PENERAPAN METODE FUNGSI EKSPONENSIAL (MFE) PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN BURGERS SATU DIMENSI

SKRIPSI

OLEH
EVI NOR LAILI SOLIKH AMIN
NIM. 15610010

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

PENERAPAN METODE FUNGSI EKSPONENSIAL (MFE) PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN BURGERS SATU DIMENSI

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Evi Nor Laili Solikh Amin
NIM. 15610010

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

PENERAPAN METODE FUNGSI EKSPONENSIAL (MFE) PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN BURGERS SATU DIMENSI

SKRIPSI

Oleh
Evi Nor Laili Solikh Amin
NIM. 15610010

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 9 Mei 2019

Pembimbing I,

Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP.19810502 200501 1 004

Pembimbing II,

Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIP.19900511 20160801 1 057

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PENERAPAN METODE FUNGSI EKSPONENSIAL (MFE) PADA PENYELESAIAN PERSAMAAN BURGERS SATU DIMENSI

SKRIPSI

Oleh
Evi Nor Laili Solikh Amin
NIM. 15610010

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 21 Mei 2019

Penguji Utama	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Ketua Penguji	: Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Mohammad Jamhuri, M.Si	....
Anggota Penguji	: Muhammad Khudzaifah, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Evi Nor Laili Solikh Amin
NIM	:	15610010
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Penerapan Metode Fungsi Eksponensial (MFE) Pada Penyelesaian Persamaan Burgers Satu Dimensi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 Mei 2019
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
2C1E4AEF064818923
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Evi Nor Laili Solikh Amin
NIM. 15610010

MOTO

"Aku Pasti Bisa"

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Ayahanda Solikin dan Ibunda Siti Aminah tercinta,

yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat,

dan kasih sayang yang tak ternilai, serta adik tersayang Ahmad Badrus S A yang

selalu menjadi kebanggaan bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Penerapan Metode Fungsi Eksponensial (MFE) Pada Penyelesaian Persamaan Burgers Satu Dimensi" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.
5. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam proses perkuliahan.
7. Bapak dan Ibu serta adik tercinta yang selalu memberikan do'a, semangat dan motivasi demi keberhasilan penulis.
8. KH. Dr. Ahmad Khudori Soleh, M.A, dan Ibu Nyai Erick Sabti Rahmawati, M.A., M.Ag selaku pengasuh PP Al-Azkiya' yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk menuntut ilmu dan mendapat banyak pengalaman di PP. Al-Azkiya'.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Semoga Allah Swt. melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang,09 Mei 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Amin, Evi Nor Laili Solikh. 2019. **Penerapan Metode Fungsi Eksponensial (MFE) Pada Penyelesaian Persamaan Burgers Satu Dimensi**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si

.

Kata kunci: metode fungsi eksponensial, persamaan Burgers dan solusi analitik

Penelitian ini membahas tentang solusi analitik dari persamaan diferensial parsial nonlinier. Metode yang digunakan adalah metode fungsi eksponensial (MFE). Sedangkan persamaan yang akan diselesaikan adalah persamaan Burgers Satu Dimensi. Persamaan Burgers dipilih untuk menggambarkan efektivitas dari metode. Adapun langkah penyelesaian yang pertama mengubah persamaan Burgers menjadi persamaan diferensial biasa (PDB). Langkah kedua mengansumsikan solusi PDB dalam bentuk polinomial. Kemudian akan didapatkan sistem persamaan diferensial dan langkah ketiga mencari nilai parameter secara aljabar. Selanjutnya langkah keempat adalah substitusi nilai parameter yang diperoleh dalam polinomial, sehingga didapatkan solusi analitik secara umum. Langkah terakhir adalah menguji kebenaran dari solusi yang diperoleh. Pada penelitian ini diperoleh tiga solusi umum yang valid untuk persamaan burgers satu dimensi yang berbeda. Sehingga metode fungsi eksponensial adalah metode yang akurat untuk mendapatkan sebuah solusi analitik. Saran untuk penelitian selanjutnya dapat mengunakan metode fungsi eksponensial pada persamaan diferensial parsial nonlinier lainnya.

