas terkait fungsi yang mendominasi, yaitu bola $\mu\big(B(x,r)\big) \leq \xi(x,r)$.

Penulis akan melanjutkan penelitian operator integral fraksional di ruang lebesgue menuju ruang morrey klasik tak homogen. Pada ruang lebesgue, operator integral fraksional terbatas dari $L^p(\mu)$ ke ruang $L^q(\mu)$. Pada ruang morrey klasik, integral fraksional terbatas dari $L^{p,\lambda_1}(\mu)$ ke L^{q,λ_2}. Berdasarkan Iaffei dan Nitti (2018), distingsi penelitian ini menggunakan syarat $\xi(x,r) \leq Cr^n$ dengan definisi n dalam $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, maka penulis menggunakan syarat $\xi(x,r) \leq Cr^s$dengan definisi $S = \frac{pq(n-\alpha)}{pq+p-q}$. Konstanta C_ξ sedemikian hingga memenuhi *doubling condition* $\xi(x, 2r) \leq C_\xi \xi(x,r)$ untuk setiap $x \in X$ dan $r > 0$.

Menurut (Gunawan, Hakim, & Idris, 2018), suatu ukuran μ dikatakan memenuhi *doubling condition* (μ ∈ DC) jika terdapat konstanta positif sedemikian hingga untuk setiap bola $B(x,r)$, $\mu\big(B(x,2r)\big) \leq C\mu\big(B(x,r)\big)$. Jika $\mu \in DC$, maka R^d dinamakan ruang homogen. Jika μ tidak memenuhi *doubling condition*, maka R^d dinamakan ruang tak homogen.

Operator integral fraksional meniscayakan keterbatasan dalam proses penyelesaiannya. Ketika syarat keterbatasan operator integral fraksional dipenuhi, maka akan menghasilkan suatu kesimpulan dari pembuktian teorema di ruang tertentu. Konsep ini memberikan pelajaran bahwa Allah SWT juga menciptakan manusia disertai dengan keterbatasan. Keterbatasan dalam Alquran memiliki elaborasi dengan Surat an-Nisa' ayat 28 dan Surat al-Baqarah ayat 286.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, maka dapat dirumuskan masalah yang diteliti yaitu:

1. Bagaimana keterbatasan operator integral fraksional pada Ruang Lebesgue tak homogen?
2. Bagaimana keterbatasan operator integral fraksional pada Ruang Morrey Klasik tak homogen?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui keterbatasan operator integral fraksional pada Ruang Lebesgue tak homogen.
2. Mengetahui keterbatasan operator integral fraksional pada Ruang Morrey Klasik tak homogen.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat teoritis hasil skripsi ini adalah:

1. Dengan mengetahui keterbatasan operator integral fraksional pada Ruang Lebesgue tak homogen, maka diperoleh $\|I_\alpha f: L^q(\mu)\| \leq C\|f: L^p(\mu)\|$.

2. Dengan mengetahui keterbatasan operator integral fraksional pada Ruang Morrey Klasik tak homogen, maka diperoleh $\|I_\alpha f : L^{q,\lambda_2}\| \leq C\|f : L^{p,\lambda_1}\|$.

1.5 Batasan Masalah

Batasan malasah penelitian ini adalah membuktikan syarat perlu keterbatasan operator integral fraksional di ruang lebesgue dan ruang morrey klasik tak homogen.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*library research*). Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku dan jurnal yang relevan dengan topik pembahasan. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membuktikan syarat perlu keterbatasan operator integral fraksional di ruang Lebesgue tak-homogen melalui teorema Hardy-Littlewood-Sobolev dengan memanfaatkan fungsi karakteristik.
2. Membuktikan syarat perlu keterbatasan dari operator integral fraksional di ruang Morrey klasik tak-homogen melalui teorema Hardy-Littlewood-Sobolev dengan memanfaatkan fungsi karakteristik.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan digunakan untuk mempermudah dalam memahami penelitian. Sistematika penulisan penelitian ini terbagi menjadi empat bab dan masing-masing bab dibagi dalam subbab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka terdiri dari teori-teori yang digunakan untuk mendukung pembahasan dan menjawab rumusan masalah. Kajian Pustaka dalam penelitian ini meliputi: ruang quasi-metrik, ukuran, ruang ukuran, ukuran lebesgue, integral lebesgue, ruang L^p, operator integral fraksional, Hardy-Littlewood-Sobolev, operator maksimal Hardy-Littlewood yang dimodifikasi, pengertian *doubling condition* dan *growth condition*, serta ruang morrey klasik.

Bab III Pembahasan

Pembahasan terdiri dari hasil utama penelitian yang menjawab rumusan masalah. Pembahasan dalam penelitian ini meliputi: syarat perlu keterbatasan operator integral fraksional pada ruang Lebesgue dan syarat perlu keterbatasan operator integral fraksional pada ruang morrey klasik tak-homogen.

Bab IV Penutup

Bagian ini terdiri dari kesimpulan terkait hasil pembahasan dan juga saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Transformasi Fourier

Sebelum membahas definisi transformasi fourier, akan didefinisikan tentang fungsi terintegral lokal terlebih dahulu. Misalkan μ merupakan suatu ukuran. Fungsi f berada pada himpunan terbuka T. Fungsi terukur lebesgue memetakan $f: T \to \mathbb{R}$. Jika $f \in T$ sedemikian hingga

$$\int_K |f| d\mu < \infty,$$

Yaitu integral lebesgue yang terbatas pada setiap subset kompak $K \subset T$, maka fungsi f dikatakan terintegral lokal (Dinculeanu, 1974).

Selanjutnya akan didefinisikan tentang ruang schwarts. Misalkan $\mathbb{R}$ merupakan himpunan fungsi tak tentu f, sehingga semua turunan f yang terdiri dari $f', f'', \dots, f^{(l)}$, ..., dan seterusnya. Ruang schwarts didefinisikan sebagai

$$S = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k \left| f^{(l)}(x) \right| < \infty,$$

untuk setiap $k, l \geq 0$ (Stein & Shakarchi, 2011).

Misalkan $0 < \alpha < n$. Fungsi $|\xi|^{-\alpha}$ terintegral lokal. Power negatif tertentu dari $-\Delta$, $(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$ untuk $0 < \alpha < n$ didefinisikan sebagai operator

$$\mathcal{I}_\alpha f = (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\alpha} \hat{f}) \text{ untuk } 0 < \alpha < n.$$

Jika I_α didefinisikan sebagai invers transformasi Fourier dari $|\xi|^{-\alpha}$ maka didapat

$$I_\alpha(x) = \frac{\gamma_\alpha}{|x|^{n-\alpha}}$$

Dimana γ_α adalah konstanta tetap. Fungsi I_α disebut sebagai *Riesz kernel.* Mengikuti aturan manipulasi transformasi Fourier bahwa setiap $f \in S$ dapat ditulis sebagai *Riesz potential*,

$$f(x) = \mathcal{I}_\alpha g(x) = (I_\alpha * g)(x) = \gamma_\alpha \int_{R^n} \frac{g(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \quad 0 < \alpha < n,$$

Dimana $g = (-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f$. Khususnya,

$$f = I_1 * \left(\sum_{j=1}^{n} \mathcal{R}_j \partial_j f \right).$$

Dengan demikian, dapat dilihat bahwa subset dari $W^{\alpha,p}(R^n)$, dapat ditulis sebagai elemen *Riesz potensial* (Adams, 1996).

