

**PENERAPAN METODE RUNGE-KUTTA IMPLISIT
PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA YANG KAKU**

SKRIPSI

**OLEH
LILLA NUR RIZKI
NIM. 15610028**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019**

**PENERAPAN METODE RUNGE-KUTTA IMPLISIT
PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA YANG KAKU**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Lilla Nur Rizki
NIM. 15610028**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019**

**PENERAPAN METODE RUNGE-KUTTA IMPLISIT
PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA YANG KAKU**

SKRIPSI

Oleh
Lilla Nur Rizki
NIM. 15610028

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 09 Mei 2019

Pembimbing I,

Pembimbing II,



Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004



Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIP. 19900511 20160801 1 057

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 19650414 200312 1 001

**PENERAPAN METODE RUNGE-KUTTA IMPLISIT
PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA YANG KAKU**

SKRIPSI

Oleh
Lilla Nur Rizki
15610028

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai salah satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 22 Mei 2019

Penguji Utama	: Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si	
Ketua Penguji	: Abdul Aziz, M.Si	
Sekretaris Penguji	: Mohammad Jamhuri, M.Si	
Anggota Penguji	: Muhammad Khudzaifah, M.Si	

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Lilla Nur Rizki

NIM : 15610028

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penerapan Metode Runge-Kutta Implisit pada Sistem Persamaan
Diferensial Biasa yang Kaku

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 09 Mei 2019
Yang membuat pernyataan



Lilla Nur Rizki
NIM. 15610028

MOTO

“Jangan menunggu apa yang dapat dikerjakan saat ini, karena suatu keberhasilan
itu perlu dikejar bukan ditunggu”



PERSEMBAHAN

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Ayahanda M. Jainuri dan Ibunda Mistriani tercinta,

yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat,

dan kasih sayang yang tak ternilai, serta adik tersayang Nur Izza Lailatul Jannah

yang selalu menjadi kebanggaan bagi penulis.



KATA PENGANTAR

Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Penerapan Metode Runge-Kutta Implisit pada Sistem Persamaan Diferensial Biasa yang Kaku” sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.

5. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen wali yang selalu memberikan motivasi dan arahan kepada penulis.
7. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam proses perkuliahan.
8. Bapak dan Ibu serta adik tercinta yang selalu memberikan do'a, semangat dan motivasi demi keberhasilan penulis.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Semoga Allah SWT melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

Malang, 09 Mei 2019

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR..... viii

DAFTAR ISI..... x

DAFTAR TABEL xii

DAFTAR GAMBAR..... xiii

ABSTRAK xiv

ABSTRACT xv

ملخص..... xvi

BAB I PENDAHULUAN

1.1	Latar Belakang	1
1.2	Rumusan Masalah	4
1.3	Tujuan Penelitian	4
1.4	Manfaat Penelitian	5
1.5	Batasan Masalah.....	5
1.6	Metode Penelitian.....	6
1.7	Sistematika Penulisan	7

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1	Sistem Persamaan Diferensial Biasa (PDB) yang Kaku	9
2.2	Aturan Rantai	14
2.3	Deret Taylor Satu Variabel	15
2.4	Deret Taylor Dua Variabel.....	16
2.5	Metode Runge-Kutta	17
2.6	Metode Runge-Kutta Implisit	18
2.7	Penurunan Metode Runge-Kutta Implisit Orde Dua.....	20
	2.7.1 Metode Runge-Kutta Implisit Orde Dua pada Sistem Persamaan Diferensial Biasa	24
2.8	Metode Newton Raphson.....	25

2.9 Galat (<i>Error</i>)	27
2.10 Kajian Islam tentang Konsep Berpikir	27

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Metode Runge-Kutta Implisit Orde Dua pada Sistem PDB Linier yang Kaku	29
3.2 Metode Runge-Kutta Implisit Orde Dua pada Sistem PDB Tak Linier yang Kaku	38

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	48
4.2 Saran	49

DAFTAR RUJUKAN	50
-----------------------------	----

LAMPIRAN – LAMPIRAN

RIWAYAT HIDUP

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Solusi Numerik dan Analitik dari Persamaan (3.1) pada $t \in [0,5]$ dengan $h = 0.1$	34
Tabel 3.2	Galat pada Hasil Solusi Persamaan (3.1)	36
Tabel 3.3	Nilai K_{i+1} untuk $n = 0$	42
Tabel 3.4	Nilai K_{i+1} untuk $n = 1$	43
Tabel 3.5	Solusi Numerik dan Analitik dari Persamaan (3.20) pada $t \in [0,5]$ dengan $h = 0.1$	44
Tabel 3.6	Galat pada Hasil Solusi Persamaan (3.20)	46

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Plot $\tilde{x}_{n+1}$ dan x_{n+1} dari Persamaan (3.1) pada $t \in [0,5]$	35
Gambar 3.2	Plot $\tilde{y}_{n+1}$ dan y_{n+1} dari Persamaan (3.1) pada $t \in [0,5]$	35
Gambar 3.3	Plot Galat antara $\tilde{x}_{n+1}$ dan x_{n+1} dari Persamaan (3.1) pada $t \in [0,5]$	37
Gambar 3.4	Plot Galat antara $\tilde{y}_{n+1}$ dan y_{n+1} dari Persamaan (3.1) pada $t \in [0,5]$	37
Gambar 3.5	Plot $\tilde{x}_{n+1}$ dan x_{n+1} dari Persamaan (3.20) pada $t \in [0,5]$	45
Gambar 3.6	Plot $\tilde{y}_{n+1}$ dan y_{n+1} dari Persamaan (3.20) pada $t \in [0,5]$	45
Gambar 3.7	Plot Galat antara $\tilde{x}_{n+1}$ dan x_{n+1} dari Persamaan (3.20) pada $t \in [0,5]$	47
Gambar 3.8	Plot Galat antara $\tilde{y}_{n+1}$ dan y_{n+1} dari Persamaan (3.20) pada $t \in [0,5]$	47

ABSTRAK

Rizki, Lilla Nur. 2019. **Penerapan Metode Runge-Kutta Implisit pada Sistem Persamaan Diferensial Biasa yang Kaku**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Muhammad Khudzaifah, M. Si

Kata kunci: Metode Runge-Kutta implisit, Sistem persamaan diferensial biasa, Sistem yang bersifat kaku

Penelitian ini membahas tentang penerapan metode Runge-Kutta implisit pada sistem persamaan diferensial biasa dan difokuskan pada sistem yang bersifat kaku. Metode Runge-Kutta implisit yang digunakan yaitu metode yang berorde dua. Penelitian ini juga terbagi atas dua kasus, yaitu pada sistem persamaan diferensial biasa linier dan tak linier. Dalam penyelesaian kedua kasus tersebut terdapat perbedaan metode dalam menentukan nilai tiap langkah integrasinya (k_1, k_2, l_1 dan l_2). Kasus pertama yaitu pada sistem persamaan diferensial biasa linier menggunakan metode substitusi, sedangkan kasus kedua pada sistem persamaan diferensial biasa taklinier menggunakan metode Newton-Raphson. Solusi analitik dari kedua sistem tersebut digunakan untuk menguji keakuratan metode Runge-Kutta implisit dalam menyelesaikan model. Hasil yang diperoleh terbukti bahwa metode Runge-Kutta implisit memberikan solusi yang akurat dengan nilai galat yang relatif kecil dalam menyelesaikan kedua kasus. Selanjutnya juga disajikan simulasi dan interpretasi galat yang menunjukkan bahwa perhitungan yang dilakukan sudah benar dan sesuai dengan yang diharapkan. Disimpulkan bahwa metode Runge-Kutta implisit dalam penelitian ini dikategorikan sebagai salah satu metode yang akurat untuk mendekati solusi analitiknya.

ABSTRACT

Nur Rizki, Lilla. 2019. **The Application of Implicit Runge-Kutta Methods for Stiff Ordinary Differential Equation System**. Thesis. Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si, (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si

Keywords: Implicit Runge-Kutta methods, ordinary differential equation system, stiff system.

This study discusses the application of implicit Runge-Kutta methods to ordinary differential equation systems and focuses on stiff systems. The implicit Runge-Kutta method used is a second-order method. This research is also divided into two cases, namely in the system of linear and nonlinear ordinary differential equations. In solving the two cases there are different methods in determining the value of each step of integration (k_1, k_2, l_1 and l_2). The first case is in the system of linear ordinary differential equations using the substitution method, while the second case in the system of ordinary nonlinear differential equations uses the Newton-Raphson method. The analytical solution of the two systems is used to test the accuracy of the implicit Runge-Kutta method in solving models. The results obtained prove that the implicit Runge-Kutta method provides an accurate solution with a relatively small error value in solving both cases. Furthermore, it also presented a simulation and interpretation of errors that show that the calculations were done correctly and as expected. It was concluded that the implicit Runge-Kutta method in this study is categorized as one of the accurate methods to approach analytical solutions.

ملخص

رزقي ، ليلي نور. ٢٠١٩ . تطبيق طرق *Runge-Kutta* الضمنية في أنظمة المعادلات التفاضلية العادية

الصلبة. بحث جامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية

مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشار: (١) محمد جمهوري، ماجستير (٢) محمد خديفة، ماجستير

الكلمات الرئيسية: طريقة *Runge-Kutta* الضمنية ، نظام المعادلات التفاضلية العادية ، النظام الصلب.

تتناول هذه الدراسة تطبيق طريقة *Runge-Kutta* الضمنية على أنظمة المعادلات التفاضلية العادية وتركز على الأنظمة الصلبة. طريقة *Runge-Kutta* الضمنية المستخدمة هي طريقة على الرتبة الثانية. ينقسم هذا البحث أيضاً إلى حالتين، وهما نظام المعادلات التفاضلية العادية الخطية وغير الخطية. في حل الحالتين، هناك طرق مختلفة في تحديد قيمة كل خطوة من خطوات التكامل (k_1 و k_2 و l_1 و l_2). الحالة الأولى هي في نظام المعادلات التفاضلية العادية الخطية باستخدام طريقة الاستبدال، بينما الحالة الثانية في نظام المعادلات التفاضلية غير الخطية العادية تستخدم طريقة نيوتن-رافسون. يستخدم الحل التحليلي للنظامين لاختبار دقة طريقة *Runge-Kutta* الضمنية في استكمال النموذج. تثبت النتائج التي تم الحصول عليها أن طريقة *Runge-Kutta* الضمنية توفر حلاً دقيقاً بقيمة خطأ صغيرة نسبياً في حل كلتا الحالتين. علاوة على ذلك، يتم تقديم محاكاة وتفسير للأخطاء أيضاً توضح أن الحسابات التي تم إجراؤها صحيحة وكما هو متوقع. وقد خلص إلى أن طريقة *Runge-Kutta* الضمنية في هذه الدراسة تم تصنيفها كواحدة من الطرق الدقيقة لمقارنة الحلول التحليلية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sifat kekakuan pada suatu sistem persamaan diferensial biasa pertama kali diamati oleh Curtiss dan Hirschfelder pada tahun 1952 (Curtiss & Hirschfelder, 1952). Kedua ilmuwan tersebut melakukan perhitungan untuk mencari solusi dari suatu model reaksi kimia. Kekakuan dalam sistem tersebut terjadi karena komponen kimia yang diamati bereaksi sangat cepat kemudian berubah sangat lambat dalam waktu yang sangat singkat. Hal tersebut berlawanan dengan penelitian-penelitian sebelumnya yang menjelaskan bahwa reaksi yang berbeda akan terjadi pada skala waktu yang berbeda pula (Ashi, 2008).

Sistem persamaan diferensial biasa yang kaku dikategorikan sebagai sistem persamaan dengan solusi yang memiliki skala waktu yang sangat berbeda namun terjadi pada waktu yang bersamaan. Misalnya jika solusi dari sistem persamaan diferensial biasa linier yang kaku berbentuk e^{-ct} dan e^{-dt} , dengan c adalah konstanta positif yang besar dan d adalah konstanta positif yang relatif kecil. Sehingga semakin bertambah besar nilai t , maka solusi e^{-ct} akan lebih cepat meluruh ke nol dari pada solusi dari e^{-dt} (Ashi, 2008). Contoh dari sistem persamaan diferensial biasa yang kaku yaitu model reaksi kimia dan osilasi Van der Pol, keduanya tergolong sebagai sistem persamaan diferensial biasa tak linier.

Penyelesaian suatu sistem persamaan diferensial biasa yang bersifat kaku tergolong cukup sulit ketika menggunakan pendekatan solusi secara analitik. Sehingga, untuk mengatasi permasalahan tersebut dapat digunakan pendekatan solusi secara numerik. Pada (Hairer & Wanner, 1991) dikatakan bahwa persamaan

diferensial yang kaku adalah masalah dimana metode eksplisit tidak bekerja. Sehingga untuk menyelesaikan persamaan tersebut digunakan metode yang bersifat implisit. Salah satu metode numerik yang bersifat implisit yaitu metode Runge-Kutta implisit.

Metode Runge-Kutta implisit diperkenalkan oleh J.C Butcher pada tahun 1962. Perbedaan Runge-Kutta implisit dengan metode Runge-Kutta eksplisit yakni untuk Runge-Kutta implisit pada setiap tahap terurut (k_i) itu setidaknya ada satu tahap yang bergantung pada dirinya sendiri atau pada satu tahap selanjutnya (Engwer, 2018).

Allah Swt berfirman yang terdapat dalam QS. Thaha:50 yaitu:

قَالَ رَبُّنَا الَّذِي أَعْطَى كُلَّ شَيْءٍ حَلْقَهُ ثُمَّ هَدَى

“Musa berkata: “Tuhan kami ialah (Tuhan) yang telah memberikan kepada tiap- tiap sesuatu bentuk kejadiannya, kemudian memberinya petunjuk”.

Inti dari ayat tersebut menyebutkan apabila setiap kejadian atau permasalahan yang terjadi, Tuhan akan senantiasa memberikan petunjuk untuk menyelesaikannya (Shihab, 2002). Perihal yang termuat dalam QS. Thaha: 50 ini analog dengan pokok pembahasan yang akan dibahas dalam penelitian ini yaitu adanya metode Runge-Kutta implisit merupakan petunjuk dari terbatasnya metode Runge-Kutta secara eksplisit.

Metode Runge-Kutta dikenal sebagai metode numerik yang memiliki keakurasian lebih baik dibandingkan dengan metode numerik yang lain (Chapra, 2002). Hal tersebut juga berlaku pada metode Runge-Kutta implisit. Oleh karena itu, banyak paper yang membahas tentang metode ini dalam memecahkan beberapa masalah, seperti yang dilakukan oleh (Biazar & Navidyan, 2014) dan (Skvortsov, 2013). (Biazar & Navidyan, 2014) menjelaskan penerapan metode Runge-Kutta

implisit pada persamaan Van der Pol, sedangkan (Skvortsov, 2013) menjelaskan penerapan metode bagian (*Lobatto- IIIC*) dari metode Runge-Kutta implisit yang berorde dua pada beberapa contoh sistem persamaan diferensial.

Menurut (Granados, 2017) penerapan metode Runge-Kutta implisit dalam menyelesaikan suatu sistem persamaan diferensial biasa yang tak linier cukup sulit. Hal tersebut terjadi karena untuk mendapatkan nilai tiap langkah integrasinya (k_i) dibutuhkan metode numerik lainnya yaitu, metode Newton-Raphson.

Beberapa penelitian sebelumnya, diantaranya yaitu (Darvishi dkk, 2006), yang membahas mengenai penyelesaian sistem persamaan diferensial biasa yang bersifat kaku menggunakan metode iterasi variasi. Metode tersebut digunakan peneliti karena tidak memerlukan parameter yang kecil dalam persamaan apapun. Dari penelitian tersebut dapat ditarik kesimpulan bahwa metode iterasi variasi konvergen lebih cepat dibanding metode dekomposisi Adomian.

