ENERGI *DETOUR DISTANCE* LAPLACE DAN *DETOUR DISTANCE SIGNLESS* LAPLACE KOMPLEMEN GRAF SUBGRUP DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH
NANDA MUSTAGFIROTUL ULYA
NIM. 15610022

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

ENERGI *DETOUR DISTANCE* LAPLACE DAN *DETOUR DISTANCE SIGNLESS* LAPLACE KOMPLEMEN GRAF SUBGRUP DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Nanda Mustagfirotul Ulya
NIM. 15610022

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

ENERGI *DETOUR DISTANCE* LAPLACE DAN *DETOUR DISTANCE* *SIGNLESS* LAPLACE KOMPLEMEN GRAF SUBGRUP DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Nanda Mustagfirotul Ulya
NIM. 15610022

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 06 Mei 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19730705 200003 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

ENERGI *DETOUR DISTANCE* LAPLACE DAN *DETOUR DISTANCE* *SIGNLESS* LAPLACE KOMPLEMEN GRAF SUBGRUP DARI GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Nanda Mustagfirotul Ulya
NIM. 15610022

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 23 Mei 2019

Penguji Utama	:	H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd	....
Ketua Penguji	:	Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D	....
Sekretaris Penguji	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	:	Ach. Nashichuddin, M.A	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nanda Mustagfirotul Ulya

NIM : 15610022

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Energi *Detour Distance* Laplace dan *Detour Distance Signless* Laplace Komplemen Graf Subgrup dari Grup Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 06 Mei 2019
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
9D3FDAFF458597618
6000 ENAM RIBU RUPIAH

Nanda Mustagfirotul Ulya
NIM. 15610022

MOTO

يُرِيدُ ٱللَّهُ بِكُمُ ٱلۡيُسۡرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ ٱلۡعُسۡرَ

"Allah menghendaki kemudahan bagimu dan tidak menghendaki kesukaran bagimu"

(QS. al-Baqarah:185)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Makin Hamzah, ibunda Hindun, dan adik Hafna Ilma Muhalla.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam semoga tercurahkan kepada rasulullah Muhammad Saw. yang telah membimbing manusia kepada ajaran agama Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu, ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan juga doa agar segala sesuatu yang telah diberikan dibalas oleh Allah Swt. dengan balasan yang lebih baik, yakni kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan pengalaman yang berharga kepada penulis.

5. Ach. Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, ilmu, dan motivasi kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Ayah dan Ibu yang selalu memberikan doa, semangat, nasihat, dan motivasi kepada penulis.
8. Teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2015 dan Pondok Pesantren Sabilurrosyad yang selalu berjuang bersama untuk mewujudkan cita-cita.
9. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Mei 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Ulya, Nanda Mustagfirotul. 2019. **Energi *Detour Distance* Laplace dan *Detour Distance Signless* Laplace Komplemen Graf Subgrup dari Grup Dihedral**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata kunci: energi *detour distance* Laplace, energi *detour distance signless* Laplace, komplemen graf subgrup, grup dihedral

Misalkan G subgrup dan H subgrup normal dari G. Graf subgrup $\Gamma_H(G)$ adalah graf dengan himpunan titik semua unsur di G dan dua titik berbeda x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $xy \in H$. Pada penelitian ini ditentukan energi *detour distance* Lalpace (DDL) dan energi *detour distance signless* Laplace ($DDSL$) komplemen graf subgrup $\langle r\rangle, \langle r^2\rangle, \langle r^2, s\rangle, \langle r^2, sr\rangle$, dan $\langle r^3\rangle$ dari grup dihedral D_{2n}. Hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Energi *detour distance* Lalpace komplemen graf subgrup dari grup dihedral D_{2n} adalah:
   a. Energi $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk $n \geq 3$ adalah
   $$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) = 14n^2 - 20n + 8$$
   b. Energi $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah
   $$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = 13n^2 - 17n + 6$$
   c. Energi $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah
   $$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) = 14n^2 - 20n + 8$$
   d. Energi $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah
   $$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) = 14n^2 - 20n + 8$$
   e. Energi $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n kelipatan 3 dan $n \geq 6$ adalah
   $$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right) = \frac{38n^2 - 48n + 16{,}02}{3}$$
2. Energi *detour distance signless* Laplace komplemen graf subgrup dari grup dihedral D_{2n} adalah:
   a. Energi $DDL^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk $n \geq 3$ adalah
   $$E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) = 6n^2 - 4n$$
   b. Energi $DDL^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah
   $$E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = 5n^2 - 4n$$
   c. Energi $DDL^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah
   $$E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) = 6n^2 - 4n$$
   d. Energi $DDL^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah
   $$E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) = 6n^2 - 4n$$

e. Energi $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n kelipatan 3 dan $n \geq 6$ adalah

$$E_{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right) = \frac{14n^2 - 10n}{3}$$

ABSTRACT

Ulya, Nanda Mustagfirotul. 2019. **Detour Distance Laplacian and Detour Distance Signless Laplacian Energy of Complement of Subgroup Graph of Dihedral Group**. Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Keyword: detour distance Laplacian energy, detour distance signless Laplacian energy, complement of subgroup graph, dihedral group

Let G be a subgroup and H is a normal subgroup of G. Subgroup graph $\Gamma_H(G)$ is a graph with all elements in G as the vertex set and two distinct vertices x and y are adjacent if only if $xy \in H$. This study determined the detour distance Laplacian (DDL) and detour distance signless Laplacian ($DDSL$) energy of complement of subgroup graph $\langle r\rangle, \langle r^2\rangle, \langle r^2, s\rangle, \langle r^2, sr\rangle$, and $\langle r^3\rangle$ of dihedral group D_{2n}. The result of this study are as follows:

1. Detour distance Laplacian energy of complement subgroup graph of dihedral group D_{2n} is:
   a. $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)$ energy for $n \geq 3$ is
   $$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) = 14n^2 - 20n + 8$$
   b. $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ energy for $n \geq 4$ and n is even is
   $$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = 13n^2 - 17n + 6$$
   c. $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ energy for $n \geq 4$ and n is even is
   $$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) = 14n^2 - 20n + 8$$
   d. $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right)$ energy for $n \geq 4$ and n is even is
   $$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) = 14n^2 - 20n + 8$$
   e. $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right)$ energy for n multiples of 3 and $n \geq 6$ is
   $$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right) = \frac{38n^2 - 48n + 16,02}{3}$$
2. Detour distance signless Laplacian energy of complement subgroup graph of dihedral group D_{2n} is:
   a. $DDL^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)$ energy for $n \geq 3$ is
   $$E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) = 6n^2 - 4n$$
   b. $DDL^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ energy for $n \geq 4$ and n is even is
   $$E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = 5n^2 - 4n$$
   c. $DDL^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ energy for $n \geq 4$ and n is even is
   $$E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) = 6n^2 - 4n$$
   d. $DDL^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right)$ energy for $n \geq 4$ and n is even is

$$E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) = 6n^2 - 4n$$

e. $DDL^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right)$ energy for n multiples of 3 and $n \geq 6$ is

$$E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right) = \frac{14n^2 - 10n}{3}$$

ملخص

العليا،ناندا مستغفرة. 2019. **الطاقه *detour distance* لافلاس و *detour distance signless* لافلاس على مكملة مخطط زمرة جزئية من زمرة زوجية. البحث الجامعي**. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا ملك إبراهيم مالانج. المشرف: (1) الدكتور عبدالشاكير الماجستير (2) احمد ناصيح الدين الماجستير.

الكلمة المفتاحية: الطاقه دتور *distance* لافلاس، الطاقه دتور *distance signless* لافلاس، مكملة مخطط زمرة جزئية، زمرة زوجية

على سبيل المثال G هو زمرة جزئية و H نورمل زمرة جزئية من G. مخطط زمرة جزئية $\Gamma_H(G)$ هو مخطط يحتوى عل مجموعة من رؤوس لجميع العناصر G ويتم توصيل رأسين مختلفين x و y ومتصل مباشرة اذا وفقط اذا $xy \in H$. في هذه الدراسة تحديد الطاقه *detour distance* لافلاس و *detour distance signless* لافلاس على مكملة مخطط زمرة جزئية $\langle r\rangle, \langle r^2\rangle, \langle r^2, s\rangle, \langle r^2, sr\rangle$ و $\langle r^3\rangle$ من زمرة زوجية D_{2n}. نتائج هذه الدراسة هي على النحو التالي:

1. الطاقه *detour distance* لافلاس على مكملة مخطط زمرة جزئية من زمرة زوجية D_{2n} هو:

أ) الطاقه $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)$ ا $n \geq 3$ هو

$$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) = 14n^2 - 20n + 8$$

ب) الطاقه $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ لشفع n و $n \geq 4$ هو

$$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = 13n^2 - 17n + 6$$

ج) الطاقه $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ لشفع n، $n \geq 4$ هو

$$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) = 14n^2 - 20n + 8$$

د) الطاقه $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right)$ لشفع n، $n \geq 3$ هو

$$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) = 14n^2 - 20n + 8$$

هـ) الطاقه $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right)$ لمضاعفات 3 و $n \geq 6$ هو

$$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right) = \frac{38n^2 - 48n + 16,02}{3}$$

2. الطاقه *detour distance signless* لافلاس على مكملة مخطط زمرة جزئية من زمرة زوجية D_{2n} هو:

أ) الطاقه $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)$ لـ $n \geq 3$ هو

$$E_{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) = 6n^2 - 4n$$

ب) الطاقه $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ لشفع n و $n \geq 4$ هو

$$E_{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = 5n^2 - 4n$$

ت) الطاقه $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ لشفع n، $n \geq 3$ هو

$$E_{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) = 6n^2 - 4n$$

ث) الطاقه $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right)$ لشفع n، $n \geq 3$ هو

$$E_{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) = 6n^2 - 4n$$

ج) الطاقه $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right)$ لمضاعفات 3 و $n \geq 6$ هو

$$E_{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right) = \frac{14n^2 - 10n}{3}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Quran adalah kitab suci umat Islam yang diturunkan sebagai sumber hukum dan sebagai petunjuk bagi kehidupan manusia. Semua perkara dalam kehidupan telah diatur di dalamnya. Al-Quran juga menjelaskan kecermatan Allah dalam mencatat dan menghitung amal perbuatan manusia. Firman Allah Swt. dalam surat al-Qamar ayat 52-53:

وَكُلُّ شَيۡءٖ فَعَلُوهُ فِي ٱلزُّبُرِ ۝٥٢ وَكُلُّ صَغِيرٖ وَكَبِيرٖ مُّسۡتَطَرٌ ۝٥٣

"Dan segala sesuatu yang telah mereka perbuat tercatat dalam buku-buku catatan (yang terdapat di tangan Malaikat yang mencatat amal perbuatan manusia). Dan segala (urusan) yang kecil maupun yang besar adalah tertulis".

Ayat di atas menjelaskan ancaman Allah terhadap orang-orang yang berbuat dosa, bahwa, segala urusan yang kecil maupun yang besar dari amal perbuatan mereka telah tertulis. Tidak ada satupun yang tertinggal, baik yang kecil maupun yang besar melainkan telah dihitung dengan cermat (Katsir, 2017).

Sebagai seorang hamba Allah Swt. sudah sepatutnya dapat mengetahui bahwa Allah adalah rajanya dalam urusan hitung-menghitung karena Allah sangat cepat dan cermat dalam menghitung (Abdusysyakir, 2007). Hal inilah yang dapat dijadikan sebagai contoh mengenai gambaran kecermatan Allah di dalam al-Quran, termasuk matematikawan yang melakukan perhitungan.

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan $E(G)$

adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sebagai sisi (Abdussakir, dkk, 2009).

Graf dikatakan terhubung apabila terdapat suatu lintasan antara sebarang dua titik di G. Misalkan G adalah graf terhubung dengan order p. Matriks *detour* dari G adalah matriks $p \times p$ yang dinotasikan dengan $\boldsymbol{DD}(G)$ sedemikian hingga unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j adalah bilangan yang menyatakan lintasan terpanjang dari v_i ke v_j di G (Ayyaswamy dan Balachandran, 2010).

Matriks *distance* dari G dinotasikan dengan $\boldsymbol{d}(G) = [d_{ij}]$ adalah matriks dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j adalah bilangan yang menyatakan jarak dari v_i ke v_j di G (Yang, dkk, 2013). Matriks transmisi di G dinotasikan dengan $\boldsymbol{T_r}(G)$ adalah matriks diagonal $p \times p$ dengan unsur baris ke-i dan kolom ke-i adalah jumlah jarak v_i ke titik yang lain (Xing dan Zhou, 2017). Dengan demikian, matriks transmisi dari G adalah matriks dengan unsur 0 pada selain diagonal utamanya.

Matriks $\boldsymbol{DDL}(G) = \boldsymbol{T_r}(G) - \boldsymbol{DD}(G)$ disebut matriks *detour distance* Laplace dan $\boldsymbol{DDL^+}(G) = \boldsymbol{T_r}(G) + \boldsymbol{DD}(G)$ disebut matriks *detour distance signless* Laplace dari graf G (Kaladevi dan Abinayaa, 2017).

Misalkan graf G berorder p. Misalkan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ dengan $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_p$ adalah nilai eigen dari suatu matriks, maka energi dari G adalah $E(G) = \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i|$ (Yin, 2008). Misalkan $\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_n$ adalah nilai eigen berbeda dan misalkan $m(\gamma_1), m(\gamma_2), \dots, m(\gamma_n)$ adalah multiplisitas masing-masing γ_i, maka energi dari G adalah $E(G) = \sum_{i=1}^{n} m(\gamma_i)|\gamma_i|$ sehingga dapat diketahui bahwa $\sum_{i=1}^{p} |\alpha_i| = \sum_{i=1}^{n} m(\gamma_i)|\gamma_i|$. Energi yang diperoleh dari matriks $\boldsymbol{DDL}(G)$ disebut energi *detour distance* Laplace dinotasikan dengan $E_{DDL}(G)$. Dengan demikian dapat diketahui pula energi yang diperoleh dari matriks $\boldsymbol{DDL}^{+}(G)$ disebut energi *detour distance signless* Laplace dinotasikan dengan $E_{DDL^{+}}(G)$ (Kaladevi dan Abinayaa, 2017).

Beberapa penelitian mengenai energi suatu graf yang sudah pernah dilakukan antara lain energi Laplace dari suatu graf fuzzy (Shabaf dan Fayazi, 2014), energi *detour* pada beberapa graf dan hasil operasinya (Ayyaswamy dan Balachandran, 2010), energi *distance* pada graf (Ramane, dkk, 2008), energi *distance* Laplace pada graf (Yang, dkk, 2013) dan energi *detour distance* Laplace (Kaladevi dan Abinayaa, 2017).

Teori graf juga membahas graf yang dibangun dari grup. Konsep baru terkait graf yang diperoleh dari grup yaitu subgrup dikenalkan pertama kali oleh Anderson, dkk (2012). Graf subgrup dari G dinotasikan dengan $\Gamma_H(G)$, sedemikian hingga jika $xy \in H$ dan $yx \in H$ untuk suatu $x, y \in G$ dengan $x \neq y$ maka x dan y dihubungkan langsung oleh suatu sisi tak berarah. Dengan demikian, akan diperoleh graf subgrup dari G yang tidak memuat gelung (*loop*) dan sisi rangkap (*multiple edge*). Jika H subgrup normal di G, maka $xy \in H$ berakibat $yx = x^{-1}(xy)x \in H$. Dengan demikian, komplemen dari graf subgrup juga berbentuk graf (*graph*), bukan graf berarah (*digraph*) (Kakeri dan Erfanian, 2015).

Penelitian energi suatu graf yang diperoleh dari grup juga sudah pernah dilakukan. Penelitian energi *detour* dari komplemen graf subgrup dari grup dihedral oleh Abdussakir (2017). Penelitian terkait energi *distance* yang diperoleh dari komplemen graf subgrup dari grup dihedral juga pernah dilakukan (Abdussakir, dkk, 2018).

Sampai saat ini belum ada penelitian terkait energi *detour distance* Laplace (*DDL*) dan *detour distance signless* Laplace (*DDSL*) yang diperoleh dari komplemen graf subgrup dari grup dihedral. Dengan demikian, penulis mengambil judul "Energi *Detour Distance* Laplace dan *Detour Distance Signless* Laplace Komplemen Graf Subgrup dari Grup Dihedral".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, masalah dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana rumus energi *DDL* komplemen graf subgrup dari grup dihedral?
2. Bagaimana rumus energi *DDSL* komplemen graf subgrup dari grup dihedral?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan rumus energi *DDL* komplemen graf subgrup dari grup dihedral.
2. Menentukan rumus energi *DDSL* komplemen graf subgrup dari grup dihedral.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut, yaitu memberikan informasi mengenai rumus energi *DDL* dan *DDSL* komplemen graf subgrup dari grup dihedral.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, subgrup yang diambil adalah subgrup normal $\langle r \rangle$ untuk semua n, subgrup normal $\langle r^2 \rangle, \langle r^2, s \rangle, \langle r^2, sr \rangle$ untuk n genap, dan subgrup normal $\langle r^3 \rangle$ untuk n kelipatan 3 dari grup dihedral D_{2n} dengan $n \geq 3$.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini termasuk ke dalam jenis penelitian kualitatif. Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian buku-buku teori graf, aljabar linier, dan aljabar abstrak. Kajian mengenai graf diambil dari kajian pada buku teori graf dan jurnal yang tekait penelitian. Topik mengenai matriks diambil dari kajian pada buku-buku aljabar dan dikhususkan pada penentuan energi suatu matriks. Topik mengenai grup dan subgrup normal diambil dari kajian pada buku aljabar abstrak.

Pola pembahasan dalam penelitian ini dimulai dari hal-hal khusus (induktif) menuju pada suatu generalisasi yang bersifat deduktif. Langkah-langkah penelitian ini adalah:

1. Menentukan semua subgrup $\langle r \rangle, \langle r^2 \rangle, \langle r^2, s \rangle, \langle r^2, sr \rangle$, dan $\langle r^3 \rangle$ pada suatu grup D_{2n} untuk beberapa kasus n, yaitu $n = 3, 4, 5$ untuk subgrup normal $\langle r \rangle$, $n = 4, 6, 8$ untuk subgrup normal $\langle r^2 \rangle$, $\langle r^2, s \rangle, \langle r^2, sr \rangle$, dan $n = 6, 9, 12$ untuk subgrup normal $\langle r^3 \rangle$.
2. Menggambar graf subgrup beserta komplemennya kemudian menyatakan keterhubungan titik ke dalam bentuk matriks *DDL* dan *DDSL* komplemen graf subgrup.
3. Menentukan energi matriks *DDL* dan *DDSL* komplemen graf subgrup.

4. Membuat dugaan (konjektur) tentang energi *DDL* dan *DDSL* berdasarkan pola yang ditemukan untuk masing-masing kasus.
5. Merumuskan konjektur tentang energi *DDL* dan *DDSL* sebagai suatu teorema.
6. Menghasilkan suatu teorema tentang energi *DDL* dan *DDSL* yang dilengkapi dengan bukti secara deduktif.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi lebih mudah dipahami dan terarah, digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan sistematika sebagai berikut.

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Kajian pustaka meliputi teori graf, matriks, energi, grup, subgrup, dan gambaran ketelitian Allah dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Pembahasan meliputi energi *DDL* dan *DDSL* komplemen graf subgrup $\langle r\rangle, \langle r^2\rangle, \langle r^2, s\rangle, \langle r^2, sr\rangle$, dan $\langle r^3\rangle$ dari grup dihedral serta mendalami ketelitian Allah.

Bab IV Penutup

Penutup meliputi kesimpulan mengenai hasil dari pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

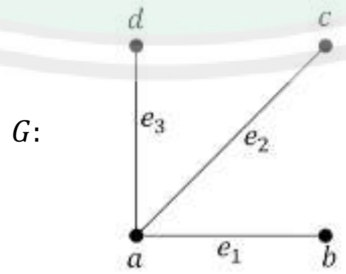
2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ yang disebut sebagai titik adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek dan $E(G)$ yang disebut sebagai sisi adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di G (Abdussakir, dkk, 2009).

Sisi $e = (u, v)$ menghubungkan titik u dan v sedemikian sehingga e adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut titik-titik yang terhubung langsung, u dan e serta v dan e disebut terkait langsung, dan u dan v disebut ujung dari e. Jika dua sisi e_1 dan e_2 terkait langsung pada satu titik yang sama, maka disebut terhubung langsung *(adjacent)*. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand, dkk, 2016).

Misalkan diberikan graf G dengan $V(G) = \{a, b, c, d\}$ dan $E(V) = \{e_1, e_2, e_3\}$ dengan $e_1 = ab, e_2 = ac, e_3 = ad$. Maka G dapat digambarkan sebagai berikut



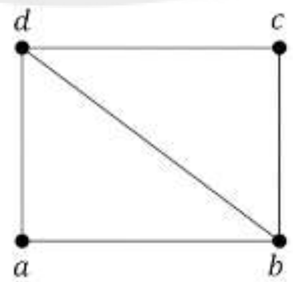
Gambar 2.1 Graf ***G***

2.1.2 Graf Terhubung

Misalkan u dan v adalah titik di G (tidak harus berbeda) dan G adalah graf. Jalan u-v pada graf G adalah barisan berhingga yang berselang-seling $W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1} e_n, v_n = v$ antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan $e_i = v_{i-1}v_i, i = 1,2,3, \dots n$ adalah sisi di G. Titik $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ disebut titik internal, v_0 disebut titik awal, dan v_n disebut titik akhir, serta n menyatakan panjang dari W. W disebut sebagai jalan terbuka jika $v_0 \neq v_n$ dan W disebut sebagai jalan tertutup jika $v_0 = v_n$ (Chartrand, dkk, 2016). Trail merupakan jalan yang semua sisinya berbeda, sedangkan lintasan adalah jalan terbuka yang semua titiknya berbeda. Dengan demikian setiap lintasan pasti merupakan trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan (Abdussakir, dkk, 2009).

Misalkan diambil titik berbeda u dan v pada graf G. Jika terdapat lintasan u-v di G maka titik u dan v dikatakan terhubung (*connected*). Jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terhubung maka graf G dikatakan terhubung (*connected*). Dengan kata lain, jika untuk setiap titik u dan v di G terdapat lintasan u-v di G maka graf G dikatakan terhubung (*connected*). Sebaliknya, jika ada dua titik u dan v di G, tetapi tidak ada lintasan u-v di G, maka G dikatakan tak terhubung (*disconnected*) (Bondy dan Murty, 2008).

G_1:



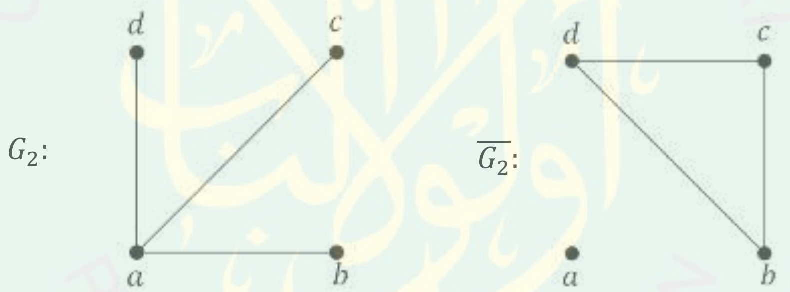
Gambar 2.2 Graf Terhubung

Sebagai contoh, graf G_1 pada Gambar 2.2 merupakan graf terhubung karena setiap dua titik yang berbeda di G_1 dihubungkan oleh lintasan.

2.1.3 Komplemen Graf

Komplemen graf G, dinotasikan dengan $\bar{G}$ adalah graf dengan himpunan titik $V(\bar{G}) = V(G)$ dan dua titik akan terhubung langsung di $\bar{G}$ jika dan hanya jika dua titik tersebut tidak terhubung langsung di G. Jika $xy \in E(G)$ maka $xy \in E(\bar{G})$ dan sebaliknya. Jika graf G berorder p dan berukuran q, maka $\bar{G}$ berorder p memiliki ukuran $\left(\frac{p(p-1)}{2}\right) - q$ (Chartrand, dkk, 2016).

Sebagai contoh, graf G_2 beserta komplemennya dapat dilihat pada Gambar 2.3.



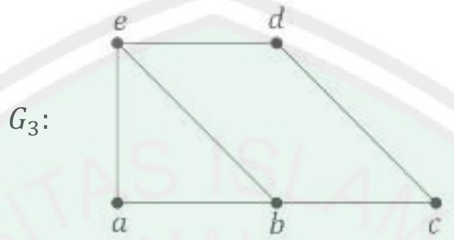
Gambar 2.3 Graf $\boldsymbol{G_2}$ dan $\overline{\boldsymbol{G_2}}$

2.2 Graf dan Matriks

2.2.1 Matriks Keterhubungan

Misalkan G graf dengan order p dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. Matriks keterhubungan dari graf G dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}(G)$, adalah matriks $p \times p$ dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j serta bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j. Dengan kata lain matriks keterhubungan dapat ditulis $\boldsymbol{A}(G) = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq p$ dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ,\text{jika } v_i v_j \in E(G) \\ 0 & ,\text{jika } v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$



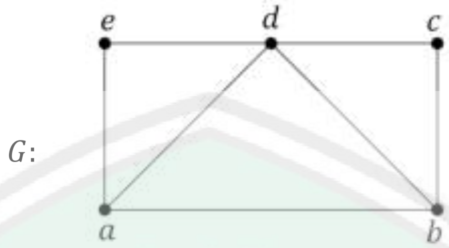
Gambar 2.4 Graf $\boldsymbol{G_3}$ dengan **5** Titik

Misalkan diberikan graf G_3 dengan $V(G_3) = \{a, b, c, d, e\}$ seperti pada Gambar 2.4, maka matriks keterhubungan dari graf G_3 adalah sebagai berikut

$$\boldsymbol{A}(G_3) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.2.2 Matriks Derajat

Misalkan v merupakan titik pada graf G, lingkungan dari v adalah himpunan semua titik di G yang terhubung langsung dengan v dan dinotasikan dengan $N_G(v)$. Derajat titik v di graf G adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v dan dinotasikan dengan $\deg_G(v)$. Jika terdapat satu graf G dalam satu konteks pembicaraan, maka tulisan $\deg_G(v)$ ditulis $\deg(v)$ dan $N_G(v)$ ditulis $N(v)$. Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, banyaknya anggota dalam $N(v)$ disebut derajat titik v di graf G. Jadi, $\deg(v) = |N(v)|$ (Abdussakir, dkk, 2009). Matriks derajat dari graf G dinotasikan dengan $\boldsymbol{D}(G)$, merupakan matriks diagonal dengan unsur baris ke-i dan kolom ke-i merupakan derajat dari v_i, $i = 1,2,3,\dots,p$ (Biyikoglu, dkk, 2007).



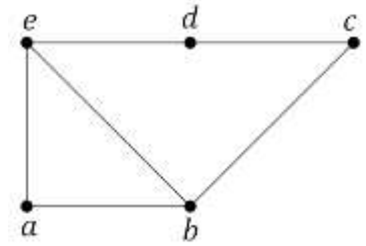
Gambar 2.5 Graf $\boldsymbol{G}$

Misalkan diberikan graf G dengan $V(G) = \{a,b,c,d,e\}$ seperti pada Gambar 2.5, diperoleh derajat titik dari graf G yaitu $\deg(a) = 3$, $\deg(b) = 3$, $\deg(c) = 2$, $\deg(d) = 4$, dan $\deg(e) = 2$ sehingga didapatkan matriks derajat dari graf G adalah sebagai berikut

$$\boldsymbol{D}(G) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.2.3 Matriks *Distance*

Jika u dan v adalah titik yang berbeda pada graf G yang terhubung, maka ada jalur u ke v di G. Definisi paling umum dari jarak (*distance*) yang dinotasikan dengan $d_G(u,v)$ merupakan panjang atau jarak terkecil dari jalur u ke v di G (Chartrand, dkk, 2016). Matriks *distance* dari G dinotasikan dengan $\boldsymbol{d}(G)$, adalah matriks dengan entri d_{ij} adalah bilangan yang menyatakan lintasan terpendek dari v_i ke v_j di G sehingga dapat dituliskan $\boldsymbol{d}(G) = [d_{ij}]$ (Yang, dkk, 2013).



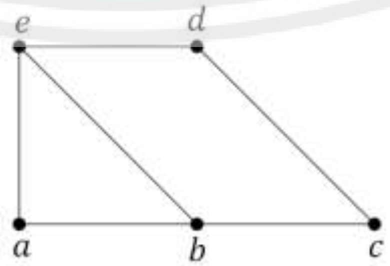
Gambar 2.6 Graf ***H***

Misalkan diberikan graf H dengan $V(H) = \{a, b, c, d, e\}$ seperti pada Gambar 2.6, maka matriks *distance* dari graf H adalah sebagai berikut

$$\boldsymbol{d}(H) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.2.4 Matriks Transmisi

Transmisi dari suatu titik u di G yang dinotasikan dengan $Tr_G(u)$ adalah jumlah jarak antara titik u dan titik yang lain dari G. Misalkan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. Matriks transmisi di G dinotasikan dengan $\boldsymbol{T_r}(G)$ adalah matriks diagonal $p \times p$ dengan unsur baris ke-i dan kolom ke-i adalah jumlah jarak v_i ke titik yang lain (Xing dan Zhou, 2017). Dengan demikian, matriks transmisi dari G adalah matriks dengan unsur 0 pada selain diagonal utamanya.



Gambar 2.7 Graf $\boldsymbol{H_1}$

Misalkan diberikan graf H_1 dengan $V(H_1) = \{a, b, c, d, e\}$ seperti pada Gambar 2.7, diperoleh transmisi titik dari graf H_1 yaitu $Tr_{H_1}(a) = 6$, $Tr_{H_1}(b) = 5$, $Tr_{H_1}(c) = 6$, $Tr_{H_1}(d) = 6$,dan $Tr_{H_1}(e) = 5$ sehingga didapatkan matriks transmisi dari graf H_1 adalah sebagai berikut

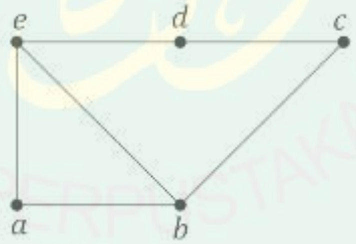
$$\boldsymbol{T_r}(H_1) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.2.5 Matriks *Detour*

Matriks *detour* dari G adalah matriks $p \times p$ yang dinotasikan sebagai $\boldsymbol{DD}(G)$ didefinisikan sebagai matriks yang unsur ke-ij adalah bilangan yang menyatakan lintasan terpanjang dari v_i ke v_j di G (Ayyaswamy dan Balachandran, 2010).