2.2 Integral Fraksional

Definisi 2.6

Misalkan fungsi $\varphi\,(x) \in L_1(a,b)$. Integral

Transformasi fourier dari suatu fungsi $f \in S\,(\mathbb{R})$ yang memetakan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan

$$\mathcal{F}[f(x)] = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

Dan invers transformasi fourier didefinisikan

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\xi)] = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} dx$$

dimana $x \in \mathbb{R}$ (Folland, 2009).

Contoh:

Jika $f(\xi) = e^{-\xi}u(\xi)$, maka

$$\mathcal{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi}u(\xi)e^{-i\xi x}dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(1+ix)\xi}dx$$

$$= \frac{1}{1+ix}$$

Dan

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\xi)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi}u(\xi)e^{ix\xi}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1-ix)\xi}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi - i2\pi x}$$

(Poularikas, 2010)

2.3 Operator Integral Fraksional

Definisi 2.7:

Misalkan f adalah fungsi terukur bernilai riil pada $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, dan misalkan $0 < \alpha < n$. Integral fraksional atau potensial Riesz dalam orde-α adalah didefinisikan sebagai

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Asalkan integral ini ada. Dengan membiarkan f untuk bervariasi, pemetaan yang didefinisikan sebagai $I_\alpha: f \to I_\alpha f$. Dimana I_α merupakan fungsi yang memetakan $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ menuju $I_\alpha f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Wheeden, 2015).

2.4 Ruang Quasi-Metrik

Definisi 2.1

Diberikan X merupakan sebarang himpunan tak kosong. Dimana $x, y, z \in X$. Sedemikian hingga, fungsi $d: X \times X \to \mathcal{R}$ memenuhi sifat-sifat berikut disebut sebagai metrik pada X.

(i) $d(x, y) > 0$ positif $\forall x, y \in X$

(ii) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

(iii) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$

(iv) $d(x, y) \leq k(d(x, z) + d(z, x)), \forall x, y, z \in X$ (Bartle, 1995).

Contoh:

Diberikan $\mathbb{R}$ sebarang himpunan tak kosong dengan $d(x, y) = |x - y|$ dimana $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang quasi-metrik.

Bukti:

Diambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}$. Mengikuti sifat-sifat dari definisi ruang quasi-metrik, sedemikian hingga:

(i) $d(x, y) > 0$ positif $\forall x, y \in X$

Berdasarkan definisi harga mutlak di $\mathbb{R}$, jelas terbukti bahwa $|x - y| = d(x, y) > 0$.

(ii) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

Untuk $x = y$ diperoleh $|x - y| = 0$, sehingga berlaku sebaliknya,

$d(x, y) = |x - y| = 0$ didapatkan $x = y$ sehingga terbukti $d(x, y) = 0$.

(iii) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$

Berdasarkan sifat komutatif, $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$, terbukti.

(iv) $d(x,y) \leq k(d(x,z) + d(z,y)), \forall x,y,z \in X$

Berdasarkan sifat ketaksamaan segitiga, $d(x,y) \leq k(|x-z| + |z-y|)$, terbukti.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang quasi-metrik.

2.5 Ukuran Lebesgue

Definisi 2.4

Misalkan f terdefinisi pada $I = [a,b]$. f dikatakan terukur lebesgue pada I jika untuk setiap $s \in \mathbb{R}$, himpunan $\{x \in I | f(x) > s\}$ adalah himpunan terukur lebesgue.

Contoh:

Misalkan $f(x) = x^2$ pada interval $[-1,5]$. Misalkan $s \in \mathbb{R}$.

(i) Jika $s \geq 25$, maka $\{x \in I | f(x) > s\} = \emptyset$, dimana Lebesgue adalah himpunan terukur.

(ii) Jika $s > 0$, maka $\{x \in I | f(x) > s\} = [-1,5]$, dimana Lebesgue adalah himpunan terukur.

(iii) Jika $0 \leq s < 1$, maka $\{x \in I | f(x) > s\} = [-1, -\sqrt{s}) \cup (\sqrt{s}, 5]$, dimana Lebesgue adalah himpunan terukur.

(iv) Jika $1 \leq s < 25$, maka $\{x \in I | f(x) > s\} = (\sqrt{s}, 5]$, dimana Lebesgue adalah himpunan terukur.

Oleh karena itu, disimpulkan bahwa f merupakan fungsi terukur lebesgue pada interval $[-1,5]$ (Nelson, 2015).

2.6 Ruang Lebesgue

Definisi 2.5

Misalkan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merupakan ruang ukuran dan $1 \leq p < \infty$. Ruang $L^p(X)$ terdiri dari kelas ekuivalensi fungsi terukur $f: X \to \mathbb{R}$ sedemikian hingga

$$\int |f|^p d\mu < \infty,$$

Dimana dua fungsi terukur ekuivalen jika keduanya sama dengan μ. norm-L^p dari $L^p(X)$ didefinisikan sebagai

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Notasi $L^p(X)$ diasumsikan sebagai ukuran μ pada X yang diketahui. Dikatakan bahwa $f_n \to f$ di L^p jika $\|f - f_n\|_{L^p} \to 0$. Karena $\|f\|_{L^p} = 0$ sehingga $f = 0$.

Contoh:

Misalkan μ ukuran pada X, dimana $X = [0,1]$ dan $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}, \leq x \leq 1$. Akan dibuktikan $f(x) \in L^2[0,1]$ (Nelson, 2015).

Bukti:

Jika $f(x) \in L^2[0,1]$ maka $\left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$, sedemikian hingga

$$\left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 \left|x^{-\frac{1}{2}}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = 3x^{\frac{1}{3}}|_0^1 = \sqrt{3} < \infty$$

Karena $\left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} < \infty$, jadi contoh ini terbukti.

2.7 Ruang Morrey Klasik

Dalam (Hendra Gunawan, dkk., 2018) pertama kali, ruang morrey diperkenalkan oleh C.B. Morrey dalam suatu penelitian tentang suatu solusi persamaan diferensial parsial ekliptik. Untuk $1 \leq p \leq q < \infty$, ruang morrey $\mathcal{M}_q^p = \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^d)$ didefinisikan menjadi suatu himpunan untuk setiap $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^d)$ sedemikian hingga

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} := \sup_{x\in\mathbb{R}^d, r>0} |B(x,r)|^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Ruang morrey klasik dinotasikan sebagai $L^{p,\lambda}(\mathbb{R})$. Adapun ruang morrey klasik didefinisikan sebagai himpunan dari setiap $f \in L_{loc}^p(\mu)$ sedemikian hingga

$$\left\|f : L^{p,\lambda}(\mu)\right\| := \sup_{B:=(x,r)} \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_B |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Jika $\lambda = 0$, maka $L^{p,\lambda}(\mu) = L^p(\mu)$ (Imam Utoyo, dkk., 2012).