Selanjutnya, penelitian ini akan merujuk dua sistem persamaan diferensial biasa kaku yang diselesaikan oleh (Darvishi dkk, 2006), dimana sistem pertama tergolong linier dan sistem yang kedua tergolong tak linier. Penelitian sebelumnya tersebut juga dilengkapi dengan adanya solusi analitik, sehingga dapat mempermudah penulis dalam mencari galat (*error*) pada solusinya yang dihasilkan nantinya.

Berdasarkan paparan di atas, maka pada penelitian ini penulis akan memaparkan penerapan metode Runge-Kutta implisit, khususnya metode Runge-Kutta implisit orde dua pada sistem persamaan diferensial biasa (PDB) linier dan sistem PDB tak linier yang kaku. Kemudian akan dibandingkan apakah solusi numerik yang diperoleh menghampiri atau mendekati solusi analitiknya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana solusi untuk sistem PDB linier yang bersifat kaku menggunakan metode Runge-Kutta implisit orde dua dan perbandingan dengan solusi analitiknya?
2. Bagaimana solusi untuk sistem PDB tak linier yang bersifat kaku menggunakan metode Runge-Kutta implisit orde dua dan perbandingan dengan solusi analitiknya?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui solusi untuk sistem PDB linier yang bersifat kaku menggunakan metode Runge-Kutta implisit orde dua dan perbandingan dengan solusi analitiknya.
2. Mengetahui solusi untuk sistem PDB tak linier yang bersifat kaku menggunakan metode Runge-Kutta implisit orde dua dan perbandingan dengan solusi analitiknya.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dalam penelitian ini adalah :

1. Dengan mengetahui perbandingan solusi untuk sistem PDB linier yang bersifat kaku menggunakan metode Runge-Kutta implisit orde dua terhadap solusi analitiknya, maka dapat dianalisis baik atau tidaknya metode tersebut.
2. Dengan mengetahui perbandingan solusi untuk sistem PDB tak linier yang bersifat kaku menggunakan metode Runge-Kutta implisit orde dua terhadap solusi analitiknya, maka dapat dianalisis baik atau tidaknya metode tersebut.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Sistem PDB linier (Darvishi dkk, 2006)

$$\frac{dx}{dt} = -x + 95y$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - 97y$$

dengan nilai awal yaitu $x(0) = 1$ dan $y(0) = 1$

dan $h = 0.1$ dengan $t \in [0,5]$

serta solusi analitiknya yaitu

$$x(t) = \frac{1}{47}(95e^{-2t} - 48e^{-96t})$$

$$y(t) = \frac{1}{47}(48e^{-96t} - e^{-2t})$$

2. Sistem PDB tak linier (Darvishi dkk, 2006)

$$\frac{dx}{dt} = -1002x + 1000y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y - y^2$$

dengan nilai awal yaitu $x(0) = 1$ dan $y(0) = 1$

dan $h = 0.1$ dengan $t \in [0,5]$

serta solusi analitiknya yaitu

$$x(t) = e^{-2t}$$

$$y(t) = e^{-t}$$

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yakni menelaah dan mengumpulkan beberapa literatur berupa buku, jurnal dan referensi lain yang berkaitan dengan teori yang dibahas. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Pada sistem PDB linier yang kaku
 - a. Menentukan fungsi-fungsi pada sistem PDB linier yang kaku.
 - b. Mensubstitusikan fungsi langkah integrasi k_1 , k_2 , l_1 dan l_2 pada poin pertama.
 - c. Mencari nilai k_1 , k_2 , l_1 dan l_2 dengan metode substitusi.
 - d. Mensubstitusikan nilai k_1 , k_2 , l_1 dan l_2 yang didapat pada poin ketiga ke dalam nilai solusi x_{n+1} dan y_{n+1} .
 - e. Melakukan iterasi pada x_{n+1} dan y_{n+1} sampai batas yang diinginkan.
 - f. Menghitung dan menganalisis galat.
2. Pada sistem PDB tak linier yang kaku
 - a. Menentukan fungsi-fungsi pada sistem PDB linier yang kaku.
 - b. Mensubstitusikan fungsi langkah integrasi k_1 , k_2 , l_1 dan l_2 pada poin pertama.

c. Mencari nilai k_1, k_2, l_1 dan l_2 dengan metode Newton-Raphson yaitu langkah- langkahnya sabagai berikut:

- Menentukan nilai awal k_1, k_2, l_1 dan l_2 .
- Menghitung $k_{1+i}, k_{2+i}, l_{1+i}$ dan l_{2+i} dengan rumus:

$$K_{i+1} = K_i - [J(K_i)]^{-1}F(K_i)$$

dengan $K_i = \begin{bmatrix} k_{1_i} \\ k_{2_i} \\ l_{1_i} \\ l_{2_i} \end{bmatrix}$

- Melakukan iterasi sampai batas toleransi kesalahan (*error*) yang diinginkan.
- d. Mensubtitusikan nilai k_i dan l_i yang didapat pada poin ketiga ke dalam nilai solusi x_{n+1} dan y_{n+1} .
- e. Melakukan iterasi pada x_{n+1} dan y_{n+1} sampai batas yang diinginkan.
- f. Menghitung dan menganalisis galat.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan digunakan dalam penelitian ini adalah:

Bab I Pendahuluan

Bab ini memuat latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menyajikan kajian- kajian kepustakaan yang menjadi landasan dan dasar teori dalam pembahasan terkait solusi numerik sistem persamaan

diferensial biasa yang bersifat kaku yang diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta implisit orde dua.

Bab III Hasil dan Pembahasan

Bab ini menguraikan penerapan metode Runge-Kutta implisit orde dua pada sistem PDB linier dan PDB tak linier yang bersifat kaku serta dilengkapi dengan analisis galat pada kedua sistem tersebut.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dalam penelitian ini serta saran untuk penelitian berikutnya yang berkaitan dengan penelitian ini.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Sistem Persamaan Diferensial Biasa (PDB) yang Kaku

Sifat kekakuan (*stiffness*) pada sistem persamaan diferensial biasa pertama kali diamati oleh Curtiss dan Hirschfelder pada tahun 1952 (Curtiss & Hirschfelder, 1952). Kedua ilmuwan tersebut melakukan perhitungan secara numerik pada sebuah model reaksi kimia, dimana komponen kimia yang diamati bereaksi sangat cepat kemudian melambat dalam waktu yang sangat singkat. Selanjutnya pada tahun 1963, Dalquist melakukan uji serupa menggunakan metode numerik lainnya, dimana metode tersebut tergolong sebagai metode dengan skema eksplisit (Dalquist, 1963). Dalam proses uji tersebut ditemukan hasil stabilitas pada solusi yang dihasilkan sangat buruk.

Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, dapat didefinisikan bahwa sistem persamaan diferensial biasa yang kaku adalah sistem persamaan diferensial dimana penggunaan sembarang metode numerik untuk menyelesaikan sistem tersebut akan dihasilkan ketidakstabilan secara numerik, kecuali jika mengambil nilai h (*stepsize*) yang sangat kecil (Lambert, 1992). Selain hasil yang tidak stabil, penggunaan sembarang metode numerik tersebut juga akan berdampak pada lamanya waktu perhitungan, sehingga sifat kekakuan tersebut dapat dikategorikan sebagai masalah efisiensi waktu (Robert dkk, 1996). Adapun metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa yang kaku yaitu metode dengan skema semi implisit ataupun implisit seperti metode Backward-Euler, metode Adams-Moulton, metode Runge-Kutta implisit dan lain-lainnya.

Dari berbagai literatur, selain dilihat dari pemilihan metode numerik yang digunakan, sistem persamaan diferensial biasa yang bersifat kaku dapat diamati jika (Hairer & Wanner, 1991) :

- a. Nilai karakteristik (λ) dari sistem tersebut bernilai berbeda negatif.
- b. Paling sedikit ada satu nilai karakteristiknya yang sangat besar.

Adapun contoh dari sistem persamaan diferensial yang bersifat kaku adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x + 95y \\ \frac{dy}{dt} &= -x - 97y\end{aligned}\tag{2.1}$$

Persamaan (2.1) tergolong sebagai sistem persamaan diferensial biasa linier, sistem tersebut dapat dikatakan bersifat kaku jika memenuhi dua syarat diatas, sehingga perlu dicari nilai karakteristik dari sistem tersebut terlebih dahulu, yakni dengan rumus sebagai berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

dari persamaan (2.1) didapatkan

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 95 \\ -1 & -97 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\left| \begin{bmatrix} -1 & 95 \\ -1 & -97 \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

karena $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka

$$\left| \begin{bmatrix} -1 & 95 \\ -1 & -97 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Sehingga dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 95 \\ -1 & -97-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Selanjutnya diperoleh hasil determinan yakni

$$(-1-\lambda)(-97-\lambda) - (-1)(95) = 0$$

dan diperoleh

$$\lambda^2 + 98\lambda + 192 = 0$$

Sehingga diperoleh akar-akarnya yaitu

$$\lambda_1 = -96 \text{ dan } \lambda_2 = -2$$

Berdasarkan perhitungan tersebut dapat diketahui kedua nilai karakteristiknya bernilai negatif yaitu $\lambda_1 = -96$ dan $\lambda_2 = -2$ serta antara kedua nilai karakteristiknya tersebut terlampaui sangat jauh, maka sistem persamaan tersebut telah memenuhi kedua syarat sebelumnya sehingga dapat dikatakan sebagai sistem persamaan yang kaku. Adapun contoh lainnya yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -1002x + 1000y^2 \\ \frac{dy}{dt} &= x - y - y^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) tergolong sebagai sistem persamaan diferensial biasa tak linier, sistem tersebut dapat dikatakan bersifat kaku jika memenuhi dua syarat sebelumnya, sehingga perlu dicari nilai karakteristik dari sistem tersebut. Namun, karena sistem pada persamaan (2.2) tergolong tak linier maka sistem tersebut harus dilinierisasi terlebih dahulu disekitar titik tetap yakni langkah-langkahnya sebagai berikut:

Ambil $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ sehingga

$$\frac{dx}{dt} = -1002x + 1000y^2$$

$$0 = -1002x + 1000y^2$$

$$x = \frac{1000}{1002}y^2$$

dan

$$\frac{dy}{dt} = x - y - y^2 = 0$$

Maka diperoleh

$$x - y - y^2 = 0$$

karena $x = \frac{1000}{1002}y^2$ maka

$$\frac{1000}{1002}y^2 - y - y^2 = 0$$

$$-\frac{2}{1002}y^2 - y = 0$$

$$y\left(-\frac{2}{1002}y - 1\right) = 0$$

sehingga diperoleh

$$y_1 = 0 \text{ atau } y_2 = -501$$

dan

$$x_1 = 0 \text{ atau } x_2 = 250.5 \times 10^3$$

Sehingga didapatkan dua titik tetap (x^*, y^*) yakni $(0,0)$ dan $(250.5 \times 10^3, -501)$. Langkah selanjutnya untuk melinerisasi persamaan (2.2) dapat digunakan titik tetap yang pertama saja, yaitu pada saat $(0,0)$.

Misalkan bahwa

$$\frac{dx}{dt} = F(x^*, y^*) = -1002x + 1000y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = G(x^*, y^*) = x - y - y^2$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial G}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -1002 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

dimana $u = x - x^* = x - 0 = x$ dan $v = y - y^* = y - 0 = y$. Selanjutnya yaitu mencari nilai karakteristik dari persamaan tersebut dengan perhitungan berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

dimana $A = \begin{bmatrix} -1002 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

sehingga

$$\left| \begin{bmatrix} -1002 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

karena $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka

$$\left| \begin{bmatrix} -1002 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

sehingga dapat disederhanakan menjadi

$$\left| \begin{bmatrix} -1002 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

Selanjutnya diperoleh hasil determinan yakni

$$(-1002 - \lambda)(-1 - \lambda) - 0 = 0$$

maka diperoleh akar-akarnya yaitu

$$\lambda_1 = -1002 \text{ dan } \lambda_2 = -1$$

Berdasarkan perhitungan tersebut dapat diketahui kedua nilai karakteristiknya bernilai negatif yaitu $\lambda_1 = -1002$ dan $\lambda_2 = -1$ serta antara kedua nilai karakteristiknya tersebut terlampau sangat jauh, maka sistem persamaan tersebut telah memenuhi kedua syarat sebelumnya sehingga dapat dikatakan sebagai sistem persamaan yang kaku.

2.2 Aturan Rantai

Jika suatu fungsi $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ yang terdiferensialkan pada $t \in D$ serta suatu fungsi $z = z(x, y)$ yang terdiferensialkan pada $(x(t), y(t)) \in D$. Sehingga fungsi $z = z(t) = z(x(t), y(t))$ juga terdiferensialkan di t dengan aturan yaitu (Anton, 2012)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Bukti:

Karena fungsi $z = z(x, y)$ terdiferensialkan di $(x, y) \in D$, sehingga berlaku:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y$$

Dimana $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ dan $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ dengan

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0$$

Dan

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$$

Untuk $\Delta t \neq 0$ berlaku

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\Delta x}{\Delta t} \varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\Delta t} \varepsilon_2$$

Karena $\Delta x = (t + \Delta t) - x(t)$ dan $\Delta y = (t + \Delta t) - y(t)$ sehingga untuk $t \rightarrow 0$ maka $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$, mengakibatkan ε_1 dan ε_2 adalah fungsi dari Δt dengan

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1(\Delta t) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1 = 0$$

dan

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2(\Delta t) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2 = 0$$

untuk $\Delta t \rightarrow 0$, diperoleh

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \text{ dan } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$$

Selanjutnya dari beberapa hasil sebelumnya, maka

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\Delta x}{\Delta t} \varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\Delta t} \varepsilon_2 \right]$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Berdasarkan rumus diatas, dapat diketahui bahwa z merupakan fungsi satu peubah terhadap t untuk $\frac{dz}{dt}$ dan dapat dipandang juga sebagai suatu fungsi dua peubah terhadap x dan y untuk $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2.3 Deret Taylor Satu Variabel

Teorema Taylor Jika suatu fungsi $f(t)$ yang berturunan $n + 1$ kali disetiap titik dalam suatu interval dimana termuat titik s , maka hanya terdapat 1 fungsi yang memenuhi kondisi berikut (Purcel, 1997)

$$f(t) = a_0 + a_1(t - s) + a_2(t - s)^2 + \dots + a_n(t - s)^n$$

Berdasarkan teorema tersebut, selanjutnya untuk membuktikan deret Taylor fungsi $f(t)$ diturunkan satu kali, dua kali dan seterusnya hingga hasilnya seperti berikut (Stewart, 2012):

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= a_1 + 2a_2(t-s) + 3a_3(t-s)^2 + 4a_4(t-s)^3 \dots \\
 f''(t) &= 2a_2 + 3.2.a_3(t-s) + 4.3.a_4(t-s)^2 + \dots \\
 f'''(t) &= 3.2.a_3 + 4.3.a_4(t-s) + \dots \\
 f^n(t) &= n!(a_n) + (n+1)!a_{n+1}(t-s) + (n+2)!a_{n+2}(t-s)^2 + \dots
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Selanjutnya fungsi- fungsi turunan pada (2.3) diberikan suatu kondisi jika $t = s$, sehingga

$$\begin{aligned}
 f(s) &= a_0 \\
 f'(s) &= a_1 \\
 f''(s) &= 2! a_2 \\
 f'''(s) &= 3! a_3 \\
 f^n(s) &= n! a_n
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dengan mensubstitusikan nilai $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ pada fungsi $f(t)$ yang terdapat pada teorema Taylor sehingga didapatkan

$$f(t) = f(s) + f'(s)(t-s) + \frac{f''(s)}{2!}(t-s)^2 + \dots + \frac{f^n(s)}{n!}(t-s)^n$$