Contoh:

H_2:



Gambar 2.8 Graf $\boldsymbol{H_2}$

Misalkan diberikan graf H_2 dengan $V(H_2) = \{a, b, c, d, e\}$ seperti pada Gambar 2.8, maka matriks *detour* dari graf H_2 adalah sebagai berikut

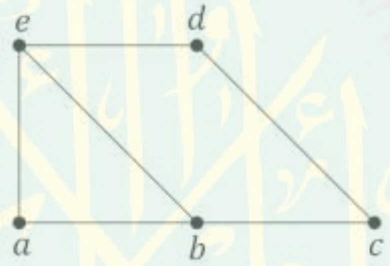
$$\boldsymbol{DD}(H_2) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.2.6 Matriks *DDL*

Matriks *DDL* dari G yang dinotasikan sebagai $\boldsymbol{DDL}(G)$ merupakan hasil pengurangan antara matriks transmisi dari G dengan matriks *detour* dari G atau dapat dituliskan sebagai $\boldsymbol{DDL}(G) = \boldsymbol{T_r}(G) - \boldsymbol{DD}(G)$ (Kaladevi dan Abinayaa, 2017).

Contoh:

H:



Gambar 2.9 Graf ***H***

Misalkan diberikan graf H dengan $V(H) = \{a, b, c, d, e\}$ seperti pada Gambar 2.9 dapat diperoleh matriks trnasmisi dan matriks *detour* sebagai berikut

$$\boldsymbol{T_r}(H) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{array}, \boldsymbol{DD}(H) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Berdasarkan matriks transmisi dan matriks *detour* yang diperoleh, maka matriks *DDL* dari graf H adalah sebagai berikut

$\boldsymbol{DDL}(H) = \boldsymbol{T_r}(H) - \boldsymbol{DD}(H)$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

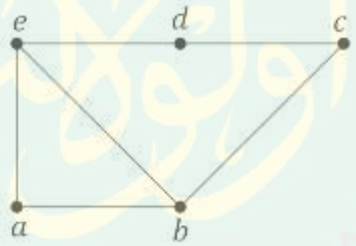
$$= \begin{bmatrix} 6 & -4 & -4 & -3 & -4 \\ -4 & 5 & -4 & -3 & -3 \\ -4 & -4 & 6 & -4 & -3 \\ -4 & -3 & -4 & 6 & -4 \\ -4 & -3 & -3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

2.2.7 Matriks *DDSL*

Matriks *DDSL* dari graf G yang dinotasikan sebagai $\boldsymbol{DDL}^{+}(G)$ merupakan hasil penjumlahan antara matriks transmisi dari G dengan matriks *detour* dari $\boldsymbol{G}$ atau dapat dituliskan sebagai $\boldsymbol{DDL}^{+}(G) = \boldsymbol{T_r}(G) + \boldsymbol{DD}(G)$ (Kaladevi dan Abinayaa, 2017).

Contoh:

G:



Gambar 2.10 Graf $\boldsymbol{G}$

Misalkan diberikan graf G dengan $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ seperti pada Gambar 2.10 dapat diperoleh matriks trnasmisi dan matriks *detour* sebagai berikut

$$\boldsymbol{T_r}(G) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \end{array}, \boldsymbol{DD}(G) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Berdasarkan matriks transmisi dan matriks *detour* yang diperoleh, maka matriks *DDSL* dari graf G adalah sebagai berikut

$\boldsymbol{DDL}^{+}(G) = \boldsymbol{T_r}(G) + \boldsymbol{DD}(G)$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

2.3 Energi

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks $n \times n$, maka polinomial karakteristik $\boldsymbol{A}$ memiliki derajat n dan koefisien variabel γ^n adalah 1, sehingga polynomial karakteristik $p(\gamma)$ dari suatu matriks $n \times n$ memiliki bentuk

$$p(\gamma) = det(\boldsymbol{A} - \gamma \boldsymbol{I}) = \gamma^n + c_1\gamma^{n-1} + c_2\gamma^{n-2} + \cdots + c_n$$

Berdasarkan teorema dasar aljabar, maka persamaan karakteristik dapat ditulis sebagai berikut

$$p(\gamma) = det(\boldsymbol{A} - \gamma \boldsymbol{I}) = \gamma^n + c_1\gamma^{n-1} + c_2\gamma^{n-2} + \cdots + c_n = 0$$

(Anton dan Rorres, 2004).

Misalkan G adalah suatu graf berorder p dan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks keterhubungan dari graf G. Suatu vektor tak nol x disebut vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$ jika $\boldsymbol{A}x$ adalah suatu kelipatan skalar dari x yaitu $\boldsymbol{A}x = \gamma x$, untuk sebarang skalar γ. Skalar γ disebut nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$, dan x disebut sebagai vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$ yang bersesuaian dengan γ. Persamaan $\boldsymbol{A}x = \gamma x$ ditulis kembali dalam bentuk $(\boldsymbol{A} -$

$\gamma \boldsymbol{I}) = 0$, dengan $\boldsymbol{I}$ adalah matriks identitas berordo $p \times p$ untuk menentukan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$. Persamaan ini akan mempunyai solusi taknol jika dan hanya jika $det(\boldsymbol{A} - \gamma \boldsymbol{I}) = 0$. Persamaan $det(\boldsymbol{A} - \gamma \boldsymbol{I}) = 0$ akan menghasilkan persamaan polinomial dalam variabel γ dan disebut persamaan karakteristik dari matriks $\boldsymbol{A}$. Nilai-nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$ ini tidak lain adalah skalar-skalar γ yang memenuhi persamaan karakteristik (Anton dan Rorres, 2004).

Energi dari graf G yang dinotasikan sebagai $E(G)$ adalah jumlah nilai eigen mutlak matriks dari graf G. Misalkan graf G berorder p. Misalkan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ dengan $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_p$ adalah nilai eigen dari suatu matriks, maka energi dari G adalah $E(G) = \sum_{i=1}^{p} |\alpha_i|$ (Yin, 2008). Misalkan $\gamma_1 > \gamma_2 > \cdots > \gamma_n$ adalah nilai eigen berbeda dan misalkan $m(\gamma_1), m(\gamma_2), \dots, m(\gamma_n)$ adalah banyaknya basis untuk ruang vektor eigen masing-masing γ_i, maka energi dari G adalah $E(G) = \sum_{i=1}^{n} m(\gamma_i)|\gamma_i|$sehingga dapat diketahui bahwa $\sum_{i=1}^{p} |\alpha_i| = \sum_{i=1}^{n} m(\gamma_i)|\gamma_i|$.Energi yang diperoleh dari matriks $\boldsymbol{DDL}(G)$ disebut energi *DDL* dinotasikan dengan $E_{DDL}(G)$ (Kaladevi dan Abinayaa, 2017). Dengan demikian dapat diketahui energi yang diperoleh dari matriks $\boldsymbol{DDL}^{+}(G)$ disebut energi *DDSL* dinotasikan dengan $E_{DDL^{+}}(G)$.

2.4 Grup dan Subgrup

2.4.1 Grup Dihedral

Misalkan $(G,*)$ adalah suatu sistem aljabar dengan G merupakan himpunan tak kosong dengan operasi biner $*$, sedemikian sehingga disebut grup apabila memenuhi sifat-sifat berikut:

1. Hukum asosiatif berlaku pada operasi $*$

$$(a * b) * c = a * (b * c), \forall\, a, b, c \ \in G$$

2. Terdepat unsur e di G yang disebut unsur identitas dari G, sehingga

$$e * a = a * e = a, \forall\, a \in G$$

3. Setiap unsur di G mempunyai invers terhadap operasi $*$. Setiap unsur $a \in G$, terdapat suatu unsur $a^{-1} \in G$ yang disebut invers dari a sedemikian sehingga

$$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$$

dengan e adalah unsur identitas di G (Dummit dan Foote, 1991).

Contoh:

Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat dengan operasi biner penjumlahan, maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup karena berlaku:

i. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka $a + (b + c) = (a + b) + c$. Jadi operasi $+$ bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$.

ii. Terdapat anggota identitas yaitu 0 terhadap operasi $+$ di $\mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.

iii. Untuk $a \in \mathbb{Z}$ terdapat a^{-1} yaitu $(-a) \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Berdasarkan i, ii, dan iii maka $\mathbb{Z}$ memenuhi definisi grup sehingga terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

Jika G adalah grup berhingga, maka order $|G|$ dari G adalah banyak elemen di G. Secara umum, untuk sebarang himpunan berhingga S, $|S|$ adalah banyak elemen di S. Misal $g \in G$, maka order dari g adalah bilangan bulat positif terkecil n sehingga $g^n = e$, e unsur identitas di G. Order dari g ditulis $|g|$ (Gallian, 2012).

Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri segi-n beraturan, dinotasikan dengan D_{2n}, untuk setiap $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Dengan operasi komposisi $(\circ)$ yang memenuhi beberapa aksioma. Sifat-sifat pada grup dihedral D_{2n} berlaku:

1. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ sehingga $|r| = n$
2. $|s| = 2$
3. $s \neq r^i$ untuk semua i
4. $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$ sehingga $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$, yaitu tiap-tiap elemen dapat ditulis secara tunggal dengan bentuk $s^k r^i$ untuk setiap $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$
5. $rs = sr^{-1}$
6. $r^i s = sr^{-i}$, untuk semua $0 \leq i \leq n-1$ (Dummit dan Foote, 1991).

Sebagai contoh D_6 merupakan grup dihedral yang memuat semua simetri (rotasi dan refleksi) pada bangun segitiga sehingga $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$.

2.4.2 Subgrup dan Subgrup Normal

Misalkan G adalah grup dan H adalah himpunan bagian di G. Jika H dengan operasi biner yang sama dengan di G membentuk grup, maka H disebut subgrup dari G dan dinotasikan dengan $H \leq G$ (Dummit dan Foote, 1991). Unsur identitas di subgrup H adalah unsur identitas di grup G. Dengan demikian, maka H subgrup G jika dan hanya jika $H \subseteq G$, $H \neq \emptyset$, dan $xy^{-1} \in H$ untuk semua $x, y \in H$.

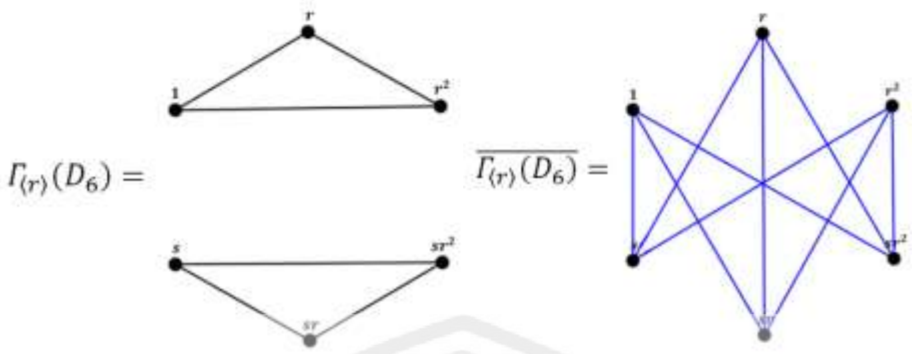
Subgrup H dari grup G disebut subgrup normal dari G jika $aH = Ha$ untuk semua $a \in G$ dan dinotasikan dengan $H \trianglelefteq G$. Jika G grup abelian maka semua subgrup di G adalah subgrup normal karena $h = eh = gg^{-1}h = ghg^{-1} \in H$ untuk semua $h \in H$ dan $g \in G$ (Gallian, 2012).

Sebagai contoh, elemen grup dihedral-$2n$ dengan $n = 3$ adalah $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Berdasarkan definisi subgrup maka diperoleh subgrup dari grup dihedral D_6 adalah $\{1\}, \{1, s\}, \{1, sr\}, \{1, sr^2\}, \{1, r, r^2\}$, dan $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Diperoleh juga subgrup normal dari grup dihedral D_6 adalah $\{1, r, r^2\}$, dan $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$.

2.5 Komplemen Graf Subgrup

Graf subgrup dari G dinotasikan dengan $\Gamma_H(G)$ adalah graf yang himpunan titiknya adalah anggota G, sedemikian hingga jika $xy \in H$ dan $yx \in H$ untuk suatu $x, y \in G$ dengan $x \neq y$ maka x dan y dihubungkan langsung oleh suatu sisi tak berarah. Dengan demikian, akan diperoleh graf subgrup dari G yang tidak memuat gelung (*loop*) dan sisi rangkap (*multiple edge*). Jika H subgrup normal di G, maka $xy \in H$ berakibat $yx = x^{-1}(xy)x \in H$. Dengan demikian, komplemen dari graf subgrup juga berbentuk graf (*graph*), bukan graf berarah (*digraph*) (Kakeri dan Erfanian, 2015).

Sebagai contoh, misalkan G grup dihedral D_6 dan H adalah subgrup normal yang dibangun oleh $\langle r \rangle$, yaitu $H = \{1, r, r^2\}$ sehingga diperoleh gambar graf subgrup beserta komplemennya sebagai berikut



Gambar 2.11 Graf $\boldsymbol{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}$ dan $\overline{\boldsymbol{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}}$

2.6 Gambaran Ketelitian Allah dalam al-Quran

Allah Swt. melakukan sesuatu dengan teliti. Sebagaimana firman-Nya dalam suarat Maryam ayat 94 yang memiliki arti "*Sesungguhnya Allah telah menetukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti*". Allah juga merupakan rajanya dalam urusan hitung-menghitung karena Allah sangat cepat dan cermat dalam menghitung (Abdusysyakir, 2007). Hal ini sesuai dengan firman Allah dalam surat al-Qamar ayat 52-53:

وَكُلُّ شَيۡءٖ فَعَلُوهُ فِي ٱلزُّبُرِ ٥٢ وَكُلُّ صَغِيرٖ وَكَبِيرٖ مُّسۡتَطَرٌ ٥٣

"Dan segala sesuatu yang telah mereka perbuat tercatat dalam buku-buku catatan (yang terdapat di tangan Malaikat yang mencatat amal perbuatan manusia). Dan segala (urusan) yang kecil maupun yang besar adalah tertulis".

Berikut akan dijelaskan tafsir dari surat al-Qomar ayat 52-53. Dalam ayat tersebut Allah berfirman

وَكُلُّ شَيۡءٖ فَعَلُوهُ فِي ٱلزُّبُرِ

"Dan segala sesuatu yang telah mereka perbuat tercatat".

فِي ٱلزُّبُرِ

"Dalam buku-buku catatan (yang terdapat di tangan Malaikat yang mencatat amal perbuatan manusia)".

Dalam tafsir Ibn Katsir dijelaskan bahwa segala sesuatu yang diperbuat oleh manusia akan tercatat dalam buku-buku catatan. Maksudnya, tertulis di dalam kitab-kitab yang berada di tangan para malaikat (Katsir, 2017). Begitu juga penjelasan dalam tafsir al-Maraghi, bahwa segala sesuatu yang telah diperbuat oleh manusia akan tercatat dalam kitab-kitab yang berada di tangan para malaikat. Dalam tafsir al-Maraghi kata 'mereka' merujuk pada kalimat *al-Mujrimin* yang memiliki arti orang-orang yang berdosa. Dinyatakan dalam firman Allah surat ar-Rahman ayat 41 yang memiliki arti "*Orang-orang yang berdosa, dikenal dengan tanda-tandanya*". Disebutkan juga dalam surat Qaf ayat 18 "*Tiada suatu ucapanpun yang diucapkannya, melainkan ada di dekatnya malaikat pengawas yang selalu hadir*" (Al-Maraghi, 1993).

Berikutnya, penjelasan bahwa Allah akan mencatat setiap perbuatan dosa baik dosa kecil maupun dosa besar yang pernah dilakukan oleh manusia terdapat pada ayat

وَكُلُّ صَغِيرٍ وَكَبِيرٍ مُّسْتَطَرٌ

"Dan segala (urusan) yang kecil maupun yang besar adalah tertulis".

Menurut Ibn Katsir segala urusan yang kecil maupun yang besar dari amal perbuatan manusia adalah tertulis. Maksud dari kata 'tertulis' adalah terdapat pada lembaran-lembaran. Tidak ada satupun yang tertinggal, baik yang kecil maupun yang besar melainkan telah dihitung (Katsir, 2017). Dalam tafsir al-Maraghi dijelaskan bahwa yang dimaksud dengan lembaran-lembaran adalah lembaran amal. Artinya dalam lembaran malaikat yang mulia yang mencatat semua amal perbuatan manusia, besar maupun kecil, bahkan semua kejadian yang terjadi di alam ini telah tercatat di dalam Lauhul Mahfudh, yaitu kitab semua takdir (Al-Maraghi, 1993).

Imam Ahmad meriwayatkan dari 'Aisyah r.a., bahwa rasulullah Muhammad Saw. bersabda "Wahai 'Aisyah, jauhilah olehmu dosa-dosa kecil, karena ia pun akan mendapat tuntutan dari Allah (Katsir, 2017). Dan diriwayatkan pula oleh al-Hafizh Ibn 'Asakir dalam terjemahan Sa'id bin Muslim dari sisi yang lain. Kemudian, Sa'id berkata: "Dan aku telah memberi tahukan hadits itu kepada 'Amir bin Hisyam, maka ia berkata kepadaku: 'Celakalah engkau hai Sa'id bin Muslim, karena Sulaiman bin al-Mughirah telah memberitahukan bahwa ia pernah mengerjakan suatu perbuatan dosa, lalu ia meremehkannya. Kemudian ia didatangi seseorang dalam tidurnya dan berkata kepadanya: 'Wahai Sulaiman, janganlah engkau meremehkan dosa-dosa kecil, karena yang kecil itu akan menjadi besar. Sesungguhnya yang kecil itu meskipun telah lebih dulu perjanjiannya, maka di sisi Allah ia akan tertulis secara rinci'" (Katsir, 2017).

Riwayat tersebut menjelaskan bahwa janganlah meremehkan perbuatan dosa sekecil apapun, baik terlihat maupun tidak terlihat. Semua perbuatan dosa tersebut akan dicatat pada lembaran-lembaran secara rapi, teliti dan tidak ada satupun yang tertinggal. Menurut Quraish Shihab dalam tafsir al-Mishbah, bahwa kata *mustathir* terambil dari kata *as-sathr* yang berarti pengaturan huru-huruf yang ditulis dengan rapi dan indah. Kata *mustathir* berarti tertulis dengan rapi dan teliti. Ketelitian dan kerapiannya itu diperkuat lagi dengan penambahan huruf *ta'* yang mendahului huruf *tha'* (Shihab, 2003).

Berdasarkan penjelasan di dalam tafsir Ibn Katsir dan tafsir al-Maraghi pada firman Allah Swt surat al-Qamar ayat 52-53 bahwa Allah dalam menghitung perbuatan dosa para *Mujrimin* sangatlah cermat dan teliti. Tidak ada dosa sekecil apapun dan sebesar apapun kecuali tercatat pada buku catatan mereka masing-masing tanpa ada yang tertinggal. Hal inilah yang dapat dijadikan sebagai contoh mengenai gambaran kecermatan Allah di dalam al-Quran, termasuk matematikawan yang melakukan perhitungan.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Energi *DDL* dan *DDSL* Komplemen Graf Subgrup $\langle r \rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}.

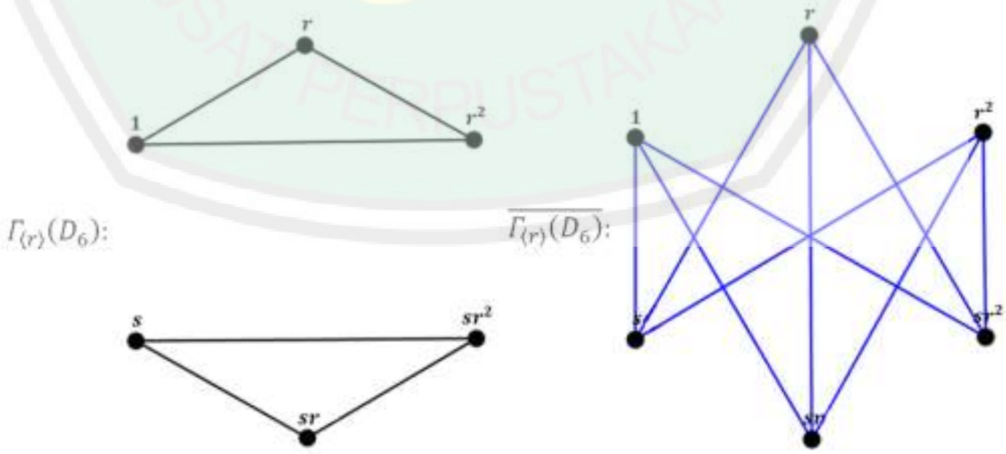
3.1.1 Grup Dihedral D_6

Subgrup dari grup dihedral D_6 yang dibangun oleh $\langle r \rangle$ adalah $\{1, r, r^2\}$. Dua unsur pada grup dihedral D_6 apabila dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ dapat disajikan dengan Table Cayley berikut.

Tabel 3.1 Tabel Cayley Grup Dihedral D_6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Berdasarkan Tabel 3.1 dan definisi graf subgrup maka dapat digambarkan graf subgrup $\Gamma_{\langle r \rangle}(D_6)$ beserta komplemennya seperti berikut



Gambar 3.1 Graf $\boldsymbol{\Gamma_{\langle r \rangle}(D_6)}$ dan $\boldsymbol{\overline{\Gamma_{\langle r \rangle}(D_6)}}$

Dari Gambar 3.1 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)=\begin{bmatrix}0&4&4&5&5&5\\4&0&4&5&5&5\\4&4&0&5&5&5\\5&5&5&0&4&4\\5&5&5&4&0&4\\5&5&5&4&4&0\end{bmatrix}$$

dan diperoleh matriks *distance* dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{d}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)=\begin{bmatrix}0&2&2&1&1&1\\2&0&2&1&1&1\\2&2&0&1&1&1\\1&1&1&0&2&2\\1&1&1&2&0&2\\1&1&1&2&2&0\end{bmatrix}$$

Dari matriks *distance* diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)=\begin{bmatrix}7&0&0&0&0&0\\0&7&0&0&0&0\\0&0&7&0&0&0\\0&0&0&7&0&0\\0&0&0&0&7&0\\0&0&0&0&0&7\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)=\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)-\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}7&0&0&0&0&0\\0&7&0&0&0&0\\0&0&7&0&0&0\\0&0&0&7&0&0\\0&0&0&0&7&0\\0&0&0&0&0&7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&4&4&5&5&5\\4&0&4&5&5&5\\4&4&0&5&5&5\\5&5&5&0&4&4\\5&5&5&4&0&4\\5&5&5&4&4&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7&-4&-4&-5&-5&-5\\-4&7&-4&-5&-5&-5\\-4&-4&7&-5&-5&-5\\-5&-5&-5&7&-4&-4\\-5&-5&-5&-4&7&-4\\-5&-5&-5&-4&-4&7\end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)-\gamma\boldsymbol{I}\right)=det\left(\begin{bmatrix}7-\gamma & -4 & -4 & -5 & -5 & -5\\ -4 & 7-\gamma & -4 & -5 & -5 & -5\\ -4 & -4 & 7-\gamma & -5 & -5 & -5\\ -5 & -5 & -5 & 7-\gamma & -4 & -4\\ -5 & -5 & -5 & -4 & 7-\gamma & -4\\ -5 & -5 & -5 & -4 & -4 & 7-\gamma\end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan eliminasi baris menggunakan *software* Maple 18, diperoleh matriks segitiga atas sebagai berikut

$$\begin{bmatrix}7-\gamma & -4 & -4 & -5 & -5 & -5\\ 0 & -\frac{(\gamma-3)(\gamma-11)}{\gamma-7} & -\frac{4(-11+\gamma)}{-7+\gamma} & -\frac{5(-11+\gamma)}{-7+\gamma} & -\frac{5(-11+\gamma)}{-7+\gamma} & -\frac{5(-11+\gamma)}{-7+\gamma}\\ 0 & 0 & -\frac{(\gamma+1)(\gamma-11)}{\gamma-3} & -\frac{5(-11+\gamma)}{\gamma-3} & -\frac{5(-11+\gamma)}{\gamma-3} & -\frac{5(-11+\gamma)}{\gamma-3}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma^2-6\gamma-82}{\gamma+1} & -\frac{4\gamma-71}{\gamma+1} & -\frac{4\gamma-71}{\gamma+1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-11)(\gamma^2-2\gamma-153)}{\gamma^2-6\gamma-82} & -\frac{(-11+\gamma)(4\gamma-71)}{\gamma^2-6\gamma-82}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-11)(\gamma-14)(\gamma+16)}{\gamma^2-2\gamma-153}\end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)$diperoleh dari perkalian diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, yaitu

$$p(\gamma)=(7-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-11)}{\gamma-7}\right)\left(-\frac{(\gamma+1)(\gamma-11)}{\gamma-3}\right)\left(-\frac{\gamma^2-6\gamma-82}{\gamma+1}\right)$$
$$\left(-\frac{(\gamma-11)(\gamma^2-2\gamma-153)}{\gamma^2-6\gamma-82}\right)\left(-\frac{(\gamma+16)(\gamma-11)(\gamma-14)}{\gamma^2-2\gamma-153}\right)$$
$$=(\gamma-14)(\gamma-11)^4(\gamma+16)$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)$ adalah $\gamma_1^L=14$, $\gamma_2^L=11$, dan $\gamma_3^L=-16$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L)=1$, $m(\gamma_2^L)=4$, dan $m(\gamma_3^L)=1$. Maka energi dari $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)&=\left(m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L|\right)+\left(m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L|\right)+\left(m(\gamma_3^L)|\gamma_3^L|\right)\\&=(1\times|14|)+(4\times|11|)+(1\times|-16|)\\&=74\end{aligned}$$

Jadi, energi DDL dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}$ adalah 74, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks DDL dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}$ adalah 74.

Diperoleh juga matriks $DDSL$ dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right) + \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 0 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 7 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 7 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 7 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 7 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right) - \gamma \boldsymbol{I}\right) = det\left(\begin{bmatrix} 7-\gamma & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 7-\gamma & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 7-\gamma & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 7-\gamma & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 7-\gamma & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 7-\gamma \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan eliminasi menggunakan *software* Maple 18, diperoleh matriks segitiga atas sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 7-\gamma & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -\frac{(\gamma-3)(\gamma-11)}{\gamma-7} & \frac{4(\gamma-3)}{-7+\gamma} & \frac{5(\gamma-3)}{-7+\gamma} & \frac{5(\gamma-3)}{-7+\gamma} & \frac{5(\gamma-3)}{-7+\gamma} \\ 0 & 0 & -\frac{(\gamma-3)(\gamma-15)}{\gamma-11} & \frac{5(\gamma-3)}{-11+\gamma} & \frac{5(\gamma-3)}{-11+\gamma} & \frac{5(\gamma-3)}{-11+\gamma} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma^2-22\gamma+30}{\gamma-15} & \frac{4\gamma+15}{\gamma-15} & \frac{4\gamma+15}{\gamma-15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-3)(\gamma^2-26\gamma+15)}{\gamma^2-22\gamma+30} & -\frac{(\gamma-3)(4\gamma+15)}{\gamma^2-6\gamma-82} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-3)(\gamma-30)\gamma}{\gamma^2-26\gamma+15} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, yaitu

$$p(\gamma) = (7-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-11)}{\gamma-7}\right)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-15)}{\gamma-11}\right)\left(-\frac{\gamma^2-22\gamma+30}{\gamma-15}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma^2-26\gamma+15)}{\gamma^2-22\gamma+30}\right)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-30)\gamma}{\gamma^2-26\gamma+15}\right)$$

$$= (\gamma-30)(\gamma-3)^4\gamma$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)$ adalah $\gamma_1^{L^+} = 30$, $\gamma_2^{L^+} = 3$, dan $\gamma_3^{L^+} = -0$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^{L^+}) = 1$, $m(\gamma_2^{L^+}) = 4$, dan $m(\gamma_3^{L^+}) = 1$. Maka energi dari $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)$ sebagai berikut

$$E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right) = \left(m(\gamma_1^{L^+})|\gamma_1^{L^+}|\right) + \left(m(\gamma_2^{L^+})|\gamma_2^{L^+}|\right) + \left(m(\gamma_3^{L^+})|\gamma_3^{L^+}|\right)$$

$$= (1 \times |30|) + (4 \times |3|) + (1 \times |-0|)$$

$$= 42.$$

Jadi, energi *DDSL* dari $\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)$ adalah 42, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDSL* dari $\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_6)}\right)$ adalah 42.

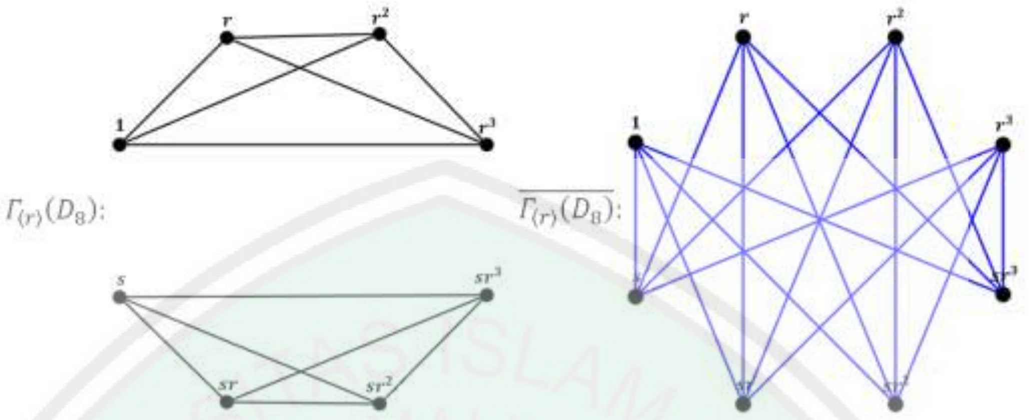
3.1.2 Grup Dihedral $\boldsymbol{D_8}$

Subgrup dari grup dihedral D_8 yang dibangun oleh $\langle r\rangle$ adalah $\{1, r, r^2, r^3\}$. Dua unsur pada grup dihedral D_8 apabila dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ dapat disajikan dengan Table Cayley berikut.