2.8 Hardy-Littlewood

Teorema Hardy-Littlewood 2.8

Jika $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dimana konstanta C sedemikian hingga untuk setiap $0 < t < \infty$

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}) \leq \frac{C}{t}\|f\|_{L^1}$$

Dimana $C = 3^n$ hanya bergantung pada n (Adams, 1996).

Bukti:

Ditetapkan $t > 0$ dan misalkan

$$\mathrm{E_t} = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}.$$

Berdasarkan ketetapan inti ukuran Lebesgue

$$\mu(E_t) = \sup\{\mu(K) : K \subset E_t \text{ adalah kompak}\}$$

Sehingga cukup dibuktikan bahwa

$$\mu(K) \leq \frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy.$$

Untuk setiap subset kompak K dari himpunan E_t.

Jika $x \in K$, maka terdapat bola terbuka B_x terpusat pada x sedemikian hingga

$$\frac{1}{|B_x|}\int_{B_x} |f(y)|dy > t.$$

Karena K kompak, dapat diekstrak *subcover* terbatas $\{B_1, B_2, \dots, B_N\}$ dari penutup terbuka $\{B_x : x \in K\}$. Karena *subfamily* terbatas dari bola yang saling lepas $\{B_1', B_2', \dots, B_M'\}$ sedemikian hingga

$$\begin{aligned}
\mu(K) &\le \sum_{i=1}^{N} |B_i| \\
&\le 3^n \sum_{j=1}^{M} |B_j'| \\
&\le \frac{3^n}{t} \sum_{j=1}^{M} \int_{B_j'} |f|dx \\
&\le \frac{3^n}{t} \int |f|dx
\end{aligned}$$

Yang terbukti dengan hasil $C = 3^n$.

2.9 Hardy-Littlewood-Sobolev

Teorema:

Anggap $0 < \alpha < n,\ 1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ dan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$.

(i) Jika $f \in L^p(\mathbb{R}^n)\left(1 < p < \frac{n}{\alpha}\right)$, maka $\|I_\alpha f\|_q \leq C\|f\|_p$;

(ii) Jika $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, maka untuk setiap $\lambda > 0,\ |\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_1\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$, dimana $C = C(\alpha, n, p)$ (Lu, Ding, & Yan, 2007).

Bukti:

(i) Ingat bahwa $\left(1 - \frac{\alpha p}{n}\right) q = p$ dengan keterbatasan-L^p dari operator maksimal Hardy-Littlewood M untuk $1 < p < \infty$, didapatkan

$$\|I_\alpha f\|_q \leq C\|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}} \|Mf\|_p^{1-\frac{\alpha p}{n}} \leq C\|f\|_p.$$

(ii) Menggunakan keterbatasan-(1,1) lemah dari operator M, didapatkan

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}| = \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \left(\frac{\lambda}{C\|f\|_1^{\frac{\alpha}{n}}}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}\right\}\right|$$

$$\leq C_1 \left(\frac{C\|f\|_1^{\frac{\alpha}{n}}}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n}-\alpha} \|f\|_1$$

$$\leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_1\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$$

Teorema ini terbukti.

2.10 Operator Maksimal Hardy-Littlewood yang Dimodifikasi

Definisi 2.10

Misalkan (X, d) adalah ruang quasi-metrik ganda secara geometris dan μ adalah ukuran Borel pada X terbatas pada himpunan yang dibatasi. Dengan fungsi maksimal Hardy-Littlewood $Mf(x)$ yang didefinisikan (untuk fungsi terukur Borel) dengan

$$Mf(x) \coloneqq \sup_{r>0} \frac{1}{\mu\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f| d\mu.$$

Definisi yang dipakai berarti menghampiri-μ, dimana jika $x \in \mu$, maka $\mu(B(x,r))$ adalah positif untuk setiap $r > 0$ (sebaliknya, suatu bola kecil yang terpusat pada x dapat dihapus dari μ). Jika ukuran μ memenuhi sifat ganda, maka dapat diketahui bahwa operator maksimal Hardy-Littlewood terbatas pada setiap $L^p(\mu)$ dengan $1 < p \leq +\infty$ dan dari $L^{1,\infty}(\mu)$. Tetapi, jika syarat penggandaan dari ukuran tersebut diabaikan, untuk sebarang ruang quasi-metrik ganda geometris X dan ukuran μ, hanya dapat dikatakan bahwa M terbatas pada $L^\infty(\mu)$. Salah satu cara untuk menghindari masalah ini adalah mengganti ukuran bola-d $B(x, r)$ dengan ukuran pelebaran bola yang tepat. Sehingga, operator maksimal Hardy-Littlewood yang dimodifikasi didefinisikan

$$\widetilde{M}f(x) \coloneqq \sup_{r>0} \frac{1}{\mu\big(B(x,3K_1 r)\big)} \int_{B(x,r)} |f| d\mu.$$

Dimana K_1 adalah konstanta dalam definisi quasi-metrik. Dinotasikan dengan $\widetilde{M}f(x) \leq Mf(x)$ dan jika ukuran μ memenuhi *doubling condition*, $\widetilde{M}f(x) \leq CMf(x)$ untuk suatu konstanta $C > 0$ (Iaffei & Nitti, 2018)

2.11 Doubling Condition dan Growth Condition

Misalkan R^d dilengkapi dengan metrik $|\cdot|$ dan ukuran borel μ. Ukuran μ dikatakan memenuhi *doubling condition* ($\mu \in DC$) Jika terdapat konstanta $C > 0$ sedemikian hingga untuk setiap bola $B(x,r)$, $\mu\big(B(x,2r)\big) \leq C\mu\big(B(x,r)\big)$. Jika $\mu \in DC$, maka R^d dinamakan ruang homogen. Jika μ tidak memenuhi *doubling condition*, maka R^d dinamakan ruang tak homogen. μ dikatakan memenuhi *growth condition* ($\mu \in GC(s)$) jika terdapat konstanta $C > 0$ sedemikian hingga untuk setiap bola $B(x,r)$, $\mu\big(B(x,r)\big) \leq Cr^s$ (Gunawan et al., 2018).

2.12 Kajian Integrasi Sains dan Islam

Keterbatasan dalam diri manusia kerap disebut sebagai kelemahan diri. Segala keterbatasan yang dimiliki menjadikan manusia tidak selalu bisa memenuhi segala yang diinginkan di muka bumi. Jika kemampuan manusia terbatas, maka sebaliknya kemampuan Allah SWT tiada terbatas. Allah SWT menjadikan kelemahan dalam diri manusia agar hamba-Nya memiliki kesadaran untuk lebih mendekatkan diri pada Tuhan Yang Maha Kuasa. Kelemahan manusia tidak berarti bernilai negatif. Sebagaimana yang telah termaktub dalam Alquran Surat an-Nisa’ ayat 28:

يُرِيْدُ اللّٰهُ اَنْ يُّخَفِّفَ عَنْكُمْ ۚ وَخُلِقَ الْاِنْسَانُ ضَعِيْفًا

Artinya: Allah hendak memberikan keringanan kepadamu, karena manusia diciptakan bersifat lemah [QS. An-Nisa’ (4): 28].