2.4 Deret Taylor Dua Variabel

Diberikan $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ adalah domain dengan himpunan terbuka $B((x_0, y_0); \Delta x, \Delta y) \subset \Omega$. Misal fungsi $u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2) = u(x, y) \in C^{k+1}(\Omega)$ (Engwer, 2018). Maka deret Taylor dua variabel didefinisikan dengan

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) = u(x_0, y_0) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta y}{1!} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\Delta x \Delta y}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\Delta x \Delta y}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \cdots + \frac{1}{k!} \left[\sum_{j=1}^2 (\Delta x_j) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right]^k \\
& + r_k(x, y; \Delta x, \Delta y)
\end{aligned}$$

Persamaan diatas merupakan fungsi $u(x, y)$ disekitar titik (x_0, y_0) dengan mengganti $x = x + \Delta x$ dan $y = y + \Delta y$

2.5 Metode Runge-Kutta

Penyelesaian PDB secara numerik dapat menggunakan berbagai macam metode, mulai dari metode yang sederhana hingga metode yang ketelitiannya lebih tinggi. Metode sederhana yang sering digunakan yaitu metode deret Taylor. Namun pada beberapa permasalahan, metode tersebut dianggap tidak praktis karena tidak semua fungsi dapat dihitung turunannya dengan mudah, terutama bagi fungsi yang bentuknya rumit. Semakin tinggi orde dari metode deret Taylor, maka semakin tinggi juga turunan fungsi yang harus dihitung (Munir, 2006). Dari permasalahan tersebut, maka dibutuhkan alternatif metode numerik lainnya yang tergolong sederhana untuk menyelesaikan suatu fungsi PDB. Metode numerik tersebut salah satunya yaitu metode Runge Kutta

Metode Runge-Kutta adalah alternatif lain dari metode deret taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi, namun dengan cara yang sederhana. Metode Runge-Kutta mempunyai tiga sifat utama (Triatmodjo, 2002):

1. Metodenya satu langkah: untuk mencapai y_{m+1} hanya diperlukan keterangan yang tersedia pada titik sebelumnya yaitu x_m, y_m .

2. Mendekati ketelitian deret Taylor sampai suku dalam h^p , dimana nilai p berbeda untuk metode yang berbeda, dan p ini disebut derajat dari metode.
3. Tidak memerlukan perhitungan turunan $f(x, y)$. tetapi hanya memerlukan fungsi itu sendiri.

Secara umum bentuk metode Runge-Kutta orde n ditulis sebagai berikut.

$$y_{n+1} = y_n + b_1 k_1 + b_2 k_2 + \dots + b_n k_i$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^s b_j k_j$$

$$k_i = f \left(t_n + ch, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right)$$
(2.5)

Dengan $t_n = t_0 + n. \Delta t \rightarrow \Delta t = h$ dan $y_n = y(t_n)$

Sehingga nilai k_i dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f(t_n + c_2 h, y_n + h(a_{21} k_1))$$

$$k_3 = f(t_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2))$$

$$k_i = f(t_n + c_s h, y_n + h(a_{s1} k_1 + a_{s2} k_2 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1}))$$
(2.6)

Dengan a, b dan c adalah konstanta. Nilai k_i menunjukkan hubungan yang saling berurutan, misalnya nilai k_1 harus dicari terlebih dahulu untuk menentukan nilai k_2 , dan juga jika keduanya sudah diketahui maka nilai k_3 juga dapat dihitung, dan begitu seterusnya (Chapra, 2002)

2.6 Metode Runge-Kutta Implisit

Dalam skema penyelesaiannya, metode Runge-Kuta dibagi menjadi dua, yaitu skema eksplisit dan skema implisit. Pada umumnya, metode Runge-Kutta

yang berkembang hingga saat ini merupakan metode Runge-Kutta dengan skema eksplisit, namun ada beberapa permasalahan yang tidak bisa diselesaikan secara eksplisit. Hal tersebut mengakibatkan adanya pengembangan metode Runge-Kutta secara implisit.

Runge-Kutta dengan skema implisit digunakan dalam mencari solusi numerik sistem persamaan diferensial yang berifat kaku (*stiff equation*). Selain dari kegunaanya, perbedaan Runge-Kutta implisit dan eksplisit yaitu jika pada Runge-Kutta eksplisit setiap tahap terurut (k_i) hanya bergantung pada nilai k_i sebelumnya, misalnya untuk mendapatkan nilai k_2 maka harus dicari nilai k_1 terlebih dahulu. Sedangkan untuk Runge-Kutta implisit pada setiap tahap terurut (k_i) itu setidaknya ada satu tahap yang bergantung pada dirinya sendiri atau pada satu tahap selanjutnya (Engwer, 2018).

Rumus Runge- Kutta secara eksplisit dapat dilihat pada persamaan (2.5) dan (2.6), yang mana dapat diartikan bahwa rumus Runge- Kutta secara eksplisit merupakan rumus umum dari metode Runge- Kutta itu sendiri. Berbeda dengan skema secara eksplisit, rumus Runge- Kutta secara implisit berdasarkan pernyataan sebelumnya dapat dituliskan sebagai berikut (Engwer, 2018):

Dengan $t_n = t_0 + n. \Delta t \rightarrow \Delta t = h$ dan $y_n = y(t_n)$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^s b_j k_j$$

Nilai k_i dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n + c_1 h, y_n + h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \dots + a_{1s}k_s)) \\ k_2 &= f(t_n + c_2 h, y_n + h(a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{2s}k_s)) \\ k_3 &= f(t_n + c_3 h, y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + \dots + a_{3s}k_s)) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$k_i = f(t_n + c_i h, y_n + h(a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \dots + a_{is}k_s))$$

Setelah nilai k_i diketahui, maka nilai y_{n+1} dapat ditentukan. Namun, karena pada setiap langkah k_i mengandung langkahnya sendiri dan satu langkah selanjutnya, maka untuk mendapatkan nilai y_{n+1} dibutuhkan perhitungan yang cukup rumit dan juga ketelitian yang tinggi.

2.7 Penurunan Metode Runge-Kutta Implisit Orde Dua

Berdasarkan rumus IRK pada subbab 2.6, maka untuk IRK orde 2 diperoleh nilai dan fungsi-fungsi sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1k_1 + b_2k_2)$$

dan

$$k_1 = f(t_n + c_1h, y_n + h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2))$$

$$k_2 = f(t_n + c_2h, y_n + h(a_{21}k_1 + a_{22}k_2))$$

Tahap pertama dalam penurunan metode Runge- Kutta Implisit orde dua yaitu dengan menderetkan y_{n+1} disekitar y_n seperti berikut.

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)h + \frac{f'(t_n, y_n)}{2!} h^2 \quad (2.8)$$

untuk $f'(t_n, y_n)$ dapat diuraikan menggunakan aturan rantai seperti pada subbab 2.2 yakni

$$f'(t_n, y_n) = \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (2.9)$$

Selanjutnya, substitusi persamaan (2.9) ke persamaan (2.8) sebagai berikut

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)h + \left(\frac{\partial f(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) \frac{h^2}{2!} \quad (2.10)$$

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)h + \frac{\partial f(t, y)}{\partial t} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \frac{dy}{dt} \frac{h^2}{2!}$$

Tahap kedua adalah menderetkan fungsi k_1 dan k_2 menggunakan deret Taylor untuk 2 variabel seperti pada subbab 2.4 yakni

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n + c_1 h, y_n + h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2)) \\ &\approx f(t_n, y_n) + c_1 h \frac{\partial f}{\partial t} + h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2) \frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f(t_n + c_2 h, y_n + h(a_{21}k_1 + a_{22}k_2)) \\ &\approx f(t_n, y_n) + c_2 h \frac{\partial f}{\partial t} + h(a_{21}k_1 + a_{22}k_2) \frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Tahap ketiga adalah mensubstitusikan hasil dari tahap kedua pada nilai y_{n+1} sebagai berikut

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2) \\ &= y_n + h b_1 k_1 + h b_2 k_2 \\ &= y_n + h b_1 \left(f(t_n, y_n) + c_1 h \frac{\partial f}{\partial t} + h(a_{11}k_1 + a_{12}k_2) \frac{\partial f}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}((\Delta t)^3) \right) \\ &\quad + h b_2 \left(f(t_n, y_n) + c_2 h \frac{\partial f}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + h(a_{21}k_1 + a_{22}k_2) \frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) \right) \\ &= y_n + h \cdot f(t_n, y_n) \cdot (b_1 + b_2) + h^2 (b_1 c_1 + b_2 c_2) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &\quad + h^2 ((b_1 a_{11} + b_2 a_{21})k_1 \\ &\quad + (b_1 a_{12} + b_2 a_{22})k_2) \frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{O}((\Delta t)^3) \end{aligned} \quad (2.13)$$

karena pada persamaan (2.13) masih mengandung nilai k_1 dan k_2 , maka kedua nilai tersebut akan disubstitusikan dengan $f(t_n, y_n)$, dimana fungsi tersebut

merupakan hasil dari persamaan (2.11) dan (2.12) yang dipotong sampai orde pertama. Sehingga persamaan (2.13) menjadi

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + h \cdot f(t_n, y_n) \cdot (b_1 + b_2) + h^2(b_1c_1 + b_2c_2) \frac{\partial f}{\partial t} \\
 &\quad + h^2((b_1a_{11} + b_2a_{21})f(t_n, y_n) \\
 &\quad + (b_1a_{12} + b_2a_{22})f(t_n, y_n)) \frac{\partial f}{\partial y} + \mathcal{O}((\Delta t)^3) \\
 &= y_n + h \cdot f(t_n, y_n) \cdot (b_1 + b_2) + h^2(b_1c_1 + b_2c_2) \frac{\partial f}{\partial t} \\
 &\quad + h^2((b_1a_{11} + b_2a_{21}) \\
 &\quad + (b_1a_{12} + b_2a_{22})) \frac{\partial f}{\partial y} f(t_n, y_n) + \mathcal{O}((\Delta t)^3) \\
 &= y_n + h \cdot f(t_n, y_n) \cdot (b_1 + b_2) + h^2(b_1c_1 + b_2c_2) \frac{\partial f}{\partial t} \\
 &\quad + h^2(b_1a_{11} + b_2a_{21} + b_1a_{12} + b_2a_{22}) \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\
 &\quad + \mathcal{O}((\Delta t)^3) \\
 &= y_n + h \cdot f(t_n, y_n) \cdot (b_1 + b_2) + h^2(b_1c_1 + b_2c_2) \frac{\partial f}{\partial t} \\
 &\quad + h^2(b_1(a_{11} + a_{12}) + b_2(a_{21} + a_{22})) \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\
 &\quad + \mathcal{O}((\Delta t)^3)
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Tahap terakhir adalah mencari nilai a_{is} , b_i dan c_i . Nilai-nilai tersebut dapat dicari dengan membandingkan persamaan (2.14) dan (2.10) sehingga diperoleh

$$h \cdot f(t_n, y_n) \cdot (b_1 + b_2) = f(t_n, y_n)h \rightarrow b_1 + b_2 = 1$$

$$h^2(b_1c_1 + b_2c_2) \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{h^2}{2!} \rightarrow b_1c_1 + b_2c_2 = \frac{1}{2}$$

$$h^2(b_1(a_{11} + a_{12}) + b_2(a_{21} + a_{22})) \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f(t, y)}{\partial y} \frac{dy}{dt} \frac{h^2}{2!}$$

$$\rightarrow b_1(a_{11} + a_{12}) + b_2(a_{21} + a_{22}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{karena } b_1 c_1 + b_2 c_2 = \frac{1}{2} \text{ dan } b_1(a_{11} + a_{12}) + b_2(a_{21} + a_{22}) = \frac{1}{2}$$

maka nilai c_1 dan c_2 yakni

$$c_1 = a_{11} + a_{12} \text{ dan } c_2 = a_{21} + a_{22}$$

karena jumlah konstanta yang akan dicari lebih banyak dari pada jumlah persamaan-persamaannya, maka ada beberapa konstanta yang dapat ditentukan secara bebas, tetapi tetap memenuhi persyaratan dari persamaannya.

Misalnya dipilih $a_{11} = \frac{1}{4}$, $a_{12} = -\frac{1}{4}$, $a_{21} = \frac{1}{4}$, dan $a_{22} = \frac{5}{12}$. Sehingga konstanta-konstanta lainnya dapat dicari sesuai persamaan sebelumnya yakni

$$\begin{aligned} \bullet \quad c_1 &= a_{11} + a_{12} & \bullet \quad c_2 &= a_{21} + a_{22} \\ &= \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) \rightarrow c_1 = 0 & &= \frac{1}{4} + \frac{5}{12} \rightarrow c_2 = \frac{2}{3} \\ \bullet \quad b_1 + b_2 &= 1 & \bullet \quad b_1 c_1 + b_2 c_2 &= \frac{1}{2} \\ b_1 &= 1 - b_2 & & (1 - b_2) \cdot 0 + b_2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \\ & & & \frac{2}{3} b_2 = \frac{1}{2} \rightarrow b_2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

sehingga

$$b_1 = 1 - b_2$$

$$b_1 = 1 - \frac{3}{4} \rightarrow b_1 = \frac{1}{4}$$

Sehingga dapat diketahui bahwa rumus IRK orde dua yakni

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{1}{4} k_1 + \frac{3}{4} k_2 \right)$$

dan

$$k_1 = f \left(t_n, y_n + h \left(\frac{1}{4} k_1 - \frac{1}{4} k_2 \right) \right) \quad (2.15)$$

$$k_2 = f \left(t_n + \frac{2}{3} h, y_n + h \left(\frac{1}{4} k_1 + \frac{5}{12} k_2 \right) \right)$$

Berdasarkan paparan diatas, maka diketahui cara penurunan metode Runge-Kutta implisit orde dua. Persamaan (2.15) akan berbeda jika konstanta a_{is} , b_i dan c_i yang diambil berbeda. Oleh karena itu, metode Runge-Kutta implisit tergolong sebagai metode yang unik karena mempunyai beberapa solusi walaupun hasil solusinya tidak berbeda jauh.