Tabel 3.2 Tabel Cayley Grup Dihedral $\boldsymbol{D_8}$

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Berdasarkan Tabel 3.2 dan definisi graf subgrup dapat digambarkan graf subgrup $\Gamma_{\langle r \rangle}(D_8)$ beserta komplemennya seperti berikut



Gambar 3.2 Graf $\boldsymbol{\Gamma_{\langle r \rangle}(D_8)}$ dan $\boldsymbol{\overline{\Gamma_{\langle r \rangle}(D_8)}}$

Dari Gambar 3.2 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r \rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r \rangle}(D_8)}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 0 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 0 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh matriks *distance* dari $\overline{\Gamma_{\langle r \rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{d}\left(\overline{\Gamma_{\langle r \rangle}(D_8)}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks *distance* diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r \rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}\right)=\begin{bmatrix}10&0&0&0&0&0&0&0\\0&10&0&0&0&0&0&0\\0&0&10&0&0&0&0&0\\0&0&0&10&0&0&0&0\\0&0&0&0&10&0&0&0\\0&0&0&0&0&10&0&0\\0&0&0&0&0&0&10&0\\0&0&0&0&0&0&0&10\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks DDL dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}\right)=\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}\right)-\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}10&0&0&0&0&0&0&0\\0&10&0&0&0&0&0&0\\0&0&10&0&0&0&0&0\\0&0&0&10&0&0&0&0\\0&0&0&0&10&0&0&0\\0&0&0&0&0&10&0&0\\0&0&0&0&0&0&10&0\\0&0&0&0&0&0&0&10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&6&6&6&7&7&7&7\\6&0&6&6&7&7&7&7\\6&6&0&6&7&7&7&7\\6&6&6&0&7&7&7&7\\7&7&7&7&0&6&6&6\\7&7&7&7&6&0&6&6\\7&7&7&7&6&6&0&6\\7&7&7&7&6&6&6&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10&-6&-6&-6&-7&-7&-7&-7\\-6&10&-6&-6&-7&-7&-7&-7\\-6&-6&10&-6&-7&-7&-7&-7\\-6&-6&-6&10&-7&-7&-7&-7\\-7&-7&-7&-7&10&-6&-6&-6\\-7&-7&-7&-7&-6&10&-6&-6\\-7&-7&-7&-7&-6&-6&10&-6\\-7&-7&-7&-7&-6&-6&-6&10\end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_6), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\gamma)=(10-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-4)(\gamma-16)}{\gamma-10}\right)\left(-\frac{(\gamma+2)(\gamma-16)}{\gamma-4}\right)\left(-\frac{(\gamma+8)(\gamma-16)}{\gamma+2}\right)$$

$$\left(-\frac{\gamma^2-2\gamma-276}{\gamma+8}\right)\left(-\frac{(\gamma-16)(\gamma^2+4\gamma-424)}{\gamma^2-2\gamma-276}\right)\left(-\frac{(\gamma-16)(\gamma^2+10\gamma-572)}{\gamma^2+4\gamma-424}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma+36)(\gamma-16)(\gamma-20)}{\gamma^2+10\gamma-572}\right)$$

$$=(\gamma-20)(\gamma-16)^6(\gamma+36)$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}\right)$ adalah $\gamma_1^L = 20$, $\gamma_2^L = 16$, dan $\gamma_3^L = -36$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L) = 1$, $m(\gamma_2^L) = 6$, dan $m(\gamma_3^L) = 1$. Maka energi dari $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}\right)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}\right) &= (m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L|) + (m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L|) + (m(\gamma_3^L)|\gamma_3^L|) \\
&= (1 \times |20|) + (6 \times |16|) + (1 \times |-36|) \\
&= 152
\end{aligned}$$

Jadi, energi *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}$ adalah 152, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}$ adalah 152.

Diperoleh juga matriks *detour distance signless* Laplace dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}\right) + \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 0 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 0 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 10 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 10 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 10 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 10 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 10 & 6 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 10 & 6 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 6 & 6 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_6), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\gamma) = (10 - \gamma)\left(-\frac{(\gamma - 4)(\gamma - 16)}{\gamma - 10}\right)\left(-\frac{(\gamma - 4)(\gamma - 22)}{\gamma - 16}\right)\left(-\frac{(\gamma - 4)(\gamma - 28)}{\gamma - 22}\right)$$

$$\left(-\frac{\gamma^2-38\gamma+84}{\gamma-28}\right)\left(-\frac{(\gamma-4)(\gamma^2-44\gamma+56)}{\gamma^2-38\gamma+84}\right)\left(-\frac{(\gamma-4)(\gamma^2-50\gamma+28)}{\gamma^2-44\gamma+56}\right)\left(\frac{(\gamma-4)(\gamma-56)\gamma}{\gamma^2-50\gamma+28}\right)$$

$$= (\gamma-56)(\gamma-4)^6\gamma$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}\right)$ adalah $\gamma_1^{L^+}=56$, $\gamma_2^{L^+}=4$, dan $\gamma_3^{L^+}=0$ dengan multiplisitas $m\left(\gamma_1^{L^+}\right)=1$, $m\left(\gamma_2^{L^+}\right)=6$, dan $m\left(\gamma_3^{L^+}\right)=1$. Maka energi dari $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}\right)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}\right) &= \left(m\left(\gamma_1^{L^+}\right)\left|\gamma_1^{L^+}\right|\right)+\left(m\left(\gamma_2^{L^+}\right)\left|\gamma_2^{L^+}\right|\right)+\left(m\left(\gamma_3^{L^+}\right)\left|\gamma_3^{L^+}\right|\right) \\ &= (1\times|56|)+(6\times|4|)+(1\times|0|) \\ &= 80. \end{aligned}$$

Jadi, energi *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}$ adalah 80, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_8)}$ adalah 80.

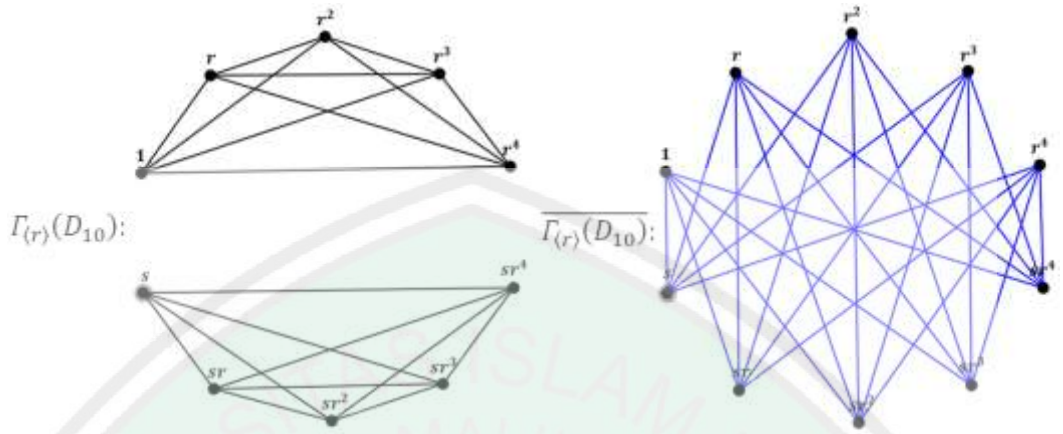
3.1.3 Grup Dihedral D_{10}

Subgrup dari grup dihedral D_{10} yang dibangun oleh $\langle r\rangle$ adalah $\{1,r,r^2,r^3,r^4\}$. Dua unsur pada grup dihedral D_{10} apabila dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ dapat disajikan dengan Table Cayley berikut.

Tabel 3.3 Tabel Cayley Grup Dihedral D_{10}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
1	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
sr^3	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
sr^4	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Berdasarkan Tabel 3.3 dan definisi graf subgrup dapat digambarkan graf subgrup $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})$ beserta komplemennya seperti berikut



Gambar 3.3 Graf $\boldsymbol{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}$ dan $\overline{\boldsymbol{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}}$

Dari Gambar 3.3 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 8 & 8 & 0 & 8 & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 0 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 8 & 0 & 8 & 8 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 8 & 8 & 0 & 8 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 8 & 8 & 8 & 0 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 8 & 8 & 8 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh matriks *distance* dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{d}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks *distance* diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}\right)=\begin{bmatrix}13&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&13&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&13&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&13&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&13&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&13&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&13&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&13&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&13&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&13\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}\right)=\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}\right)-\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}13&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&13&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&13&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&13&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&13&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&13&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&13&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&13&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&13&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&13\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&8&8&8&8&9&9&9&9&9\\8&0&8&8&8&9&9&9&9&9\\8&8&0&8&8&9&9&9&9&9\\8&8&8&0&8&9&9&9&9&9\\8&8&8&8&0&9&9&9&9&9\\9&9&9&9&9&0&8&8&8&8\\9&9&9&9&9&8&0&8&8&8\\9&9&9&9&9&8&8&0&8&8\\9&9&9&9&9&8&8&8&0&8\\9&9&9&9&9&8&8&8&8&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}13&-8&-8&-8&-8&-9&-9&-9&-9&-9\\-8&13&-8&-8&-8&-9&-9&-9&-9&-9\\-8&-8&13&-8&-8&-9&-9&-9&-9&-9\\-8&-8&-8&13&-8&-9&-9&-9&-9&-9\\-8&-8&-8&-8&13&-9&-9&-9&-9&-9\\-9&-9&-9&-9&-9&13&-8&-8&-8&-8\\-9&-9&-9&-9&-9&-8&13&-8&-8&-8\\-9&-9&-9&-9&-9&-8&-8&13&-8&-8\\-9&-9&-9&-9&-9&-8&-8&-8&13&-8\\-9&-9&-9&-9&-9&-8&-8&-8&-8&13\end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_6), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\gamma)=(13-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-5)(\gamma-21)}{\gamma-13}\right)\left(-\frac{(\gamma+3)(\gamma-21)}{\gamma-5}\right)\left(-\frac{(\gamma+11)(\gamma-21)}{\gamma+3}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma+19)(\gamma-21)}{\gamma+11}\right)\left(-\frac{\gamma^2+6\gamma-652}{\gamma+19}\right)\left(-\frac{(\gamma-21)(\gamma^2+14\gamma-905)}{\gamma^2+6\gamma-652}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-21)(\gamma^2+22\gamma-1158)}{\gamma^2+14\gamma-905}\right)\left(-\frac{(\gamma-21)(\gamma^2+30\gamma-1411)}{\gamma^2+22\gamma-1158}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma+64)(\gamma-21)(\gamma-26)}{\gamma^2+30\gamma-1411}\right)$$

$$= (\gamma-26)(\gamma-21)^8(\gamma+64)$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}\right)$ adalah $\gamma_1^L=26$, $\gamma_2^L=21$, dan $\gamma_3^L=-64$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L)=1$, $m(\gamma_2^L)=8$, dan $m(\gamma_3^L)=1$. Maka energi dari $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}\right)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}\right) &= (m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L|)+(m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L|)+(m(\gamma_3^L)|\gamma_3^L|)\\ &= (1\times|26|)+(8\times|21|)+(1\times|-64|)\\ &= 258\end{aligned}$$

Jadi, energi DDL dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}$ adalah 258, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks DDL dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}$ adalah 258.

Diperoleh juga matriks $DDSL$ dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}\right)+\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 13&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&13&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&13&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&13&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&13&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&13&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&13&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&13&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&13&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&8&8&8&8&9&9&9&9&9\\ 8&0&8&8&8&9&9&9&9&9\\ 8&8&0&8&8&9&9&9&9&9\\ 8&8&8&0&8&9&9&9&9&9\\ 8&8&8&8&0&9&9&9&9&9\\ 9&9&9&9&9&0&8&8&8&8\\ 9&9&9&9&9&8&0&8&8&8\\ 9&9&9&9&9&8&8&0&8&8\\ 9&9&9&9&9&8&8&8&0&8\\ 9&9&9&9&9&8&8&8&8&0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13&8&8&8&8&9&9&9&9&9\\ 8&13&8&8&8&9&9&9&9&9\\ 8&8&13&8&8&9&9&9&9&9\\ 8&8&8&13&8&9&9&9&9&9\\ 8&8&8&8&13&9&9&9&9&9\\ 9&9&9&9&9&13&8&8&8&8\\ 9&9&9&9&9&8&13&8&8&8\\ 9&9&9&9&9&8&8&13&8&8\\ 9&9&9&9&9&8&8&8&13&8\\ 9&9&9&9&9&8&8&8&8&13 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_6), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\gamma) = (13-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-5)(\gamma-21)}{\gamma-13}\right)\left(-\frac{(\gamma-5)(\gamma-29)}{\gamma-21}\right)\left(-\frac{(\gamma-5)(\gamma-37)}{\gamma-29}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-5)(\gamma-45)}{\gamma-37}\right)\left(-\frac{\gamma^2-58\gamma+180}{\gamma-45}\right)\left(-\frac{(\gamma-5)(\gamma^2-66\gamma+135)}{\gamma^2-58\gamma+180}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-5)(\gamma^2-74\gamma+90)}{\gamma^2-66\gamma+135}\right)\left(-\frac{(\gamma-5)(\gamma^2-82\gamma+45)}{\gamma^2-74\gamma+90}\right)\left(-\frac{(\gamma-5)(\gamma-90)\gamma}{\gamma^2-82\gamma+45}\right)$$

$$= (\gamma-90)(\gamma-5)^8\gamma$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}\right)$ adalah $\gamma_1^{L^+}=90$, $\gamma_2^{L^+}=5$, dan $\gamma_3^{L^+}=-0$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^{L^+})=1$, $m(\gamma_2^{L^+})=8$, dan $m(\gamma_3^{L^+})=1$. Maka energi dari $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}\right)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}\right) &= \left(m(\gamma_1^{L^+})|\gamma_1^{L^+}|\right)+\left(m(\gamma_2^{L^+})|\gamma_2^{L^+}|\right)+\left(m(\gamma_3^{L^+})|\gamma_3^{L^+}|\right)\\ &= (1\times|90|)+(8\times|5|)+(1\times|-0|)\\ &= 130. \end{aligned}$$

Jadi, energi *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}$ adalah 130, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{10})}$ adalah 130.

3.1.4 Grup Dihedral D_{2n}

Berdasarkan energi yang telah ditemukan, diperoleh energi *DDL* dan energi *DDSL* komplemen graf subgrup dari beberapa grup dihedral sebagai berikut.

Tabel 3.4 Energi *DDL* dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle \boldsymbol{r} \rangle$ dari Grup Dihedral $(\boldsymbol{D_{2n}})$

n	D_{2n}	E_{DDL}
3	D_6	$74 = (14 \cdot 9) - (20 \cdot 3) + 8 = (14 \cdot 3^2) - (20 \cdot 3) + 8$
4	D_8	$152 = (14 \cdot 16) - (20 \cdot 4) + 8 = (14 \cdot 4^2) - (20 \cdot 4) + 8$
5	D_{10}	$258 = (14 \cdot 25) - (20 \cdot 5) + 8 = (14 \cdot 5^2) - (20 \cdot 5) + 8$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	D_{2n}	$14n^2 - 20n + 8$

Tabel 3.5 Energi *DDSL* dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle \boldsymbol{r} \rangle$ dari Grup Dihedral $(\boldsymbol{D_{2n}})$

n	D_{2n}	E_{DDL^+}
3	D_6	$42 = 2 \cdot 21 = 2(3 \cdot 9 - 2 \cdot 3) = 2(3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3)$
4	D_8	$80 = 2 \cdot 40 = 2(3 \cdot 16 - 2 \cdot 4) = 2(3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4)$
5	D_{10}	$130 = 2 \cdot 65 = 2(3 \cdot 25 - 2 \cdot 5) = 2(3 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	D_{2n}	$2(3n^2 - 2n) = 6n^2 - 4n$

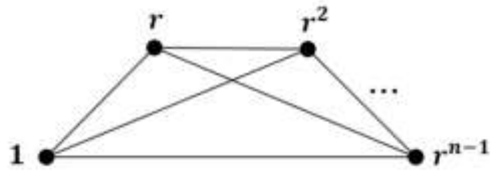
Teorema 1

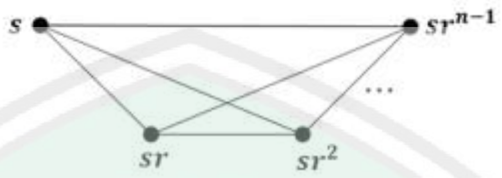
Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dan $\langle r \rangle = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3$. Energi $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r \rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral D_{2n} adalah

$$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r \rangle}(D_{2n})}\right) = 14n^2 - 20n + 8$$

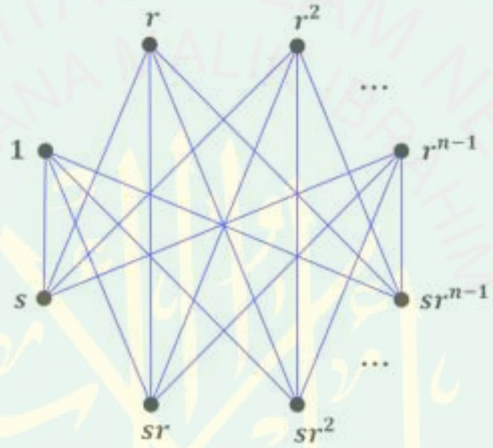
Bukti

Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$, untuk $n \geq 3$. Ambil subgrup normal $\langle r \rangle = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ di D_{2n}. Sesuai definisi graf subgrup, maka diperoleh graf $\Gamma_{\langle r \rangle}(D_{2n})$ sebagai berikut





dan graf $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut



Sehingga diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
3n-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 3n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 3n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 3n-2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 3n-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 3n-2 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 3n-2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3n-2
\end{bmatrix}
\end{array}$$

dan matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1}
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 2n-2 & 2n-2 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-2 & 0 & 2n-2 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-2 & 2n-2 & 0 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2n-2 & 2n-2 & 2n-2 & \cdots & 0 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 0 & 2n-2 & 2n-2 & \cdots & 2n-2 \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-2 & 0 & 2n-2 & \cdots & 2n-2 \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-2 & 2n-2 & 0 & \cdots & 2n-2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-2 & 2n-2 & 2n-2 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Matriks DDL dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ adalah sebagai berikut

$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1}
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
3n-2 & -(2n-2) & -(2n-2) & \cdots & -(2n-2) & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\
-(2n-2) & 3n-2 & -(2n-2) & \cdots & -(2n-2) & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\
-(2n-2) & -(2n-2) & 3n-2 & \cdots & -(2n-2) & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-(2n-2) & -(2n-2) & -(2n-2) & \cdots & 3n-2 & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\
-(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) & 3n-2 & -(2n-2) & -(2n-2) & \cdots & -(2n-2) \\
-(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) & -(2n-2) & 3n-2 & -(2n-2) & \cdots & -(2n-2) \\
-(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) & -(2n-2) & -(2n-2) & 3n-2 & \cdots & -(2n-2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) & -(2n-2) & -(2n-2) & -(2n-2) & \cdots & 3n-2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma\boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi pada $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma\boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
1 & r & r^2 & \cdots & sr^{n-1}
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
(3n-2)-\gamma & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & -\dfrac{(\gamma-n)\left(\gamma-(5n-4)\right)}{-(3n-2)+\gamma} & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & -\dfrac{\left(\gamma+(n-2)\right)\left(\gamma-(5n-4)\right)}{\gamma-n} & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{\left(\gamma+(2n-2)^2\right)\left(\gamma-(5n-4)\right)\left(\gamma-(6n-4)\right)}{f(\gamma)}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Maka $det\left(\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma\boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\gamma) = \left(\gamma-(6n-4)\right)\left(\gamma-(5n-4)\right)^{2n-2}\left(\gamma+(2n-2)^2\right)$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka diperoleh $\gamma_1^L = 6n - 4$, $\gamma_2^L = 5n - 4$, dan $\gamma_3^L = -(2n-2)^2$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L) = 1$, $m(\gamma_2^L) = 2n - 2$, dan $m(\gamma_3^L) = 1$. Energi $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3$ adalah

$$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) = m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L| + m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L| + m(\gamma_3^L)|\gamma_3^L|$$

$$= 1 \times |6n - 4| + 2n - 2 \times |5n - 4| + 1 \times |-(2n-2)^2|$$

$$= (6n - 4) + (10n^2 - 18n + 8) + (4n^2 - 8n + 4)$$

$$= 14n^2 - 20n + 8$$

Teorema 2

Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dan $\langle r\rangle = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk $n \geq 3$. Energi $\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral D_{2n} adalah

$$E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) = 6n^2 - 4n$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$, untuk $n \geq 3$. Ambil subgrup normal $\langle r\rangle = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ di D_{2n}. Sesuai definisi graf subgrup, maka diperoleh graf $\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})$ dan graf $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ seperti pada Teorema 1. Diperoleh pula matriks transmisi dan matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}$ seperti pada Teorema 1. Sehingga didapatkan matriks $\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah sebagai berikut

$\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1}
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
3n-2 & 2n-2 & 2n-2 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-2 & 3n-2 & 2n-2 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-2 & 2n-2 & 3n-2 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2n-2 & 2n-2 & 2n-2 & \cdots & 3n-2 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 3n-2 & 2n-2 & 2n-2 & \cdots & 2n-2 \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-2 & 3n-2 & 2n-2 & \cdots & 2n-2 \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-2 & 2n-2 & 3n-2 & \cdots & 2n-2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-2 & 2n-2 & 2n-2 & \cdots & 3n-2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)-\gamma\boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi pada $\boldsymbol{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)-\gamma\boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$
\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
1 & r & r^2 & \cdots & sr^{n-1}
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
(3n-2)-\gamma & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & -\dfrac{(\gamma-n)\big(\gamma-(5n-4)\big)}{-(3n-2)+\gamma} & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & -\dfrac{(\gamma-n)\big(\gamma-(7n-6)\big)}{\gamma-(5n-4)} & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{(\gamma-n)\big(\gamma-(4n^2-2n)\big)\gamma}{f(\gamma)}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Maka $det\left(\boldsymbol{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)-\gamma\boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\gamma)=\big(\gamma-(4n^2-2n)\big)(\gamma-n)^{2n-2}\gamma$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka diperoleh $\gamma_1^{L^+}=4n^2-2n$, $\gamma_2^{L^+}=n$, dan $\gamma_3^{L^+}=-0$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^{L^+})=1$, $m(\gamma_2^{L^+})=2n-2$, dan $m(\gamma_3^{L^+})=1$. Energi $\boldsymbol{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral D_{2n} untuk $n\geq 3$ adalah

$$
\begin{aligned}
E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) &= m(\gamma_1^{L^+})|\gamma_1^{L^+}|+m(\gamma_2^{L^+})|\gamma_2^{L^+}|+m(\gamma_3^{L^+})|\gamma_3^{L^+}| \\
&= 1\times|4n^2-2n|+2n-2\times|n|+1\times|-0| \\
&= (4n^2-2n)+(2n^2-2n)+0 \\
&= 6n^2-4n
\end{aligned}
$$

3.2 Energi *DDL* dan *DDSL* Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2 \rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}.

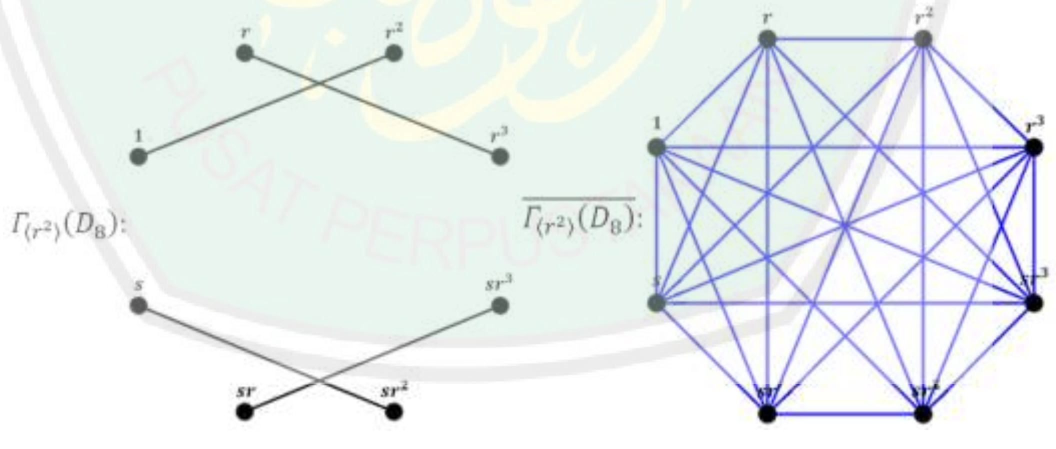
3.2.1 Grup Dihedral D_8

Subgrup dari grup dihedral D_8 yang dibangun oleh $\langle r^2 \rangle$ adalah $\{1, r^2\}$. Dua unsur pada grup dihedral D_8 apabila dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ dapat disajikan dengan Table Cayley berikut.

Tabel 3.6 Tabel Cayley Grup Dihedral D_8

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Berdasarkan Tabel 3.6 dan definisi graf subgrup dapat digambarkan graf subgrup $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)$ beserta komplemennya seperti berikut



Gambar 3.4 Graf $\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}$ dan $\boldsymbol{\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}}$

Dari Gambar 3.4 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)=\begin{bmatrix}0&7&7&7&7&7&7&7\\7&0&7&7&7&7&7&7\\7&7&0&7&7&7&7&7\\7&7&7&0&7&7&7&7\\7&7&7&7&0&7&7&7\\7&7&7&7&7&0&7&7\\7&7&7&7&7&7&0&7\\7&7&7&7&7&7&7&0\end{bmatrix}$$

dan diperoleh matriks *distance* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{d}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)=\begin{bmatrix}0&1&2&1&1&1&1&1\\1&0&1&2&1&1&1&1\\2&1&0&1&1&1&1&1\\1&2&1&0&1&1&1&1\\1&1&1&1&0&1&2&1\\1&1&1&1&1&0&1&2\\1&1&1&1&2&1&0&1\\1&1&1&1&1&2&1&0\end{bmatrix}$$

Dari matriks *distance* diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)=\begin{bmatrix}8&0&0&0&0&0&0&0\\0&8&0&0&0&0&0&0\\0&0&8&0&0&0&0&0\\0&0&0&8&0&0&0&0\\0&0&0&0&8&0&0&0\\0&0&0&0&0&8&0&0\\0&0&0&0&0&0&8&0\\0&0&0&0&0&0&0&8\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)=\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)-\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}8&0&0&0&0&0&0&0\\0&8&0&0&0&0&0&0\\0&0&8&0&0&0&0&0\\0&0&0&8&0&0&0&0\\0&0&0&0&8&0&0&0\\0&0&0&0&0&8&0&0\\0&0&0&0&0&0&8&0\\0&0&0&0&0&0&0&8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&7&7&7&7&7&7&7\\7&0&7&7&7&7&7&7\\7&7&0&7&7&7&7&7\\7&7&7&0&7&7&7&7\\7&7&7&7&0&7&7&7\\7&7&7&7&7&0&7&7\\7&7&7&7&7&7&0&7\\7&7&7&7&7&7&7&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 8 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & 8 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & 8 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & 8 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & 8 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & 8 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & 8 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)-\gamma\boldsymbol{I}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 8-\gamma & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & 8-\gamma & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & 8-\gamma & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & 8-\gamma & -7 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & 8-\gamma & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & 8-\gamma & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & 8-\gamma & -7 \\ -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & 8-\gamma \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan eliminasi baris menggunakan *software* Maple 18, diperoleh matriks segitiga atasa sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 8-\gamma & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & -\frac{(\gamma-1)(\gamma-15)}{\gamma-8} & -\frac{7(-15+\gamma)}{-8+\gamma} & -\frac{7(-15+\gamma)}{-8+\gamma} & -\frac{7(-15+\gamma)}{-8+\gamma} & -\frac{7(-15+\gamma)}{-8+\gamma} & -\frac{7(-15+\gamma)}{-8+\gamma} & -\frac{7(-15+\gamma)}{-8+\gamma} \\ 0 & 0 & -\frac{(\gamma+6)(\gamma-15)}{\gamma-1} & -\frac{7(-15+\gamma)}{\gamma-1} & -\frac{7(-15+\gamma)}{\gamma-1} & -\frac{7(-15+\gamma)}{\gamma-1} & -\frac{7(-15+\gamma)}{\gamma-1} & -\frac{7(-15+\gamma)}{\gamma-1} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma+13)(\gamma-15)}{\gamma+6} & -\frac{7(-15+\gamma)}{\gamma+6} & -\frac{7(-15+\gamma)}{\gamma+6} & -\frac{7(-15+\gamma)}{\gamma+6} & -\frac{7(-15+\gamma)}{\gamma+6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma+20)(\gamma-15)}{\gamma+13} & -\frac{7(-15+\gamma)}{\gamma+13} & -\frac{7(-15+\gamma)}{\gamma+13} & -\frac{7(-15+\gamma)}{\gamma+13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma+27)(\gamma-15)}{\gamma+20} & -\frac{7(-15+\gamma)}{\gamma+20} & -\frac{7(-15+\gamma)}{\gamma+20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma+34)(\gamma-15)}{\gamma+27} & -\frac{7(-15+\gamma)}{\gamma+27} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma+41)(\gamma-15)}{\gamma+34} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, yaitu

$$p(\gamma)=(8-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma-15)}{\gamma-8}\right)\left(-\frac{(\gamma+6)(\gamma-15)}{\gamma-1}\right)\left(-\frac{(\gamma+13)(\gamma-15)}{\gamma+6}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma+20)(\gamma-15)}{\gamma+13}\right)\left(-\frac{(\gamma+27)(\gamma-15)}{\gamma+20}\right)\left(-\frac{(\gamma+34)(\gamma-15)}{\gamma+27}\right)\left(-\frac{(\gamma+41)(\gamma-15)}{\gamma+34}\right)$$

$$=(\gamma+41)(\gamma-15)^7$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)$ adalah $\gamma_1^L=15$ dan $\gamma_2^L=-41$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L)=7$ dan $m(\gamma_2^L)=1$. Maka energi dari $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)$ sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right) &= (m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L|)+(m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L|)\\
&= (7\times|15|)+(1\times|-41|)\\
&= 146
\end{aligned}
$$

Jadi, energi *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}$ adalah 146, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}$ adalah 146.