Merujuk pada tafsir jalalain, ayat ini memberi penjelasan bahwa Allah hendak memberi keringanan dalam artian memudahkan pelaksanaan syariat karena manusia telah diciptakan bersifat lemah (As-Suyuthi & Al-Mahalli, 2003). Lebih lanjut, dalam tafsir al-Misbah juga dijelaskan bahwa Allah telah memberikan ketentuan syariat yang ringan. Atas kelemahan yang dimiliki manusia, Allah menganugerahkan kemudahan dan keleluasaan menjalankan syariat yang telah ditentukan (Shihab, 2002).

لَا يُكَلِّفُ اللّٰهُ نَفْسًا اِلَّا وُسْعَهَاۗ

Artinya: Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan batas kesanggupannya [QS. Al-Baqarah (2): 286].

Dijelaskan dalam tafsir jalalain bahwa ayat ini menjelaskan tentang kemurahan Allah yang tidak membebani manusia melainkan sekedar dengan kesanggupannya (As-Suyuthi & Al-Mahalli, 2003). Menurut tafsir al-Misbah, Allah hanya akan membebani hamba-Nya setara dengan kemampuan manusia untuk menjalankan (Shihab, 2002).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Keterbatasan Operator Integral Fraksional pada Ruang Lebesgue Tak Homogen

Teorema 3.1

Misalkan $1 < p < q < \infty$. Akan dibuktikan bahwa perator

$$I_\alpha^\lambda f(x) = \int_x \frac{d(x,y)^\alpha}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} f(y) d\mu(y)$$

Terbatas dari $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu)$ jika dan hanya jika $\mu(B) \leq Cr^s$. Adapun s didefinisikan sebagai $s = \frac{pq(n-\alpha)}{pq+p-q}$.

Bukti:

Dalam pembuktian ini, operator maksimal Hardy-Littlewood didefinisikan

$$\widetilde{M} f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mu\big(B(x, 3K_1 r)\big)} \int_{B(x,r)} |f| d\mu$$

Dengan konstanta C_λ sedemikian hingga $\lambda(x, 2r) \leq C_\lambda \lambda(x,r)$ untuk setiap $x \in X$ dan $r > 0$. Fungsi maksimal didefinisikan $\Omega(x) = \sup_{R>0} \frac{\mu(B(x,R)}{\xi(x,R)}$.

$$I_\alpha^\lambda f(x) = \int_x \frac{d(x,y)^\alpha}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} f(y) d\mu(y)$$

$$I_\alpha^\lambda f(x) = \int_{d(x,y)<r} \frac{d(x,y)^\alpha}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} f(y) d\mu(y) + \int_{d(x,y)\geq r} \frac{d(x,y)^\alpha}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} f(y) d\mu(y)$$

$$= I(x) + II(x)$$

$$|I(x)| = \left| \int_{d(x,y)<r} \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} f(y) d\mu(y) \right|$$

$$\leq \int_{d(x,y)<r} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{d(x,y)<\frac{1}{2}r} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}r \leq d(x,y)<r} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{d(x,y)<\frac{1}{4}r} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{4}r \leq d(x,y)<\frac{1}{2}r} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}r \leq d(x,y)<r} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{d(x,y)<\frac{1}{8}r} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{8}r \leq d(x,y)<\frac{1}{4}r} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{4}r \leq d(x,y)<\frac{1}{2}r} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}r \leq d(x,y)<r} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^k r} \leq \mathrm{d(x,y)} < \frac{1}{2^{k+1} r}} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} \int_{2^k r \leq \mathrm{d(x,y)} < 2^{k+1} r} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{(2^k r)^\alpha}{\xi(x,2^k r)}\right) \int_{d(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)|d\mu(y)$$

$$\leq Cr^\alpha \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{(2^k)^\alpha}{\xi(x,2^k r)}\right) \int_{d(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)|d\mu(y)$$

$$\leq Cr^\alpha \sum_{k=-\infty}^{-1} (2^k)^\alpha \frac{1}{\xi(x,2^k r)} \cdot \frac{\mu(B(x,3K_1 r))}{\mu(B(x,3K_1 r))} \int_{B(x,2^{k+1}r)} |f(y)|d\mu(y)$$

$$\leq Cr^\alpha \sum_{k=-\infty}^{-1} (2^k)^\alpha \frac{\mu(B(x,3K_1 r))}{\xi(x,2^k r)} \cdot \frac{1}{\mu(B(x,3K_1 r))} \int_{B(x,2^{k+1}r)} |f(y)|d\mu(y)$$

$$\leq Cr^\alpha \sum_{k=-\infty}^{-1} (2^k)^\alpha \frac{\mu(B(x,3K_1 r))}{\xi(x,2^k r)} \tilde{M}f(x)$$

$$\leq Cr^\alpha \sum_{k=-\infty}^{-1} (2^k)^\alpha \,\Omega(x)\tilde{M}f(x)$$

$$\leq Cr^\alpha \Omega(x)\tilde{M}f(x)$$

Sehingga

$$|I(x)| \leq Cr^\alpha \Omega(x)\tilde{M}f(x)$$

Selanjutnya

$$|II(x)| = \left|\int_{d(x,y)\geq r} \frac{d(x,y)^\alpha}{\xi\big(x,d(x,y)\big)} f(y)d\mu(y)\right|$$

$$\leq \int_{d(x,y)\geq r} |f(y)| \frac{d(x,y)^\alpha}{\xi\big(x,d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{d(x,y)\geq 2r} |f(y)| \frac{d(x,y)^\alpha}{\xi\big(x,d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$+ \int_{2r\leq d(x,y)\leq r} |f(y)| \frac{d(x,y)^\alpha}{\xi\big(x,d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{d(x,y)\geq 4r} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$+ \int_{4r\leq d(x,y)\leq 2r} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$+ \int_{2r\leq d(x,y)\leq r} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{Dk} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$+ \int_{B(x,R_0)\setminus B(x,2^m r)} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{k+1}r)} |f(y)| C \left(\frac{(2^k r)^{\alpha}}{\xi(x, 2^k r)} \right) d\mu(y)$$

$$+ \int_{B(x,R_0)} |f(y)| C \left(\frac{(2^m r)^{\alpha}}{\xi(x, 2^m r)} \right) d\mu(y)$$

Dengan menggunakan ketaksamaan holder,

$$\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\int_{B(x,2^{k+1}r)} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,2^{k+1}r)} \frac{(2^k r)^{\alpha q}}{\xi(x, 2^k r)^q} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left(\int_{B(x,R_0)} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,R_0)} \frac{(2^m r)^{\alpha q}}{\xi(x, 2^m r)^q} d\mu(y) \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