2.7.1 Metode Runge-Kutta Implisit Orde Dua pada Sistem Persamaan Diferensial Biasa

Isi subbab 2.7 merupakan penurunan metode Runge-Kutta implisit pada satu persamaan diferensial biasa. Sehingga hasil dari subbab tersebut dapat dikembangkan kembali untuk menyelesaikan sistem PDB yang terdiri dari beberapa persamaan. Misalnya sistem PDB yang terdiri dari dua persamaan yaitu $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt}$. Langkah awal untuk membedakan kedua persamaan tersebut yaitu dengan memisalkan dengan fungsi yang berbeda seperti berikut:

$$\frac{dx}{dt} = f(t_n, x_n, y_n)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t_n, x_n, y_n)$$

Berdasarkan hal tersebut, dapat dipastikan bahwa nilai tiap langkah integrasinya juga akan berbeda. Jika dimisalkan bahwa nilai tiap langkah integrasi pada $\frac{dx}{dt}$ yaitu k_i dan nilai tiap langkah integrasi pada $\frac{dy}{dt}$ dimisalkan sebagai l_i . Sehingga persamaan 2.15 dapat berkembang menjadi:

$$x_{n+1} = x_n + h \left(\frac{1}{4} k_1 + \frac{3}{4} k_2 \right)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{1}{4} l_1 + \frac{3}{4} l_2 \right)$$

dengan

$$k_1 = f \left(t_n, x_n + h \left(\frac{1}{4} k_1 - \frac{1}{4} k_2 \right), y_n + h \left(\frac{1}{4} l_1 - \frac{1}{4} l_2 \right) \right) \quad (2.16)$$

$$l_1 = g \left(t_n, x_n + h \left(\frac{1}{4} k_1 - \frac{1}{4} k_2 \right), y_n + h \left(\frac{1}{4} l_1 - \frac{1}{4} l_2 \right) \right)$$

$$k_2 = f \left(t_n + \frac{2}{3} h, x_n + h \left(\frac{1}{4} k_1 + \frac{5}{12} k_2 \right), y_n + h \left(\frac{1}{4} l_1 + \frac{5}{12} l_2 \right) \right)$$

$$l_2 = g \left(t_n + \frac{2}{3} h, x_n + h \left(\frac{1}{4} k_1 + \frac{5}{12} k_2 \right), y_n + h \left(\frac{1}{4} l_1 + \frac{5}{12} l_2 \right) \right)$$

2.8 Metode Newton Raphson

Penyelesaian suatu fungsi tak linier dengan menggunakan rumus Runge-Kutta secara implisit tidak mudah untuk diselesaikan seperti halnya pada skema yang bersifat eksplisit. Dalam hal ini, dibutuhkan bantuan dari metode lain untuk mendapatkan nilai tahapan dari k_i yaitu menggunakan metode Newton Raphson. Metode Newton termasuk dalam salah satu metode numerik yang sering digunakan.

Metode tersebut dibentuk dari deret Taylor pada fungsi $f(x)$ disekitar titik x_1 yakni sebagai berikut (Remani, 2013)

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1) + \frac{1}{2!}(x - x_1)^2 f''(x_1) + \dots$$

jika fungsi $f(x)$ dipotong sampai orde pertama sehingga diperoleh

$$f(x) \approx f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1)$$

Kemudian fungsi $f(x)$ disetarakan dengan 0, maka

$$f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1) = 0$$

sehingga didapatkan

$$x = x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Persamaan tersebut dapat digeneralisasi sebagai suatu persamaan yang dikenal sebagai metode Newton yakni (Remani, 2013)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (2.17)$$

Persamaan (2.17) merupakan metode Newton untuk menyelesaikan satu persamaan fungsi. Persamaan (2.17) dapat dimodifikasi, yang mana hal tersebut dilakukan untuk menyelesaikan beberapa persamaan (sistem persamaan) fungsi. Adapun modifikasi tersebut yakni

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n - [\mathbf{J}(\mathbf{X}_n)]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{X}_n) \quad (2.18)$$

dengan $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{X}_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_0) \\ f_2(x_1) \\ \vdots \\ f_n(x_n) \end{bmatrix}$$

dan

$$[J(X_n)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_0, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_0} & \dots & \frac{\partial f_n(x_0, x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{-1}$$

Selanjutnya hal yang perlu diperhatikan dalam melakukan iterasi menggunakan metode Newton-Raphson yaitu mendefinisikan toleransi kesalahan (ε) yang diharapkan. Nilai tersebut dapat digunakan untuk menentukan nilai akar persamaan. Jika $|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon$, maka akar persamaan x_{i+1} yang dipilih dan jika $|x_{i+1} - x_i| > \varepsilon$, maka iterasi akan terus berlanjut hingga kondisi pertama terpenuhi.

2.9 Galat (Error)

Galat merupakan sebuah alat untuk mengetahui seberapa dekat solusi dari pendekatan secara numerik dengan solusi dari pendekatan secara analitik. Ketika galat yang diperoleh semakin kecil, maka semakin akurat (teliti) solusi numerik yang diperoleh. Jika hal tersebut berlawanan, maka dapat disimpulkan bahwa solusi numerik yang diperoleh nilai kekuatannya akan semakin kecil. Misalkan $\tilde{y}(t)$ adalah solusi aproksimasi dari metode Runge-Kutta implisit dan $y(t)$ merupakan solusi sebenarnya, sehingga galat dari suatu permasalahan dapat dituliskan sebagai:

$$e = |\tilde{y}(t) - y(t)|$$

2.10 Kajian Islam tentang Konsep Berpikir

Menurut (Ismail, 2014) dalam Al-Qur'an, Allah telah menjelaskan mengenai jenis-jenis konsep berpikir, salah satunya yaitu Al-Tadabbur. Tadabbur merupakan kata yang berasal dari kata dasar "dabara" yang bermakna melihat sesuatu yang terjadi dibalik suatu permasalahan. Jika dihubungkan dengan

pemikiran rasional, maka arti tadabbur yaitu memikirkan apa yang ada dibalik sesuatu atau dalam artian lain yaitu memikirkan sesuatu yang tersirat (implisit) dibalik sesuatu yang tersurat (eksplisit). Salah satu ayat yang mengandung kata tadabbur yaitu dalam QS. An-Nisa:82

أَفَلَا يَتَذَبَّرُونَ الْقُرْآنَ وَلَوْ كَانَ مِنْ عِنْدِ غَيْرِ اللَّهِ لَوَجَدُوا فِيهِ اخْتِلَافًا كَثِيرًا

“Maka apakah mereka tidak memperhatikan Al-Qur’an? Kalau kiranya Al-Qur’an itu bukan dari sisi Allah, tentulah mereka mendapat pertentangan yang banyak didalamnya”.

Dalam tafsir Ibnu Katsir (2000) makna ayat ini, bahwa Allah Swt berfirman:

أَفَلَا يَتَذَبَّرُونَ الْقُرْآنَ

“Maka apakah mereka tidak memperhatikan Al-Qur’an?”.

Yakni Allah Swt memerintahkan kepada manusia untuk memperhatikan apa yang terkandung di dalam Al-Qur’an baik makna yang tersurat maupun makna yang tersirat.

وَلَوْ كَانَ مِنْ عِنْدِ غَيْرِ اللَّهِ

“Kalau kiranya Al-Qur’an itu bukan dari sisi Allah”

Banyak orang dari kaum musyrik dan kaum munafik yang mengatakan jikalau Al-Qur’an itu dibuat-buat.

وَلَوْ كَانَ مِنْ عِنْدِ غَيْرِ اللَّهِ لَوَجَدُوا فِيهِ اخْتِلَافًا كَثِيرًا

“tentulah mereka mendapat pertentangan yang banyak didalamnya”

Yaitu niscaya akan banyak dijumpai pertentangan- pertentangan. Namun, hal tersebut bertolak belakang, karena Al-Qur’an bebas dari pertentangan, kelabilan dan perbedaan. Allah juga menegaskan bahwa Al-Qur’an itu hanya dari sisi Allah dan Allah melarang untuk berpaling dari Al-Qur’an dan dari memahami makna-maknanya yang muhkam (ayat yang bermakna jelas) dan yang mutasyabih (ayat yang bermakna samar).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dipaparkan mengenai penyelesaian sistem persamaan diferensial biasa (PDB) yang bersifat kaku (*stiffnes*) secara numerik. Sistem PDB kaku yang akan diselesaikan dibagi menjadi dua, yaitu linier dan tak linier. Selanjutnya, penyelesaian numerik menggunakan metode Runge-Kutta implisit orde dua akan dianalisis pada subbab 3.1 dan subbab 3.2. Kedua subbab tersebut juga dilengkapi dengan analisis galat yang dicari dengan membandingkan dengan hasil dari solusi analitiknya.

3.1 Metode Runge-Kutta Implisit Orde Dua pada Sistem PDB Linier yang Kaku

Berdasarkan batasan masalah pada subbab 1.5, diberikan suatu sistem persamaan diferensial biasa linier yakni

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x + 95y \\ \frac{dy}{dt} &= -x - 97y\end{aligned}\tag{3.1}$$

dengan nilai awal yaitu $x(0) = 1$ dan $y(0) = 1$

Langkah pertama dalam penerapan metode Runge-Kutta implisit yaitu memisalkan ruas kanan dari persamaan (3.1) menjadi suatu fungsi yakni

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(t_n, x_n, y_n) \\ \frac{dy}{dt} &= g(t_n, x_n, y_n)\end{aligned}$$

Langkah kedua adalah mensubstitusikan (2.16) pada persamaan (3.1), sehingga menjadi

$$k_1 = -\left(x_n + h\left(\frac{1}{4}k_1 - \frac{1}{4}k_2\right)\right) + 95\left(y_n + h\left(\frac{1}{4}l_1 - \frac{1}{4}l_2\right)\right) \quad (3.2)$$

$$= -x_n - \frac{1}{4}hk_1 + \frac{1}{4}hk_2 + 95y_n + \frac{95}{4}hl_1 - \frac{95}{4}hl_2 \quad (3.3)$$

$$k_2 = -\left(x_n + h\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{5}{12}k_2\right)\right) + 95\left(y_n + h\left(\frac{1}{4}l_1 + \frac{5}{12}l_2\right)\right) \quad (3.4)$$

$$= -x_n - \frac{1}{4}hk_1 - \frac{5}{12}hk_2 + 95y_n + \frac{95}{4}hl_1 + \frac{475}{12}hl_2 \quad (3.5)$$

$$l_1 = -\left(x_n + h\left(\frac{1}{4}k_1 - \frac{1}{4}k_2\right)\right) - 97\left(y_n + h\left(\frac{1}{4}l_1 - \frac{1}{4}l_2\right)\right)$$

$$= -x_n - \frac{1}{4}hk_1 + \frac{1}{4}hk_2 - 97y_n - \frac{97}{4}hl_1 + \frac{97}{4}hl_2 \quad (3.6)$$

$$l_2 = -\left(x_n + h\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{5}{12}k_2\right)\right) - 97\left(y_n + h\left(\frac{1}{4}l_1 - \frac{1}{4}l_2\right)\right)$$

$$= -x_n - \frac{1}{4}hk_1 - \frac{5}{12}hk_2 - 97y_n + \frac{97}{4}hl_1 - \frac{485}{12}hl_2$$

Langkah ketiga adalah menyelesaikan sistem persamaan (3.2) sampai (3.5) untuk mencari nilai k_1 , k_2 , l_1 dan l_2 dengan menggunakan cara substitusi sebagai berikut:

- Mengelompokkan nilai yang mengandung variabel k_1 pada persamaan (3.2)

$$k_1 = -\frac{\left(-x_n + \frac{1}{4}hk_2 + 95y_n + \frac{95}{4}hl_1 - \frac{95}{4}hl_2\right)}{-\frac{1}{4}h - 1} \quad (3.7)$$

- Mensubstitusikan persamaan (3.6) pada persamaan (3.3), (3.4) dan (3.5), sehingga dihasilkan

$$k_2 = \frac{-2h^2k_2 + 190h^2l_2 - 5hk_2 + 285hl_1 + 475hl_2 - 12x_n}{3(h+4)} \quad (3.8)$$

$$+ \frac{1140y_n}{3(h+4)}$$

$$l_1 = \frac{-48h^2l_1 + 48h^2l_2 + hk_2 - 97hl_1 + 97hl_2 - 192hy_n}{h + 4} \quad (3.8)$$

$$+ \frac{(-4x_n) - 388y_n}{h + 4}$$

$$l_2 = \frac{-2h^2k_2 - 144h^2l_1 - 50h^2l_2 - 5hk_2 - 291hl_1 - 485hl_2}{3(h + 4)} \quad (3.9)$$

$$+ \frac{(-12x_n) - 576hy_n - 1164y_n}{3(h + 4)}$$

- Mengelompokkan nilai yang mengandung variabel k_2 pada persamaan (3.7)

$$k_2 = - \left(\frac{-190h^2l_2 - 285hl_1 - 475hl_2 + 12x_n - 1140y_n}{2h^2 + 8h + 12} \right) \quad (3.10)$$

- Mensubstitusikan persamaan (3.10) pada persamaan (3.8) dan (3.9) sehingga dihasilkan

$$0 = - \left(\frac{96h^3l_1 - 96h^3l_2 + 196h^2l_1 - 384h^2l_2 + 384h^2y_n}{2h^2 + 8h + 12} \right) \quad (3.11)$$

$$+ \frac{299hl_1 - 291hl_2 + 8hx_n + 776hy_n + 12l_1 + 12x_n + 1164y_n}{2h^2 + 8h + 12}$$

$$0 = - \left(\frac{96h^3l_1 + 160h^3l_2 + 384h^2l_1 + 452h^2l_2 + 384h^2y_n}{2h^2 + 8h + 12} \right) \quad (3.12)$$

$$+ \frac{291hl_1 + 493hl_2 + 1536hy_n + 12l_2 + 12x_n + 1164y_n}{2h^2 + 8h + 12}$$

- Mengelompokkan nilai yang mengandung variabel l_1 pada persamaan (3.11)

$$l_1 = \frac{96h^3l_2 + 384h^2l_2 - 384h^2y_n + 291hl_2 - 8hx_n - 776hy_n}{96h^3 + 196h^2 + 299h + 12} \quad (3.13)$$

$$- \frac{12x_n + 1164y_n}{96h^3 + 196h^2 + 299h + 12}$$

- Mensubstitusikan persamaan (3.13) pada persamaan (3.12). Kemudian mengelompokkan nilai yang mengandung variabel l_2

$$l_2 = \frac{3(32h^2x_n - 32h^2y_n - 128hy_n - x_n - 97y_n)}{3072h^4 + 6272h^3 + 4866h^2 + 196h + 3} \quad (3.14)$$

- Mensubstitusikan persamaan (3.14) pada persamaan (3.13) untuk memperoleh nilai l_1

$$l_1 = - \left(\frac{12288h^3y_n + 160h^2x_n + 24928h^2y_n + 196hx_n}{3072h^4 + 6272h^3 + 4866h^2 + 196h + 3} + \frac{19012hy_n + 3x_n + 291y_n}{3072h^4 + 6272h^3 + 4866h^2 + 196h + 3} \right) \quad (3.15)$$

- Mensubstitusikan persamaan (3.15) dan (3.14) pada persamaan (3.10) untuk memperoleh nilai k_2

$$k_2 = - \frac{3(3104h^2x_n + 3040h^2y_n + 128hy_n + x_n - 95y_n)}{3072h^4 + 6272h^3 + 4866h^2 + 196h + 3} \quad (3.16)$$

- Mensubstitusikan persamaan (3.16), (3.15) dan (3.14) pada persamaan (3.6) untuk memperoleh nilai k_1

$$k_1 = - \left(\frac{12288h^3x_n + 9568h^2x_n - 15200h^2y_n + 196hx_n}{3072h^4 + 6272h^3 + 4866h^2 + 196h + 3} + \frac{-18620hy_n + 3x_n - 285y_n}{3072h^4 + 6272h^3 + 4866h^2 + 196h + 3} \right) \quad (3.17)$$

Langkah selanjutnya yaitu mencari nilai x_{n+1} dan y_{n+1} dengan mensubstitusikan nilai k_1 , k_2 , l_1 dan l_2 yang terdapat persamaan (3.14) sampai (3.17) ke persamaan (2.16), sehingga dihasilkan nilai solusi sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{4}k_1 + \frac{3h}{4}k_2 \quad (3.18) \\ &= - \left(\frac{3104h^3x_n + 3040h^3y_n - 4529h^2x_n - 4655h^2y_n}{3072h^4 + 6272h^3 + 4866h^2 + 196h + 3} - \frac{285hy_n + 193hx_n + 3x_n}{3072h^4 + 6272h^3 + 4866h^2 + 196h + 3} \right) \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}l_1 + \frac{3h}{4}l_2 \quad (3.19)$$

$$= \frac{32h^3x_n - 32h^3y_n - 49h^2x_n - 175h^2y_n - 95hy_n}{3072h^4 + 6272h^3 + 4866h^2 + 196h + 3} \\ + \frac{(-3hx_n) + 3y_n}{3072h^4 + 6272h^3 + 4866h^2 + 196h + 3}$$