Diperoleh juga matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}$ adalah

$$
\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)=\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)+\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)
$$

$$
=\begin{bmatrix}8&0&0&0&0&0&0&0\\0&8&0&0&0&0&0&0\\0&0&8&0&0&0&0&0\\0&0&0&8&0&0&0&0\\0&0&0&0&8&0&0&0\\0&0&0&0&0&8&0&0\\0&0&0&0&0&0&8&0\\0&0&0&0&0&0&0&8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&7&7&7&7&7&7&7\\7&0&7&7&7&7&7&7\\7&7&0&7&7&7&7&7\\7&7&7&0&7&7&7&7\\7&7&7&7&0&7&7&7\\7&7&7&7&7&0&7&7\\7&7&7&7&7&7&0&7\\7&7&7&7&7&7&7&0\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}8&7&7&7&7&7&7&7\\7&8&7&7&7&7&7&7\\7&7&8&7&7&7&7&7\\7&7&7&8&7&7&7&7\\7&7&7&7&8&7&7&7\\7&7&7&7&7&8&7&7\\7&7&7&7&7&7&8&7\\7&7&7&7&7&7&7&8\end{bmatrix}
$$

$$
det\left(\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)-\gamma I\right)
$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 8-\gamma & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 8-\gamma & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 8-\gamma & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 8-\gamma & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 8-\gamma & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8-\gamma & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8-\gamma & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8-\gamma \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan eliminasi baris menggunakan *software* Maple 18, diperoleh matriks segitiga atas sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 8-\gamma & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 0 & -\frac{(\gamma-1)(\gamma-15)}{\gamma-8} & \frac{7(\gamma-1)}{-8+\gamma} & \frac{7(\gamma-1)}{-8+\gamma} & \frac{7(\gamma-1)}{-8+\gamma} & \frac{7(\gamma-1)}{-8+\gamma} & \frac{7(\gamma-1)}{-8+\gamma} & \frac{7(\gamma-1)}{-8+\gamma} \\ 0 & 0 & -\frac{(\gamma-1)(\gamma-22)}{\gamma-15} & \frac{7(\gamma-1)}{-15+\gamma} & \frac{7(\gamma-1)}{-15+\gamma} & \frac{7(\gamma-1)}{-15+\gamma} & \frac{7(\gamma-1)}{-15+\gamma} & \frac{7(\gamma-1)}{-15+\gamma} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-1)(\gamma-29)}{\gamma-22} & \frac{7(\gamma-1)}{\gamma-22} & \frac{7(\gamma-1)}{\gamma-22} & \frac{7(\gamma-1)}{\gamma-22} & \frac{7(\gamma-1)}{\gamma-22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-1)(\gamma-36)}{\gamma-29} & \frac{7(\gamma-1)}{\gamma-29} & \frac{7(\gamma-1)}{\gamma-29} & \frac{7(\gamma-1)}{\gamma-29} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-1)(\gamma-43)}{\gamma-36} & \frac{7(\gamma-1)}{\gamma-36} & \frac{7(\gamma-1)}{\gamma-36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-1)(\gamma-50)}{\gamma-43} & \frac{7(\gamma-1)}{\gamma-43} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-1)(\gamma-57)}{\gamma-50} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, yaitu

$$p(\gamma) = (8-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma-15)}{\gamma-8}\right)\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma-22)}{\gamma-15}\right)\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma-29)}{\gamma-22}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma-36)}{\gamma-29}\right)\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma-43)}{\gamma-36}\right)\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma-50)}{\gamma-43}\right)\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma-57)}{\gamma-50}\right)$$

$$= (\gamma-57)(\gamma-1)^7$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)$ adalah $\gamma_1^{L^+} = 57$ dan $\gamma_2^{L^+} = 1$ dengan multiplisitas $m\left(\gamma_1^{L^+}\right) = 1$ dan $m\left(\gamma_2^{L^+}\right) = 7$. Maka energi dari $DDL^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}\right) &= \left(m\left(\gamma_1^{L^+}\right)\left|\gamma_1^{L^+}\right|\right) + \left(m\left(\gamma_2^{L^+}\right)\left|\gamma_2^{L^+}\right|\right) \\ &= 1 \times |57| + 7 \times |1| \\ &= 64. \end{aligned}$$

Jadi, energi *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}$ adalah 64, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_8)}$ adalah 64.

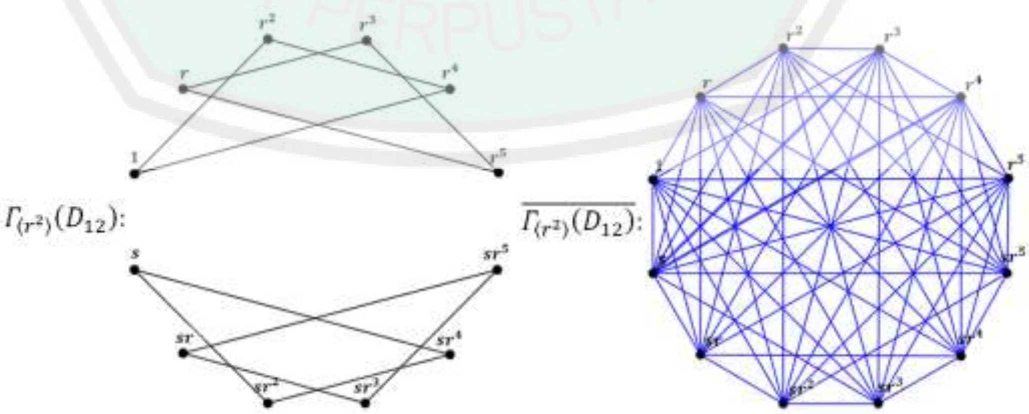
3.2.2 Grup Dihedral D_{12}

Subgrup dari grup dihedral D_{12} yang dibangun oleh $\langle r^2\rangle$ adalah $\{1, r^2, r^4\}$. Dua unsur pada grup dihedral D_{12} apabila dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ dapat disajikan dengan Table Cayley berikut.

Tabel 3.7 Tabel Cayley Grup Dihedral D_{12}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

Berdasarkan Tabel 3.7 dan definisi graf subgrup maka dapat digambarkan graf subgrup $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})$ beserta komplemennya seperti berikut



Gambar 3.5 Graf $\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}$ dan $\overline{\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}}$

Dari Gambar 3.5 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right)=\begin{bmatrix} 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh matriks *distance* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{d}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks *distance* diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right)=\begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right) - \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & 13 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & 13 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & 13 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & 13 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 13 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 13 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 13 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 13 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 13 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 13 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 13 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\gamma) = (13-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-2)(\gamma-24)}{\gamma-13}\right)\left(-\frac{(\gamma+9)(\gamma-24)}{\gamma-2}\right)\left(-\frac{(\gamma+20)(\gamma-24)}{\gamma+9}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma+31)(\gamma-24)}{\gamma+20}\right)\left(-\frac{(\gamma+42)(\gamma-24)}{\gamma+31}\right)\left(-\frac{(\gamma+53)(\gamma-24)}{\gamma+42}\right)\left(-\frac{(\gamma+64)(\gamma-24)}{\gamma+53}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma+75)(\gamma-24)}{\gamma+64}\right)\left(-\frac{(\gamma+86)(\gamma-24)}{\gamma+75}\right)\left(-\frac{(\gamma+97)(\gamma-24)}{\gamma+86}\right)\left(-\frac{(\gamma+108)(\gamma-24)}{\gamma+97}\right)$$

$$= (\gamma-24)^{11}(\gamma+108)$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right)$ adalah $\gamma_1^L = 24$ dan $\gamma_2^L = -108$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L) = 11$ dan $m(\gamma_2^L) = 1$. Maka energi dari $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right) &= \left(m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L|\right) + \left(m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L|\right) \\ &= (11 \times |24|) + (1 \times |-108|) \\ &= 372 \end{aligned}$$

Jadi, energi *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}$ adalah 372, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}$ adalah 372.

Diperoleh juga matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right) + \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
13 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
11 & 13 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
11 & 11 & 13 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
11 & 11 & 11 & 13 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
11 & 11 & 11 & 11 & 13 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 13 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 13 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 13 & 11 & 11 & 11 & 11 \\
11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 13 & 11 & 11 & 11 \\
11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 13 & 11 & 11 \\
11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 13 & 11 \\
11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 13
\end{bmatrix}
$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$
p(\gamma) = (13-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-2)(\gamma-24)}{\gamma-13}\right)\left(-\frac{(\gamma-2)(\gamma-35)}{\gamma-24}\right)\left(-\frac{(\gamma-2)(\gamma-46)}{\gamma-35}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-2)(\gamma-57)}{\gamma-46}\right)\left(-\frac{(\gamma-2)(\gamma-68)}{\gamma-57}\right)\left(-\frac{(\gamma-2)(\gamma-79)}{\gamma-68}\right)\left(-\frac{(\gamma-2)(\gamma-90)}{\gamma-79}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-2)(\gamma-101)}{\gamma-90}\right)\left(-\frac{(\gamma-2)(\gamma-112)}{\gamma-101}\right)\left(-\frac{(\gamma-2)(\gamma-123)}{\gamma-112}\right)\left(-\frac{(\gamma-2)(\gamma-134)}{\gamma-123}\right)
$$

$$
= (\gamma-134)(\gamma-2)^{11}
$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right)$ adalah $\gamma_1^{L^+} = 134$ dan $\gamma_2^{L^+} = 2$ dengan multiplisitas $m\left(\gamma_1^{L^+}\right) = 1$ dan $m\left(\gamma_2^{L^+}\right) = 11$. Maka energi dari $\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right)$ sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}\right) &= \left(m\left(\gamma_1^{L^+}\right)\left|\gamma_1^{L^+}\right|\right) + \left(m\left(\gamma_2^{L^+}\right)\left|\gamma_2^{L^+}\right|\right) \\
&= (1\times|134|) + (11\times|2|) \\
&= 156.
\end{aligned}
$$

Jadi, energi *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}$ adalah 156, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{12})}$ adalah 156.

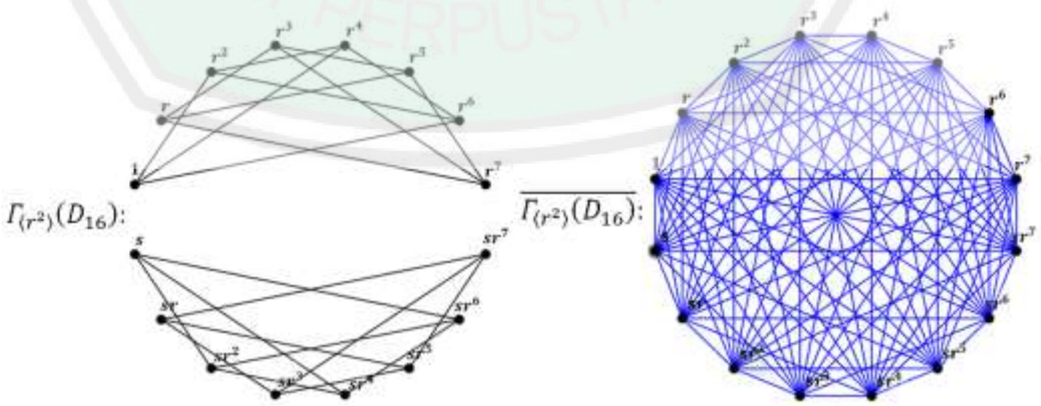
3.2.3 Grup Dihedral D_{16}

Subgrup dari grup dihedral D_{16} yang dibangun oleh $\langle r^2 \rangle$ adalah $\{1, r^2, r^4, r^6\}$. Dua unsur pada grup dihedral D_{16} apabila dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ dapat disajikan dengan Table Cayley berikut.

Tabel 3.8 Tabel Cayley Grup Dihedral $\boldsymbol{D_{16}}$

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Berdasarkan Tabel 3.8 dan definisi graf subgrup maka dapat digambarkan graf subgrup $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})$ beserta komplemennya seperti berikut



Gambar 3.6 Graf $\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})}$ dan $\overline{\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{16})}}$

Dari Gambar 3.6 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}$ sebagai berikut

$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right) =$

$$\begin{bmatrix}
0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0 & 15 \\
15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 15 & 0
\end{bmatrix}$$

dan diperoleh matriks *distance* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{d}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

Dari matriks *distance* diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}$ sebagai berikut

$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right) =$

$$\begin{bmatrix} 18&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&18&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&18&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&18&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&18&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&18&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&18&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&18&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&18&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&18&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&18&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&18&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&18&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&18&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&18&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&18 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right) - \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 18&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&18&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&18&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&18&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&18&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&18&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&18&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&18&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&18&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&18&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&18&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&18&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&18&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&18&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&18&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&18 \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 0&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\ 15&0&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\ 15&15&0&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\ 15&15&15&0&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\ 15&15&15&15&0&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\ 15&15&15&15&15&0&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\ 15&15&15&15&15&15&0&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\ 15&15&15&15&15&15&15&0&15&15&15&15&15&15&15&15\\ 15&15&15&15&15&15&15&15&0&15&15&15&15&15&15&15\\ 15&15&15&15&15&15&15&15&15&0&15&15&15&15&15&15\\ 15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&0&15&15&15&15&15\\ 15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&0&15&15&15&15\\ 15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&0&15&15&15\\ 15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&0&15&15\\ 15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&0&15\\ 15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}
18 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 \\
-15 & 18 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 \\
-15 & -15 & 18 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 \\
-15 & -15 & -15 & 18 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 \\
-15 & -15 & -15 & -15 & 18 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 \\
-15 & -15 & -15 & -15 & -15 & 18 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 \\
-15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & 18 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 \\
-15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & 18 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 \\
-15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & 18 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 \\
-15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & 18 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 \\
-15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & 18 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 \\
-15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & 18 & -15 & -15 & -15 & -15 \\
-15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & 18 & -15 & -15 & -15 \\
-15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & 18 & -15 & -15 \\
-15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & 18 & -15 \\
-15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & -15 & 18
\end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\gamma) = (18-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-33)}{\gamma-18}\right)\left(-\frac{(\gamma+12)(\gamma-33)}{\gamma-3}\right)\left(-\frac{(\gamma+27)(\gamma-33)}{\gamma+12}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma+42)(\gamma-33)}{\gamma+27}\right)\left(-\frac{(\gamma+57)(\gamma-33)}{\gamma+42}\right)\left(-\frac{(\gamma+72)(\gamma-33)}{\gamma+57}\right)\left(-\frac{(\gamma+87)(\gamma-33)}{\gamma+72}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma+102)(\gamma-33)}{\gamma+87}\right)\left(-\frac{(\gamma+117)(\gamma-33)}{\gamma+102}\right)\left(-\frac{(\gamma+132)(\gamma-33)}{\gamma+117}\right)\left(-\frac{(\gamma+147)(\gamma-33)}{\gamma+132}\right)$$

$$\left(-\frac{\gamma^2+129\gamma-5346}{\gamma+147}\right)\left(-\frac{(\gamma+177)(\gamma-33)}{\gamma+162}\right)\left(-\frac{(\gamma+192)(\gamma-33)}{\gamma+177}\right)\left(-\frac{(\gamma+207)(\gamma-33)}{\gamma+192}\right)$$

$$= (\gamma-33)^{15}(\gamma+207)$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right)$ adalah $\gamma_1^L = 33$ dan $\gamma_2^L = -207$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L) = 15$ dan $m(\gamma_2^L) = 1$. Maka energi dari $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right)$ sebagai berikut

$$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right) = \left(m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L|\right) + \left(m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L|\right)$$

$$= (15 \times |33|) + (1 \times |-207|)$$

$$= 702$$

Jadi, energi *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}$ adalah 702, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}$ adalah 702.

Diperoleh juga matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right)=\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right)+\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}
18&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&18&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&18&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&18&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&18&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&18&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&18&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&18&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&18&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&18&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&18&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&18&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&18&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&18&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&18&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&18
\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}
0&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\
15&0&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\
15&15&0&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\
15&15&15&0&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\
15&15&15&15&0&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\
15&15&15&15&15&0&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\
15&15&15&15&15&15&0&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\
15&15&15&15&15&15&15&0&15&15&15&15&15&15&15&15\\
15&15&15&15&15&15&15&15&0&15&15&15&15&15&15&15\\
15&15&15&15&15&15&15&15&15&0&15&15&15&15&15&15\\
15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&0&15&15&15&15&15\\
15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&0&15&15&15&15\\
15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&0&15&15&15\\
15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&0&15&15\\
15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&0&15\\
15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&0
\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}
18&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\
15&18&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\
15&15&18&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\
15&15&15&18&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\
15&15&15&15&18&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\
15&15&15&15&15&18&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\
15&15&15&15&15&15&18&15&15&15&15&15&15&15&15&15\\
15&15&15&15&15&15&15&18&15&15&15&15&15&15&15&15\\
15&15&15&15&15&15&15&15&18&15&15&15&15&15&15&15\\
15&15&15&15&15&15&15&15&15&18&15&15&15&15&15&15\\
15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&18&15&15&15&15&15\\
15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&18&15&15&15&15\\
15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&18&15&15&15\\
15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&18&15&15\\
15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&18&15\\
15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&15&18
\end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\gamma) = (18-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-33)}{\gamma-18}\right)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-48)}{\gamma-33}\right)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-63)}{\gamma-48}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-78)}{\gamma-63}\right)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-93)}{\gamma-78}\right)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-108)}{\gamma-93}\right)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-123)}{\gamma-108}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-138)}{\gamma-123}\right)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-153)}{\gamma-138}\right)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-168)}{\gamma-153}\right)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-183)}{\gamma-168}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-198)}{\gamma-183}\right)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-213)}{\gamma-198}\right)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-228)}{\gamma-213}\right)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-243)}{\gamma-228}\right)$$

$$= (\gamma-243)(\gamma-3)^{15}$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right)$ adalah $\gamma_1^{L^+} = 243$ dan $\gamma_2^{L^+} = 3$ dengan multiplisitas $m\left(\gamma_1^{L^+}\right) = 1$, dan $m\left(\gamma_2^{L^+}\right) = 15$. Maka energi dari $\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}\right) &= \left(m\left(\gamma_1^{L^+}\right)\left|\gamma_1^{L^+}\right|\right) + \left(m\left(\gamma_2^{L^+}\right)\left|\gamma_2^{L^+}\right|\right) \\ &= (1 \times |243|) + (15 \times |3|) \\ &= 288. \end{aligned}$$

Jadi, energi *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}$ adalah 288, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{16})}$ adalah 288.

3.2.4 Grup Dihedral D_{2n}

Berdasarkan energi yang telah ditemukan, diperoleh energi *DDL* dan energi *DDSL* komplemen graf subgrup dari beberapa grup dihedral sebagai berikut.

Tabel 3.9 Energi *DDL* dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle \boldsymbol{r^2} \rangle$ dari Grup Dihedral $(\boldsymbol{D_{2n}})$

n	D_{2n}	E_{DDL}
4	D_8	$146 = (13 \cdot 16) - (17 \cdot 4) + 6 = (13 \cdot 4^2) - (17 \cdot 4) + 6$
6	D_{12}	$372 = (13 \cdot 36) - (17 \cdot 6) + 6 = (13 \cdot 6^2) - (17 \cdot 6) + 6$
8	D_{16}	$702 = (13 \cdot 64) - (17 \cdot 8) + 6 = (13 \cdot 8^2) - (17 \cdot 8) + 6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	D_{2n}	$13n^2 - 17n + 6$

Tabel 3.10 Energi *DDSL* dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle \boldsymbol{r^2} \rangle$ dari Grup Dihedral $(\boldsymbol{D_{2n}})$

n	D_{2n}	E_{DDL^+}
4	D_8	$64 = (5 \cdot 16) - (4 \cdot 4) = (5 \cdot 4^2) - (4 \cdot 4)$
6	D_{12}	$156 = (5 \cdot 36) - (4 \cdot 6) = (5 \cdot 6^2) - (4 \cdot 6)$
8	D_{16}	$288 = (5 \cdot 64) - (4 \cdot 8) = (5 \cdot 8^2) - (4 \cdot 8)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	D_{2n}	$5n^2 - 4n$

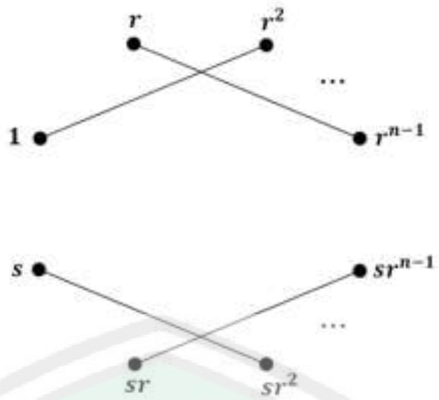
Teorema 3

Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dan $\langle r^2 \rangle = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}\}$ subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$. Energi $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral D_{2n} adalah

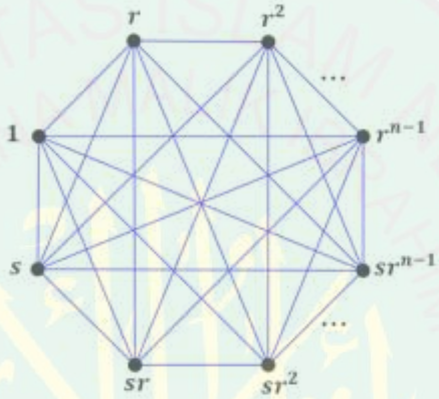
$$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}\right) = 13n^2 - 17n + 6$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$, untuk n genap dan $n \geq 4$. Ambil subgrup normal $\langle r^2 \rangle = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}\}$ di D_{2n}. Sesuai definisi graf subgrup, maka diperoleh graf $\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})$ sebagai berikut



dan graf $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut



Sehingga diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}\right) =$$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\frac{5n-4}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \frac{5n-4}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \frac{5n-4}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{5n-4}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{5n-4}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{5n-4}{2} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{5n-4}{2} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{5n-4}{2}
\end{bmatrix}
\end{array}$$

dan matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 0 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-1 & 0 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 0 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 0 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 0 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 0 & \cdots & 2n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Matriks DDL dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ adalah sebagai berikut

$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
\frac{5n-4}{2} & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\
-(2n-1) & \frac{5n-4}{2} & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\
-(2n-1) & -(2n-1) & \frac{5n-4}{2} & \cdots & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & \frac{5n-4}{2} & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\
-(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) & \frac{5n-4}{2} & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\
-(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) & -(2n-1) & \frac{5n-4}{2} & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\
-(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \frac{5n-4}{2} & \cdots & -(2n-1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & \frac{5n-4}{2}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma\boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi pada $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma\boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
\left(\frac{5n-4}{2}\right)-\gamma & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & -\frac{\left(\gamma-\left(\frac{n-2}{2}\right)\right)(\gamma-(9n-30))}{\gamma-\left(\frac{5n-4}{2}\right)} & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & -\frac{\left(\gamma+\left(\frac{3n}{n}\right)\right)(\gamma-(9n-30))}{\gamma-\left(\frac{n-2}{2}\right)} & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\left(\gamma+\left(\frac{8n^2-13n+6}{2}\right)\right)\left(\gamma-\left(\frac{9n-6}{2}\right)\right)}{f(\gamma)}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Maka $det\left(\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)-\gamma\boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\gamma)=\left(\gamma-\left(\frac{9n-6}{2}\right)\right)^{2n-1}\left(\gamma+\left(\frac{8n^2-13n+6}{2}\right)\right)$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka diperoleh $\gamma_1^L=\frac{9n-6}{2}$ dan $\gamma_2^L=-\left(\frac{8n^2-13n+6}{2}\right)$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L)=2n-1$ dan $m(\gamma_2^L)=1$. Energi $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n\geq 4$ adalah

$$\begin{aligned}E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)&=m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L|+m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L|\\&=2n-1\times\left|\frac{9n-6}{2}\right|+1\times\left|-\left(\frac{8n^2-13n+6}{2}\right)\right|\\&=\frac{18n^2-21n+6}{2}+\frac{8n^2-13n+6}{2}=\frac{26n^2-34n+12}{2}\\&=13n^2-17n+6\end{aligned}$$

Teorema 4

Misalkan grup dihedral $D_{2n}=\{1,r,r^2,\dots,r^{n-1},s,sr,sr^2,\dots,sr^{n-1}\}$ dan $\langle r^2\rangle=\{1,r^2,\dots,r^{n-2}\}$ subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n\geq 4$. Energi $\boldsymbol{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral D_{2n} adalah

$$E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)=5n^2-4n$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $D_{2n}=\{1,r,r^2,\dots,r^{n-1},s,sr,sr^2,\dots,sr^{n-1}\}$, untuk semua n dan $n\geq 4$. Ambil subgrup normal $\langle r^2\rangle=\{1,r^2,\dots,r^{n-2}\}$ di D_{2n}. Sesuai definisi graf subgrup, maka diperoleh graf $\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})$ dan graf $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ seperti pada Teorema 3. Diperoleh pula matriks transmisi dan matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ seperti pada Teorema 3. Sehingga didapatkan matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}$ adalah sebagai berikut

$\boldsymbol{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\frac{5n-4}{2} & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & \frac{5n-4}{2} & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-1 & \frac{5n-4}{2} & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & \frac{5n-4}{2} & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & \frac{5n-4}{2} & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & \frac{5n-4}{2} & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \frac{5n-4}{2} & \cdots & 2n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & \frac{5n-4}{2}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma\boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi pada $\boldsymbol{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma\boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\left(\frac{5n-4}{2}\right)-\gamma & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & -\frac{\left(\gamma-\left(\frac{n-2}{2}\right)\right)(\gamma-(9n-30))}{\gamma-\left(\frac{5n-4}{2}\right)} & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & -\frac{\left(\gamma-\left(\frac{n-2}{2}\right)\right)\left(\gamma-\left(\frac{13n-8}{2}\right)\right)}{\gamma-(9n-30)} & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\left(\gamma-\left(\frac{n-2}{2}\right)\right)\left(\gamma-\left(\frac{8n^2-3n-2}{2}\right)\right)}{f(\gamma)}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Maka $det\left(\boldsymbol{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma\boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\gamma) = \left(\gamma - \left(\frac{8n^2 - 3n - 2}{2}\right)\right)\left(\gamma - \left(\frac{n-2}{2}\right)\right)^{2n-1}$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka diperoleh $\gamma_1^{L^+} = \frac{8n^2-3n-2}{2}$ dan $\gamma_2^{L^+} = -\left(\frac{n-2}{2}\right)$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^{L^+}) = 1$ dan $m(\gamma_2^{L^+}) = 2n - 1$. Energi $DDL^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$\begin{aligned} E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2 \rangle}(D_{2n})}\right) &= m(\gamma_1^{L^+})|\gamma_1^{L^+}| + m(\gamma_2^{L^+})|\gamma_2^{L^+}| \\ &= 1 \times \left|\frac{8n^2 - 3n - 2}{2}\right| + 2n - 1 \times \left|-\left(\frac{n-2}{2}\right)\right| \\ &= \frac{8n^2 - 3n - 2}{2} + \frac{2n^2 - 5n - 2}{2} \\ &= 5n^2 - 4n \end{aligned}$$

3.3 Energi *DDL* dan *DDSL* Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, s \rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}.

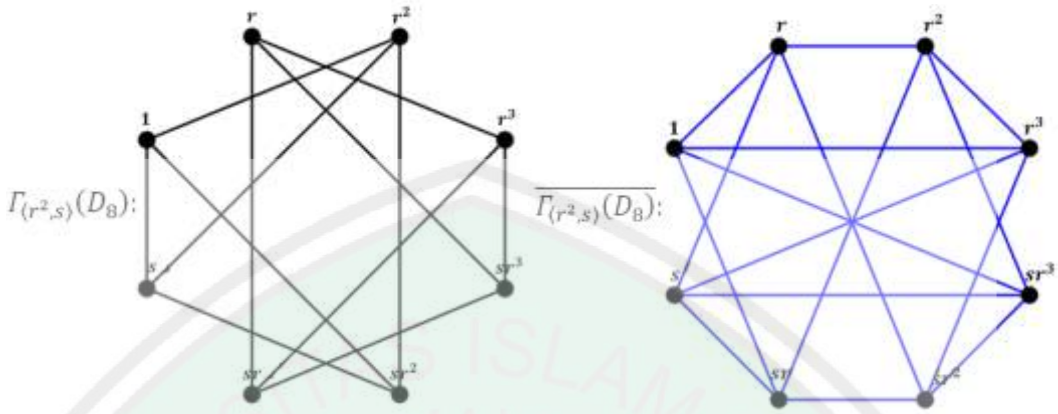
3.3.1 Grup Dihedral D_8

Subgrup dari grup dihedral D_8 yang dibangun oleh $\langle r^2, s \rangle$ adalah $\{1, r^2, s, sr^2\}$. Dua unsur pada grup dihedral D_8 apabila dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ dapat disajikan dengan Table Cayley berikut.