Dari hipotesa *lower type* $\xi(x,r)$, *doubling condition* ξ dan definisi fungsi maksimal Ω, didapat:

$$\leq Cr^{\alpha} \| f : \mathcal{L}^p(\mu) \| \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2^k)^{\alpha}}{\xi(x, 2^k r)} \Big(\mu\big(B(x, 2^{k+1} r) \big) \Big)^{1/q} \right.$$

$$+\frac{(2^m)^\alpha}{\xi(x,2^m r)}\left(\mu\left(B(x,R_0)\right)\right)^{1/q}\Bigg]$$

$$\leq Cr^\alpha\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k\alpha}}{\xi(x,2^k r)}\left(\xi(x,2^{k+1}r)\right)^{1/q}+\frac{2^{m\alpha}}{\xi(x,2^m r)}\left(\xi(x,R_0)\right)^{1/q}\right]$$

$$\leq Cr^\alpha\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|\Bigg[\sum_{k=0}^{\infty}C_\xi\frac{2^{k\alpha}}{\xi(x,2^k r)}\left(\xi(x,2^{k+1}r)\right)^{1/q}$$

$$+C_\xi\frac{2^{m\alpha}}{\xi(x,2^m r)}\left(\xi(x,R_0)\right)^{1/q}\Bigg]$$

$$\leq Cr^\alpha C_\xi\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|\left[\sum_{k=0}^{\infty}2^{k\alpha}\left(\xi(x,2^{k+1}r)\right)^{1/q}+2^{m\alpha}\left(\xi(x,R_0)\right)^{1/q}\right]$$

Karena aplikasi $r\to\xi(x,r)$ tidak menurun, mengikuti $\xi(x,r)\leq\xi(x,2^{k+1}r)\leq\xi(x,r_0), k=0,1,\ldots,m-1$ dan didapatkan

$$\leq Cr^\alpha\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|\left(\xi(x,r)\right)^{1/q}\left[\sum_{k=0}^{\infty}2^{k\alpha}+2^{m\alpha}\right]$$

$$\leq Cr^\alpha\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|\left(\xi(x,r)\right)^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}$$

Sehingga,

$$|I_\alpha f|\leq|I(x)+II(x)|$$

$$\left|I_\alpha^\lambda f(x)\right|\leq Cr^\alpha\widetilde{M}f+Cr^\alpha\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}$$

Jika dipilih $r>0\ni Cr^\alpha\widetilde{M}f = Cr^\alpha\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}$

maka

$$Cr^\alpha\widetilde{M}f = Cr^\alpha\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}$$

$$\frac{r^\alpha}{r^\alpha}=C\left(\frac{\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|}{\widetilde{M}f(x)}\right)^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}$$

Didapat, $r=1$.

$$|I_\alpha f| \le C\left(\frac{\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|}{\widetilde{M}f(x)}\right)^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}} \widetilde{M}f$$

$$= C(\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|)^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}(\widetilde{M}f)^{1-\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}$$

$$= C(\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|)^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}(\widetilde{M}f)^{\frac{1}{p}+\frac{n-\alpha}{s}}$$

$$|I_\alpha f|^q \le C(\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|)^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}(\widetilde{M}f)^{\frac{1}{p}+\frac{n-\alpha}{s}}$$

$$\int_{R^d} |I_\alpha f|^q \, d\mu(y) = C(\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|)^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}} \int_{R^d} (\widetilde{M}f)^p \, d\mu(y)$$

$$\le C(\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|)^{\frac{q}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}(\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|)^p$$

$$= C(\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|)^{p(\frac{q}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s})}$$

$$\le C(\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|)^{p\left(\frac{q}{p}\right)}$$

$$= C(\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|)^q$$

$$\|f:\mathcal{L}^q(\mu)\| \le C\|f:\mathcal{L}^p(\mu)\|$$

3.2 Keterbatasan Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Klasik Tak Homogen

Teorema 3.2

Misalkan $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \alpha$ dengan $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ dan $\frac{\lambda_1}{p} = \frac{\lambda_2}{q}$, dimana $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1)$. Terdapat konstanta $C > 0$ sedemikian hingga I_α terbatas dari $L^{p,\lambda_1}(\mu)$ ke $L^{p,\lambda_2}(\mu)$ maka berlaku $\mu(B) \le Cr^s$ dimana $\mu \in GC(s)$. Adapun s didefinisikan $s = \frac{pq(n-\alpha)}{pq+p-q}$.

Bukti:

$$\left\|I_\alpha f: L^{q,\lambda_2}\right\| \le C\left\|f: L^{p,\lambda_1}\right\|$$

$$I_\alpha^\lambda f(x) = \int_X \frac{d(x,y)^\alpha}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} f(y) d\mu(y)$$

Fungsi maksimal Ω didefiniskan sebagai $\Omega(x) = \sup_{R>0} \frac{\mu(B(x,R)}{\xi(x,R)}$ dan operator maksimal Hardy-Littlewood didefinisikan sebagai

$$Mf(x) \coloneqq \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f| d\mu$$

Adapun operator maksimal Hardy-Littlewood yang dimodifikasi didefinisikan sebagai

$$\widetilde{M} f(x) \coloneqq \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,3K_1 r))} \int_{B(x,r)} |f| d\mu$$

Dimana K_1 adalah konstanta dalam definisi quasi-metrik, dengan catatan $\widetilde{M}f(x) \le Mf(x)$ dan ukuran μ memenuhi *doubling condition*, untuk setiap $C > 0$ berlaku $\widetilde{M}f(x) \le CMf(x)$.

Bukti

Dalam pembuktian ini, operator maksimal Hardy-Littlewood didefinisikan

$$\widetilde{M} f(x) \coloneqq \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,3K_1 r))} \int_{B(x,r)} |f| d\mu$$

Dengan konstanta C_ξ sedemikian hingga $\xi(x,2r) \le C_\xi \xi(x,r)$ untuk setiap $x \in X$ dan $r > 0$. Fungsi maksimal didefinisikan $\Omega(x) = \sup_{R>0} \frac{\mu(B(x,R)}{\xi(x,R)}$.