Langkah terakhir yaitu melakukan proses iterasi pada nilai solusi pada persamaan (3.18) dan (3.19) dengan mensubstitusikan nilai awal yaitu x_0 dan y_0 serta nilai h sesuai pada batasan masalah.

sehingga

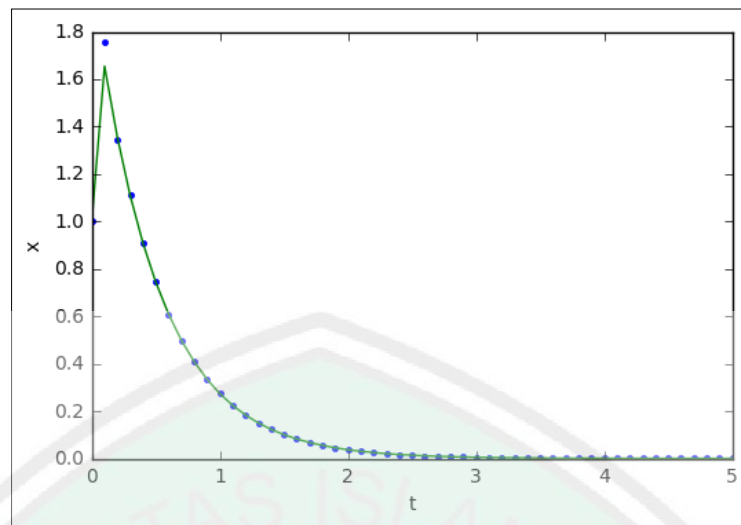
$$x_1 = - \left(\frac{3104h^3x_0 + 3040h^3y_0 - 4529h^2x_0 - 4655h^2y_0}{3072h^4 + 6272h^3 + 4866h^2 + 196h + 3} \right. \\ \left. - \frac{285hy_0 + 193hx_0 + 3x_0}{3072h^4 + 6272h^3 + 4866h^2 + 196h + 3} \right) \\ = \frac{-3104(0.1)^3(1) - 3040(0.1)^3(1) + 4529(0.1)^2(1)}{3072(0.1)^4 + 6272(0.1)^3 + 4866(0.1)^2 + 196(0.1) + 3} \\ + \frac{4655(0.1)^2(1) + 285(0.1)(1) + 193(0.1)(1) + 3(1)}{3072(0.1)^4 + 6272(0.1)^3 + 4866(0.1)^2 + 196(0.1) + 3} \\ = 1.75356376 \\ y_1 = \frac{32h^3x_0 - 32h^3y_0 - 49h^2x_0 - 175h^2y_0 - 95hy_0}{3072h^4 + 6272h^3 + 4866h^2 + 196h + 3} \\ + \frac{(-3hx_0) + 3y_0}{3072h^4 + 6272h^3 + 4866h^2 + 196h + 3} \\ = \frac{32(0.1)^3(1) - 32(0.1)^3(1) - 49(0.1)^2(1) - 175(0.1)^2(1)}{3072(0.1)^4 + 6272(0.1)^3 + 4866(0.1)^2 + 196(0.1) + 3} \\ + \frac{-95(0.1)(1) - 3(0.1)(1) + 3(1)}{3072(0.1)^4 + 6272(0.1)^3 + 4866(0.1)^2 + 196(0.1) + 3} \\ = -0.116136856$$

Jadi pada saat $n = 1$, diperoleh nilai $x_1 = 1.75356376$ dan $y_1 = -0.116136856$. Langkah di atas kemudian diulang sampai iterasi ke-51 ($n = 50$). Untuk mempermudah perhitungan digunakan bantuan program bahasa Python sebagaimana terlampir pada Lampiran 1. Hasil solusi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta implisit orde dua dan solusi analitik yang terdapat pada subbab 1.5 sesuai masalah persamaan (3.1) diberikan pada Tabel 3.1 sebagai berikut:

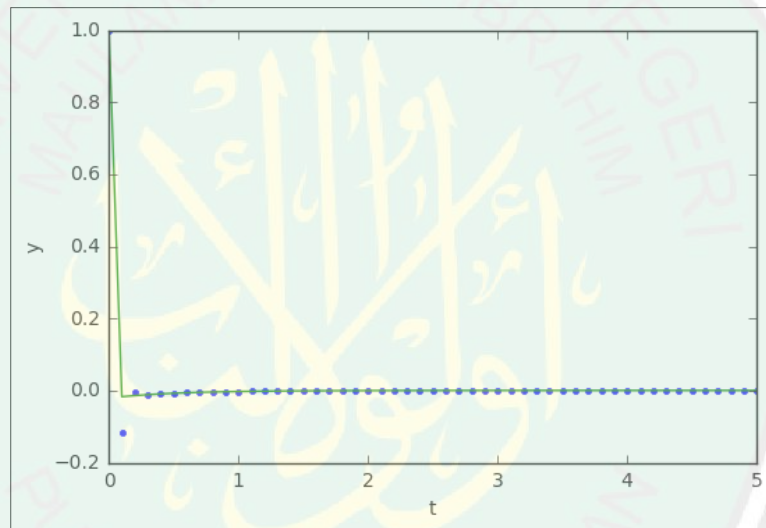
Tabel 3.1 Solusi Numerik dan Analitik dari Persamaan (3.1) pada $t \in [0,5]$ dengan $h = 0.1$

n	$\tilde{x}_{n+1}$	x_{n+1}	$\tilde{y}_{n+1}$	y_{n+1}
0	1	1	1	1
1	1.75356376	1.65481214	-0.11613686	-0.01735063
2	1.34530285	1.35490222	-0.00471942	-0.01426212
3	1.11015213	1.10930012	-0.01259845	-0.01167684
4	0.90805219	0.90821812	-0.00947023	-0.00956019
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
50	0.00009167	0.00009177	-0.00000009	-0.00000009

Berdasarkan Tabel 3.1 diketahui bahwa $\tilde{x}_{n+1}$ dan $\tilde{y}_{n+1}$ merupakan solusi numerik sedangkan x_{n+1} dan y_{n+1} merupakan solusi analitik. Hasil penyelesaian selengkapnya mulai dari $n = 0$ hingga $n = 50$ dapat dilihat pada Lampiran 3. Selanjutnya, hasil penyelesaian tersebut juga dapat disimulasikan sehingga dihasilkan plot sebagai berikut:



Gambar 3.1 Plot $\tilde{x}_{n+1}$ dan x_{n+1} dari Persamaan (3.1) pada $t \in [0,5]$



Gambar 3.2 Plot $\tilde{y}_{n+1}$ dan y_{n+1} dari Persamaan (3.1) pada $t \in [0,5]$

Pada Gambar 3.1 dan 3.2 garis hijau adalah solusi analitik dan titik- titik biru merupakan solusi numerik. Gambar 3.1 menginterpretasikan adanya perbedaan nilai solusi yang terlampaui cukup besar yaitu pada $n = 1$, dimana diperoleh nilai solusi numerik yaitu 1.7535637 dan solusi analitiknya yaitu 1.65481214. Selajutnya Gambar 3.2 juga menginterpretasikan perbedaan nilai solusi yang terlampaui cukup besar terjadi pada $n = 1$ dan $n = 2$, dimana diperoleh nilai solusi numerik yaitu -0.11613686 dan solusi analitiknya yaitu -0.01735063 ketika $n = 1$.

Sedangkan ketika $n = 2$, diperoleh nilai solusi numerik yaitu -0.00471942007 dan solusi analitiknya yaitu -0.0142621240

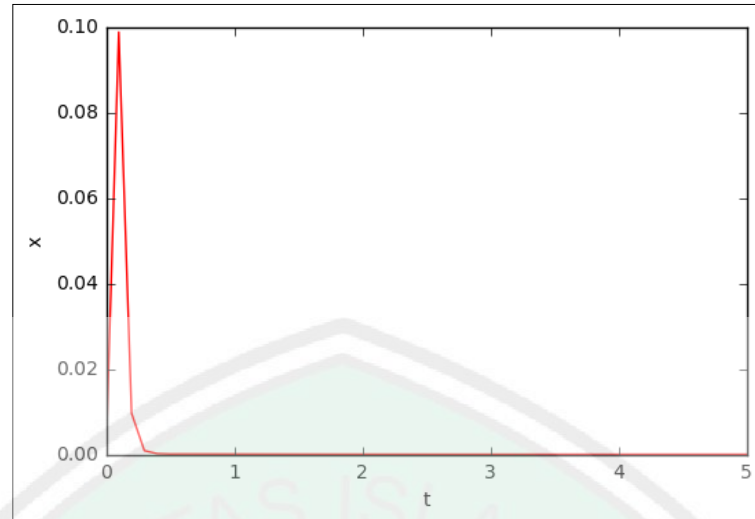
Selanjutnya berdasarkan hasil penyelesaian pada Tabel 3.1, maka dapat diketahui nilai galat dari penyelesaian persamaan (3.1) secara numerik dan analitik yaitu sebagai berikut:

Tabel 3.2 Galat pada Hasil Solusi Persamaan (3.1)

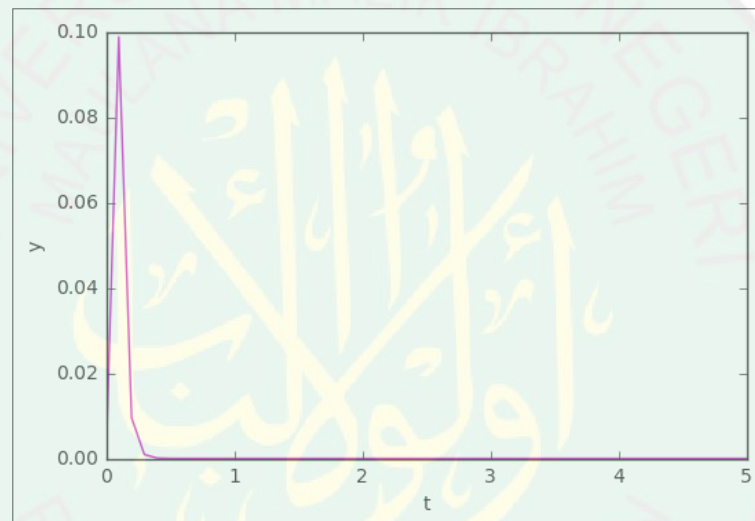
n	Galat x	Galat y
0	0	0
1	9.875×10^{-2}	9.879×10^{-2}
2	9.599×10^{-3}	9.542×10^{-3}
3	8.520×10^{-4}	9.216×10^{-4}
4	1.659×10^{-4}	9.216×10^{-4}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
50	9.692×10^{-8}	1.020×10^{-9}

Berdasarkan Tabel 3.2 dapat dilihat bahwa galat terkecil yang diperoleh adalah 9.692×10^{-8} untuk x dan 1.020×10^{-9} untuk y , dimana keduanya didapat pada iterasi ke-51. Sedangkan galat terbesar yang diperoleh yaitu 9.875×10^{-2} untuk x dan 9.879×10^{-2} untuk y , dimana keduanya didapat pada iterasi kedua. Hasil perhitungan galat selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 5.

Simulasi galat dilakukan berdasarkan solusi analitik dan solusi numerik pada persamaan (3.1) sehingga perbandingan kedua solusi tersebut dapat dilihat pada Gambar 3.3 dan Gambar 3.4



Gambar 3.3 Plot Galat antara $\tilde{x}_{n+1}$ dan x_{n+1} dari Persamaan (3.1) pada $t \in [0,5]$



Gambar 3.4 Plot Galat antara $\tilde{y}_{n+1}$ dan y_{n+1} dari Persamaan (3.1) pada $t \in [0,5]$

Gambar 3.3 dan Gambar 3.4 menunjukkan bahwa perbedaan nilai yang signifikan pada saat iterasi-iterasi awal. Namun semakin banyak iterasi yang dilakukan, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa galat yang diperoleh akan semakin kecil (mendekati 0).

3.2 Metode Runge-Kutta Implisit Orde Dua pada Sistem PDB Tak Linier yang Kaku

Berdasarkan batasan masalah pada subbab 1.5, diberikan suatu sistem persamaan diferensial biasa tak linier yakni

$$\frac{dx}{dt} = -1002x + 1000y^2 \quad (3.20)$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y - y^2$$

dengan nilai awal yaitu $x(0) = 1$ dan $y(0) = 1$

Langkah pertama dalam penerapan metode Runge-Kutta implisit yaitu memisalkan ruas kanan dari persamaan (3.20) menjadi suatu fungsi yakni

$$\frac{dx}{dt} = f(t_n, x_n, y_n)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t_n, x_n, y_n)$$

Langkah kedua adalah mensubstitusikan (2.16) pada persamaan (3.20), sehingga menjadi

$$k_1 = -1002 \left(x_n + h \left(\frac{1}{4} k_1 - \frac{1}{4} k_2 \right) \right) + 1000 \left(y_n + h \left(\frac{1}{4} l_1 - \frac{1}{4} l_2 \right) \right)^2 \quad (3.21)$$

$$= -1002x_n - \frac{501}{2} h k_1 + \frac{501}{2} h k_2 + 1000y_n^2 + 500y_n h l_1$$

$$- 500y_n h l_2 + \frac{125}{2} h^2 l_1^2 - 125h^2 l_1 l_2 + \frac{125}{2} h^2 l_2^2$$

$$k_2 = -1002 \left(x_n + h \left(\frac{1}{4} k_1 + \frac{5}{12} k_2 \right) \right) \quad (3.22)$$

$$+ 1000 \left(y_n + h \left(\frac{1}{4} l_1 + \frac{5}{12} l_2 \right) \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= -1002x_n - \frac{501}{2}hk_1 + \frac{835}{2}hk_2 + 1000y_n^2 + 500y_nhl_1 \\
&\quad + \frac{2500}{3}y_nhl_2 + \frac{125}{2}h^2l_1^2 + \frac{625}{3}h^2l_1l_2 + \frac{3125}{18}h^2l_2^2 \\
l_1 &= \left(x_n + h\left(\frac{1}{4}k_1 - \frac{1}{4}k_2\right)\right) - \left(y_n + h\left(\frac{1}{4}l_1 - \frac{1}{4}l_2\right)\right) \tag{3.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad - \left(y_n + h\left(\frac{1}{4}l_1 - \frac{1}{4}l_2\right)\right)^2 \\
&= x_n + \frac{1}{4}hk_1 - \frac{1}{4}hk_2 - y_n - \frac{1}{4}hl_1 + \frac{1}{4}hl_2 - y_n^2 - \frac{1}{2}y_nhl_1 \\
&\quad + \frac{1}{2}y_nhl_2 - \frac{1}{16}h^2l_1^2 + \frac{1}{8}h^2l_1l_2 - \frac{1}{16}h^2l_2^2 \\
l_2 &= \left(x_n + h\left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{5}{12}k_2\right)\right) - \left(y_n + h\left(\frac{1}{4}l_1 + \frac{5}{12}l_2\right)\right) \tag{3.24} \\
&\quad - \left(y_n + h\left(\frac{1}{4}l_1 + \frac{5}{12}l_2\right)\right)^2 \\
&= x_n + \frac{1}{4}hk_1 + \frac{5}{12}hk_2 - y_n - \frac{1}{4}hl_1 - \frac{5}{12}hl_2 - y_n^2 - \frac{1}{2}y_nhl_1 \\
&\quad - \frac{5}{6}y_nhl_2 - \frac{1}{16}h^2l_1^2 + \frac{5}{24}h^2l_1l_2 - \frac{25}{144}h^2l_2^2
\end{aligned}$$