Tabel 3.11 Tabel Cayley Grup Dihedral D_8

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Berdasarkan Tabel 3.11 dan definisi graf subgrup dapat digambarkan graf subgrup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)$ beserta komplemennya seperti berikut



Gambar 3.7 Graf $\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ dan $\overline{\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}}$

Dari Gambar 3.7 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 0 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 0 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 0 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 0 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh matriks *distance* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{d}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks *distance* diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)=\begin{bmatrix}10&0&0&0&0&0&0&0\\0&10&0&0&0&0&0&0\\0&0&10&0&0&0&0&0\\0&0&0&10&0&0&0&0\\0&0&0&0&10&0&0&0\\0&0&0&0&0&10&0&0\\0&0&0&0&0&0&10&0\\0&0&0&0&0&0&0&10\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)=\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)-\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}0&7&6&7&6&7&6&7\\7&0&7&6&7&6&7&6\\6&7&0&7&6&7&6&7\\7&6&7&0&7&6&7&6\\6&7&6&7&0&7&6&7\\7&6&7&6&7&0&7&6\\6&7&6&7&6&7&0&7\\7&6&7&6&7&6&7&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10&0&0&0&0&0&0&0\\0&10&0&0&0&0&0&0\\0&0&10&0&0&0&0&0\\0&0&0&10&0&0&0&0\\0&0&0&0&10&0&0&0\\0&0&0&0&0&10&0&0\\0&0&0&0&0&0&10&0\\0&0&0&0&0&0&0&10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10&-7&-6&-7&-6&-7&-6&-7\\-7&10&-7&-6&-7&-6&-7&-6\\-6&-7&10&-7&-6&-7&-6&-7\\-7&-6&-7&10&-7&-6&-7&-6\\-6&-7&-6&-7&10&-7&-6&-7\\-7&-6&-7&-6&-7&10&-7&-6\\-6&-7&-6&-7&-6&-7&10&-7\\-7&-6&-7&-6&-7&-6&-7&10\end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)-\gamma\boldsymbol{I}\right)$$

$$=det\left(\begin{bmatrix}10-\gamma&-7&-6&-7&-6&-7&-6&-7\\-7&10-\gamma&-7&-6&-7&-6&-7&-6\\-6&-7&10-\gamma&-7&-6&-7&-6&-7\\-7&-6&-7&10-\gamma&-7&-6&-7&-6\\-6&-7&-6&-7&10-\gamma&-7&-6&-7\\-7&-6&-7&-6&-7&10-\gamma&-7&-6\\-6&-7&-6&-7&-6&-7&10-\gamma&-7\\-7&-6&-7&-6&-7&-6&-7&10-\gamma\end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan eliminasi baris menggunakan *software* Maple 18, diperoleh matriks segitiga atas sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 10-\gamma & -7 & -6 & -7 & -6 & -7 & -6 & -7 \\ 0 & -\frac{(\gamma-3)(\gamma-17)}{\gamma-10} & -\frac{7(-16+\gamma)}{-10+\gamma} & -\frac{-109+6\gamma}{-10+\gamma} & -\frac{7(-16+\gamma)}{-10+\gamma} & -\frac{-109+6\gamma}{-10+\gamma} & -\frac{7(-16+\gamma)}{-10+\gamma} & -\frac{-109+6\gamma}{-10+\gamma} \\ 0 & 0 & -\frac{(\gamma-16)(\gamma^2-14\gamma-58)}{(\gamma-3)(\gamma-17)} & -\frac{7(-16+\gamma)^2}{\gamma^2-20\gamma+51} & -\frac{(-16+\gamma)(-109+6\gamma)}{\gamma^2-20\gamma+51} & -\frac{7(-16+\gamma)^2}{\gamma^2-20\gamma+51} & -\frac{(-16+\gamma)(-109+6\gamma)}{\gamma^2-20\gamma+51} & -\frac{7(-16+\gamma)^2}{\gamma^2-20\gamma+51} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma+10)(\gamma-16)(\gamma-18)}{\gamma^2-14\gamma-58} & -\frac{7(-16+\gamma)^2}{\gamma^2-14\gamma-58} & -\frac{2(3\gamma-61)(-16+\gamma)}{\gamma^2-14\gamma-58} & -\frac{7(-16+\gamma)^2}{\gamma^2-14\gamma-58} & -\frac{2(3\gamma-61)(-16+\gamma)}{\gamma^2-14\gamma-58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-16)(\gamma^2-2\gamma-302)}{(\gamma+10)(\gamma-18)} & -\frac{7(-16+\gamma)^2}{\gamma^2-8\gamma-180} & -\frac{2(3\gamma-61)(-16+\gamma)}{\gamma^2-8\gamma-180} & -\frac{7(-16+\gamma)^2}{\gamma^2-8\gamma-180} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma+23)(\gamma-16)(\gamma-19)}{\gamma^2-2\gamma-302} & -\frac{7(-16+\gamma)^2}{\gamma^2-2\gamma-302} & -\frac{3(2\gamma-45)(-16+\gamma)}{\gamma^2-2\gamma-302} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-16)(\gamma^2+10\gamma-572)}{(\gamma+23)(\gamma-19)} & -\frac{7(-16+\gamma)^2}{\gamma^2+4\gamma-437} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma+36)(\gamma-16)(\gamma-20)}{\gamma^2+10\gamma-572} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, yaitu

$$p(\gamma) = (10-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-17)}{\gamma-10}\right)\left(-\frac{(\gamma-16)(\gamma^2-14\gamma-58)}{(\gamma-3)(\gamma-17)}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma+10)(\gamma-16)(\gamma-18)}{\gamma^2-14\gamma-58}\right)\left(-\frac{(\gamma-16)(\gamma^2-2\gamma-302)}{(\gamma+10)(\gamma-18)}\right)\left(-\frac{(\gamma+23)(\gamma-16)(\gamma-19)}{\gamma^2-2\gamma-302}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-16)(\gamma^2+10\gamma-572)}{(\gamma+23)(\gamma-19)}\right)\left(-\frac{(\gamma+36)(\gamma-16)(\gamma-20)}{\gamma^2+10\gamma-572}\right)$$

$$= (\gamma-20)(\gamma-16)^6(\gamma+36)$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)$ adalah $\gamma_1^L = 20$, $\gamma_2^L = 16$, dan $\gamma_3^L = -36$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L) = 1$, $m(\gamma_2^L) = 6$, dan $m(\gamma_3^L) = 1$. Maka energi dari $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) &= (m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L|) + (m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L|) + (m(\gamma_3^L)|\gamma_3^L|) \\ &= (1\times|20|) + (6\times|16|) + (1\times|-36|) \\ &= 152 \end{aligned}$$

Jadi, energi *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ adalah 152, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ adalah 152.

Diperoleh juga matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) + \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 0 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 0 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 0 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 0 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 0 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 10 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 10 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 10 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 10 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 10 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 10 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) - \gamma I\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 10-\gamma & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 10-\gamma & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 10-\gamma & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 10-\gamma & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 10-\gamma & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 10-\gamma & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 10-\gamma & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 10-\gamma \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan eliminasi baris menggunakan *software* Maple 18, diperoleh matriks segitiga atas sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 10-\gamma & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & -\frac{(\gamma-3)(\gamma-17)}{\gamma-10} & \frac{7(-4+\gamma)}{-10+\gamma} & \frac{-11+6\gamma}{-10+\gamma} & \frac{7(-4+\gamma)}{-10+\gamma} & \frac{-11+6\gamma}{-10+\gamma} & \frac{7(-4+\gamma)}{-10+\gamma} & \frac{-11+6\gamma}{-10+\gamma} \\ 0 & 0 & -\frac{(\gamma-4)(\gamma^2-26\gamma+62)}{(\gamma-3)(\gamma-17)} & \frac{7(-4+\gamma)^2}{\gamma^2-20\gamma+51} & \frac{(-4+\gamma)(-11+6\gamma)}{\gamma^2-20\gamma+51} & \frac{7(-4+\gamma)^2}{\gamma^2-20\gamma+51} & \frac{(-4+\gamma)(-11+6\gamma)}{\gamma^2-20\gamma+51} & \frac{7(-4+\gamma)^2}{\gamma^2-20\gamma+51} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-30)(\gamma-2)(\gamma-4)}{\gamma^2-26\gamma+62} & \frac{7(-4+\gamma)^2}{\gamma^2-26\gamma+62} & \frac{2(3\gamma+1)(-4+\gamma)}{\gamma^2-26\gamma+62} & \frac{7(-4+\gamma)^2}{\gamma^2-26\gamma+62} & \frac{2(3\gamma+1)(-4+\gamma)}{\gamma^2-26\gamma+62} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-4)(\gamma^2-38\gamma+58)}{(\gamma-30)(\gamma-2)} & \frac{7(-4+\gamma)^2}{\gamma^2-32\gamma+60} & \frac{2(3\gamma+1)(-4+\gamma)}{\gamma^2-32\gamma+60} & \frac{7(-4+\gamma)^2}{\gamma^2-32\gamma+60} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-1)(\gamma-43)(\gamma-4)}{\gamma^2-38\gamma+58} & \frac{7(-4+\gamma)^2}{\gamma^2-38\gamma+58} & \frac{3(2\gamma+5)(-4+\gamma)}{\gamma^2-38\gamma+58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-4)(\gamma^2-50\gamma+28)}{(\gamma-1)(\gamma-43)} & \frac{7(-4+\gamma)^2}{\gamma^2-44\gamma+43} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-4)(\gamma-56)\gamma}{\gamma^2-50\gamma+28} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, yaitu

$$p(\gamma) = (10-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-17)}{\gamma-10}\right)\left(-\frac{(\gamma-4)(\gamma^2-26\gamma+62)}{(\gamma-3)(\gamma-17)}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-30)(\gamma-2)(\gamma-4)}{\gamma^2-26\gamma+62}\right)\left(-\frac{(\gamma-4)(\gamma^2-38\gamma+58)}{(\gamma-30)(\gamma-2)}\right)\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma-43)(\gamma-4)}{\gamma^2-38\gamma+58}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-4)(\gamma^2-50\gamma+28)}{(\gamma-1)(\gamma-43)}\right)\left(-\frac{(\gamma-4)(\gamma-56)\gamma}{\gamma^2-50\gamma+28}\right)$$

$$=(\gamma-56)(\gamma-4)^6\gamma$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)$ adalah $\gamma_1^{L^+}=56$, $\gamma_2^{L^+}=4$, dan $\gamma_3^{L^+}=0$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^{L^+})=1, m(\gamma_2^{L^+})=6$, dan $m(\gamma_3^{L^+})=1$. Maka energi dari $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}\right) &= \left(m(\gamma_1^{L^+})|\gamma_1^{L^+}|\right)+\left(m(\gamma_2^{L^+})|\gamma_2^{L^+}|\right)+\left(m(\gamma_3^{L^+})|\gamma_3^{L^+}|\right)\\ &=(1\times|56|)+(6\times|4|)+(1\times|0|)\\ &=80. \end{aligned}$$

Jadi, energi *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ adalah 80, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_8)}$ adalah 80.

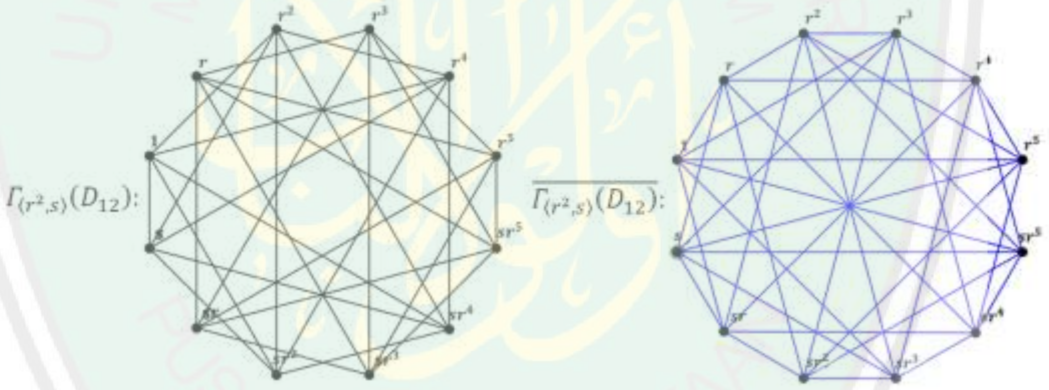
3.3.2 Grup Dihedral D_{12}

Subgrup dari grup dihedral D_{12} yang dibangun oleh $\langle r^2,s\rangle$ adalah $\{1,r^2,r^4,s,sr^2,sr^4\}$. Dua unsur pada grup dihedral D_{12} apabila dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ dapat disajikan dengan Table Cayley berikut.

Tabel 3.12 Tabel Cayley Grup Dihedral $\boldsymbol{D_{12}}$

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

Berdasarkan Tabel 3.12 dan definisi graf subgrup maka dapat digambarkan graf subgrup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})$ beserta komplemennya seperti berikut



Gambar 3.8 Graf $\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$ dan $\overline{\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}}$

Dari Gambar 3.8 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh matriks *distance* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{d}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks *distance* diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) - \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}16&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&16&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&16&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&16&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&16&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&16&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&16&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&16&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&16&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&16&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&16&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&16\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}0&11&10&11&10&11&10&11&10&11&10&11\\11&0&11&10&11&10&11&10&11&10&11&10\\10&11&0&11&10&11&10&11&10&11&10&11\\11&10&11&0&11&10&11&10&11&10&11&10\\10&11&10&11&0&11&10&11&10&11&10&11\\11&10&11&10&11&0&11&10&11&10&11&10\\10&11&10&11&10&11&0&11&10&11&10&11\\11&10&11&10&11&10&11&0&11&10&11&10\\10&11&10&11&10&11&10&11&0&11&10&11\\11&10&11&10&11&10&11&10&11&0&11&10\\10&11&10&11&10&11&10&11&10&11&0&11\\11&10&11&10&11&10&11&10&11&10&11&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}16&-11&-10&-11&-10&-11&-10&-11&-10&-11&-10&-11\\-11&16&-11&-10&-11&-10&-11&-10&-11&-10&-11&-10\\-10&-11&16&-11&-10&-11&-10&-11&-10&-11&-10&-11\\-11&-10&-11&16&-11&-10&-11&-10&-11&-10&-11&-10\\-10&-11&-10&-11&16&-11&-10&-11&-10&-11&-10&-11\\-11&-10&-11&-10&-11&16&-11&-10&-11&-10&-11&-10\\-10&-11&-10&-11&-10&-11&16&-11&-10&-11&-10&-11\\-11&-10&-11&-10&-11&-10&-11&16&-11&-10&-11&-10\\-10&-11&-10&-11&-10&-11&-10&-11&16&-11&-10&-11\\-11&-10&-11&-10&-11&-10&-11&-10&-11&16&-11&-10\\-10&-11&-10&-11&-10&-11&-10&-11&-10&-11&16&-11\\-11&-10&-11&-10&-11&-10&-11&-10&-11&-10&-11&16\end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\gamma)=(16-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-5)(\gamma-27)}{\gamma-16}\right)\left(-\frac{(\gamma-26)(\gamma^2-22\gamma-146)}{(\gamma-5)(\gamma-27)}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-26)(\gamma-28)(\gamma+16)}{\gamma^2-22\gamma-146}\right)\left(-\frac{(\gamma-26)(\gamma^2-2\gamma-750)}{(\gamma-28)(\gamma+16)}\right)\left(-\frac{(\gamma-26)(\gamma+37)(\gamma-29)}{\gamma^2-2\gamma-750}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-26)(\gamma^2+18\gamma-1396)}{(\gamma+37)(\gamma-29)}\right)\left(-\frac{(\gamma-30)(\gamma-26)(\gamma+58)}{\gamma^2+18\gamma-1396}\right)\left(-\frac{(\gamma-26)(\gamma^2+38\gamma-2084)}{(\gamma-30)(\gamma+58)}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma+79)(\gamma-26)(\gamma-31)}{\gamma^2+38\gamma-2084}\right)\left(-\frac{(\gamma-26)(\gamma^2+58\gamma-2814)}{(\gamma+79)(\gamma-31)}\right)\left(-\frac{(\gamma+100)(\gamma-26)(\gamma-32)}{\gamma^2+58\gamma-2814}\right)$$

$$=(\gamma-32)(\gamma-26)^{10}(\gamma+100)$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right)$ adalah $\gamma_1^L = 32,$ $\gamma_2^L = 26,$ dan $\gamma_3^L = -100$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L) = 1,$ $m(\gamma_2^L) = 10,$ dan $m(\gamma_3^L) = 1$. Maka energi dari $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) &= (m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L|) + (m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L|) + (m(\gamma_3^L)|\gamma_3^L|) \\ &= (1 \times |32|) + (10 \times |26|) + (1 \times |-100|) \\ &= 392 \end{aligned}$$

Jadi, energi *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$ adalah 392, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$ adalah 392.

Diperoleh juga matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) + \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 16 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 16 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 16 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 16 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 16 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 16 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 16 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 16 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 16 & 11 & 10 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 16 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 16 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\gamma) = (16-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-5)(\gamma-27)}{\gamma-16}\right)\left(-\frac{(\gamma-6)(\gamma^2-42\gamma+174)}{(\gamma-5)(\gamma-27)}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-6)(\gamma-48)(\gamma-4)}{\gamma^2-42\gamma+174}\right)\left(-\frac{(\gamma-6)(\gamma^2-62\gamma+210)}{(\gamma-48)(\gamma-4)}\right)\left(-\frac{(\gamma-6)(\gamma-3)(\gamma-69)}{\gamma^2-62\gamma+210}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-6)(\gamma^2-82\gamma+204)}{(\gamma-3)(\gamma-69)}\right)\left(-\frac{(\gamma-90)(\gamma-6)(\gamma-2)}{\gamma^2-82\gamma+204}\right)\left(-\frac{(\gamma-6)(\gamma^2-102\gamma+156)}{(\gamma-90)(\gamma-2)}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma-6)(\gamma-111)}{\gamma^2-102\gamma+156}\right)\left(-\frac{(\gamma-6)(\gamma^2-122\gamma+66)}{(\gamma-1)(\gamma-111)}\right)\left(-\frac{(\gamma-6)(\gamma-132)\gamma}{\gamma^2-122\gamma+66}\right)$$

$$= (\gamma-132)(\gamma-6)^{10}\gamma$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right)$ adalah $\gamma_1^{L^+} = 132$, $\gamma_2^{L^+} = 6$, dan $\gamma_3^{L^+} = 0$ dengan multiplisitas $m\left(\gamma_1^{L^+}\right) = 1, m\left(\gamma_2^{L^+}\right) = 10$ dan $m\left(\gamma_3^{L^+}\right) = 1.$ Maka energi dari $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right)$ sebagai berikut

$$E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}\right) = \left(m\left(\gamma_1^{L^+}\right)\left|\gamma_1^{L^+}\right|\right) + \left(m\left(\gamma_2^{L^+}\right)\left|\gamma_2^{L^+}\right|\right) + \left(m\left(\gamma_3^{L^+}\right)\left|\gamma_3^{L^+}\right|\right)$$

$$= (1 \times |132|) + (10 \times |6|) + (1 \times |0|)$$

$$= 192.$$

Jadi, energi *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$ adalah 192, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{12})}$ adalah 192.

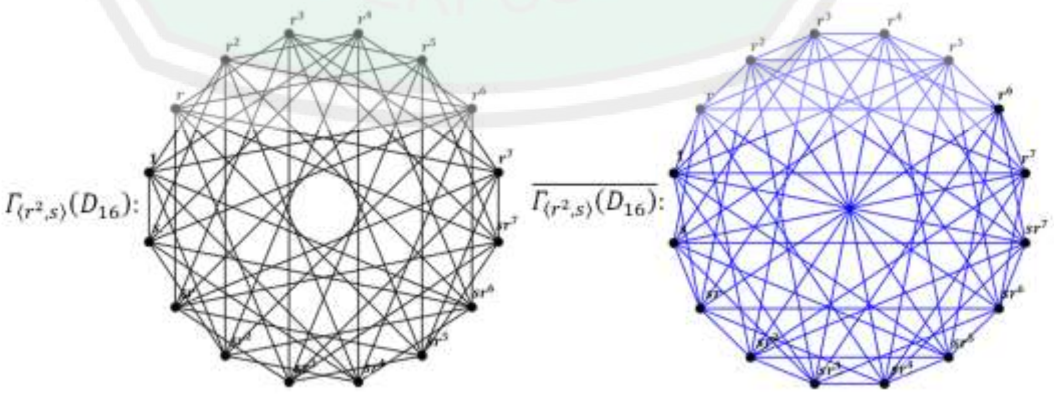
3.3.3 Grup Dihedral D_{16}

Subgrup dari grup dihedral D_{16} yang dibangun oleh $\langle r^2, s\rangle$ adalah $\{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}$. Dua unsur pada grup dihedral D_{16} apabila dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ dapat disajikan dengan Table Cayley berikut.

Tabel 3.13 Tabel Cayley Grup Dihedral $\boldsymbol{D_{16}}$

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Berdasarkan Tabel 3.13 dan definisi graf subgrub dapat digambarkan graf subgrup $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})$ beserta komplemennya seperti berikut



Gambar 3.9 Graf $\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ dan $\overline{\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}}$

Dari Gambar 3.9 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right) =$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0
\end{bmatrix}$$

dan diperoleh matriks *distance* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{d}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

Dari matriks *distance* diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right) =$$

$$\begin{bmatrix}
22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22
\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right) - \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}
22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22
\end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0
\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 \\ -15 & 22 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 \\ -14 & -15 & 22 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 \\ -15 & -14 & -15 & 22 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 \\ -14 & -15 & -14 & -15 & 22 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 \\ -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & 22 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 \\ -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & 22 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 \\ -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & 22 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 \\ -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & 22 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 \\ -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & 22 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 \\ -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & 22 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 \\ -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & 22 & -15 & -14 & -15 & -14 \\ -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & 22 & -15 & -14 & -15 \\ -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & 22 & -15 & -14 \\ -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & 22 & -15 \\ -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & 22 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\gamma) = (22-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-7)(\gamma-37)}{\gamma-22}\right)\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma^2-30\gamma-274)}{(\gamma-7)(\gamma-37)}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma+22)(\gamma-36)(\gamma-38)}{\gamma^2-30\gamma-274}\right)\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma^2-2\gamma-1398)}{(\gamma+22)(\gamma-38)}\right)\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma+51)(\gamma-39)}{\gamma^2-2\gamma-1398}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma^2+26\gamma-2580)}{(\gamma+51)(\gamma-39)}\right)\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma-40)(\gamma+80)}{\gamma^2+26\gamma-2580}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma^2+54\gamma-3820)}{(\gamma-40)(\gamma+80)}\right)\left(-\frac{(\gamma+109)(\gamma-36)(\gamma-41)}{\gamma^2+54\gamma-3820}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma^2+82\gamma-5118)}{(\gamma+109)(\gamma-41)}\right)\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma+138)(\gamma-42)}{\gamma^2+82\gamma-5118}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma^2+110\gamma-6474)}{(\gamma+138)(\gamma-42)}\right)\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma+167)(\gamma-43)}{\gamma^2+110\gamma-6474}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma^2+138\gamma-7888)}{(\gamma+167)(\gamma-43)}\right)\left(-\frac{(\gamma+196)(\gamma-36)(\gamma-44)}{\gamma^2+138\gamma-7888}\right)$$

$$= (\gamma-44)(\gamma-36)^{14}(\gamma+196)$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right)$ adalah $\gamma_1^L = 44$, $\gamma_2^L = 36$, dan $\gamma_3^L = -196$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L)=1$, $m(\gamma_2^L)=14$, dan $m(\gamma_3^L)=1$. Maka energi dari $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right)$ sebagai berikut

$$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right) = \left(m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L|\right) + \left(m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L|\right) + \left(m(\gamma_3^L)|\gamma_3^L|\right)$$

$$= (1 \times |44|) + (14 \times |36|) + (1 \times |-196|)$$

$$= 744$$

Jadi, energi *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ adalah 744, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ adalah 744.

Diperoleh juga matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right) + \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}
22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22
\end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0
\end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
22 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 22 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 22 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 22 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 22 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 22 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 22 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 22 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 22 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 22 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 22 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 22 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 22 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 22 & 15 & 14 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 22 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 22
\end{bmatrix}
$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$
p(\gamma) = (22-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-7)(\gamma-37)}{\gamma-22}\right)\left(-\frac{(\gamma-8)(\gamma^2-58\gamma+342)}{(\gamma-7)(\gamma-37)}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-66)(\gamma-6)(\gamma-8)}{\gamma^2-58\gamma+342}\right)\left(-\frac{(\gamma-8)(\gamma^2-86\gamma+450)}{(\gamma-66)(\gamma-6)}\right)\left(-\frac{(\gamma-5)(\gamma-95)(\gamma-8)}{\gamma^2-86\gamma+450}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-8)(\gamma^2-114\gamma+500)}{(\gamma-5)(\gamma-95)}\right)\left(-\frac{(\gamma-124)(\gamma-4)(\gamma-8)}{\gamma^2-114\gamma+500}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-8)(\gamma^2-142\gamma+492)}{(\gamma-124)(\gamma-4)}\right)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-8)(\gamma-153)}{\gamma^2-142\gamma+492}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-8)(\gamma^2-170\gamma+426)}{(\gamma-3)(\gamma-153)}\right)\left(-\frac{(\gamma-2)(\gamma-182)(\gamma-8)}{\gamma^2-170\gamma+426}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-8)(\gamma^2-198\gamma+302)}{(\gamma-2)(\gamma-182)}\right)\left(-\frac{(\gamma-8\,)(\gamma-211)(\gamma-1)}{\gamma^2-198\gamma+302}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-8\,)(\gamma^2-226\gamma+120)}{(\gamma-211)(\gamma-1)}\right)\left(-\frac{(\gamma-8)(\gamma-240)\gamma}{\gamma^2-226\gamma+120}\right)
$$

$$
= (\gamma-240)(\gamma-8)^{14}\gamma
$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right)$ adalah $\gamma_1^{L^+}=240$, $\gamma_2^{L^+}=8$, dan $\gamma_3^{L^+}=-0$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^{L^+})=1$, $m(\gamma_2^{L^+})=14$, dan $m(\gamma_3^{L^+})=1$. Maka energi dari $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right)$ sebagai berikut

$$E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right) = \left(m\left(\gamma_1^{L^+}\right)\left|\gamma_1^{L^+}\right|\right) + \left(m\left(\gamma_2^{L^+}\right)\left|\gamma_2^{L^+}\right|\right) + \left(m\left(\gamma_3^{L^+}\right)\left|\gamma_3^{L^+}\right|\right)$$

$$= (1 \times |240|) + (14 \times |8|) + (1 \times |-0|)$$

$$= 352.$$

Jadi, energi *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ adalah 343, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}$ adalah 343.

3.3.4 Grup Dihedral D_{2n}

Berdasarkan energi yang telah ditemukan, diperoleh energi *DDL* dan energi *DDSL* komplemen graf subgrup dari beberapa grup dihedral sebagai berikut.

Tabel 3.14 Energi *DDL* dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle \boldsymbol{r^2, s}\rangle$ dari Grup Dihedral $(\boldsymbol{D_{2n}})$

n	D_{2n}	E_{DDL}
4	D_8	$152 = (14 \cdot 16) - (20 \cdot 4) + 8 = (14 \cdot 4^2) - (20 \cdot 4) + 8$
6	D_{12}	$392 = (14 \cdot 36) - (20 \cdot 6) + 8 = (14 \cdot 6^2) - (20 \cdot 6) + 8$
8	D_{16}	$744 = (14 \cdot 64) - (20 \cdot 8) + 8 = (14 \cdot 8^2) - (20 \cdot 8) + 8$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	D_{2n}	$14n^2 - 20n + 8$

Tabel 3.15 Energi *DDSL* dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle \boldsymbol{r^2, s}\rangle$ dari Grup Dihedral $(\boldsymbol{D_{2n}})$

n	D_{2n}	E_{DDL^+}
4	D_8	$80 = 2 \cdot 40 = 2(3 \cdot 16 - 2 \cdot 4) = 2(3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4)$
6	D_{12}	$192 = 2 \cdot 96 = 2(3 \cdot 36 - 2 \cdot 6) = 2(3 \cdot 6^2 - 2 \cdot 6)$
8	D_{16}	$352 = 2 \cdot 176 = 2(3 \cdot 64 - 2 \cdot 8) = 2(3 \cdot 8^2 - 2 \cdot 8)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	D_{2n}	$2(3n^2 - 2n) = 6n^2 - 4n$

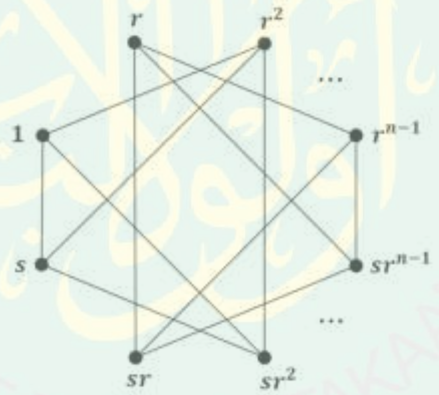
Teorema 5

Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dan $\langle r^2, s\rangle = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$ subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$. Energi $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral D_{2n} adalah

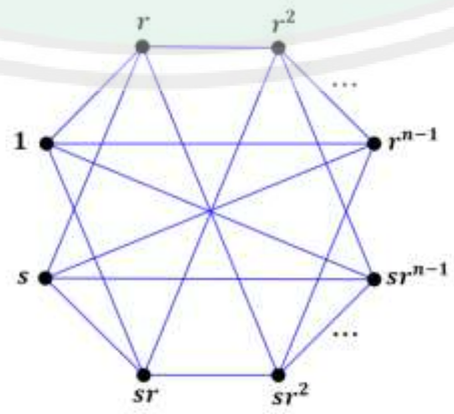
$$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) = 14n^2 - 20n + 8$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$, untuk n genap dan $n \geq 4$. Ambil subgrup normal $\langle r^2, s\rangle = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$ di D_{2n}. Sesuai definisi graf subgrup, maka diperoleh graf $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$ sebagai berikut



dan graf $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut



Sehingga diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$\begin{array}{c|cccccccccc|}
 & 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \\
\hline
1 & 3n-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
r & 0 & 3n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
r^2 & 0 & 0 & 3n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
r^{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3n-2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
s & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 3n-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
sr & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 3n-2 & 0 & \cdots & 0 \\
sr^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 3n-2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
sr^{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3n-2
\end{array}$$

dan matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$\begin{array}{c|cccccccccc|}
 & 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \\
\hline
1 & 0 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 \\
r & 2n-1 & 0 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 \\
r^2 & 2n-2 & 2n-1 & 0 & \cdots & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
r^{n-1} & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 0 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 \\
s & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 & 0 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 \\
sr & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 & 0 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 \\
sr^2 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 0 & \cdots & 2n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
sr^{n-1} & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 0
\end{array}$$

Matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ adalah sebagai berikut

$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$\begin{array}{c|cccccccccc|}
 & 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \\
\hline
1 & 3n-2 & -(2n-1) & -(2n-2) & \cdots & -(2n-1) & -(2n-2) & -(2n-1) & -(2n-2) & \cdots & -(2n-1) \\
r & -(2n-1) & 3n-2 & -(2n-1) & \cdots & -(2n-2) & -(2n-1) & -(2n-2) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-2) \\
r^2 & -(2n-2) & -(2n-1) & 3n-2 & \cdots & -(2n-1) & -(2n-2) & -(2n-1) & -(2n-2) & \cdots & -(2n-1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
r^{n-1} & -(2n-1) & -(2n-2) & -(2n-1) & \cdots & 3n-2 & -(2n-1) & -(2n-2) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-2) \\
s & -(2n-2) & -(2n-1) & -(2n-2) & \cdots & -(2n-1) & 3n-2 & -(2n-1) & -(2n-2) & \cdots & -(2n-1) \\
sr & -(2n-1) & -(2n-2) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-2) & -(2n-1) & 3n-2 & -(2n-1) & \cdots & -(2n-2) \\
sr^2 & -(2n-2) & -(2n-1) & -(2n-2) & \cdots & -(2n-1) & -(2n-2) & -(2n-1) & 3n-2 & \cdots & -(2n-1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
sr^{n-1} & -(2n-1) & -(2n-2) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-2) & -(2n-1) & -(2n-2) & -(2n-1) & \cdots & 3n-2
\end{array}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma I\right)$. Dengan eliminasi pada $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma I$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
(3n-2)-\gamma & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & -\frac{(\gamma-(n-1))(\gamma-(5n-3))}{\gamma-(3n-2)} & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & -\frac{(\gamma-(5n-4))(\gamma^2-(4n-2)\gamma-(5n^2-6n+2))}{(\gamma-(n-1))(\gamma-(5n-3))} & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{(\gamma+(4n^2-8n+4))(\gamma-(5n-4))(\gamma-(6n-4))}{f(\gamma)}
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Maka $det\left(\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)-\gamma I\right)$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\gamma)=\left(\gamma-(6n-4)\right)\left(\gamma-(5n-4)\right)^{2n-2}\left(\gamma+(4n^2-8n+4)\right)$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka diperoleh $\gamma_1^L=6n-4$, $\gamma_2^L=5n-4$, dan $\gamma_3^L=-(4n^2-8n+4)$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L)=1$, $m(\gamma_2^L)=2n-2$, dan $m(\gamma_3^L)=1$. Energi $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n\geq 4$ adalah

$$\begin{aligned}
E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) &= m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L|+m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L|+m(\gamma_3^L)|\gamma_3^L| \\
&= 1\times|6n-4|+2n-2\times|5n-4|+1\times|-(4n^2-8n+4)| \\
&= (6n-4)+(10n^2-18n+8)+(4n^2-8n+4) \\
&= 14n^2-20n+8
\end{aligned}$$

Teorema 6

Misalkan grup dihedral $D_{2n}=\{1,r,r^2,\ldots,r^{n-1},s,sr,sr^2,\ldots,sr^{n-1}\}$ dan $\langle r^2,s\rangle=\{1,r^2,\ldots,r^{n-2},s,sr^2,\ldots,sr^{n-2}\}$ subgrup normal dari grup dihedral D_{2n}. Energi $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n\geq 4$ adalah

$$E_{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)=6n^2-4n$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$. Untuk n genap dan $n \geq 4$, ambil subgrup normal $\langle r^2, s\rangle = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, s, sr^2, \dots, sr^{n-2}\}$ di D_{2n}. Sesuai definisi graf subgrup, maka diperoleh graf $\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})$ dan graf $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ seperti pada Teorema 5. Diperoleh pula matriks transmisi dan matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ seperti pada Teorema 5. Sehingga didapatkan matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}$ adalah sebagai berikut

$\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
3n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 3n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 \\
2n-2 & 2n-1 & 3n-2 & \cdots & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 3n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 \\
2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 & 3n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 & 3n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 \\
2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & 3n-2 & \cdots & 2n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 3n-2
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma I\right)$. Dengan eliminasi pada $\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma I$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
(3n-2)-\gamma & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & -\dfrac{(\gamma-(n-1))(\gamma-(5n-3))}{\gamma-(3n-2)} & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & -\dfrac{(\gamma-n)(\gamma^2-(8n-6)\gamma+(7n^2-14n+6))}{(\gamma-(n-1))(\gamma-(5n-3))} & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{(\gamma-n)(\gamma-(4n^2-2n))\gamma}{f(\gamma)}
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Maka $det\left(\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma I\right)$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\gamma) = (\gamma - (4n^2 - 2n))(\gamma - n)^{2n-2}\gamma$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka diperoleh $\gamma_1^{L^+} = 4n^2 - 2n$, $\gamma_2^{L^+} = n$, dan $\gamma_3^{L^+} = -0$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^{L^+}) = 1, m(\gamma_2^{L^+}) = 2n - 2$, dan $m(\gamma_3^{L^+}) = 1$. Energi $DDL^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$
\begin{aligned}
E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) &= m(\gamma_1^{L^+})|\gamma_1^{L^+}| + m(\gamma_2^{L^+})|\gamma_2^{L^+}| + m(\gamma_3^{L^+})|\gamma_3^{L^+}| \\
&= 1 \times |4n^2 - 2n| + 2n - 2 \times |n| + 1 \times |-0| \\
&= (4n^2 - 2n) + (2n^2 - 2n) + 0 \\
&= 6n^2 - 4n.
\end{aligned}
$$

3.4 Energi *DDL* dan *DDSL* Komplemen Graf Subgrup $\langle r^2, sr\rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}.