$$I_\alpha^\lambda f(x) = \int_X \frac{d(x,y)^\alpha}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} f(y) d\mu(y)$$

$$I_\alpha^\lambda f(x) = \int_{d(x,y)<r} \frac{d(x,y)^\alpha}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} f(y) d\mu(y) + \int_{d(x,y)\ge r} \frac{d(x,y)^\alpha}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} f(y) d\mu(y)$$

$$= I(x) + II(x)$$

$$|I(x)| = \left|\int_{d(x,y)<r} \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} f(y)d\mu(y)\right|$$

$$\leq \int_{d(x,y)<r} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^k r} \leq \mathrm{d(x,y)} < \frac{1}{2^{k+1} r}} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} \int_{2^k r \leq \mathrm{d(x,y)} < 2^{k+1} r} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{(2^k r)^{\alpha}}{\xi(x, 2^k r)}\right) \int_{\mathrm{d(x,y)} < 2^{k+1} r} |\mathrm{f(y)}| \mathrm{d\mu(y)}$$

$$\leq Cr^{\alpha} \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{(2^k)^{\alpha}}{\xi(x, 2^k r)}\right) \int_{\mathrm{d(x,y)} < 2^{k+1} r} |\mathrm{f(y)}| \mathrm{d\mu(y)}$$

$$\leq Cr^{\alpha} \sum_{k=-\infty}^{-1} (2^k)^{\alpha} \frac{1}{\xi(x, 2^k r)} \cdot \frac{\mu(B(x, 3K_1 r))}{\mu(B(x, 3K_1 r))} \int_{B(x, 2^{k+1} r)} |\mathrm{f(y)}| \mathrm{d\mu(y)}$$

$$\leq Cr^{\alpha} \sum_{k=-\infty}^{-1} (2^k)^{\alpha} \frac{\mu(B(x, 3K_1 r))}{\xi(x, 2^k r)} \cdot \frac{1}{\mu(B(x, 3K_1 r))} \int_{B(x, 2^{k+1} r)} |\mathrm{f(y)}| \mathrm{d\mu(y)}$$

$$\leq Cr^{\alpha} \sum_{k=-\infty}^{-1} (2^k)^{\alpha} \frac{\mu(B(x, 3K_1 r))}{\xi(x, 2^k r)} \widetilde{M} f(x)$$

$$\leq Cr^{\alpha} \sum_{k=-\infty}^{-1} (2^k)^{\alpha}\, \Omega(x) \widetilde{M} f(x)$$

$$\leq Cr^{\alpha} \Omega(x) \widetilde{M} f(x)$$

Sehingga

$$|I(x)| \leq Cr^{\alpha} \Omega(x) \widetilde{M} f(x)$$

Selanjutnya

$$|II(x)| = \left|\int_{d(x,y)\geq r} \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x,d(x,y)\big)} f(y)d\mu(y)\right|$$

$$\leq \int_{d(x,y)\geq r} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x,d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{Dk} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x,d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$+ \int_{B(x,R_0)\setminus B(x,2^m r)} |f(y)| \frac{d(x,y)^{\alpha}}{\xi\big(x,d(x,y)\big)} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{k+1}r)} |\mathrm{f}(\mathrm{y})| C \left(\frac{(2^k r)^{\alpha}}{\xi(x,2^k r)}\right) \mathrm{d}\mu(\mathrm{y})$$

$$+ \int_{B(x,R_0)} |\mathrm{f}(\mathrm{y})| C \left(\frac{(2^m r)^{\alpha}}{\xi(x,2^m r)}\right) \mathrm{d}\mu(\mathrm{y})$$

Dengan menggunakan ketaksamaan holder,

$$\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \left[\mu\big(B(x,2^k r)\big)^{\frac{\lambda_1}{p}} \left(\frac{1}{\mu\big(B(x,2^{k+1} r)\big)^{\lambda_1}} \int_{B(x,2^{k+1}r)} |\mathrm{f}(\mathrm{y})|^p \mathrm{d}\mu(\mathrm{y}) \right)^{\frac{1}{p}} \right.$$

$$\left(\int_{B(x,2^{k+1}r)} \frac{(2^k r)^{\alpha q}}{\xi(x,2^k r)^q} \mathrm{d}\mu(\mathrm{y}) \right)^{\frac{1}{q}} + \mu\big(B(x,2^k r)\big)^{\frac{\lambda_1}{p}}$$

$$\left.\left(\frac{1}{\mu\big(B(x,2^{k+1} r)\big)^{\lambda_1}} \int_{B(x,R_0)} |\mathrm{f}(\mathrm{y})|^p \mathrm{d}\mu(\mathrm{y}) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,R_0)} \frac{(2^m r)^{\alpha q}}{\xi(x,2^m r)^q} \mathrm{d}\mu(\mathrm{y}) \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

Dari hipotesa *lower type* $\xi(x,r)$, *doubling condition* ξ dan definisi fungsi maksimal Ω, didapat:

$$\leq Cr^{\alpha}\|f:\mathcal{L}^{p,\lambda_1}(\mu)\|\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2^k)^{\alpha}}{\xi(x,2^k r)}\left(\mu\left(B(x,2^{k+1}r)\right)\right)^{1/q}\right.$$

$$\left.+\frac{(2^m)^{\alpha}}{\xi(x,2^m r)}\left(\mu\left(B(x,R_0)\right)\right)^{1/q}\right]$$

$$\leq Cr^{\alpha}\|f:\mathcal{L}^{p,\lambda_1}(\mu)\|\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k\alpha}}{\xi(x,2^k r)}\left(\xi(x,2^{k+1}r)\right)^{1/q}+\frac{2^{m\alpha}}{\xi(x,2^m r)}\left(\xi(x,R_0)\right)^{1/q}\right]$$

$$\leq Cr^{\alpha}\|f:\mathcal{L}^{p,\lambda_1}(\mu)\|\left[\sum_{k=0}^{\infty}C_{\xi}\frac{2^{k\alpha}}{\xi(x,2^k r)}\left(\xi(x,2^{k+1}r)\right)^{1/q}\right.$$

$$\left.+C_{\xi}\frac{2^{m\alpha}}{\xi(x,2^m r)}\left(\xi(x,R_0)\right)^{1/q}\right]$$

$$\leq Cr^{\alpha}C_{\xi}\|f:\mathcal{L}^{p,\lambda_1}(\mu)\|\left[\sum_{k=0}^{\infty}2^{k\alpha}\left(\xi(x,2^{k+1}r)\right)^{1/q}+2^{m\alpha}\left(\xi(x,R_0)\right)^{1/q}\right]$$

Karena aplikasi $r\to\xi(x,r)$ tidak menurun, mengikuti $\xi(x,r)\leq\xi(x,2^{k+1}r)\leq\xi(x,r_0), k=0,1,\dots,m-1$ dan didapatkan

$$\leq Cr^{\alpha}\|f:\mathcal{L}^{p,\lambda_1}(\mu)\|\left(\xi(x,r)\right)^{1/q}\left[\sum_{k=0}^{\infty}2^{k\alpha}+2^{m\alpha}\right]$$

$$\leq Cr^{\alpha}\|f:\mathcal{L}^{p,\lambda_1}(\mu)\|\left(\xi(x,r)\right)^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}$$

Sehingga,

$$|I_{\alpha}f|\leq|I(x)+II(x)|$$

$$\left|I_{\alpha}^{\lambda}f(x)\right|\leq Cr^{\alpha}\widetilde{M}f+Cr^{\alpha}\|f:\mathcal{L}^{p\lambda_1}(\mu)\|^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}$$

Jika dipilih $r>0\ni Cr^{\alpha}\widetilde{M}f=\ Cr^{\alpha}\|f:\mathcal{L}^{p,\lambda_1}(\mu)\|^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}$ maka

$$Cr^{\alpha}\widetilde{M}f=\ Cr^{\alpha,\lambda_1}\|f:\mathcal{L}^{p}(\mu)\|^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}$$

$$\frac{r^{\alpha}}{r^{\alpha}}=C\left(\frac{\|f:\mathcal{L}^{p,\lambda_1}(\mu)\|}{\widetilde{M}f(x)}\right)^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}$$