Langkah ketiga adalah menyelesaikan sistem persamaan (3.21) sampai (3.24) untuk mencari nilai k_1 , k_2 , l_1 dan l_2 dengan menggunakan metode Newton-Raphson sebagai berikut:

$$\mathbf{K}_{i+1} = \mathbf{K}_i - [\mathbf{J}(\mathbf{K}_i)]^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{K}_i) \tag{3.25}$$

dimana

$$\mathbf{K}_{i+1} = \begin{bmatrix} k_{1i+1} \\ k_{2i+1} \\ l_{1i+1} \\ l_{2i+1} \end{bmatrix}, \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} k_{1i} \\ k_{2i} \\ l_{1i} \\ l_{2i} \end{bmatrix}$$

$$J(K_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial k_1} & \frac{\partial f_1}{\partial k_2} & \frac{\partial f_1}{\partial l_1} & \frac{\partial f_1}{\partial l_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial k_1} & \frac{\partial f_2}{\partial k_2} & \frac{\partial f_2}{\partial l_1} & \frac{\partial f_2}{\partial l_2} \\ \frac{\partial g_1}{\partial k_1} & \frac{\partial g_1}{\partial k_2} & \frac{\partial g_1}{\partial l_1} & \frac{\partial g_1}{\partial l_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial k_1} & \frac{\partial g_2}{\partial k_2} & \frac{\partial g_2}{\partial l_1} & \frac{\partial g_2}{\partial l_2} \end{bmatrix}_i, F(K_i) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}_i$$

dengan

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1(k_1, k_2, l_1, l_2, x_n, y_n, h) \\ &= -1002x_n - \frac{501}{2}hk_1 + \frac{501}{2}hk_2 + 1000y_n^2 + 500y_nhl_1 - 500y_nhl_2 + \\ &\quad \frac{125}{2}h^2l_1^2 - 125h^2l_1l_2 + \frac{125}{2}h^2l_2^2 - k_1 \\ f_2 &= f_2(k_1, k_2, l_1, l_2, x_n, y_n, h) \\ &= -1002x_n - \frac{501}{2}hk_1 + \frac{835}{2}hk_2 + 1000y_n^2 + 500y_nhl_1 + \frac{2500}{3}y_nhl_2 \\ &\quad + \frac{125}{2}h^2l_1^2 + \frac{625}{3}h^2l_1l_2 + \frac{3125}{18}h^2l_2^2 - k_2 \\ g_1 &= g_1(k_1, k_2, l_1, l_2, x_n, y_n, h) \\ &= x_n + \frac{1}{4}hk_1 - \frac{1}{4}hk_2 - y_n - \frac{1}{4}hl_1 + \frac{1}{4}hl_2 - y_n^2 - \frac{1}{2}y_nhl_1 + \frac{1}{2}y_nhl_2 - \frac{1}{16}h^2l_1^2 \\ &\quad + \frac{1}{8}h^2l_1l_2 - \frac{1}{16}h^2l_2^2 - l_1 \\ g_2 &= g_2(k_1, k_2, l_1, l_2, x_n, y_n, h) \\ &= x_n + \frac{1}{4}hk_1 + \frac{5}{12}hk_2 - y_n - \frac{1}{4}hl_1 - \frac{5}{12}hl_2 - y_n^2 - \frac{1}{2}y_nhl_1 - \frac{5}{6}y_nhl_2 - \frac{1}{16}h^2l_1^2 \\ &\quad + \frac{5}{24}h^2l_1l_2 - \frac{25}{144}h^2l_2^2 - l_2 \end{aligned}$$

dan

$$\frac{\partial f_1}{\partial k_1} = -\frac{501}{2}h - 1 \qquad \frac{\partial g_1}{\partial k_1} = \frac{1}{4}h$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial k_2} = -\frac{501}{2}h$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial k_2} = -\frac{1}{4}h$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial l_1} = 125h^2l_1 - 125h^2l_2 + 500hy_n$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial l_1} = -\frac{1}{4}h - \frac{1}{2}hy_n - \frac{1}{8}h^2l_1 + \frac{1}{8}h^2l_2 - 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial l_2} = -125h^2l_1 + 125h^2l_2 - 500hy_n$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial l_2} = \frac{1}{4}h + \frac{1}{2}hy_n + \frac{1}{8}h^2l_1 - \frac{1}{8}h^2l_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial k_1} = -\frac{501}{2}h$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial k_1} = \frac{1}{4}h$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial k_2} = -\frac{823}{2}h - 1$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial k_2} = \frac{5}{12}h$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial l_1} = 500hy_n + 125h^2l_1 + \frac{625}{3}h^2l_2$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial l_1} = -\frac{1}{4}h - \frac{1}{2}hy_n - \frac{1}{8}h^2l_1 - \frac{5}{24}h^2l_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial l_2} = \frac{2500}{3}hy_n + \frac{625}{3}h^2l_1 + \frac{3125}{9}h^2l_2$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial l_2} = -\frac{5}{12}h - \frac{5}{6}hy_n - \frac{5}{24}h^2l_1 - \frac{25}{72}h^2l_2$$

Kemudian untuk menentukan nilai K_{i+1} , dibutuhkan nilai awal yang dapat diambil secara acak (sebarang). Sebagai contoh, untuk $i = 0$ diambil nilai awal yang didefinisikan sebagai berikut:

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Adapun nilai yang dibutuhkan selanjutnya untuk melakukan iterasi pada K_{i+1} yaitu nilai h , dimana nilai ini juga dapat dipilih sebarang, Berdasarkan batasan masalah, nilai h yang digunakan dalam penelitian ini yaitu 0.1 dengan domain $t \in [0,5]$. Sehingga persamaan (3.25) untuk $i = 0$ dan $n = 0$ menjadi

$$K_1 = K_0 - [J(K_0)]^{-1}F(K_0)$$

$$\begin{bmatrix} k_{1_1} \\ k_{2_1} \\ l_{1_1} \\ l_{2_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -26.050 & 25.050 & 50 & -50 \\ -25.050 & -42.750 & 50 & 83.333 \\ 0.025 & -0.025 & -1.075 & 0.075 \\ 0.025 & 0.04167 & -0.075 & -1.125 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.994958238 \\ -1.869968931 \\ -0.998435822 \\ -0.935917015 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, jika nilai toleransi kesalahan (ε) pada $\mathbf{K}_{i+1}$ yaitu 10^{-15} , maka iterasi $\mathbf{K}_{i+1}$ akan berhenti ketika kondisi tersebut terpenuhi. Berikut disajikan tabel nilai $\mathbf{K}_{i+1}$ dengan $n = 0$ dan i yang dimulai dari 0 yaitu

Tabel 3.3 Nilai $\mathbf{K}_{i+1}$ untuk $n = 0$

i	k_{1i}	k_{2i}	l_{1i}	l_{2i}
0	0	0	0	0
1	-1.994958238	-1.869968931	-0.998435822	-0.935917015
2	-1.936151980	-1.808924698	-0.998494668	-0.935981910
3	-1.936151981	-1.808924698	-0.998494668	-0.935981911
4	-1.936151981	-1.808924697	-0.998494668	-0.935981911

Tabel 3.3 menunjukkan bahwa untuk $n = 0$, iterasi $\mathbf{K}_{i+1}$ berhenti sampai iterasi keempat ($i = 4$), sehingga nilai tersebut yang digunakan untuk menghitung nilai solusi x_1 dan y_1 dengan mensubstitusikan nilai k_1 , k_2 , l_1 dan l_2 yang sudah didapatkan ke persamaan (2.16), sehingga dihasilkan nilai solusi sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \frac{h}{4}k_1 + \frac{3h}{4}k_2 \\ &= 1 + \frac{0.1}{4}(-1.936151981) + \frac{3(0.1)}{4}(-1.808924697) \\ &= 0.815926848 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{4}l_1 + \frac{3h}{4}l_2 \\ &= 1 + \frac{0.1}{4}(-0.998494668) + \frac{3(0.1)}{4}(-0.935981911) \end{aligned}$$

$$= 0.90483899$$

Langkah selanjutnya yaitu mengulangi keseluruhan langkah ketiga mulai dari menentukan nilai $\mathbf{K}_{i+1}$ sesuai persamaan (3.25) hingga mensubstitusikannya pada nilai solusi x_{n+1} dan y_{n+1} . Jika akan ditentukan nilai x_2 dan y_2 , maka yang perlu dilakukan yaitu mencari nilai nilai $\mathbf{K}_{i+1}$ kembali dengan menggunakan nilai x_1 dan y_1 yang sudah dicari sebelumnya, adapun uraiannya yaitu seperti berikut

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_0 - [\mathbf{J}(\mathbf{K})]_0^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{K})_0$$

$$\begin{bmatrix} k_{1_1} \\ k_{2_1} \\ l_{1_1} \\ l_{2_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -26.050 & 25.050 & 45.242 & -45.242 \\ -25.050 & -42.750 & 45.242 & 75.403 \\ 0.025 & -0.025 & -1.0702 & 0.0702 \\ 0.025 & 0.04167 & -0.0702 & -1.127 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1.175 \\ 1.175 \\ -0.907 \\ -0.907 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.524013744 \\ -1.529410528 \\ -0.903530427 \\ -0.846863539 \end{bmatrix}$$

Berikut disajikan tabel nilai $\mathbf{K}_{i+1}$ dengan $n = 1$ dan i yang dimulai dari 0 yaitu

Tabel 3.4 Nilai $\mathbf{K}_{i+1}$ untuk $n = 1$

i	k_{1_i}	k_{2_i}	l_{1_i}	l_{2_i}
0	0	0	0	0
1	-1.524013744	-1.529410528	-0.903530427	-0.846863539
2	-1.475853663	-1.479416943	-0.903578620	-0.846916689
3	-1.475853663	-1.479416942	-0.903578620	-0.846916687

Tabel 3.4 menunjukkan bahwa untuk $n = 1$, iterasi $\mathbf{K}_{i+1}$ berhenti sampai iterasi ketiga ($i = 3$), sehingga nilai tersebut yang digunakan untuk menghitung nilai solusi x_2 dan y_2 dengan mensubstitusikan nilai k_1 , k_2 , l_1 dan l_2 yang sudah didapatkan ke persamaan (2.16), sehingga dihasilkan nilai solusi sebagai berikut

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + \frac{h}{4}k_1 + \frac{3h}{4}k_2 \\
&= 0.815926848 + \frac{0.1}{4}(-1.475853663) + \frac{3(0.1)}{4}(-1.479416942) \\
&= 0.668074236
\end{aligned}$$

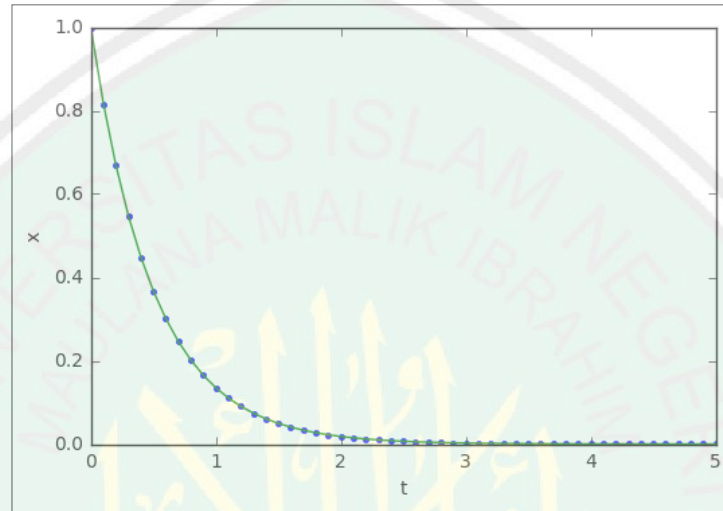
$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \frac{h}{4}l_1 + \frac{3h}{4}l_2 \\
&= 0.90483899 + \frac{0.1}{4}(-0.903578620) + \frac{3(0.1)}{4}(-0.846916687) \\
&= 0.81873077
\end{aligned}$$

Langkah di atas terus berulang hingga iterasi ke-51 ($n = 50$). Nilai solusi selanjutnya dapat dicari dengan mengulangi langkah ketiga dan mengganti nilai x_n dan y_n dengan nilai x_n dan y_n sebelumnya. Untuk mempermudah perhitungan digunakan bantuan program bahasa Python sebagaimana terlampir pada Lampiran 2. Hasil solusi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta implisit orde dua dan solusi analitik yang terdapat pada subbab 1.5 sesuai masalah persamaan (3.20) diberikan pada Tabel 3.5 sebagai berikut:

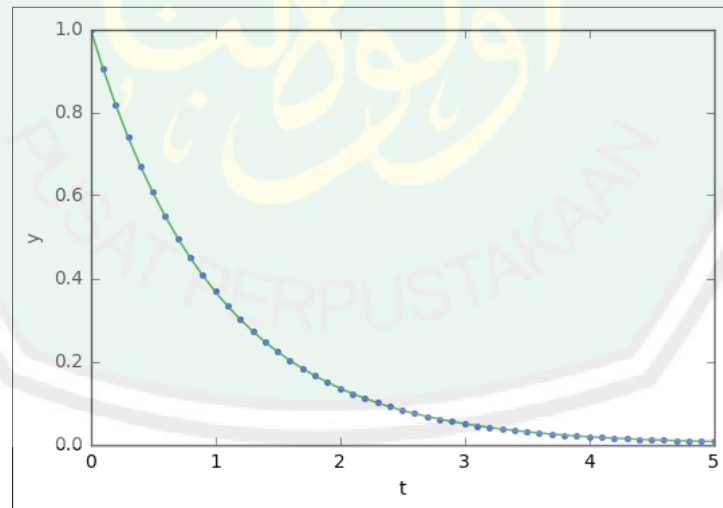
Tabel 3.5 Solusi Numerik dan Analitik dari Persamaan (3.20) pada $t \in [0,5]$ dengan $h = 0.1$

n	$\tilde{x}_{n+1}$	x_{n+1}	$\tilde{y}_{n+1}$	y_{n+1}
0	1	1	1	1
1	0.815926848	0.818730753	0.90483899	0.90483742
2	0.668074236	0.670320046	0.81873077	0.81873075
3	0.546970187	0.548811636	0.74081704	0.74081822
4	0.44781990	0.44932896	0.67031791	0.67032005
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
5	0.000045241	0.000045399	0.00673749	0.00673795

Berdasarkan Tabel 3.5 diketahui bahwa $\tilde{x}_{n+1}$ dan $\tilde{y}_{n+1}$ merupakan solusi numerik sedangkan x_{n+1} dan y_{n+1} merupakan solusi analitik. Hasil penyelesaian selengkapnya mulai dari $n = 0$ hingga $n = 50$ dapat dilihat pada Lampiran 4. Selanjutnya, hasil penyelesaian tersebut juga dapat disimulasikan sehingga dihasilkan plot sebagai berikut:



Gambar 3.5 Plot $\tilde{x}_{n+1}$ dan x_{n+1} dari Persamaan (3.20) pada $t \in [0,5]$



Gambar 3.6 Plot $\tilde{y}_{n+1}$ dan y_{n+1} dari Persamaan (3.20) pada $t \in [0,5]$

Pada Gambar 3.5 dan 3.6 garis hijau adalah solusi analitik dan titik- titik biru merupakan solusi numerik. Kedua gambar tersebut menunjukkan bahwa solusi numerik telah menghampiri solusi analitik.