3.4.1 Grup Dihedral D_8

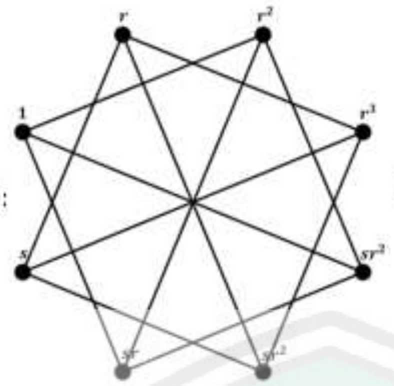
Subgrup dari grup dihedral D_8 yang dibangun oleh $\langle r^2, sr\rangle$ adalah $\{1, r^2, sr, sr^3\}$. Dua unsur pada grup dihedral D_8 apabila dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ dapat disajikan dengan Table Cayley berikut.

Tabel 3.16 Tabel Cayley Grup Dihedral D_8

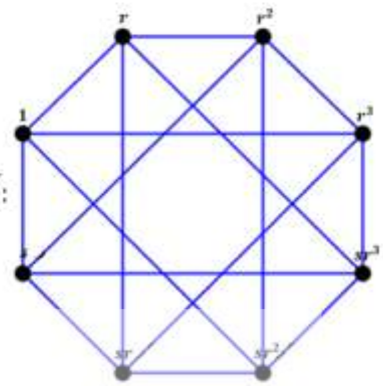
$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Berdasarkan Tabel 3.16 dan definisi graf subgrup maka dapat digambarkan graf subgrup $\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)$ beserta komplemennya seperti berikut

$\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)$:



$\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}$:



Gambar 3.10 Graf $\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}$ dan $\overline{\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}}$

Dari Gambar 3.10 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 7 & 0 & 7 & 6 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 0 & 7 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 7 & 0 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 0 & 7 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 0 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 6 & 7 & 0 & 7 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh matriks *distance* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{d}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks distance diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right) - \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 7 & 0 & 7 & 6 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 0 & 7 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 7 & 0 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 0 & 7 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 0 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 6 & 7 & 0 & 7 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -7 & -6 & -7 & -7 & -6 & -7 & -6 \\ -7 & 10 & -7 & -6 & -6 & -7 & -6 & -7 \\ -6 & -7 & 10 & -7 & -7 & -6 & -7 & -6 \\ -7 & -6 & -7 & 10 & -6 & -7 & -6 & -7 \\ -7 & -6 & -7 & -6 & 10 & -7 & -6 & -7 \\ -6 & -7 & -6 & -7 & -7 & 10 & -7 & -6 \\ -7 & -6 & -7 & -6 & -6 & -7 & 10 & -7 \\ -6 & -7 & -6 & -7 & -7 & -6 & -7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right) - \gamma \boldsymbol{I}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 10-\gamma & -7 & -6 & -7 & -7 & -6 & -7 & -6 \\ -7 & 10-\gamma & -7 & -6 & -6 & -7 & -6 & -7 \\ -6 & -7 & 10-\gamma & -7 & -7 & -6 & -7 & -6 \\ -7 & -6 & -7 & 10-\gamma & -6 & -7 & -6 & -7 \\ -7 & -6 & -7 & -6 & 10-\gamma & -7 & -6 & -7 \\ -6 & -7 & -6 & -7 & -7 & 10-\gamma & -7 & -6 \\ -7 & -6 & -7 & -6 & -6 & -7 & 10-\gamma & -7 \\ -6 & -7 & -6 & -7 & -7 & -6 & -7 & 10-\gamma \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan eliminasi baris menggunakan *software* Maple 18, diperoleh matriks segitiga atas sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 10-\gamma & -7 & -6 & -7 & -6 & -7 & -6 & -7 \\ 0 & -\frac{(\gamma-3)(\gamma-17)}{\gamma-10} & -\frac{7(-16+\gamma)}{-10+\gamma} & -\frac{-109+6\gamma}{-10+\gamma} & -\frac{7(-16+\gamma)}{-10+\gamma} & -\frac{-109+6\gamma}{-10+\gamma} & -\frac{7(-16+\gamma)}{-10+\gamma} & -\frac{-109+6\gamma}{-10+\gamma} \\ 0 & 0 & -\frac{(\gamma-16)(\gamma^2-14\gamma-58)}{(\gamma-3)(\gamma-17)} & -\frac{7(-16+\gamma)^2}{\gamma^2-20\gamma+51} & -\frac{(-16+\gamma)(-109+6\gamma)}{\gamma^2-20\gamma+51} & -\frac{7(-16+\gamma)^2}{\gamma^2-20\gamma+51} & -\frac{(-16+\gamma)(-109+6\gamma)}{\gamma^2-20\gamma+51} & -\frac{7(-16+\gamma)^2}{\gamma^2-20\gamma+51} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma+10)(\gamma-16)(\gamma-18)}{\gamma^2-14\gamma-58} & -\frac{7(-16+\gamma)^2}{\gamma^2-14\gamma-58} & -\frac{2(3\gamma-61)(-16+\gamma)}{\gamma^2-14\gamma-58} & -\frac{7(-16+\gamma)^2}{\gamma^2-14\gamma-58} & -\frac{2(3\gamma-61)(-16+\gamma)}{\gamma^2-14\gamma-58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-16)(\gamma^2-2\gamma-302)}{(\gamma+10)(\gamma-18)} & -\frac{7(-16+\gamma)^2}{\gamma^2-8\gamma-180} & -\frac{2(3\gamma-61)(-16+\gamma)}{\gamma^2-8\gamma-180} & -\frac{7(-16+\gamma)^2}{\gamma^2-8\gamma-180} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma+23)(\gamma-16)(\gamma-19)}{\gamma^2-2\gamma-302} & -\frac{7(-16+\gamma)^2}{\gamma^2-2\gamma-302} & -\frac{3(2\gamma-45)(-16+\gamma)}{\gamma^2-2\gamma-302} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-16)(\gamma^2+10\gamma-572)}{(\gamma+23)(\gamma-19)} & -\frac{7(-16+\gamma)^2}{\gamma^2+4\gamma-437} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma+36)(\gamma-16)(\gamma-20)}{\gamma^2+10\gamma-572} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, yaitu

$$p(\gamma)=(10-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-17)}{\gamma-10}\right)\left(-\frac{(\gamma-16)(\gamma^2-14\gamma-58)}{(\gamma-3)(\gamma-17)}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma+10)(\gamma-16)(\gamma-18)}{\gamma^2-14\gamma-58}\right)\left(-\frac{(\gamma-16)(\gamma^2-2\gamma-302)}{(\gamma+10)(\gamma-18)}\right)\left(-\frac{(\gamma-16)(\gamma+23)(\gamma-19)}{\gamma^2-2\gamma-302}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-16)(\gamma^2+10\gamma-572)}{(\gamma+23)(\gamma-19)}\right)\left(-\frac{(\gamma+36)(\gamma-16)(\gamma-20)}{\gamma^2+10\gamma-572}\right)$$

$$=(\gamma-20)(\gamma-16)^6(\gamma+36)$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right)$ adalah $\gamma_1^L=20$, $\gamma_2^L=16$, dan $\gamma_3^L=-36$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L)=1$, $m(\gamma_2^L)=6$, dan $m(\gamma_3^L)=1$. Maka energi dari $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right) &= (m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L|)+(m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L|)+(m(\gamma_3^L)|\gamma_3^L|)\\ &=(1\times|20|)+(6\times|16|)+(1\times|-36|)\\ &=152 \end{aligned}$$

Jadi, energi DDL dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}$ adalah 152, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks DDL dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}$ adalah 152.

Diperoleh juga matriks $DDSL$ dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right)=\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right)+\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}10&0&0&0&0&0&0&0\\0&10&0&0&0&0&0&0\\0&0&10&0&0&0&0&0\\0&0&0&10&0&0&0&0\\0&0&0&0&10&0&0&0\\0&0&0&0&0&10&0&0\\0&0&0&0&0&0&10&0\\0&0&0&0&0&0&0&10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&7&6&7&7&6&7&6\\7&0&7&6&6&7&6&7\\6&7&0&7&7&6&7&6\\7&6&7&0&6&7&6&7\\7&6&7&6&0&7&6&7\\6&7&6&7&7&0&7&6\\7&6&7&6&6&7&0&7\\6&7&6&7&7&6&7&0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 7 & 10 & 7 & 6 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 10 & 7 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 7 & 10 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 10 & 7 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 10 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 6 & 7 & 10 & 7 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right) - \gamma I\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 10-\gamma & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 7 & 10-\gamma & 7 & 6 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 10-\gamma & 7 & 7 & 6 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 7 & 10-\gamma & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 10-\gamma & 7 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 10-\gamma & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 6 & 7 & 10-\gamma & 7 \\ 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 6 & 7 & 10-\gamma \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan eliminasi baris menggunakan *software* Maple 18, diperoleh matriks segitiga atas sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 10-\gamma & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 0 & -\frac{(\gamma-3)(\gamma-17)}{\gamma-10} & \frac{7(-4+\gamma)}{-10+\gamma} & \frac{-11+6\gamma}{-10+\gamma} & \frac{7(-4+\gamma)}{-10+\gamma} & \frac{-11+6\gamma}{-10+\gamma} & \frac{7(-4+\gamma)}{-10+\gamma} & \frac{-11+6\gamma}{-10+\gamma} \\ 0 & 0 & -\frac{(\gamma-4)(\gamma^2-26\gamma+62)}{(\gamma-3)(\gamma-17)} & \frac{7(-4+\gamma)^2}{\gamma^2-20\gamma+51} & \frac{(-4+\gamma)(-11+6\gamma)}{\gamma^2-20\gamma+51} & \frac{7(-4+\gamma)^2}{\gamma^2-20\gamma+51} & \frac{(-4+\gamma)(-11+6\gamma)}{\gamma^2-20\gamma+51} & \frac{7(-4+\gamma)^2}{\gamma^2-20\gamma+51} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-30)(\gamma-2)(\gamma-4)}{\gamma^2-26\gamma+62} & \frac{7(-4+\gamma)^2}{\gamma^2-26\gamma+62} & \frac{2(3\gamma+1)(-4+\gamma)}{\gamma^2-26\gamma+62} & \frac{7(-4+\gamma)^2}{\gamma^2-26\gamma+62} & \frac{2(3\gamma+1)(-4+\gamma)}{\gamma^2-26\gamma+62} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-4)(\gamma^2-38\gamma+58)}{(\gamma-30)(\gamma-2)} & \frac{7(-4+\gamma)^2}{\gamma^2-32\gamma+60} & \frac{2(3\gamma+1)(-4+\gamma)}{\gamma^2-32\gamma+60} & \frac{7(-4+\gamma)^2}{\gamma^2-32\gamma+60} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-1)(\gamma-43)(\gamma-4)}{\gamma^2-38\gamma+58} & \frac{7(-4+\gamma)^2}{\gamma^2-38\gamma+58} & \frac{3(2\gamma+5)(-4+\gamma)}{\gamma^2-38\gamma+58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-4)(\gamma^2-50\gamma+28)}{(\gamma-1)(\gamma-43)} & \frac{7(-4+\gamma)^2}{\gamma^2-44\gamma+43} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{(\gamma-4)(\gamma-56)\gamma}{\gamma^2-50\gamma+28} \end{bmatrix}$$

Sehingga polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right)$ diperoleh dari perkalian diagonal utama matriks segitiga atas tersebut, yaitu

$$p(\gamma) = (10-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-17)}{\gamma-10}\right)\left(-\frac{(\gamma-4)(\gamma^2-26\gamma+62)}{(\gamma-3)(\gamma-17)}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-30)(\gamma-2)(\gamma-4)}{\gamma^2-26\gamma+62}\right)\left(-\frac{(\gamma-4)(\gamma^2-38\gamma+58)}{(\gamma-30)(\gamma-2)}\right)\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma-43)(\gamma-4)}{\gamma^2-38\gamma+58}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-4)(\gamma^2-50\gamma+28)}{(\gamma-1)(\gamma-43)}\right)\left(-\frac{(\gamma-4)(\gamma-56)\gamma}{\gamma^2-50\gamma+28}\right)$$

$$= (\gamma-56)(\gamma-4)^6\gamma$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right)$ adalah $\gamma_1^{L^+} = 56$, $\gamma_2^{L^+} = 4$, dan $\gamma_3^{L^+} = 0$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^{L^+}) = 1$, $m(\gamma_2^{L^+}) = 6$, dan $m(\gamma_3^{L^+}) = 1$. Maka energi dari $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right)$ sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}\right) &= \left(m(\gamma_1^{L^+})|\gamma_1^{L^+}|\right) + \left(m(\gamma_2^{L^+})|\gamma_2^{L^+}|\right) + \left(m(\gamma_3^{L^+})|\gamma_3^{L^+}|\right) \\
&= (1 \times |56|) + (6 \times |4|) + (1 \times |0|) \\
&= 80.
\end{aligned}
$$

Jadi, energi *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}$ adalah 80, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_8)}$ adalah 80.

3.4.2 Grup Dihedral D_{12}

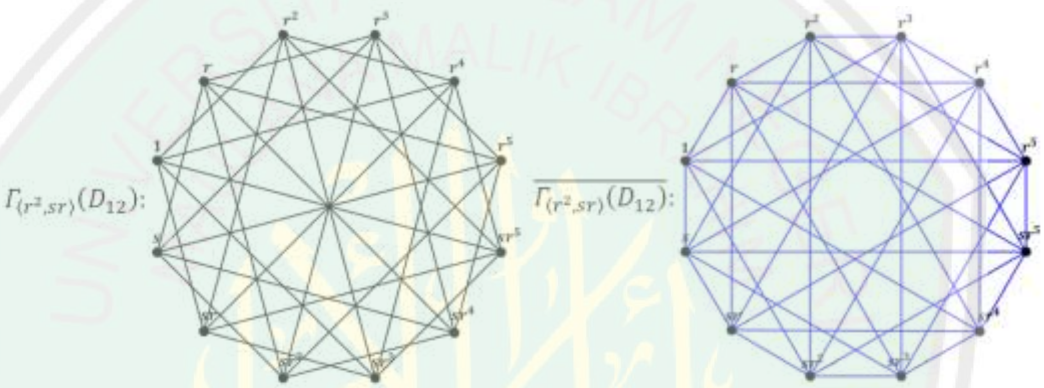
Subgrup dari grup dihedral D_{12} yang dibangun oleh $\langle r^2, sr\rangle$ adalah $\{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$. Dua unsur pada grup dihedral D_{12} apabila dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ dapat disajikan dengan Table Cayley berikut.

Tabel 3.17 Tabel Cayley Grup Dihedral $\boldsymbol{D_{12}}$

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2

r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

Berdasarkan Tabel 3.17 dan definisi graf subgrup maka dapat digambarkan graf subgrup $\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})$ beserta komplemennya seperti berikut



Gambar 3.11 Graf $\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}$ dan $\overline{\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}}$

Dari Gambar 3.11 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}\right) =$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\
11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\
10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\
11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\
10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\
11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\
11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\
10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 \\
11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 \\
10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 \\
11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 \\
10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0
\end{bmatrix}$$

dan diperoleh matriks *distance* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{d}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}\right)=\begin{bmatrix}0&1&2&1&2&1&1&2&1&2&1&2\\1&0&1&2&1&2&2&1&2&1&2&1\\2&1&0&1&2&1&1&2&1&2&1&2\\1&2&1&0&1&2&2&1&2&1&2&1\\2&1&2&1&0&1&1&2&1&2&1&2\\1&2&1&2&1&0&2&1&2&1&2&1\\1&2&1&2&1&2&0&1&2&1&2&1\\2&1&2&1&2&1&1&0&1&2&1&2\\1&2&1&2&1&2&2&1&0&1&2&1\\2&1&2&1&2&1&1&2&1&0&1&2\\1&2&1&2&1&2&2&1&2&1&0&1\\2&1&2&1&2&1&1&2&1&2&1&0\end{bmatrix}$$

Dari matriks distance diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}\right)=$$

$$\begin{bmatrix}16&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&16&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&16&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&16&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&16&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&16&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&16&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&16&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&16&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&16&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&16&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&16\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}\right)=\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}\right)-\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}16&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&16&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&16&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&16&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&16&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&16&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&16&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&16&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&16&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&16&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&16&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&16\end{bmatrix}-$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & -11 & -10 & -11 & -10 & -11 & -11 & -10 & -11 & -10 & -11 & -10 \\ -11 & 16 & -11 & -10 & -11 & -10 & -10 & -11 & -10 & -11 & -10 & -11 \\ -10 & -11 & 16 & -11 & -10 & -11 & -11 & -10 & -11 & -10 & -11 & -10 \\ -11 & -10 & -11 & 16 & -11 & -10 & -10 & -11 & -10 & -11 & -10 & -11 \\ -10 & -11 & -10 & -11 & 16 & -11 & -11 & -10 & -11 & -10 & -11 & -10 \\ -11 & -10 & -11 & -10 & -11 & 16 & -10 & -11 & -10 & -11 & -10 & -11 \\ -11 & -10 & -11 & -10 & -11 & -10 & 16 & -11 & -10 & -11 & -10 & -11 \\ -10 & -11 & -10 & -11 & -10 & -11 & -11 & 16 & -11 & -10 & -11 & -10 \\ -11 & -10 & -11 & -10 & -11 & -10 & -10 & -11 & 16 & -11 & -10 & -11 \\ -10 & -11 & -10 & -11 & -10 & -11 & -11 & -10 & -11 & 16 & -11 & -10 \\ -11 & -10 & -11 & -10 & -11 & -10 & -10 & -11 & -10 & -11 & 16 & -11 \\ -10 & -11 & -10 & -11 & -10 & -11 & -11 & -10 & -11 & -10 & -11 & 16 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\gamma) = (16-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-5)(\gamma-27)}{\gamma-16}\right)\left(-\frac{(\gamma-26)(\gamma^2-22\gamma-146)}{(\gamma-5)(\gamma-27)}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-26)(\gamma-28)(\gamma+16)}{\gamma^2-22\gamma-146}\right)\left(-\frac{(\gamma-26)(\gamma^2-2\gamma-750)}{(\gamma-28)(\gamma+16)}\right)\left(-\frac{(\gamma-26)(\gamma+37)(\gamma-29)}{\gamma^2-2\gamma-750}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-26)(\gamma^2+18\gamma-1396)}{(\gamma+37)(\gamma-29)}\right)\left(-\frac{(\gamma-30)(\gamma-26)(\gamma+58)}{\gamma^2+18\gamma-1396}\right)\left(-\frac{(\gamma-26)(\gamma^2+38\gamma-2084)}{(\gamma-30)(\gamma+58)}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma+79)(\gamma-26)(\gamma-31)}{\gamma^2+38\gamma-2084}\right)\left(-\frac{(\gamma-26)(\gamma^2+58\gamma-2814)}{(\gamma+79)(\gamma-31)}\right)\left(-\frac{(\gamma+100)(\gamma-26)(\gamma-32)}{\gamma^2+58\gamma-2814}\right)$$

$$= (\gamma-32)(\gamma-26)^{10}(\gamma+100)$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}\right)$ adalah $\gamma_1^L = 32$, $\gamma_2^L = 26$, dan $\gamma_3^L = -100$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L) = 1$, $m(\gamma_2^L) = 10$, dan $m(\gamma_3^L) = 1$. Maka energi dari $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}\right)$ sebagai berikut

$$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}\right) = \left(m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L|\right) + \left(m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L|\right) + \left(m(\gamma_3^L)|\gamma_3^L|\right)$$

$$= (1 \times |32|) + (10 \times |26|) + (1 \times |-100|)$$

$$= 392$$

Jadi, energi *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}$ adalah 392, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}$ adalah 392.

Diperoleh juga matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}\right) + \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 & 10 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 & 11 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 11 & 16 & 11 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 16 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 11 & 10 & 11 & 16 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 16 & 11 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 16 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 16 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 11 & 16 & 11 & 10 & 11 & 10 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 16 & 11 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 & 11 & 16 & 11 & 10 \\ 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 10 & 11 & 10 & 11 & 16 & 11 \\ 10 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 11 & 10 & 11 & 10 & 11 & 16 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\gamma) = (16-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-5)(\gamma-27)}{\gamma-16}\right)\left(-\frac{(\gamma-6)(\gamma^2-42\gamma+174)}{(\gamma-5)(\gamma-27)}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-6)(\gamma-48)(\gamma-4)}{\gamma^2-42\gamma+174}\right)\left(-\frac{(\gamma-6)(\gamma^2-62\gamma+210)}{(\gamma-48)(\gamma-4)}\right)\left(-\frac{(\gamma-6)(\gamma-3)(\gamma-69)}{\gamma^2-62\gamma+210}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-6)(\gamma^2-82\gamma+204)}{(\gamma-3)(\gamma-69)}\right)\left(-\frac{(\gamma-90)(\gamma-6)(\gamma-2)}{\gamma^2-82\gamma+204}\right)\left(-\frac{(\gamma-6)(\gamma^2-102\gamma+156)}{(\gamma-90)(\gamma-2)}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma-6)(\gamma-111)}{\gamma^2-102\gamma+156}\right)\left(-\frac{(\gamma-6)(\gamma^2-122\gamma+66)}{(\gamma-1)(\gamma-111)}\right)\left(-\frac{(\gamma-6)(\gamma-132)\gamma}{\gamma^2-122\gamma+66}\right)$$

$$= (\gamma-132)(\gamma-6)^{10}\gamma$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}\right)$ adalah $\gamma_1^{L^+}=132$, $\gamma_2^{L^+}=6$, dan $\gamma_3^{L^+}=0$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^{L^+})=1$, $m(\gamma_2^{L^+})=10$, dan $m(\gamma_3^{L^+})=1$. Maka energi dari $DDL^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}\right)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}\right) &= \left(m(\gamma_1^{L^+})|\gamma_1^{L^+}|\right)+\left(m(\gamma_2^{L^+})|\gamma_2^{L^+}|\right)+\left(m(\gamma_3^{L^+})|\gamma_3^{L^+}|\right) \\ &= (1\times|132|)+(10\times|6|)+(1\times|0|) \\ &= 192. \end{aligned}$$

Jadi, energi $DDSL$ dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}$ adalah 192, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks $DDSL$ dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{12})}$ adalah 192.

3.4.3 Grup Dihedral D_{16}

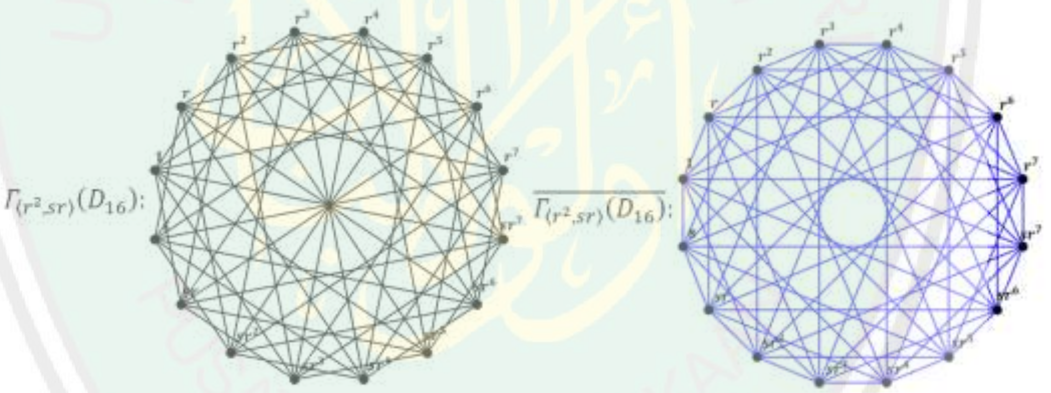
Subgrup dari grup dihedral D_{16} yang dibangun oleh $\langle r^2,sr\rangle$ adalah $\{1,r^2,r^4,r^6,sr,sr^3,sr^5,sr^7\}$. Dua unsur pada grup dihedral D_{16} apabila dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ dapat disajikan dengan Table Cayley berikut.

Tabel 3.18 Tabel Cayley Grup Dihedral $\boldsymbol{D_{16}}$

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7

r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Berdasarkan Tabel 3.18 dan definisi graf subgrup maka dapat digambarkan graf subgrup $\Gamma_{\langle r^2, sr\rangle}(D_{16})$ beserta komplemennya seperti berikut



Gambar 3.12 Graf $\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^2, sr\rangle}(D_{16})}$ dan $\boldsymbol{\overline{\Gamma_{\langle r^2, sr\rangle}(D_{16})}}$

Dari Gambar 3.12 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2, sr\rangle}(D_{16})}$ sebagai berikut

$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2, sr\rangle}(D_{16})}\right) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\ 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\ 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\ 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\ 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\ 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\ 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\ 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\ 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\ 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\ 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\ 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 \\ 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 \\ 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 \\ 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 \\ 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh matriks *distance* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{16})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{d}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{16})}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks distance diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{16})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{16})}\right) =$$

$$\begin{bmatrix}
22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22
\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{16})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{16})}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{16})}\right) - \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{16})}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}
22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22
\end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix}
0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14\\
15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15\\
14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14\\
15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15\\
14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14\\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15\\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14\\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15\\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15\\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14\\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15\\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14\\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15\\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14\\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15\\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0
\end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
22 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 \\
-15 & 22 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 \\
-14 & -15 & 22 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 \\
-15 & -14 & -15 & 22 & -15 & -14 & -15 & -14 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 \\
-14 & -15 & -14 & -15 & 22 & -15 & -14 & -15 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 \\
-15 & -14 & -15 & -14 & -15 & 22 & -15 & -14 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 \\
-14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & 22 & -15 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 \\
-15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & 22 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 \\
-15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & 22 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 \\
-14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -15 & 22 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 \\
-15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -14 & -15 & 22 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 \\
-14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -15 & -14 & -15 & 22 & -15 & -14 & -15 & -14 \\
-15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -14 & -15 & -14 & -15 & 22 & -15 & -14 & -15 \\
-14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & 22 & -15 & -14 \\
-15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & 22 & -15 \\
-14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & -14 & -15 & 22
\end{bmatrix}
$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$
p(\gamma) = (22-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-7)(\gamma-37)}{\gamma-22}\right)\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma^2-30\gamma-274)}{(\gamma-7)(\gamma-37)}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma+22)(\gamma-36)(\gamma-38)}{\gamma^2-30\gamma-274}\right)\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma^2-2\gamma-1398)}{(\gamma+22)(\gamma-38)}\right)\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma+51)(\gamma-39)}{\gamma^2-2\gamma-1398}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma^2+26\gamma-2580)}{(\gamma+51)(\gamma-39)}\right)\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma-40)(\gamma+80)}{\gamma^2+26\gamma-2580}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma^2+54\gamma-3820)}{(\gamma-40)(\gamma+80)}\right)\left(-\frac{(\gamma+109)(\gamma-36)(\gamma-41)}{\gamma^2+54\gamma-3820}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma^2+82\gamma-5118)}{(\gamma+109)(\gamma-41)}\right)\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma+138)(\gamma-42)}{\gamma^2+82\gamma-5118}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma^2+110\gamma-6474)}{(\gamma+138)(\gamma-42)}\right)\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma+167)(\gamma-43)}{\gamma^2+110\gamma-6474}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-36)(\gamma^2+138\gamma-7888)}{(\gamma+167)(\gamma-43)}\right)\left(-\frac{(\gamma+196)(\gamma-36)(\gamma-44)}{\gamma^2+138\gamma-7888}\right)
$$

$$
= (\gamma-44)(\gamma-36)^{14}(\gamma+196)
$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{16})}\right)$ adalah $\gamma_1^L = 44$, $\gamma_2^L = 36$, dan $\gamma_3^L = -196$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L) = 1$, $m(\gamma_2^L) = 14$, dan $m(\gamma_3^L) = 1$. Maka energi dari $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{16})}\right)$ sebagai berikut

$$
E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{16})}\right) = (m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L|) + (m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L|) + (m(\gamma_3^L)|\gamma_3^L|)
$$

$$= (1 \times |44|) + (14 \times |36|) + (1 \times |-196|)$$

$$= 744$$

Jadi, energi *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2, sr\rangle}(D_{16})}$ adalah 744, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2, sr\rangle}(D_{16})}$ adalah 744.