Didapat, $r = 1$.

$$|I_\alpha f| \le C\left(\frac{\|f:\mathcal{L}^{p,\lambda_1}(\mu)\|}{\widetilde{M}f(x)}\right)^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}} \widetilde{M}f$$

$$= C\left(\|f:\mathcal{L}^{p,\lambda_1}(\mu)\|\right)^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}\left(\widetilde{M}f\right)^{1-\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}$$

$$= C\left(\|f:\mathcal{L}^{p,\lambda_1}(\mu)\|\right)^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}\left(\widetilde{M}f\right)^{\frac{1}{p}+\frac{n-\alpha}{s}}$$

$$|I_\alpha f|^q \le C\left(\|f:\mathcal{L}^{p,\lambda_1}(\mu)\|\right)^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}\left(\widetilde{M}f\right)^{\frac{1}{p}+\frac{n-\alpha}{s}}$$

$$\int_{R^d}|I_\alpha f|^q\, d\mu(y) = C\left(\|f:\mathcal{L}^{p,\lambda_1}(\mu)\|\right)^{\frac{1}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}\int_{R^d}(\widetilde{M}f)^p\, d\mu(y)$$

$$\le C\left(\|f:\mathcal{L}^{p,\lambda_1}(\mu)\|\right)^{\frac{q}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s}}\left(\|f:\mathcal{L}^{p}(\mu)\|\right)^{p}$$

$$= C\left(\|f:\mathcal{L}^{p,\lambda_1}(\mu)\|\right)^{p(\frac{q}{p}-1+\frac{n-\alpha}{s})}$$

$$\le C\left(\|f:\mathcal{L}^{p,\lambda_1}(\mu)\|\right)^{p\left(\frac{q}{p}\right)}$$

$$= C\left(\|f:\mathcal{L}^{p,\lambda_1}(\mu)\|\right)^{q}$$

$$\|f:\mathcal{L}^{q,\lambda_2}(\mu)\| \le C\|f:\mathcal{L}^{p,\lambda_1}(\mu)\|$$

3.3 Keterbatasan Manusia dalam Alquran

Operator integral fraksional meniscayakan keterbatasan dalam proses penyelesaiannya. Ketika syarat keterbatasan operator integral fraksional dipenuhi, maka akan menghasilkan suatu kesimpulan dari pembuktian teorema di ruang tertentu. Konsep ini memberikan pelajaran bahwa Allah SWT juga menciptakan manusia disertai dengan keterbatasan. Suatu keterbatasan terkadang menjadi kelemahan manusia. Namun disisi lain, keterbatasan yang diberikan Allah SWT menciptakan rahmat berupa keringanan bagi hambanya. Sebagaimana yang telah disabdakan dalam Alquran Surat an-Nisa’ ayat 28:

يُرِيْدُ اللّٰهُ اَنْ يُّخَفِّفَ عَنْكُمْ ۚ وَخُلِقَ الْاِنْسَانُ ضَعِيْفًا

Artinya: Allah hendak memberikan keringanan kepadamu, karena manusia diciptakan bersifat lemah [QS. An-Nisa' (4): 28].

Tafsir Ibnu Katsir menambah penjelasan bahwa syariat yang diturunkan bertepatan dengan ayat ini yaitu syariat diperbolehkannya seorang majikan menikahi budak dengan syarat tertentu. Syariat ini diturunkan karena Allah SWT Maha Mengetahui bahwa hamba laki-laki memiliki keterbatasan atau kelemahan batin terhadap wanita. Sehingga dengan adanya syariat menikah, kelemahan tersebut mendapat muara solusi (Katsir, 2000).

Selain syariat menikahi budak, Allah SWT juga telah memudahkan syariat shalat. Pada peristiwa isra' mi'raj, Nabi Muhammad SAW mendapat perintah pelaksanaan shalat sebanyak 50 kali dalam sehari semalam. Namun, setelah beberapa kali meminta keringanan akhirnya Allah mengabulkan syariat shalat hanya dilaksanakan lima kali sehari. Keringanan syariat ini didasari oleh keterbatasan kemampuan fisik manusia untuk menjalankan shalat 50 kali. Padahal, disamping memiliki kewajiban menjalankan amaliah ukhrowi, manusia juga memiliki tanggungjawab atas amaliah duniawi. Di dalam ayat yang lain juga telah dijelaskan bahwa Allah SWT tidak akan pernah memberikan beban di luar batas kemampuan seorang hamba,

لَا يُكَلِّفُ اللّٰهُ نَفْسًا اِلَّا وُسْعَهَا ۗ

Artinya: Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan batas kesanggupannya [QS. Al-Baqarah (2): 286].

Tafsir Ibnu Katsir menyimpulkan bahwa ayat ini merupakan salah satu sifat lemah lembut Allah yang diberikan pada manusia (Katsir, 2000).

Salah satu contoh sifat lemah lembut Allah pada manusia yaitu keringanan menjalankan ibadah shalat. Shalat merupakan amal paling utama yang akan dihisab di hari perhitungan. Sehingga tidak ada suatu alasan apapun bagi manusia untuk meninggalkan shalat, meski dengan segenap keterbatasan fisik. Ketika tidak bisa menjalankan shalat dengan berdiri, maka Allah memberi keringanan menjalankan shalat dengan duduk. Ketika tidak bisa menjalankan shalat dengan duduk, maka Allah memberi keringanan menjalankan shalat dengan berbaring. Ketika tidak bisa menjalankan shalat dengan berbaring, Allah memberi keringanan menjalankan shalat dengan isyarat kedipan mata.

Selain keringanan sebab keterbatasan fisik, Allah SWT juga memberi keringanan shalat sebab keterbatasan waktu dan kondisi. Jika pada mulanya syariat shalat diwajibkan 50 waktu kemudian diringankan menjadi lima waktu, maka lima waktu ini diberi keringanan lagi dengan diperbolehkannya shalat secara jamak dan qashar. Misalkan, seseorang sedang berada dalam kondisi perjalanan jauh yang menempuh jarak lebih dari 90 kilometer (dengan catatatan bukan perjalanan untuk melanggar perintah Allah), maka seseorang tersebut diperbolehkan melaksanakan shalat secara jamak.