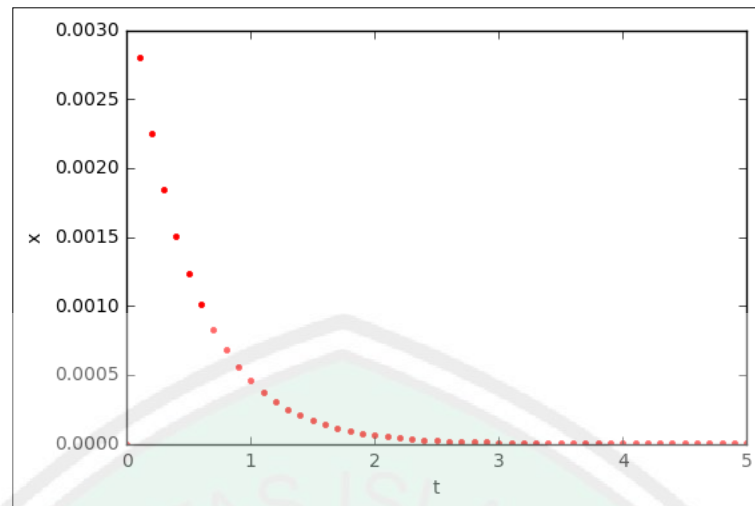
Selanjutnya berdasarkan hasil penyelesaian pada Tabel 3.5, maka dapat diketahui nilai galat dari penyelesaian persamaan (3.20) secara numerik dan analitik yaitu sebagai berikut:

Tabel 3.6 Galat dari Hasil Solusi Persamaan (3.20)

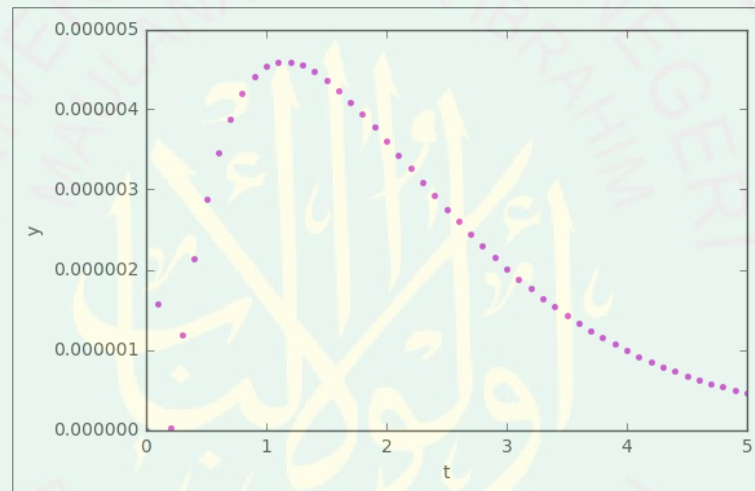
n	Galat x	Galat y
0	0	0
1	2.083×10^{-3}	1.571×10^{-6}
2	2.245×10^{-3}	1.977×10^{-6}
3	1.841×10^{-3}	1.178×10^{-6}
4	1.509×10^{-3}	2.132×10^{-6}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
5	1.583×10^{-7}	4.557×10^{-7}

Berdasarkan Tabel 3.6 dapat dilihat bahwa galat terkecil yang diperoleh adalah 1.583×10^{-7} untuk x dan 4.557×10^{-7} untuk y , dimana keduanya didapat pada iterasi ke-51. Sedangkan galat terbesar yang diperoleh yaitu 2.083×10^{-3} untuk x yang diperoleh pada iterasi kedua dan 2.132×10^{-6} untuk y yang diperoleh pada iterasi kelima. Hasil perhitungan galat selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 5.

Simulasi galat dilakukan berdasarkan solusi analitik dan solusi numerik pada persamaan (3.20) sehingga perbandingan kedua solusi tersebut dapat dilihat pada Gambar 3.7 dan Gambar 3.8 berikut:



Gambar 3.7 Plot Galat antara $\tilde{x}_{n+1}$ dan x_{n+1} dari Persamaan (3.20) pada $t \in [0,5]$



Gambar 3.8 Plot Galat antara $\tilde{y}_{n+1}$ dan y_{n+1} dari Persamaan (3.20) pada $t \in [0,5]$

Gambar 3.7 dan Gambar 3.8 menunjukkan bahwa perbedaan nilai yang signifikan pada saat iterasi-iterasi awal. Namun semakin banyak iterasi yang dilakukan, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa galat yang diperoleh akan semakin kecil (mendekati 0).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Adapun kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan ini adalah sebagai berikut:

1. Pada penyelesaian kasus pertama yaitu pada sistem persamaan diferensial biasa linier yang kaku dengan domain $t \in [0,5]$ dan $h = 0.1$, nilai k_1 , k_2 , l_1 dan l_2 diperoleh dengan menggunakan metode substitusi secara langsung. Solusi yang didapat ketika $n = 1$ sebesar 1.75356376 untuk x_1 dan -0.116136856 untuk y_1 . Kemudian iterasi terus berulang hingga iterasi ke-51. Solusi yang dihasilkan pada kasus pertama tersebut menunjukkan bahwa solusi numerik telah menghampiri solusi analitik. Selain itu, pada kasus pertama juga diperoleh nilai galat terkecil yakni 9.692×10^{-8} untuk x dan 1.020×10^{-9} untuk y , dimana keduanya didapat pada iterasi ke-51. Sedangkan galat terbesar yang diperoleh yaitu 9.875×10^{-2} untuk x dan 9.879×10^{-2} untuk y , dimana keduanya didapat pada saat iterasi pertama. Berdasarkan nilai galat yang diperoleh, semakin banyak iterasi yang dilakukan maka galatnya akan semakin kecil (mendekati 0).
2. Pada penyelesaian kasus kedua yaitu pada sistem persamaan diferensial biasa tak linier yang kaku dengan domain $t \in [0,5]$ dan $h = 0.1$, nilai k_1 , k_2 , l_1 dan l_2 diperoleh dengan menggunakan metode Newton-Raphson. Solusi yang didapat ketika $n = 1$ sebesar 0.815926848 untuk x_1 dan 0.90483899 untuk y_1 , sedangkan pada $n = 2$ diperoleh nilai $x_2 = 0.668074236$ dan $y_2 =$

0.81873077. Kemudian iterasi terus berulang hingga iterasi ke-51. Solusi yang dihasilkan pada kasus kedua tersebut menunjukkan bahwa solusi numerik telah menghampiri solusi analitik. Selain itu, pada kasus kedua juga diperoleh galat terkecil yaitu 1.583×10^{-7} untuk x dan 4.557×10^{-7} untuk y , dimana keduanya didapat pada iterasi ke-51. Sedangkan galat terbesar yang diperoleh yaitu 2.083×10^{-3} untuk x yang diperoleh pada iterasi kedua dan 2.132×10^{-6} untuk y yang diperoleh pada iterasi kelima. Berdasarkan nilai galat yang diperoleh, semakin banyak iterasi yang dilakukan maka galatnya akan semakin kecil (mendekati 0).

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk menggunakan metode Runge-Kutta dengan orde yang lebih tinggi untuk diterapkan pada persamaan diferensial biasa (PDB) yang bersifat kaku lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

- Ad-Dimasyqi, Al-Imam Abul Fida Isma'il Ibnu Katsir. 2000. *Terjemah Tafsir Ibnu Katsir Juz 5*. Bandung: Sinar Baru al-Gensindo.
- Anton, H. 2012. *Calculus Early Transcendentals*. USA: Laurie Rosatone.
- Ashi, H. 2008. Numerical Methods for Stiff Systems. *Thesis* (Tidak diterbitkan). United Kingdom: The University of Nottingham.
- Biazar, J. dan Navidyan, M. 2014. Implicit Runge-Kutta method for Van der pol problem. *Applied and Computational Mathematics*, 1-8.
- Chapra, S. C. 2002. *Numerical Methods For Engineers with Software and Programming Applications*. Fourt Edition. New York: The Mc-Graw-Hill Companies, Inc.
- Curtiss, C. dan Hirschfelder, J. 1952. Integration of Stiff Equations. *PNAS of the United States of America*, 38:235-243.
- Dahlquist, G. 1963. A Special Stability Problem for Linier Multistep. *BIT Numerical Mathematic*, 27-43.
- Darvishi, M., Khani, F., dan Soliman A.A . 2006. The Numerical Simulation for Stiff System of Ordinary Differential Equations. *Computer and Mathematics with Applications*, 1055-1063.
- Engwer, J. 2018. Partitioned Implicit Runge-Kutta Timesteppers for Micromagnetics with Eddy Currents. *Disertasi* (Tidak diterbitkan). Texas: Texas Tech University.
- Granados, A. 2017. Implicit Runge-Kutta Algoritm Using Newton-Rapshon Method. *ResearchGate*. Venezuela: Simon Bollvar University.
- Hairer, E. dan Wanner, G. 1991. *Solving Ordinary Differential Equations II*. Verlag Berlin Heidelber: Springer.
- Ismail, M. 2014. Konsep Berpikir dalam Al-Qur'an dan Implikasinya terhadap Pendidikan Akhlak. *TA'DIB*, 291-312.
- Lambert, J.D. 1992. *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems*. New York: Wiley.
- Munir, R. 2006. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.

- Purcel, E. J. 1997. *Calculus*. Mexico: Prentice Hall.
- Remani, C. 2013. Numerical Methods for Solving System of Nonlinier Equation. *Honour's Seminar*. Canada: Lakehad University.
- Robert, M. C., G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, dan D. E. Knuth. 1996. On the Lambert W Function. *Advances in Computational Mathematics*, 329-359.
- Shihab, Q. 2002. *Tafsir Al-Mishbah*. Jakarta: Lentera hati.
- Sihwanto. 2007. Ekstem Fungsi Satu Variabel dan Dua Variabel dengan Teorema Taylor. *Skripsi* (Tidak diterbitkan). Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.
- Skvortsov, L. 2013. Efficient Implementation of Second-Order Implicit Runge-Kutta Methods. *Mathematical Models and Computer Simulation*, 565–574.
- Stewart, James. 2012. *Multivariable Calculus Seventh Editioon*. United States of America: Brooks/Cole.
- Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi Dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offest.

LAMPIRAN – LAMPIRAN

Lampiran 1. Program Python pada Sistem PDB Linier

```

from numpy import array, arange, zeros, exp
from numpy.linalg import solve
from matplotlib.pyplot import *

def solx(t):
    return ((95/47)*exp(-2*t)) - ((48/47)*exp(-96*t))

def soly(t):
    return ((48/47)*exp(-96*t)) - ((1/47)*exp(-2*t))

h = 0.1
t = arange(0, 5+h, h)
m = int(5/h)
x = zeros(m+1)
y = zeros(m+1)
x[0] = 1
y[0] = 1

for i in range(m):
    k1 = -((12288*(h**3)*x[i]) + (9568*(h**2)*x[i]) - (15200*(h**2)*y[i]) +
    (196*h*x[i]) - (18620*h*y[i]) + (3*x[i]) - (285*y[i])) / ((3072*(h**4)) +
    (6272*(h**3)) + (4866*(h**2)) + (196*h) + 3)
    k2 = -(3*((3104*(h**2)*x[i]) + (3040*(h**2)*y[i]) + (128*h*x[i]) + x[i] -
    (95*y[i])))) / ((3072*(h**4)) + (6272*(h**3)) + (4866*(h**2)) + (196*h) + 3)
    l1 = -((12288*(h**3)*y[i]) + (160*(h**2)*x[i]) + (24928*(h**2)*y[i]) +
    (196*h*x[i]) + (19012*h*y[i]) + (3*x[i]) + (291*y[i])) / ((3072*(h**4)) +
    (6272*(h**3)) + (4866*(h**2)) + (196*h) + 3)
    l2 = (3*((32*(h**2)*x[i]) - (32*(h**2)*y[i]) - (128*h*y[i]) - x[i] -
    (97*y[i])))) / ((3072*(h**4)) + (6272*(h**3)) + (4866*(h**2)) + (196*h) + 3)
    x[i+1] = x[i] + ((h/4)*k1) + (((h**3)/4)*k2)
    y[i+1] = y[i] + ((h/4)*l1) + (((h**3)/4)*l2)

plot(t, x, '.', t, solx(t))
xlabel('t')
ylabel('x')
show()
plot(t, y, '.', t, soly(t))
xlabel('t')
ylabel('y')
show()

```


Lampiran 2. Program Python pada Sistem PDB Tak Linier

```

from numpy import array, arange, zeros, exp
from numpy.linalg import solve
from matplotlib.pyplot import *

def solx(t):
    return exp(-2*t)

def soly(t):
    return exp(-t)

def F(K,h,x,y):
    k1 = K[0,0]
    k2 = K[1,0]
    l1 = K[2,0]
    l2 = K[3,0]
    V = [[-k1 - 1002*( x + h*(k1/4 - k2/4))+ 1000*( y + h*(l1/4 - l2/4) )**2],
        [-k2 - 1002*( x + h*(k1/4 + 5*k2/12))+ 1000*( y + h*(l1/4 + 5*l2/12) )**2],
        [-l1 + ( x + h*(k1/4 - k2/4)) - ( y + h*(l1/4 - l2/4))- ( y + h*(l1/4 - l2/4))**2],
        [-l2 + ( x + h*(k1/4 + 5*k2/12)) - ( y + h*(l1/4 + 5*l2/12))- ( y + h*(l1/4 + 5*l2/12))**2]]
    return array(V)

def J(K,h,x,y):
    k1 = K[0,0]
    k2 = K[1,0]
    l1 = K[2,0]
    l2 = K[3,0]
    Jac = [[-501/2*h - 1, 501/2*h, 125*(h*(l1 - l2) + 4*y)*h, -125*(h*(l1 - l2) + 4*y)*h],
        [-501/2*h, -835/2*h - 1, 125/3*(h*(3*l1 + 5*l2) + 12*y)*h, 625/9*(h*(3*l1 + 5*l2) + 12*y)*h],
        [1/4*h, -1/4*h, -1/8*(h*(l1 - l2) + 4*y)*h - 1/4*h - 1, 1/8*(h*(l1 - l2) + 4*y)*h + 1/4*h],
        [1/4*h, 5/12*h, -1/24*(h*(3*l1 + 5*l2)+12*y)*h - 1/4*h, -5/72*(h*(3*l1+5*l2)+12*y)*h-5/12*h-1]]
    return array(Jac)

h = 0.1
t = arange(0,5+h,h)
m = int(5/h)
x = zeros(m+1)
y = zeros(m+1)
x[0] = 1
y[0] = 1

```

```

for i in range(m):
    #----- Metode Newton -----
    k1 = 0.0
    k2 = 0.0
    l1 = 0.0
    l2 = 0.0

    n = 0
    K = array([[k1],[k2],[l1],[l2]])
    while max(abs(F(K,h,x[i],y[i])))>10**(-15):
        K = K - solve( J(K,h,x[i],y[i]), F(K,h,x[i],y[i]) )
        n = n + 1
        if n>100:
            break
    #-----
    # print(max(F(K,h,x[i],y[i])))

    k1 = K[0,0]
    k2 = K[1,0]
    l1 = K[2,0]
    l2 = K[3,0]

    x[i+1] = x[i] + h*(k1/4 + 3*k2/4)
    y[i+1] = y[i] + h*(l1/4 + 3*l2/4)

plot(t,x,'.',t,solx(t))
xlabel('t')
ylabel('x')
show()
plot(t,y,'.',t,soly(t))
xlabel('t')
ylabel('y')
show()