Diperoleh juga matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2, sr\rangle}(D_{16})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2, sr\rangle}(D_{16})}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2, sr\rangle}(D_{16})}\right) + \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2, sr\rangle}(D_{16})}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}
22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22
\end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix}
0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 & 15 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 & 14 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0 & 15 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 0
\end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
22 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
15 & 22 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
14 & 15 & 22 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
15 & 14 & 15 & 22 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 22 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 22 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 22 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 22 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 22 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 22 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 22 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 22 & 15 & 14 & 15 & 14 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 22 & 15 & 14 & 15 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 22 & 15 & 14 \\
15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 22 & 15 \\
14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 14 & 15 & 22
\end{bmatrix}
$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_8), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$
p(\gamma) = (22-\gamma)\left(-\frac{(\gamma-7)(\gamma-37)}{\gamma-22}\right)\left(-\frac{(\gamma-8)(\gamma^2-58\gamma+342)}{(\gamma-7)(\gamma-37)}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-66)(\gamma-6)(\gamma-8)}{\gamma^2-58\gamma+342}\right)\left(-\frac{(\gamma-8)(\gamma^2-86\gamma+450)}{(\gamma-66)(\gamma-6)}\right)\left(-\frac{(\gamma-5)(\gamma-95)(\gamma-8)}{\gamma^2-86\gamma+450}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-8)(\gamma^2-114\gamma+500)}{(\gamma-5)(\gamma-95)}\right)\left(-\frac{(\gamma-124)(\gamma-4)(\gamma-8)}{\gamma^2-114\gamma+500}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-8)(\gamma^2-142\gamma+492)}{(\gamma-124)(\gamma-4)}\right)\left(-\frac{(\gamma-3)(\gamma-8)(\gamma-153)}{\gamma^2-142\gamma+492}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-8)(\gamma^2-170\gamma+426)}{(\gamma-3)(\gamma-153)}\right)\left(-\frac{(\gamma-2)(\gamma-182)(\gamma-8)}{\gamma^2-170\gamma+426}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-8)(\gamma^2-198\gamma+302)}{(\gamma-2)(\gamma-182)}\right)\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma-211)(\gamma-8)}{\gamma^2-198\gamma+302}\right)
$$

$$
\left(-\frac{(\gamma-8)(\gamma^2-226\gamma+120)}{(\gamma-1)(\gamma-211)}\right)\left(-\frac{(\gamma-8)(\gamma-240)\gamma}{\gamma^2-226\gamma+120}\right)
$$

$$
= (\gamma-240)(\gamma-8)^{14}\gamma
$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{16})}\right)$ adalah $\gamma_1^{L^+}=240$, $\gamma_2^{L^+}=8$, dan $\gamma_3^{L^+}=-0$ dengan multiplisitas $m\left(\gamma_1^{L^+}\right)=1$, $m\left(\gamma_2^{L^+}\right)=14$, dan $m\left(\gamma_3^{L^+}\right)=1$. Maka energi dari $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}\right)$ sebagai berikut

$$E_{DDL^+}(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{16})}) = (m(\gamma_1^{L^+})|\gamma_1^{L^+}|) + (m(\gamma_2^{L^+})|\gamma_2^{L^+}|) + (m(\gamma_3^{L^+})|\gamma_3^{L^+}|)$$

$$= (1 \times |240|) + (14 \times |8|) + (1 \times |-0|)$$

$$= 352.$$

Jadi, energi *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{16})}$ adalah 343, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{16})}$ adalah 343.

3.4.4 Grup Dihedral D_{2n}

Berdasarkan energi yang telah ditemukan, diperoleh energi *DDL* dan energi *DDSL* komplemen graf subgrup dari beberapa grup dihedral sebagai berikut.

Tabel 3.19 Energi *DDL* dari Beberapa Komplemen Graf Subgrup $\langle \boldsymbol{r^2}, \boldsymbol{sr}\rangle$ dari Grup Dihedral $(\boldsymbol{D_{2n}})$

n	D_{2n}	E_{DDL}
4	D_8	$152 = (14 \cdot 16) - (20 \cdot 4) + 8 = (14 \cdot 4^2) - (20 \cdot 4) + 8$
6	D_{12}	$392 = (14 \cdot 36) - (20 \cdot 6) + 8 = (14 \cdot 6^2) - (20 \cdot 6) + 8$
8	D_{16}	$744 = (14 \cdot 64) - (20 \cdot 8) + 8 = (14 \cdot 8^2) - (20 \cdot 8) + 8$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	D_{2n}	$14n^2 - 20n + 8$

Tabel 3.20 *Energi DDSL* dari Beberapa Graf Subgrup $\langle \boldsymbol{r^2}, \boldsymbol{sr}\rangle$ dari Grup Dihedral $(\boldsymbol{D_{2n}})$

n	D_{2n}	E_{DDL^+}
4	D_8	$80 = 2 \cdot 40 = 2(3 \cdot 16 - 2 \cdot 4) = 2(3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4)$
6	D_{12}	$192 = 2 \cdot 96 = 2(3 \cdot 36 - 2 \cdot 6) = 2(3 \cdot 6^2 - 2 \cdot 6)$
8	D_{16}	$352 = 2 \cdot 176 = 2(3 \cdot 64 - 2 \cdot 8) = 2(3 \cdot 8^2 - 2 \cdot 8)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	D_{2n}	$2(3n^2 - 2n) = 6n^2 - 4n$

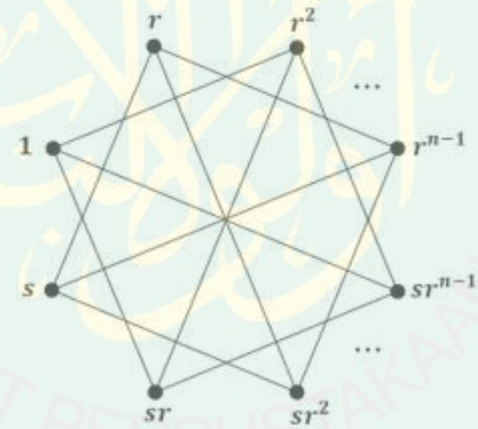
Teorema 7

Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dan $\langle r^2, sr\rangle = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$ subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$. Energi $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral D_{2n} adalah

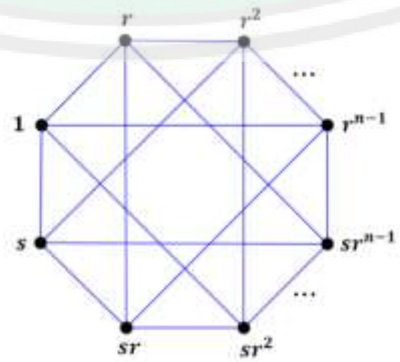
$$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) = 14n^2 - 20n + 8$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$, untuk n genap dan $n \geq 4$. Ambil subgrup normal $\langle r^2, sr\rangle = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$ di D_{2n}. Sesuai definisi graf subgrup, maka diperoleh graf $\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})$ sebagai berikut



dan graf $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut



Sehingga diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
3n-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 3n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 3n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 3n-2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 3n-2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 3n-2 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 3n-2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3n-2
\end{bmatrix}
\end{array}$$

dan matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 \\
2n-1 & 0 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 \\
2n-2 & 2n-1 & 0 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 0 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 & 0 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 \\
2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 0 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 \\
2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 & 2n-2 & 2n-1 & 0 & \cdots & 2n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}$ adalah sebagai berikut

$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
3n-2 & -(2n-1) & -(2n-2) & \cdots & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-2) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-2) \\
-(2n-1) & 3n-2 & -(2n-1) & \cdots & -(2n-2) & -(2n-2) & -(2n-1) & -(2n-2) & \cdots & -(2n-1) \\
-(2n-2) & -(2n-1) & 3n-2 & \cdots & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-2) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-(2n-1) & -(2n-2) & -(2n-1) & \cdots & 3n-2 & -(2n-2) & -(2n-1) & -(2n-2) & \cdots & -(2n-1) \\
-(2n-1) & -(2n-2) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-2) & 3n-2 & -(2n-1) & -(2n-2) & \cdots & -(2n-1) \\
-(2n-2) & -(2n-1) & -(2n-2) & \cdots & -(2n-1) & -(2n-1) & 3n-2 & -(2n-1) & \cdots & -(2n-2) \\
-(2n-1) & -(2n-2) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-2) & -(2n-2) & -(2n-1) & 3n-2 & \cdots & -(2n-1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-(2n-2) & -(2n-1) & -(2n-2) & \cdots & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-2) & -(2n-1) & \cdots & 3n-2
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma \boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi pada $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma \boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & r & & r^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} (3n-2)-\gamma & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -\frac{(\gamma-(n-1))(\gamma-(5n-3))}{\gamma-(3n-2)} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -\frac{(\gamma-(5n-4))(\gamma^2-(4n-2)\gamma-(5n^2-6n+2))}{(\gamma-(n-1))(\gamma-(5n-3))} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{(\gamma+(4n^2-8n+4))(\gamma-(5n-4))(\gamma-(6n-4))}{f(\gamma)} \end{bmatrix} \end{array}$$

Maka $det\left(\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right)-\gamma\boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\gamma)=\big(\gamma-(6n-4)\big)\big(\gamma-(5n-4)\big)^{2n-2}\big(\gamma+(4n^2-8n+4)\big)$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka diperoleh $\gamma_1^L=6n-4$, $\gamma_2^L=5n-4$ dan $\gamma_3^L=-(4n^2-8n+4)$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L)=1$, $m(\gamma_2^L)=2n-2$ dan $m(\gamma_3^L)=1$. Energi $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n\geq 4$ adalah

$$\begin{aligned} E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) &= m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L|+m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L|+m(\gamma_3^L)|\gamma_3^L| \\ &= 1\times|6n-4|+2n-2\times|5n-4|+1\times|-(4n^2-8n+4)| \\ &= (6n-4)+(10n^2-18n+8)+(4n^2-8n+4) \\ &= 14n^2-20n+8 \end{aligned}$$

Teorema 8

Misalkan grup dihedral $D_{2n}=\{1,r,r^2,\dots,r^{n-1},s,sr,sr^2,\dots,sr^{n-1}\}$ dan $\langle r^2,sr\rangle=\{1,r^2,\dots,r^{n-2},sr,sr^3,\dots,sr^{n-1}\}$ subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n\geq 4$. Energi $DDL^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral D_{2n} adalah

$$E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right)=6n^2-4n$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$, untuk n genap dan $n \geq 4$. Ambil subgrup normal $\langle r^2, sr\rangle = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$ di D_{2n}. Sesuai definisi graf subgrup, maka diperoleh graf $\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})$ dan graf $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}$ seperti pada Teorema 7. Diperoleh pula matriks transmisi dan matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}$ seperti pada Teorema 7. Sehingga didapatkan matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}$ adalah sebagai berikut

$\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
3n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 \\
2n-1 & 3n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 \\
2n-2 & 2n-1 & 3n-2 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 3n-2 & 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 & 3n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 \\
2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 3n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 \\
2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 2n-2 & 2n-2 & 2n-1 & 3n-2 & \cdots & 2n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-2 & 2n-1 & \cdots & 3n-2
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma\boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi pada $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma\boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
(3n-2)-\gamma & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & -\dfrac{(\gamma-(n-1))(\gamma-(5n-3))}{\gamma-(3n-2)} & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & -\dfrac{(\gamma-n)(\gamma^2-(8n-6)\gamma+(7n^2-14n+6))}{(\gamma-(n-1))(\gamma-(5n-3))} & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{(\gamma-n)(\gamma-(4n^2-2n))\gamma}{f(\gamma)}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Maka $det\left(\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma\boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\gamma) = \left(\gamma - (4n^2 - 2n)\right)(\gamma - n)^{2n-2}\gamma$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka diperoleh $\gamma_1^{L^+} = 4n^2 - 2n$, $\gamma_2^{L^+} = n$, dan $\gamma_3^{L^+} = -0$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^{L^+}) = 1$, $m(\gamma_2^{L^+}) = 2n - 2$, dan $m(\gamma_3^{L^+}) = 1$. Energi $DDL^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2, sr\rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2, sr\rangle}(D_{2n})}\right) = m(\gamma_1^{L^+})|\gamma_1^{L^+}| + m(\gamma_2^{L^+})|\gamma_2^{L^+}| + m(\gamma_3^{L^+})|\gamma_3^{L^+}|$$

$$= 1 \times |4n^2 - 2n| + 2n - 2 \times |n| + 1 \times |-0|$$

$$= (4n^2 - 2n) + (2n^2 - 2n) + 0 = 6n^2 - 4n$$

3.5 Energi *DDL* dan *DDSL* Komplemen Graf Subgrup $\langle r^3 \rangle$ dari Grup Dihedral D_{2n}.

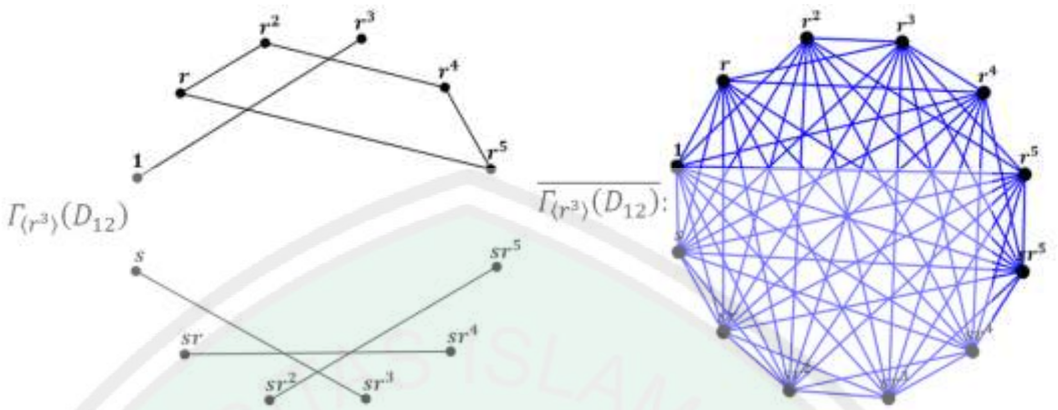
3.5.1 Grup Dihedral D_{12}

Subgrup dari grup dihedral D_{12} yang dibangun oleh $\langle r^3 \rangle$ adalah $\{1, r^3\}$. Dua unsur pada grup dihedral D_{12} apabila dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ dapat disajikan dengan Tabel Cayley berikut.

Tabel 3.21 Tabel Cayley Grup Dihedral D_{12}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

Berdasarkan Tabel 3.21 dan definisi graf subgrup maka dapat digambarkan graf subgrup $\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{12})$ beserta komplemennya seperti berikut



Gambar 3.13 Graf $\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{12})}$ dan $\overline{\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{12})}}$

Dari Gambar 3.13 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{12})}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh matriks *distance* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{d}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{12})}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks *distance* diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{12})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}\right)=\begin{bmatrix}12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&13&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&13&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}\right)=\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}\right)-\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}\right)$$

$$\begin{bmatrix}12&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&13&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&13&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&12&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&13&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&12\end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}0&11&11&11&11&11&11&11&11&11&11&11\\11&0&11&11&11&11&11&11&11&11&11&11\\11&11&0&11&11&11&11&11&11&11&11&11\\11&11&11&0&11&11&11&11&11&11&11&11\\11&11&11&11&0&11&11&11&11&11&11&11\\11&11&11&11&11&0&11&11&11&11&11&11\\11&11&11&11&11&11&0&11&11&11&11&11\\11&11&11&11&11&11&11&0&11&11&11&11\\11&11&11&11&11&11&11&11&0&11&11&11\\11&11&11&11&11&11&11&11&11&0&11&11\\11&11&11&11&11&11&11&11&11&11&0&11\\11&11&11&11&11&11&11&11&11&11&11&0\end{bmatrix}$$

$=$

$$\begin{bmatrix} 12 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & 13 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & 13 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & 12 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & 13 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 13 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 12 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 12 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 12 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 12 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 12 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$det\left(\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}\right) - \gamma\boldsymbol{I}\right)$$

$$= det\left(\begin{bmatrix} 12-\gamma & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & 13-\gamma & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & 13-\gamma & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & 12-\gamma & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & 13-\gamma & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 13-\gamma & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 12-\gamma & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 12-\gamma & -11 & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 12-\gamma & -11 & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 12-\gamma & -11 & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 12-\gamma & -11 \\ -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & -11 & 12-\gamma \end{bmatrix}\right)$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan eliminasi menggunakan *software* Maple 18, diperoleh polinomial karakteristik $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}\right)$ sebagai berikut

$$p(\gamma) = (12-\gamma)\left(-\frac{\gamma^2 - 25\gamma + 35}{\gamma - 12}\right)\left(-\frac{(\gamma-24)(\gamma^2 - 14\gamma - 218)}{\gamma^2 - 25\gamma + 35}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-23)(\gamma^2 - 3\gamma - 482)}{\gamma^2 - 14\gamma - 218}\right)\left(-\frac{(\gamma-24)(\gamma^2 + 8\gamma - 735)}{\gamma^2 - 3\gamma - 482}\right)\left(-\frac{(\gamma-24)(\gamma^2 + 19\gamma - 988)}{\gamma^2 + 8\gamma - 735}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-23)(\gamma^2 + 30\gamma - 1252)}{\gamma^2 + 19\gamma - 988}\right)\left(-\frac{(\gamma-23)(\gamma^2 + 41\gamma - 1516)}{\gamma^2 + 30\gamma - 1252}\right)\left(-\frac{(\gamma-23)(\gamma^2 + 52\gamma - 1780)}{\gamma^2 + 41\gamma - 1516}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-23)(\gamma^2 + 63\gamma - 2044)}{\gamma^2 + 52\gamma - 1780}\right)\left(-\frac{(\gamma-23)(\gamma^2 + 74\gamma - 2308)}{\gamma^2 + 63\gamma - 2044}\right)\left(-\frac{(\gamma-23)(\gamma - 23{,}67)(\gamma + 108{,}67)}{\gamma^2 + 74\gamma - 2308}\right)$$

$$= (\gamma - 23{,}67)(\gamma + 108{,}67)(\gamma - 24)^3(\gamma - 23)^7$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}\right)$ adalah $\gamma_1^L = 24$, $\gamma_2^L = 23{,}67$, $\gamma_3^L = 23$, dan $\gamma_4^L = -108{,}67$

dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L) = 3$, $m(\gamma_2^L) = 1$, $m(\gamma_3^L) = 7$, dan $m(\gamma_4^L) = 1$. Maka energi dari $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}\right)$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}\right) &= (m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L|) + (m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L|) + (m(\gamma_3^L)|\gamma_3^L|) + (m(\gamma_4^L)|\gamma_4^L|) \\ &= (3 \times |24|) + (1 \times |23{,}67|) + (7 \times |23|) + (1 \times |-108{,}67|) \\ &= 365{,}34 \end{aligned}$$

Jadi, energi *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}$ adalah 365,34, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}$ adalah 365,34.

Diperoleh juga matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}\right) + \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 13 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 13 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 12 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 13 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 13 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 12 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 12 & 11 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 12 & 11 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 12 & 11 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 12 & 11 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut dapat direduksi untuk memperoleh polinomial karakteristik. Dengan eliminasi menggunakan *software* Maple 18, diperoleh polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}\right)$ sebagai berikut

$$p(\gamma) = (12-\gamma)\left(-\frac{\gamma^2-25\gamma+35}{\gamma-12}\right)\left(-\frac{(\gamma-2)(\gamma^2-36\gamma+46)}{\gamma^2-25\gamma+35}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma^2-47\gamma+68)}{\gamma^2-36\gamma+46}\right)\left(-\frac{(\gamma-2)(\gamma^2-58\gamma+79)}{\gamma^2-47\gamma+68}\right)\left(-\frac{(\gamma-2)(\gamma^2-69\gamma+90)}{\gamma^2-58\gamma+79}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma^2-80\gamma+112)}{\gamma^2-69\gamma+90}\right)\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma^2-91\gamma+134)}{\gamma^2-80\gamma+112}\right)\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma^2-102\gamma+156)}{\gamma^2-91\gamma+134}\right)$$

$$\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma^2-113\gamma+178)}{\gamma^2-102\gamma+156}\right)\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma^2-124\gamma+200)}{\gamma^2-113\gamma+178}\right)\left(-\frac{(\gamma-1)(\gamma-133{,}33)(\gamma-1{,}67)}{\gamma^2-124\gamma+200}\right)$$

$$= (\gamma-133{,}33)(\gamma-1{,}67)(\gamma-2)^3(\gamma-1)^7$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}\right)$ adalah $\gamma_1^{L^+}=133{,}33$, $\gamma_2^{L^+}=2$, $\gamma_3^{L^+}=1{,}67$, dan $\gamma_4^{L^+}=1$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^{L^+})=1$, $m(\gamma_2^{L^+})=3$, $m(\gamma_3^{L^+})=1$, dan $m(\gamma_4^{L^+})=7$.

Maka energi dari $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}\right)$ sebagai berikut

$$E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}\right)$$

$$= \left(m(\gamma_1^{L^+})|\gamma_1^{L^+}|\right) + \left(m(\gamma_2^{L^+})|\gamma_2^{L^+}|\right) + \left(m(\gamma_3^{L^+})|\gamma_3^{L^+}|\right) + \left(m(\gamma_4^{L^+})|\gamma_4^{L^+}|\right)$$

$$= (1\times|133{,}33|) + (3\times|2|) + (1\times|1{,}67|) + (7\times|1|)$$

$$= 148.$$

Jadi, energi *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}$ adalah 148, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{12})}$ adalah 148.

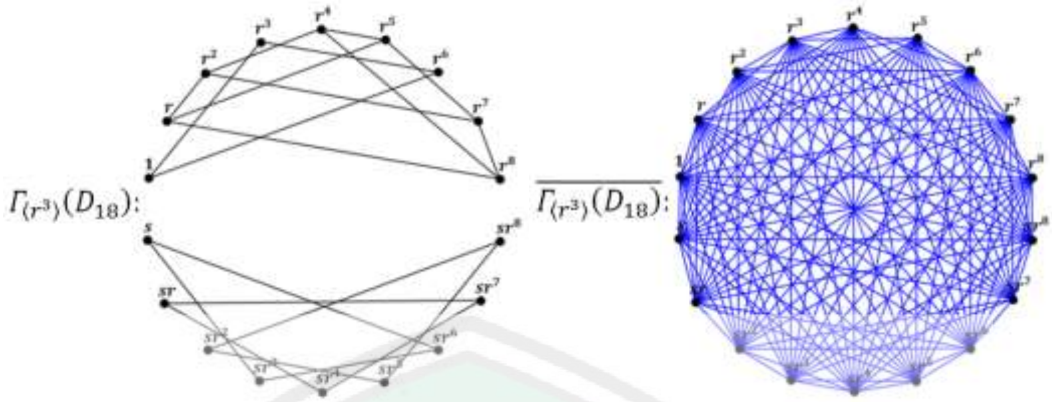
3.5.2 Grup Dihedral D_{18}

Subgrup dari grup dihedral D_{18} yang dibangun oleh $\langle r^3\rangle$ adalah $\{1, r^3, r^6\}$. Dua unsur pada grup dihedral D_{18} apabila dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ dapat disajikan dengan Tabel Cayley berikut.

Tabel 3.22 Tabel Cayley Grup Dihedral D_{18}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^5	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3
r^6	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2
r^7	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr
r^8	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2	r^3
sr^6	sr^6	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r	r^2
sr^7	sr^7	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1	r
sr^8	sr^8	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8	1

Berdasarkan Tabel 3.22 dan definisi graf subgrup maka dapat digambarkan graf subgrup $\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})$ beserta komplemennya seperti berikut



Gambar 3.14 Graf $\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})}$ dan $\overline{\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})}}$

Dari Gambar 3.14 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})}\right) =$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0
\end{bmatrix}$$

dan diperoleh matriks *distance* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})}$sebagai berikut

$$\boldsymbol{d}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})}\right) =$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

Dari matriks *distance* diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{18})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{18})}\right) =$$

$$\begin{bmatrix}
19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 19 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19
\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{18})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{18})}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{18})}\right) - \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{18})}\right)$$

$$
\begin{bmatrix}
19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 19 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19
\end{bmatrix}
$$

$$
-\begin{bmatrix}
0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 \\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
=
$$

$$
\begin{bmatrix}
19 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 \\
-17 & 20 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 \\
-17 & -17 & 20 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 \\
-17 & -17 & -17 & 19 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 \\
-17 & -17 & -17 & -17 & 20 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 \\
-17 & -17 & -17 & -17 & -17 & 20 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 \\
-17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & 19 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 \\
-17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & 20 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 \\
-17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & 20 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 \\
-17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & 19 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 \\
-17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & 19 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 \\
-17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & 19 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 \\
-17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & 19 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 \\
-17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & 19 & -17 & -17 & -17 & -17 \\
-17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & 19 & -17 & -17 & -17 \\
-17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & 19 & -17 & -17 \\
-17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & 19 & -17 \\
-17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & -17 & 19
\end{bmatrix}
$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_{12}), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\gamma) = (\gamma - 36{,}67)(\gamma + 269{,}67)(\gamma - 37)^5(\gamma - 36)^{11}$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})}\right)$ adalah $\gamma_1^L = 37$, $\gamma_2^L = 36{,}67$, $\gamma_3^L = 36$, dan $\gamma_4^L = -269{,}67$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L) = 5, m(\gamma_2^L) = 1, m(\gamma_3^L) = 11$, dan $m(\gamma_4^L) = 1$. Maka energi dari $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})}\right)$ sebagai berikut

$$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})}\right) = (m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L|) + (m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L|) + (m(\gamma_3^L)|\gamma_3^L|) + (m(\gamma_4^L)|\gamma_4^L|)$$

$$= (5 \times |37|) + (1 \times |36{,}67|) + (11 \times |36|)$$

$$+ (1 \times |-269{,}67|)$$

$$= 887{,}34$$

Jadi, energi *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})}$ adalah 887,34, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})}$ adalah 887,34.

Diperoleh juga matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})}\right) + \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})}\right)$$

$$\begin{bmatrix}
19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 19 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19
\end{bmatrix}$$

$$
+\begin{bmatrix}
0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
19 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 20 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 20 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 19 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 20 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 20 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 19 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 20 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 20 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 19 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 19 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 19 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 19 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 19 & 17 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 19 & 17 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 19 & 17 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 19 & 17\\
17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 17 & 19
\end{bmatrix}
$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_{12}), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\gamma) = (\gamma - 308{,}33)(\gamma - 3{,}67)(\gamma - 3)^5(\gamma - 2)^{11}$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})}\right)$ adalah $\gamma_1^{L^+} = 308{,}33$, $\gamma_2^{L^+} = 3$, $\gamma_3^{L^+} = 3{,}67$, dan $\gamma_4^{L^+} = 2$ dengan multiplisitas $m\left(\gamma_1^{L^+}\right) = 1$, $m\left(\gamma_2^{L^+}\right) = 5$, $m\left(\gamma_3^{L^+}\right) = 1$, dan $m\left(\gamma_2^{L^+}\right) = 11$.

Maka energi dari $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})}\right)$ sebagai berikut

$E_{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{18})}\right)$

$= \left(m(\gamma_1^{L^+})|\gamma_1^{L^+}|\right) + \left(m(\gamma_2^{L^+})|\gamma_2^{L^+}|\right) + \left(m(\gamma_3^{L^+})|\gamma_3^{L^+}|\right) + \left(m(\gamma_4^{L^+})|\gamma_4^{L^+}|\right)$

$= (1 \times |308{,}33|) + (5 \times |3|) + (1 \times |2{,}67|) + (11 \times |2|)$

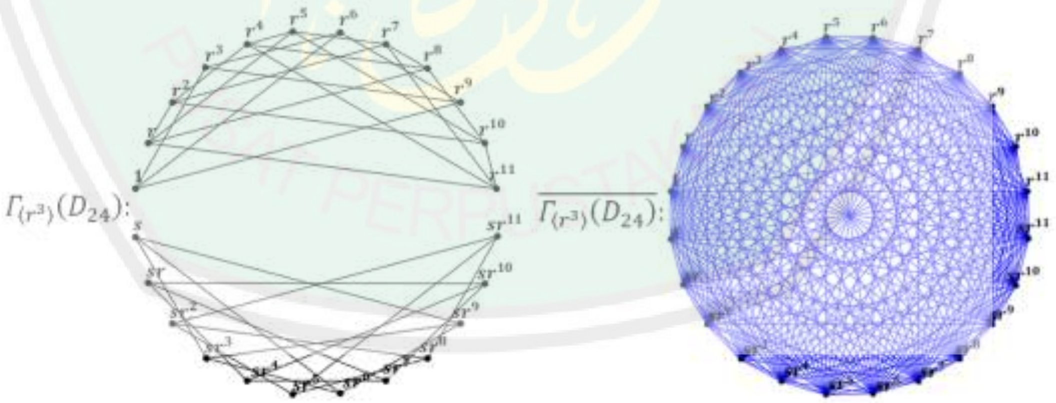
$= 348.$

Jadi, energi *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{18})}$ adalah 348, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{18})}$ adalah 348.

3.5.3 Grup Dihedral D_{24}

Subgrup dari grup dihedral D_{24} yang dibangun oleh $\langle r^3 \rangle$ adalah $\{1, r^3, r^6, r^9\}$. Dua unsur pada grup dihedral D_{24} apabila dioperasikan menggunakan operasi komposisi $(\circ)$ dapat disajikan dengan Tabel Cayley Komplemen Subgrup dari Grup Dihedral D_{24} terdapat pada Lampiran.