Shalat jamak yaitu menjalankan dua shalat dalam satu waktu, seperti dhuhur dan ashar, serta maghrib dan isya'. Adakalanya perjalanan jauh menyita banyak energi sehingga seseorang diperbolehkan menjalankan shalat dengan cara qashar, yaitu menjalankan shalat empat rakaat menjadi dua rakaat saja. Pemaparan ini menunjukkan bahwa keterbatasan (fisik, waktu, dan kondisi) yang dimiliki manusia menjadi anugerah tersendiri yang diberikan Allah SWT pada hamba-Nya. Sebagaimana syariat shalat yang bermula 50 waktu, menjadi hanya lima waktu dan didiskon lagi menjadi tiga waktu jika menjalankannya secara jamak atas kondisi tertentu. Begitu juga dengan rakaat shalat lima waktu yang berjumlah 17 rakaat diberi keringanan dijalankan secara qashar sehingga tersisa 11 rakaat.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh hasil bahwa untuk $0 < \alpha < 1$, operator integral fraksional I_α^λ yang didefinisikan

$$I_\alpha^\lambda f(x) = \int_X \frac{d(x,y)^\alpha}{\xi\big(x, d(x,y)\big)} f(y) d\mu(y)$$

merupakan operator terbatas pada:

1. Ruang Lebesgue tak homogen dengan keterbatasan dari $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu)$ dimana $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ dan $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \alpha$ atau dapat dikatakan untuk $f \in L^p(\mu)$ terdapat konstanta $C > 0$ sehingga diperoleh ketaksamaan $\|I_\alpha f: L^q(\mu)\| \leq C\|f: L^p(\mu)\|$dengan syarat $(B) \leq Cr^s, S = \frac{pq(1-\alpha)}{pq+p-q}$.
2. Karena keberlakuan ketaksamaan operator integral fraksional pada ruang Lebesgue, maka diperoleh hasil bahwa operator integral fraksional I_α^λ juga terbatas pada ruang morrey klasik tak homogeny dengan keterbatasan dari $L^{p,\lambda_1}(\mu)$ ke $L^{q,\lambda_2}(\mu)$.

4.2 Saran

Berdasarkan pembahasan di atas, disarankan penelitian selanjutnya dapat melakukan telaah pembuktian syarat cukup pada teorema 3.1 yaitu apabila $\mu(B) \leq Cr^s$ maka berlaku $\|I_\alpha f: L^q(\mu)\| \leq C\|f: L^p(\mu)\|$, begitu pula pada teorema 3.2 yaitu apabila $\mu(B) \leq Cr^s$ maka berlaku$\|I_\alpha f: L^{q,\lambda_2}(\mu)\| \leq C\|f: L^{p,\lambda_1}(\mu)\|$. Penelitian ini juga dapat diaplikasikan pada operator yang lain.

DAFTAR RUJUKAN

As-Suyuthi, J., & Al-Mahalli, J. (2003). Tafsir jalalain. *Beirut: Dar Al-Fikr*.

Adams, David R dan Hedberg L.I. 1996. *Function Spaces and Potential Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Bartle, Robert G. 1995. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure John Willey & Sons. Inc.*

Cohn, Donald L. 2013. *Measure Theory : Second Edition.* Springer Science+Bussiness Media, LLC.

Darmawijaya, Soeparna. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak.* Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Dinculeanu, N. (1974). *Integration on locally compact spaces*. Springer Science & Business Media.

Folland, G. B. (2009). *Fourier analysis and its applications* (Vol. 4). American Mathematical Soc.

Gunawan, H., Hakim, D. I., & Idris, M. (2018). Proper inclusions of Morrey spaces. *Glasnik Matematički*, *53*(1), 143–151.

Hardy, G. H. (n.d.). Littlewood „JE, Polya, G.(1934): Inequalities. Cambridge University Press.

Iaffei, B. R., & Nitti, R. L. (2018). A unified point of view on boundedness of Riesz type potentials.

Katsir, I. (2000). Tafsir Ibnu Katsir. *Juz IV. Mesir: Dar Al Kutub, Tth*.

Lu, S. Z., Ding, Y., & Yan, D. Y. (2007). Singular Integrals and Related Topics, Singapore: World Sci. *Pulishing House*.

Nelson, G. S. (2015). *A user-friendly introduction to Lebesgue measure and* *integration* (Vol. 78). American Mathematical Soc.

Poularikas, A. D. (2010). *Transforms and applications handbook*. CRC press.

Shihab, M. Q. (2002). Tafsir Al-Misbah. *Jakarta: Lentera Hati*, *2*.

Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2011). *Fourier analysis: an introduction* (Vol. 1). Princeton University Press.

Utoyo, M. I., Nusantara, T., Widodo, B., & Suhariningsih. (2012). Fractional integral operator and olsen inequality in the non-homogeneous classic Morrey space. *International Journal of Mathematical Analysis*.

Wheeden, R. L. (2015). *Measure and integral: an introduction to real analysis* (Vol. 308). CRC Press.

RIWAYAT HIDUP

Anisatur Rizqiyah, lahir di Sidoarjo pada 11 Maret 1998. Gadis yang akrap disapa Anisa ini terlahir dari pasangan H. Achmad Sholeh dan Hj. Siti Aisyah. Anak sulung dari tiga bersaudara ini memulai pendidikan formal di TK Muslimat Siti Aisyah Sidogiri, Pasuruan (2001-2003), SDN 01 Sidogiri, Pasuruan (2003-2009), MTs (2009-2012) dan MA (2012-2015) Almaarif Singosari, Malang. Studi perguruan tinggi Anisa ditempuh di Jurusan Matematika, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang (2015-sekarang).

Adapun pendidikan non-formal Anisa ditempuh di Madrasah Diniyah Al-Ishlah Sidogiri, Pasuruan (2003-2009), PPA. Nurul Huda Singosari, Malang (2009-2015), Ma'had Sunan Ampel Al'Aly (2015-2016) dan PPP. Al-Hikmah Al-Fathimiyyah (2016-sekarang). Saat ini, Anisa tengah mengemban amanah menjadi tenaga didik sekaligus Tim Waka Kurikulum Madrasah Diniyah Al-Hikmah, Malang (2016-sekarang). Anisa pernah tercatat aktif dalam Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Integral Matematika UIN Malang (2015-2016), wartawan Tabloid GEMA UIN Malang (2015-2017), *Crew of* SEMATA (Serambi Matematika Aktif) *Community* (2018-sekarang). CEO 3CS *(Competition, Call Paper, Conference and Schoolarship) Community* (2016-sekarang), dan CEO Al-Farazi (Komunitas Tahfidz dan Bahasa Arab Jurusan Matematika) UIN Malang (2017-sekarang).

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Anisatur Rizqiyah
NIM : 15610037
Fakultas/Jurusan : *Sains dan Teknologi/Matematika*
Judul Skripsi : Keterbatasan Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Klasik Tak Homogen
Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	14 Maret 2019	Konsultasi Bab I	1.
2.	14 Maret 2019	Konsultasi Agama Bab I	2.
3.	15 Maret 2019	Konsultasi Bab II	3.
4.	17 Maret 2019	ACC Bab I & Bab II	4.
5.	18 Maret 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	5.
6.	26 April 2019	Konsultasi Bab III	6.
7.	30 April 2019	Konsultasi Bab IV & Abstrak	7.
8.	2 Mei 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	8.
9.	3 Mei 2019	ACC Bab III, IV & Abstrak	9.
10.	3 Mei 2019	ACC Kajian Keagamaan	10.
11.	3 Mei 2019	ACC Keseluruhan	11.

Malang, 3 Mei 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001