```

Lampiran 3. Output Solusi Numerik dan Analitik pada Sistem PDB Linier

Solusi Numerik		Solusi Analitik	
$\tilde{x}_{n+1}$	$\tilde{y}_{n+1}$	x_{n+1}	y_{n+1}
1.00000000e+00	1.00000000e+00	1.00000000e+00	1.00000000e+00
1.75356376e+00	-1.16136856e-01	1.65481214e+00	-1.73506335e-02
1.34530285e+00	-4.71942007e-03	1.35490222e+00	-1.42621240e-02
1.11015213e+00	-1.25984507e-02	1.10930012e+00	-1.16768433e-02
9.08052191e-01	-9.47022771e-03	9.08218119e-01	-9.56019073e-03
7.43516152e-01	-7.83501288e-03	7.43586104e-01	-7.82722215e-03
6.08718786e-01	-6.40674193e-03	6.08796811e-01	-6.40838749e-03
4.98367020e-01	-5.24604830e-03	4.98440672e-01	-5.24674391e-03
4.08019709e-01	-4.29493660e-03	4.08088707e-01	-4.29567060e-03
3.34051231e-01	-3.51632949e-03	3.34114774e-01	-3.51699762e-03
2.73492235e-01	-2.87886556e-03	2.73550041e-01	-2.87947411e-03
2.23911771e-01	-2.35696602e-03	2.23963831e-01	-2.35751401e-03
1.83319579e-01	-1.92967978e-03	1.83366076e-01	-1.93016922e-03
1.50086205e-01	-1.57985479e-03	1.50127445e-01	-1.58028890e-03
1.22877595e-01	-1.29344836e-03	1.22913956e-01	-1.29383112e-03
1.00601539e-01	-1.05896357e-03	1.00633436e-01	-1.05929933e-03
8.23638335e-02	-8.66987721e-04	8.23916889e-02	-8.67280936e-04
6.74323783e-02	-7.09814508e-04	6.74566095e-02	-7.10069574e-04
5.52077951e-02	-5.81134685e-04	5.52288007e-02	-5.81355797e-04
4.51993644e-02	-4.75782783e-04	4.52175176e-02	-4.75973869e-04
3.70053276e-02	-3.89529764e-04	3.70209722e-02	-3.89694444e-04
3.02967594e-02	-3.18913257e-04	3.03102085e-02	-3.19054826e-04
2.48043644e-02	-2.61098573e-04	2.48158998e-02	-2.61219998e-04
2.03076668e-02	-2.13764914e-04	2.03175403e-02	-2.13868846e-04
1.66261599e-02	-1.75012210e-04	1.66345951e-02	-1.75101001e-04
1.36120608e-02	-1.43284850e-04	1.36192546e-02	-1.43360574e-04
1.11443772e-02	-1.17309234e-04	1.11505026e-02	-1.17373711e-04
9.12405154e-03	-9.60426478e-05	9.12925935e-03	-9.60974669e-05
7.46998372e-03	-7.86314076e-05	7.47440538e-03	-7.86779514e-05
6.11577615e-03	-6.43765910e-05	6.11952555e-03	-6.44160584e-05
5.00706819e-03	-5.27059809e-05	5.01024376e-03	-5.27394080e-05
4.09935407e-03	-4.31510955e-05	4.10204065e-03	-4.31793752e-05
3.35619632e-03	-3.53283823e-05	3.35846683e-03	-3.53522824e-05
2.74776307e-03	-2.89238218e-05	2.74968008e-03	-2.89440008e-05
2.24963058e-03	-2.36803219e-05	2.25124764e-03	-2.36973436e-05
1.84180281e-03	-1.93873981e-05	1.84316568e-03	-1.94017439e-05
1.50790874e-03	-1.58727236e-05	1.50905642e-03	-1.58848044e-05
1.23454517e-03	-1.29952123e-05	1.23551090e-03	-1.30053779e-05
1.01073873e-03	-1.06393551e-05	1.01155077e-03	-1.06479028e-05
8.27505394e-04	-8.71058310e-06	8.28187723e-04	-8.71776551e-06
6.77489796e-04	-7.13147154e-06	6.78062759e-04	-7.13750272e-06
5.54670009e-04	-5.83863167e-06	5.55150833e-04	-5.84369298e-06
4.54115797e-04	-4.78016628e-06	4.54519060e-04	-4.78441115e-06

3.71790711e-04	-3.91358643e-06	3.72128732e-04	-3.91714455e-06
3.04390056e-04	-3.20410585e-06	3.04673237e-04	-3.20708670e-06
2.49208233e-04	-2.62324455e-06	2.49445349e-04	-2.62574051e-06
2.04030132e-04	-2.14768560e-06	2.04228578e-04	-2.14977451e-06
1.67042213e-04	-1.75833909e-06	1.67208218e-04	-1.76008650e-06
1.36759707e-04	-1.43957586e-06	1.36898510e-04	-1.44103695e-06
1.11967011e-04	-1.17860012e-06	1.12083020e-04	-1.17982126e-06
9.16688982e-05	-9.64935771e-07	9.17658155e-05	-9.65955952e-07



Lampiran 4. Output Solusi Numerik dan Analitik pada Sistem PDB Tak

Linier

Solusi Numerik		Solusi Analitik	
$\tilde{x}_{n+1}$	$\tilde{y}_{n+1}$	x_{n+1}	y_{n+1}
1.00000000e+00	1.	1.00000000e+00	1.
8.15926848e-01	0.90483899	8.18730753e-01	0.90483742
6.68074236e-01	0.81873077	6.70320046e-01	0.81873075
5.46970187e-01	0.74081704	5.48811636e-01	0.74081822
4.47819906e-01	0.67031791	4.49328964e-01	0.67032005
3.66642778e-01	0.60652778	3.67879441e-01	0.60653066
3.00180788e-01	0.54880818	3.01194212e-01	0.54881164
2.45766491e-01	0.49658142	2.46596964e-01	0.4965853
2.01215975e-01	0.44932477	2.01896518e-01	0.44932896
1.64741214e-01	0.40656525	1.65298888e-01	0.40656966
1.34878298e-01	0.36787491	1.35335283e-01	0.36787944
1.10428685e-01	0.33286649	1.10803158e-01	0.33287108
9.04110964e-02	0.30118962	9.07179533e-02	0.30119421
7.40221303e-02	0.27252724	7.42735782e-02	0.27253179
6.06040198e-02	0.24659249	6.08100626e-02	0.24659696
4.96182326e-02	0.22312579	4.97870684e-02	0.22313016
4.06238572e-02	0.20189228	4.07622040e-02	0.20189652
3.32599068e-02	0.18267943	3.33732700e-02	0.18268352
2.72308317e-02	0.16529495	2.73237224e-02	0.16529889
2.22946566e-02	0.14956484	2.23707719e-02	0.14956862
1.82532698e-02	0.13533168	1.83156389e-02	0.13533528
1.49444716e-02	0.122453	1.49955768e-02	0.12245643
1.22354644e-02	0.1107999	1.22773399e-02	0.11080316
1.00175231e-02	0.10025575	1.00518357e-02	0.10025884
8.20163154e-03	0.09071503	8.22974705e-03	0.09071795
6.71490940e-03	0.08208224	6.73794700e-03	0.082085
5.49768766e-03	0.07427098	5.51656442e-03	0.07427358
4.50111356e-03	0.06720307	4.51658094e-03	0.06720551
3.68518996e-03	0.06080777	3.69786372e-03	0.06081006
3.01717007e-03	0.05502107	3.02755475e-03	0.05502322
2.47024315e-03	0.04978505	2.47875218e-03	0.04978707
2.02245849e-03	0.04504732	2.02943064e-03	0.0450492
1.65584443e-03	0.04076044	1.66155727e-03	0.0407622
1.35568706e-03	0.03688152	1.36036804e-03	0.03688317
1.10993965e-03	0.03337174	1.11377515e-03	0.03337327
9.08739249e-04	0.03019596	9.11881966e-04	0.03019738
7.44010741e-04	0.02732239	7.46585808e-04	0.02732372
6.09142815e-04	0.02472229	6.11252761e-04	0.02472353
4.98722598e-04	0.02236962	5.00451433e-04	0.02237077
4.08318417e-04	0.02024084	4.09734979e-04	0.02024191
3.34301936e-04	0.01831465	3.35462628e-04	0.01831564

2.73702532e-04	0.01657176	2.74653570e-04	0.01657268
2.24088071e-04	0.01499472	2.24867324e-04	0.01499558
1.83467297e-04	0.01356777	1.84105794e-04	0.01356856
1.50209910e-04	0.01227661	1.50733075e-04	0.01227734
1.22981139e-04	0.01110832	1.23409804e-04	0.0111109
1.00688167e-04	0.01005121	1.01039402e-04	0.01005184
8.24362753e-05	0.0090947	8.27240656e-05	0.00909528
6.74929307e-05	0.00822921	6.77287365e-05	0.00822975
5.52583881e-05	0.00744609	5.54515994e-05	0.00744658
4.52416190e-05	0.00673749	4.53999298e-05	0.00673795



Lampiran 5. Galat

Galat Sistem PDB Linier		Galat Sistem PDB Tak Linier	
$ x_{n+1} - \tilde{x}_{n+1} $	$ y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1} $	$ x_{n+1} - \tilde{x}_{n+1} $	$ y_{n+1} - \tilde{y}_{n+1} $
0.00000000e+00	0.00000000e+00	0.00000000e+00	0.00000000e+00
9.87516174e-02	9.87862230e-02	2.80390505e-03	1.57194624e-06
9.59936858e-03	9.54270389e-03	2.24581044e-03	1.97727326e-08
8.52018396e-04	9.21607349e-04	1.84144872e-03	1.17792151e-06
1.65928365e-04	8.99630122e-05	1.50905798e-03	2.13214345e-06
6.99524140e-05	7.79072713e-06	1.23666283e-03	2.88040066e-06
7.80255888e-05	1.64555531e-06	1.01342341e-03	3.45574235e-06
7.36519714e-05	6.95612850e-07	8.30472848e-04	3.88632729e-06
6.89979763e-05	7.33995557e-07	6.80542546e-04	4.19615519e-06
6.35435183e-05	6.68134749e-07	5.57674626e-04	4.40566898e-06
5.78057381e-05	6.08553407e-07	4.56985718e-04	4.53226857e-06
5.20594464e-05	5.47987217e-07	3.74473297e-04	4.59074927e-06
4.64969735e-05	4.89442499e-07	3.06856886e-04	4.59367636e-06
4.12404409e-05	4.34109839e-07	2.51447875e-04	4.55170536e-06
3.63617267e-05	3.82755024e-07	2.06042776e-04	4.47385611e-06
3.18965886e-05	3.35753563e-07	1.68835736e-04	4.36774766e-06
2.78554049e-05	2.93214788e-07	1.38346802e-04	4.23979956e-06
2.42312003e-05	2.55065267e-07	1.13363130e-04	4.09540462e-06
2.10055969e-05	2.21111546e-07	9.28907904e-05	3.93907722e-06
1.81531768e-05	1.91086072e-07	7.61152654e-05	3.77458063e-06
1.56446390e-05	1.64680411e-07	6.23690734e-05	3.60503653e-06
1.34490423e-05	1.41568867e-07	5.11052316e-05	3.43301905e-06
1.15353629e-05	1.21424873e-07	4.18755079e-05	3.26063568e-06
9.87354095e-06	1.03932010e-07	3.43125959e-05	3.08959685e-06
8.43515082e-06	8.87910613e-08	2.81155068e-05	2.92127572e-06
7.19379626e-06	7.57241712e-08	2.30375979e-05	2.75675963e-06
6.12530880e-06	6.44769348e-08	1.88767614e-05	2.59689425e-06
5.20780746e-06	5.48190259e-08	1.54673838e-05	2.44232161e-06
4.42166363e-06	4.65438277e-08	1.26737572e-05	2.29351265e-06
3.74940352e-06	3.94674055e-08	1.03846797e-05	2.15079522e-06
3.17557193e-06	3.34270730e-08	8.50903054e-06	2.01437803e-06
2.68657463e-06	2.82797329e-08	6.97214415e-06	1.88437121e-06
2.27051151e-06	2.39001212e-08	5.71283885e-06	1.76080382e-06
1.91700914e-06	2.01790436e-08	4.68098196e-06	1.64363885e-06
1.61705830e-06	1.70216663e-08	3.83549460e-06	1.53278599e-06
1.36286023e-06	1.43458972e-08	3.14271665e-06	1.42811247e-06
1.14768390e-06	1.20808832e-08	2.57506710e-06	1.32945225e-06
9.65735128e-07	1.01656329e-08	2.10994615e-06	1.23661382e-06
8.12038119e-07	8.54776967e-09	1.72883567e-06	1.14938674e-06
6.82329176e-07	7.18241238e-09	1.41656203e-06	1.06754716e-06
5.72962029e-07	6.03117925e-09	1.16069214e-06	9.90862410e-07
4.80824094e-07	5.06130625e-09	9.51038423e-07	9.19094791e-07
4.03262809e-07	4.24487167e-09	7.79253350e-07	8.52004766e-07

3.38021131e-07	3.55811717e-09	6.38497057e-07	7.89353516e-07
2.83181310e-07	2.98085590e-09	5.23165071e-07	7.30905040e-07
2.37116043e-07	2.49595835e-09	4.28665186e-07	6.76427832e-07
1.98446193e-07	2.08890730e-09	3.51234630e-07	6.25696202e-07
1.66004291e-07	1.74741359e-09	2.87790263e-07	5.78491297e-07
1.38803114e-07	1.46108541e-09	2.35805821e-07	5.34601877e-07
1.16008702e-07	1.22114423e-09	1.93211342e-07	4.93824865e-07
9.69172329e-08	1.02018140e-09	1.58310743e-07	4.55965727e-07



RIWAYAT HIDUP



Lilla Nur Rizki, lahir di Kabupaten Malang pada tanggal 16 Maret 1997 dan biasa dipanggil Lilla. Tinggal di Dusun Karangjati RT/RW 01/03 Desa Ardimulyo Kecamatan Singosari Malang. Anak pertama dari pasangan bapak M.Jainuri dan ibu Mistriani.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Al-Maarif 12 Ardimulyo dan lulus pada tahun 2009. Setelah itu melanjutkan sekolah di SMPN 3 Singosari dan lulus pada tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMAN 1 Lawang dan lulus pada tahun 2015. Selanjutnya pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa telah mengikuti beberapa lomba dan penelitian, diantaranya adalah lomba publikasi ilmiah IKAHIMATIKA 2018 dan juga Peningkatan Kompetensi Riset Mahasiswa (PKRM) pada tahun 2018



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lilla Nur Rizki
NIM : 15610028
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Penerapan Metode Runge-Kutta Implisit pada Sistem
Persamaan Diferensial Biasa yang Kaku
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	26 November 2018	Revisi Bab I	1.
2.	30 November 2018	Konsultasi Agama Bab I	2.
3.	15 Februari 2019	Konsultasi Bab II	3.
4.	01 Maret 2019	ACC Bab I & Bab II	4.
5.	15 Maret 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	5.
6.	04 April 2019	Konsultasi Bab III	6.
7.	09 April 2019	Konsultasi Bab IV & Abstrak	7.
8.	18 April 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	8.
9.	22 April 2019	ACC Bab III, IV & Abstrak	9.
10.	06 Mei 2019	ACC Kajian Keagamaan	10.
11.	09 Mei 2019	ACC Keseluruhan	11.
12.	09 Mei 2019	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 09 Mei 2019

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001