Berdasarkan Tabel Cayley Komplemen Subgrup dari Grup Dihedral D_{24} dan definisi graf subgrup maka dapat digambarkan graf subgrup $\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{24})$ beserta komplemennya seperti berikut



Gambar 3.15 Graf $\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{24})}$ dan $\overline{\boldsymbol{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{24})}}$

Dari Gambar 3.15 dapat diperoleh matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{24})}$ sebagai berikut

$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{24})}\right) =$

$$\begin{bmatrix}
0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0
\end{bmatrix}$$

dan diperoleh matriks *distance* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{24})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{d}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{24})}\right) =$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}$$

Dari matriks *distance* diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{24})}$ sebagai berikut

$$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{24})}\right) =$$

$$\begin{bmatrix}
26&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&27&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&27&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&26&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&27&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&27&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&27&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&27&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&27&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&27&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26
\end{bmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{24})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{24})}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{24})}\right) - \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{24})}\right)$$

$$\begin{bmatrix}
26&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&27&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&27&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&26&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&27&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&27&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&27&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&27&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&27&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&27&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&26
\end{bmatrix}$$

$$
-\begin{bmatrix}
0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
=
$$

$$
\begin{bmatrix}
26 & -23 \\
-23 & 27 & -23 \\
-23 & -23 & 27 & -23 \\
-23 & -23 & -23 & 26 & -23 \\
-23 & -23 & -23 & -23 & 27 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 \\
-23 & -23 & -23 & -23 & -23 & 27 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 \\
-23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & 26 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 \\
-23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & 27 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 \\
-23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & 27 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 \\
-23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & 26 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 \\
-23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & 27 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 \\
-23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & 27 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 \\
-23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & 26 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 \\
-23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & 26 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 \\
-23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & 26 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 \\
-23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & 26 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 \\
-23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & 26 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 \\
-23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & 26 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 \\
-23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & 26 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 \\
-23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & 26 & -23 & -23 & -23 & -23 \\
-23 & 26 & -23 & -23 & -23 \\
-23 & 26 & -23 & -23 \\
-23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & -22 & -23 & -23 & -23 & -23 & -23 & 26 & -23 \\
-23 & 26
\end{bmatrix}
$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_{12}), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\gamma) = (\gamma - 49{,}67)(\gamma + 502{,}67)(\gamma - 50)^7(\gamma - 49)^{15}$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{24})}\right)$ adalah $\gamma_1^L = 50$, $\gamma_2^L = 49{,}67$, $\gamma_3^L = 49$, dan $\gamma_2^L = -502{,}67$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L) = 7$, $m(\gamma_2^L) = 1$, $m(\gamma_3^L) = 15$, dan $m(\gamma_4^L) = 1$. Maka energi dari $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{24})}\right)$ sebagai berikut

$$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{24})}\right) = (m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L|) + (m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L|) + (m(\gamma_3^L)|\gamma_3^L|) + (m(\gamma_4^L)|\gamma_4^L|)$$

$= (7 \times |50|) + (1 \times |49{,}67|) + (15 \times |49|) + (1 \times |-502{,}67|)$

$= 1637{,}34$

Jadi, energi *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{24})}$ adalah 1637,34, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{24})}$ adalah 1637,34.

Diperoleh juga matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{24})}$ adalah

$$\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{24})}\right) = \boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{24})}\right) + \boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{24})}\right)$$

$$\begin{bmatrix}
26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 26
\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}
0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 & 13 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 1 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 22 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 0
\end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix}
26 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 27 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 27 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 26 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 27 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 27 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 26 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 27 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 27 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 26 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 27 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 27 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 26 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 26 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 26 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 26 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 26 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 26 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 26 & 23 & 23 & 23 & 13 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 26 & 1 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 26 & 23 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 26 & 23 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 22 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 26 & 23 \\
23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 23 & 26
\end{bmatrix}
$$

Dengan menggunakan cara yang sama pada grup dihedral (D_{12}), diperoleh polinomial karakteristik sebagai berikut.

$$p(\gamma) = (\gamma - 555{,}33)(\gamma - 3{,}67)(\gamma - 4)^7(\gamma - 3)^{15}$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka didapatkan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{DDL}^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{24})}\right)$ adalah $\gamma_1^{L^+} = 555{,}33$, $\gamma_2^{L^+} = 4$, $\gamma_3^{L^+} = 3{,}67$, dan $\gamma_4^{L^+} = 3$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^{L^+}) = 1$, $m(\gamma_2^{L^+}) = 7$, $m(\gamma_3^{L^+}) = 1$, dan $m(\gamma_2^{L^+}) = 15$.

Maka energi dari $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{24})}\right)$ sebagai berikut

$E_{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{24})}\right)$

$= \left(m(\gamma_1^{L^+})|\gamma_1^{L^+}|\right) + \left(m(\gamma_2^{L^+})|\gamma_2^{L^+}|\right) + \left(m(\gamma_3^{L^+})|\gamma_3^{L^+}|\right) + \left(m(\gamma_4^{L^+})|\gamma_4^{L^+}|\right)$

$= (1 \times |555{,}33|) + (7 \times |4|) + (1 \times |3{,}67|) + (15 \times |3|)$

$= 632.$

Jadi, energi *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{24})}$ adalah 632, artinya jumlah dari nilai eigen mutlak yang diperoleh dari matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{24})}$ adalah 632.

3.5.4 Grup Dihedral D_{2n}

Berdasarkan energi yang telah ditemukan, diperoleh energi *DDL* dan energi *DDSL* komplemen graf subgrup dari beberapa grup dihedral sebagai berikut.

Tabel 3.23 Energi *DDL* dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^3 \rangle$ dari Grup Dihedral (D_{2n})

n	D_{2n}	E_{DDL}
6	D_{12}	$365{,}34 = \frac{(38 \cdot 6^2) - (48 \cdot 6) + 16{,}02}{3}$
9	D_{18}	$887{,}34 = \frac{(38 \cdot 9^2) - (48 \cdot 9) + 16{,}02}{3}$
12	D_{24}	$1637{,}34 = \frac{(38 \cdot 12^2) - (48 \cdot 12) + 16{,}02}{3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	D_{2n}	$\frac{38n^2 - 48n + 16{,}02}{3}$

Tabel 3.24 Energi *DDSL* dari Beberapa Graf Subgrup $\langle r^3 \rangle$ dari Grup Dihedral (D_{2n})

n	D_{2n}	E_{DDL^+}
6	D_{12}	$148 = \frac{14 \cdot 6^2 - 10 \cdot 6}{3}$
9	D_{18}	$348 = \frac{14 \cdot 9^2 - 10 \cdot 9}{3}$
12	D_{24}	$632 = \frac{14 \cdot 12^2 - 10 \cdot 12}{3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	D_{2n}	$\frac{14n^2 - 10n}{3}$

Teorema 9

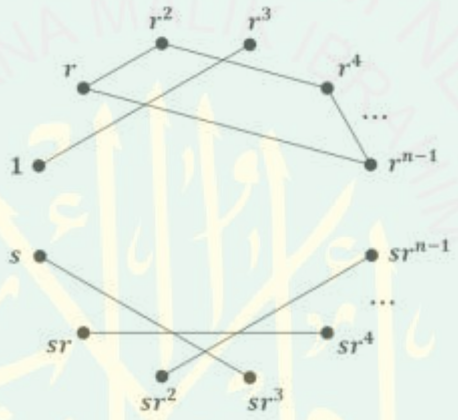
Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dan $\langle r^3 \rangle = \{1, r^3, \dots, r^{n-3}\}$ subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk n

kelipatan 3 dan $n \geq 6$. Energi $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral D_{2n} adalah

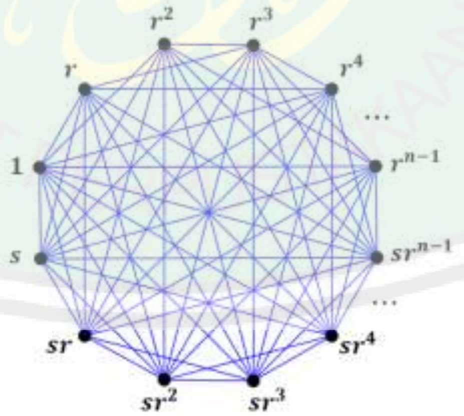
$$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{2n})}\right) = \frac{38n^2 - 48n + 16,02}{3}$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$, untuk n kelipatan 3 dan $n \geq 6$. Ambil subgrup normal $\langle r^3 \rangle = \{1, r^3, \dots, r^{n-3}\}$ di D_{2n}. Sesuai definisi graf subgrup, maka diperoleh graf $\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{2n})$ sebagai berikut



dan graf $\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut



Sehingga diperoleh matriks transmisi dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$\boldsymbol{T_r}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{bmatrix} \frac{7n-6}{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{7n-3}{3} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7n-3}{3} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{7n-3}{3} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{7n-6}{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{7n-6}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{7n-6}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{7n-6}{3} \end{bmatrix} \end{array}$$

dan matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{2n})}$ sebagai berikut

$\boldsymbol{DD}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n-1 & 0 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n-1 & 0 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 0 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 0 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 0 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 0 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks DDL dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{2n})}$ adalah sebagai berikut

$\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
\frac{7n-6}{3} & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\
-(2n-1) & \frac{7n-3}{3} & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\
-(2n-1) & -(2n-1) & \frac{7n-3}{3} & \cdots & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & \frac{7n-3}{3} & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\
-(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) & \frac{7n-6}{3} & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\
-(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) & -(2n-1) & \frac{7n-6}{3} & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) \\
-(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \frac{7n-6}{3} & \cdots & -(2n-1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & -(2n-1) & \cdots & \frac{7n-6}{3}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma\boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi pada $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma\boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & r & r^2 & \cdots & sr^{n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1} \end{array} &
\begin{bmatrix}
\left(\frac{7n-6}{3}\right)-\gamma & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & -\frac{\gamma^2-\left(\frac{14n-9}{3}\right)\gamma+\left(\frac{13}{9}n^2-3n+1\right)}{\gamma-\left(\frac{7n-6}{3}\right)} & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & -\frac{\left(\gamma-\left(\frac{13n-6}{3}\right)\right)\left(\gamma^2-\left(\frac{8n-6}{3}\right)\gamma-\left(\frac{65n^2-66n+18}{9}\right)\right)}{\gamma^2-\left(\frac{14n-9}{3}\right)\gamma+\left(\frac{13}{9}n^2-3n+1\right)} & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\left(\gamma-\left(\frac{13n-9}{3}\right)\right)\left(\gamma-\left(\frac{13n-6}{3}\right)\right)\left(\gamma+\left(\frac{12n^2-19n+8{,}01}{3}\right)\right)}{f(\gamma)}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Maka $det\left(\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right) - \gamma\boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$
p(\gamma) = \left(\gamma-\left(\frac{13n-6}{3}\right)\right)\left(\gamma+\left(\frac{12n^2-19n+8{,}01}{3}\right)\right)\left(\gamma-\left(\frac{13n-6}{3}\right)\right)^{\frac{2n-3}{3}}\left(\gamma-\left(\frac{13n-9}{3}\right)\right)^{\frac{4n-3}{3}}
$$

Dengan menetapkan $p(\gamma) = 0$ maka diperoleh $\gamma_1^L = \frac{13n-6}{3}$, $\gamma_2^L = \frac{13n-6{,}99}{3}$, $\gamma_3^L = \frac{13n-9}{3}$, dan $\gamma_4^L = -\left(\frac{12n^2-19n+8{,}01}{3}\right)$ dengan multiplisitas $m(\gamma_1^L) = \frac{2n-3}{3}$, $m(\gamma_2^L) = 1$, $m(\gamma_3^L) = \frac{4n-3}{3}$, dan $m(\gamma_4^L) = 1$. Energi $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n kelipatan 3 dan $n \geq 6$ adalah

$$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right) = m(\gamma_1^L)|\gamma_1^L| + m(\gamma_2^L)|\gamma_2^L| + m(\gamma_3^L)|\gamma_3^L| + m(\gamma_3^L)|\gamma_3^L|$$

$$= \frac{2n-3}{3} \times \left|\frac{13n-6}{3}\right| + 1 \times \left|\frac{13n-6{,}99}{3}\right| + \frac{4n-3}{3}$$

$$\times \left|\frac{13n-9}{3}\right| + 1 \times \left|-\left(\frac{12n^2-19n+8{,}01}{3}\right)\right|$$

$$= \frac{38n^2-48n+16{,}02}{3}$$

Teorema 10

Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dan $\langle r^3\rangle = \{1, r^3, \dots, r^{n-3}\}$ subgrup normal dari grup dihedral D_{2n} untuk n kelipatan 3 dan $n \geq 6$. Energi $DDL^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right)$ dari grup dihedral $\boldsymbol{D_{2n}}$ adalah

$$E_{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right) = \frac{14n^2-10n}{3}$$

Bukti

Misalkan grup dihedral $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$, untuk n kelipatan 3 dan $n \geq 6$. Ambil subgrup normal $\langle r^3\rangle = \{1, r^3, \dots, r^{n-3}\}$ di $\boldsymbol{D_{2n}}$. Sesuai definisi graf subgrup, maka diperoleh graf $\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})$ dan graf $\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(\boldsymbol{D_{2n}})}$ seperti pada Teorema 9. Diperoleh pula matriks transmisi dan matriks *detour* dari $\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}$ seperti pada Teorema 9. Sehingga didapatkan matriks *DDSL* dari $\overline{\Gamma_H(D_{2n})}$ adalah sebagai berikut

$\boldsymbol{DDL^+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right) =$

$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ r^{n-1} \\ s \\ sr \\ sr^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} & s & sr & sr^2 & \cdots & sr^{n-1}
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
\frac{7n-6}{3} & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & \frac{7n-3}{3} & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-1 & \frac{7n-3}{3} & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & \frac{7n-3}{3} & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & \frac{7n-6}{3} & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & \frac{7n-6}{3} & 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \frac{7n-6}{3} & \cdots & 2n-1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & 2n-1 & \cdots & \frac{7n-6}{3}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Polinomial karakteristik $\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right)$ diperoleh dari $det\left(\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right)-\gamma\boldsymbol{I}\right)$. Dengan eliminasi pada $\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right)-\gamma\boldsymbol{I}$ diperoleh matriks segitiga atas berikut

$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ r \\ r^2 \\ \vdots \\ sr^{n-1}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
1 & r & r^2 & \cdots & sr^{n-1}
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
\left(\frac{7n-6}{3}\right)-\gamma & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & -\frac{\gamma^2-\left(\frac{14n-9}{3}\right)\gamma+\left(\frac{13}{9}n^2-3n+1\right)}{\gamma-\left(\frac{7n-6}{3}\right)} & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & -\frac{\left(\gamma-\left(\frac{n}{3}\right)\right)\left(\gamma^2-\left(\frac{20n-12}{3}\right)\gamma+\left(\frac{19n^2-48n+18}{9}\right)\right)}{\gamma^2-\left(\frac{14n-9}{3}\right)\gamma+\left(\frac{13}{9}n^2-3n+1\right)} & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\left(\gamma-\frac{n-3}{3}\right)\left(\gamma-\left(\frac{12n^2-5n-2,01}{3}\right)\right)\left(\gamma-\left(\frac{n-0,99}{3}\right)\right)}{f(\gamma)}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Maka $det\left(\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right)-\gamma\boldsymbol{I}\right)$ tidak lain adalah perkalian unsur-unsur diagonal utama matriks segitiga atas tersebut. Maka diperoleh polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{DDL}^+\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right)$ adalah

$$p(\gamma)=\left(\gamma-\left(\frac{12n^2-5n-2,01}{3}\right)\right)\left(\gamma-\left(\frac{n-0,99}{3}\right)\right)\left(\gamma-\frac{n}{3}\right)^{\frac{2n-3}{3}}\left(\gamma-\frac{n-3}{3}\right)^{\frac{4n-3}{3}}$$

Dengan menetapkan $p(\gamma)=0$ maka diperoleh $\gamma_1^{L^+}=\frac{12n^2-5n-2,01}{3}$, $\gamma_2^{L^+}=\frac{n}{3}$, $\gamma_3^{L^+}=\frac{n-0,99}{3}$, dan $\gamma_4^{L^+}=\frac{n-3}{3}$ dengan multiplisitas $m\left(\gamma_1^{L^+}\right)=1$, $m\left(\gamma_2^{L^+}\right)=\frac{2n-3}{3}$,

$m(\gamma_3^{L^+}) = 1$, dan $m(\gamma_3^{L^+}) = \frac{4n-3}{3}$. Energi $\boldsymbol{DDL^+}(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{2n})})$ dari grup dihedral D_{2n} untuk n kelipatan 3 dan $n \geq 6$ adalah

$$E_{DDL^+}(\overline{\Gamma_{\langle r^3 \rangle}(D_{2n})}) = m(\gamma_1^{L^+})|\gamma_1^{L^+}| + m(\gamma_2^{L^+})|\gamma_2^{L^+}| + m(\gamma_3^{L^+})|\gamma_3^{L^+}| + m(\gamma_3^{L^+})|\gamma_3^{L^+}|$$

$$= 1 \times \left|\frac{12n^2 - 5n - 2{,}01}{3}\right| + \frac{2n-3}{3} \times \left|\frac{n}{3}\right| + 1 \times \left|\frac{n - 0{,}99}{3}\right|$$

$$+ \frac{4n-3}{3} \times \left|\frac{n-3}{3}\right|$$

$$= \frac{14n^2 - 10n}{3}$$

3.6 Mendalami Kecermatan Allah

Gambaran ketelitian Allah telah dijelaskan pada Bab II, dalam surat al-Qamar ayat 52-53 bahwa setiap perbuatan dosa yang dilakukan oleh manusia baik dosa kecil maupun dosa besar akan dicatat oleh para malaikat. Hal ini sesuai dengan surat al-Qamar ayat 53 yang dijelaskan di dalam tafsir Ibn Katsir dan al-Maraghi, bahwa tidak ada satupun amalan yang tertinggal, baik yang kecil maupun yang besar melainkan telah dihitung. Dosa sekecil atau sebesar apapun tidak akan luput dari Allah. Jika yang dilakukan adalah dosa kecil maka akan tercatat sebagai dosa yang kecil begitupun dengan dosa besar. Quraish Shihab juga menjelaskan bahwa Allah mecatat perbuatan-perbuatan tersebuat dengan sangat rapi dan rinci. Hal ini menunjukkan bahwa dalam melakukan perhitungan Allah sangatlah teliti.

Berdasarkan gambaran kecermatan Allah pada firman-Nya dalam al-Quran, dengan meneladani hal tersebut, peneliti diharapkan harus cermat dan teliti ketika melakukan perhitungan dalam menentukan energi. Dalam menentukan energi suatu graf, langkah pertama adalah menggambar grafnya. Gambar graf dapat diperoleh dari hasil operasi komposisi semua unsur yang ada dalam suatu grup. Apabila hasil komposisi unsur-unsur dalam suatu grup merupakan anggota subgrup, maka titik pada kedua unsur yang dikomposisikan dapat digambarkan sebagai graf yang terhubung. Kemudian, apabila hasil komposisi unsur-unsur dalam suatu grup bukan merupakan anggota subgrup, maka titik pada kedua unsur yang dikomposisikan dapat digambarkan sebagai graf yang tidak terhubung. Sehingga untuk memperoleh gambar graf yang benar, dibutuhkan kecermatan dan ketelitian dalam menghitung komposisi unsur-unsur dalam suatu grup. Apabila graf telah digambar, selanjutnya adalah menentukan matriks.

Dalam menentukan matriks *distance*, peneliti harus memperhatikan dengan cermat titik yang terhubung dan titik yang tidak terhubung di dalam suatu graf. Melalui keterhubungan titik tersebut dapat memperoleh matriks lintasan terpendek antar dua unsur dalam suatu grup dengan entri diagonalnya adalah 0. Berdasarkan matriks *distance* tersebut, peneliti dapat menentukan matriks transmisi dengan perhitungan yang dilakukan dengan teliti. Selanjutnya adalah menentukan matriks *detour*, hal ini hampir sama dengan yang dilakukan pada matriks *distance*, bahwa peneliti harus memperhatikan keterhubungan titik pada suatu graf dengan cermat. Sehingga untuk memperoleh matriks *DDL* adalah dengan operasi pengurangan antara matriks transmisi terhadap matriks *detour*. Begitu juga dengan matriks *DDSL* dengan operasi penjumlahan antara matriks transmisi terhadap matriks *detour* yang juga dilakukan dengan cermat dan teliti.

Matriks dari suatu graf yang didapatkan itulah yang akan digunakan untuk menentukan nilai eigen dan multiplisitas masing-masing nilai eigen. Setelah nilai eigen didapatkan, selanjutnya dapat diperoleh energi dari suatu graf tersebut dengan menjumlahkan seluruh nilai eigen atau menjumlahkan perkalian nilai eigen dan multiplisitasnya masing-masing. Sehingga, kecermatan dan ketelitian dalam menggambar suatu graf dan menentukan suatu matriks sangat diperlukan agar diperoleh energi dari suatu graf dengan tepat.

Dengan demikian, berdasarkan dengan firman Allah dalam surat al-Qamar dapat diketahui bagaimana Allah menunjukkan kepada manusia melalui firman-Nya dalam al-Quran bahwa segala sesuatu harus dilakukan dengan teliti. Sebagai seorang hamba, sudah sepatutnya dapat meneladani hal tersebut, terutama bagi seorang matematikawan. Diharapkan seorang peneliti di bidang matematika selalu menerapkan kecermatan dalam melakukan penelitian sehingga dapat memperkecil kesalahan dalam menentukan suatu teorema beserta buktinya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan maka dapat disimpulkan beberapa rumus energi *detour distance* Lalpace (DDL) dan energi *detour distance signless* Laplace ($DDSL$) komplemen graf subgrup $\langle r\rangle, \langle r^2\rangle, \langle r^2, s\rangle, \langle r^2, sr\rangle$ dan $\langle r^3\rangle$ dari grup dihedral.

1. Energi *detour distance* Lalpace komplemen graf subgrup dari grup dihedral D_{2n} adalah:

   a. Energi $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk $n \geq 3$ adalah

   $$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) = 14n^2 - 20n + 8$$

   b. Energi $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

   $$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = 13n^2 - 17n + 6$$

   c. Energi $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

   $$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) = 14n^2 - 20n + 8$$

   d. Energi $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

   $$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) = 14n^2 - 20n + 8$$

   e. Energi $DDL\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n kelipatan 3 dan $n \geq 6$ adalah

   $$E_{DDL}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right) = \frac{38n^2 - 48n + 16{,}02}{3}$$

2. Energi *detour distance signless* Laplace komplemen graf subgrup dari grup dihedral D_{2n} adalah:

   a. Energi $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk $n \geq 3$ adalah

   $$E_{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r\rangle}(D_{2n})}\right) = 6n^2 - 4n$$

b. Energi $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$E_{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2\rangle}(D_{2n})}\right) = 5n^2 - 4n$$

c. Energi $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$E_{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,s\rangle}(D_{2n})}\right) = 6n^2 - 4n$$

d. Energi $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n genap dan $n \geq 4$ adalah

$$E_{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^2,sr\rangle}(D_{2n})}\right) = 6n^2 - 4n$$

e. Energi $DDL^{+}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right)$ untuk n kelipatan 3 dan $n \geq 6$ adalah

$$E_{DDL^{+}}\left(\overline{\Gamma_{\langle r^3\rangle}(D_{2n})}\right) = \frac{14n^2 - 10n}{3}$$

4.2 Saran

Penelitian ini hanya menentukan energi dari komplemen graf subgrup dari grup dihedral untuk subgrup normal $\langle r\rangle, \langle r^2\rangle, \langle r^2, s\rangle, \langle r^2, sr\rangle$ dan $\langle r^3\rangle$. Penelitian selanjutnya diharapkan dapat menemukan teorema terkait energi yang diperoleh dari komplemen graf subgrup dari grup dihedral untuk subgrup normal yang lainnya atau dari grup lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

Abdussakir, Azizah, N. N., dan Nofandika, F. F. 2009. *Teori Graf: Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir, Susanti, E., Turmudi, Jauhari, M. N., dan Ulya, N. M. 2018. On the Distance Spectrum and Distance Energy of Complement of Subgroup Graphs of Dihedral Group. *Journal of Physics: Conference Series*, *1114*, 1–6.

Abdussakir. 2018. Detour Energy of Complement of Subgroup Graphs of Dihedral Group. *Zero-Jurnal Sains Matematika dan Terapan*, *1*(2), 41–48.

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.

Al-Maraghi, A. M. 1993. *Tafsir Al-Maraghi*. Semarang: TOHA PUTRA.

Anderson, D. F., Fasteen, J., dan Lagrange, J. D. 2012. The Subgroup Graph of a Group. *Arab Journal of Mathematics*, *1*, 17–27.

Anton, H., dan Rorres, C. 2004. *Elementary Linear Algebra* (8th ed.). New York: John Willey dan Sons, Inc.

Ayyaswamy, S. K., dan Balachandran, S. 2010. On Detour Spectra of Some Graphs. *International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering*, *4*(7), 1038–1040.

Biyikoglu, Turker, Leydold, Josef, Stadler, dan Peter. 2007. *Laplacian Eigenvectors of Graphs*. New York: Springer.

Bondy, J. A., dan Murty, U. S. R. 2008. *Graph Theory*. New York: Springer.

Chartrand, G., Lesniak, L., dan Zhang, P. 2016. *Graphs dan Digraphs*. *Direct* (6th ed.). Florida: CRC Press.

Dummit, D. S., dan Foote, R. M. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Gallian, J. A. 2012. *Contemporary Abstract Algebra* (8th ed.). University of Minnesota Duluth.

Kakeri, F., dan Erfanian, A. 2015. The Complement of Subgroup Graph of a Group. *Journal of Prime Research in Mathematics*, *11*(1), 55–60.

Kaladevi, V., dan Abinayaa, A. 2017. On Detour Distance Laplacian Energy. *Journal of Informatics and Mathematical Sciences*, *9*(3), 721–732.

Katsir, I. I. 2017. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 9*. Kairo: Muassasah Dar al-Hilal.

Ramane, H. S., Revankar, D. S., Gutman, I., Rao, S. B., Acharya, B. D., dan Walikar. 2008. Bounds for the Distance Energy of a Graph. *Kragujevac Journal of Mathematics*, *31*, 59–68.

Shabaf, S. R., dan Fayazi, F. 2014. Laplacian Energy of a Fuzzy Graph. *Iranian Journal of Mathematical Chemstry*, *5*(1), 1–10.

Shihab, M. Q. 2003. *Tafsir Al-Mishbah*. Jakarta: Lentera Hati.

Xing, R., dan Zhou, B. 2017. On the Distance Signless Laplacian Spectral Radius of Graphs and Digraphs. *Electronic Journal of Linear Algebra*, *32*(12), 438–446.

Yang, J., You, L., dan Gutman, I. 2013. Bounds on the Distance Laplacian Energy of Graphs. *Kraujevac Journal of Mathematics*, *37*(2), 245–255.

Yin, S. 2008. Investigation on Spectrum of the Adjacency Matrix and Laplacian Matrix of Graph Gl. *WSEAS Transactions on Systems*, *7*(4), 362–372.

Tabel Cayley Komplemen Subgrup dari Grup Dihedral D_{24}

$\circ$	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}
1	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}
r	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	1	sr^{11}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}
r^{2}	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	1	r	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}
r^{3}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	1	r	r^{2}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}
r^{4}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	1	r	r^{2}	r^{3}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}
r^{5}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}
r^{6}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}
r^{7}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}
r^{8}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}
r^{9}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^{2}
r^{10}	r^{10}	r^{11}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	s	sr
r^{11}	r^{11}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	s
s	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}
sr	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	s	r^{11}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}
sr^{2}	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	r^{10}	r^{11}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}
sr^{3}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^{2}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}
sr^{4}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}
sr^{5}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}
sr^{6}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}
sr^{7}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	1	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}
sr^{8}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	1	r	r^{2}	r^{3}
sr^{9}	sr^{9}	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	1	r	r^{2}
sr^{10}	sr^{10}	sr^{11}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	1	r
sr^{11}	sr^{11}	s	sr	sr^{2}	sr^{3}	sr^{4}	sr^{5}	sr^{6}	sr^{7}	sr^{8}	sr^{9}	sr^{10}	r	r^{2}	r^{3}	r^{4}	r^{5}	r^{6}	r^{7}	r^{8}	r^{9}	r^{10}	r^{11}	1

RIWAYAT HIDUP

Nanda Mustagfirotul ‘Ulya, lahir di Kediri pada tanggal 9 Juli 1996, biasa dipaggil Nanda. Anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan bapak Makin Hamzah dan ibu Hindun.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SD Pehwetan 1 Papar Kediri dan lulus tahun 2009. Setelah itu melanjutkan sekolah di SMP Islam Darussalam dibawah naungan Pondok Pesantren Modern Darussalam, lulus pada tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di SMA Islam al-Maarif Singosari Malang sekaligus menempuh pendidikan nonformal di Pondok Pesantren al-Quran Nurul-Huda Singosari Malang dan lulus pada tahun 2015. Selanjutnya pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universutas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa telah mengikuti beberapa penelitian, diantaranya penelitian kompetitif riset mahasiswa (PKRM) dan beberapa penelitian bersama dosen. Selain itu, disela-sela kuliahnya juga menyempatkan diri mengikuti UPKM JDFI devisi sholawat al-banjari sejak semester 1.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nanda Mustagfirotul Ulya
NIM : 15610022
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Energi *Detour Distance* Laplace dan *Detour Distance Signless* Laplace Komplemen Graf Subgrup dari Grup Dihedral
Pembimbing I : Dr. Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	8 Januari 2019	Konsultasi BAB I dan II	1.
2.	9 Januari 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	2.
3.	22 Januari 2019	Revisi Kajian Keagamaan BAB I, II dan Konsultasi BAB III	3.
4.	23 Januari 2019	Revisi BAB I, II dan Konsultasi BAB III	4.
5.	6 Februari 2019	Revisi BAB III	5.
6.	15 April 2019	ACC BAB I, II dan Revisi BAB III	6.
7.	22 April 2019	ACC Kajian Keagamaan BAB I dan II	7.
8.	26 April 2019	ACC BAB III dan Konsultasi BAB IV	8.
9.	26 April 2019	ACC Kajian Keagamaan BAB III	9.
10.	4 Mei 2019	ACC Keseluruhan	10.

Malang, 06 Mei 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001