ABSTRACT

Amin, Evi Nor Laili Solikh. 2019. **Application of Exp-function Method to Wave Solutions of the Burgers Equations One dimentional**. Thesis. Departement of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si (II) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Keyword: Exp-function methods, Burgers equations and analytic solutions

This study discusses analytic solutions of nonlinear partial differential equations. The method used is the Exp-unction Method (EFM). While the equation to be solved is the One-Dimensional Burgers equation. The Burgers equation is chosen to describe the effectiveness of the method. The first steps is to change the Burgers equation into an ordinary differential equation (ODE). The second steps is assumes a ODE solution in the form of a polynomial. Then the system of differential equations will be obtained and the third step looks for parameter values algebraically. Furthermore, the fourth step is the substitution of parameter values obtained in the polynomial, so that the analytical solution is generally obtained. The final step is to test the truth of the analytic solution. In this study three general analytic solutions were found for different burgers one-dimensional equations. So that the exponential function method is an accurate method to get an analytic solution. Suggestions for further research can use exponential function methods in other nonlinear partial differential equations.

ملخص

امين وايفي ولا ليلى صليخ. ٢٠١٩. **تطبيق طريقة الدالة الأسية على الحلول الموجية لمعادلات البرغر واحد باهت**. بعث ماصي. شعبة الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، الجامعة الإسلامية الحكومية في مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشار:(١) محمدجمهوري, الماجستير.(٢) محمد حذيفة , الماجستير.

الكلمة الأساسية: طرق الأسية الدالة، معادلات البرغر والحلول التحليلية

تناقش هذه الدراسة الحلول التحليلية للمعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية. الطريقة المستخدمة هي طريقة الأس الأسي (EFM) .بينما المعادلة المراد حلها هي معادلة البرغر أحادية البعد. يتم اختيار معادلة البرغر لوصف فعالية الطريقة. الخطوة الأولى هي تغيير معادلة البرغر إلى معادلة تفاضلية عادية (ODE) الخطوة الثانية تفترض حلODE ضى في شكل متعدد الحدود. ثم سيتم الحصول على نظام المعادلات التفاضلية وتبحث الخطوة الثالثة عن قيم المعلمات جبريًا. علاوة على ذلك ، فإن الخطوة الرابعة هي استبدال قيم المعلمات التي تم الحصول عليها في كثير الحدود ، بحيث يتم الحصول على الحل التحليلي بشكل عام. الخطوة الأخيرة هي اختبار حقيقة الحل الذي تم الحصول عليه. في هذه الدراسة ، تم العثور على ثلاثة حلول عامة لمختلف المعادلات أحادية البرجر. بحيث تكون طريقة الدالة الأسية طريقة دقيقة للحصول على حل تحليلي. يمكن لاقتراحات إجراء مزيد من البحث استخدام طرق الدالة الأسية في معادلات تفاضلية جزئية غير خطية أخرى.

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Model matematika sering digunakan untuk menjelaskan fenomena alam dan kejadian dalam kehidupan sehari-hari. Secara umum model matematika yang digunakan adalah nonlinear. Persamaan Burgers merupakan persamaan gelombang sederhana yang memuat sifat nonlinier dari persamaan gelombang. Persamaan tersebut memodelkan fenomena dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya pada masalah arus lalu lintas, yang berupa masalah kemacetan, kecelakaan kendaraan bermotor, dan pelanggaran lalu lintas. Selain itu terjadi pada masalah mekanika fluida, khususnya sebagai model persamaan untuk kecepatan aliran fluida, dinamika gas, dan gerak gelombang (Landajuela, 2011).

Persamaan Burgers pertama kali diperkenalkan oleh Johannes Martinus Burgers (1939). Persamaan Burgers telah diselesaikan oleh beberapa peneliti, baik secara numerik atau analitik. Diantaranya Akpan (2015), Gamzaev (2017), Huda, Akbar dan Shanta (2018). Gamzaev (2017) telah menyelesaikan persamaan Burgers secara numerik. Sedangkan Huda, Akbar dan Shanta (2018) telah menyelesaikan persamaan Burgers dan persamaan Benjamin-Boha-Mahony dengan metode Ekspansi $\left(\frac{G'}{G}, \frac{1}{G}\right)$ dan Akpan (2015) telah menyelesaikan persamaan Burgers menggunakan metode Adomian.

Sudah banyak penyelesaian persamaan Burgers secara numerik, sehingga penelitian ini mencoba sesuatu yang berbeda yakni menyelesaikan persamaan Burgers secara analitik. Metode yang digunakan adalah Metode Fungsi

Eksponensial (MFE). Metode ini merupakan salah satu pendekatan analitik yang terbaru dalam menyelesaikan persamaan differensial parsial nonlinier. Menurut Talarposht (2016) Studi solusi analitik persamaan diferensial parsial nonlinier akan membantu untuk mempelajari persamaan evolusi nonlinier yang mengatur fenomena fisik. Kemenarikan dari metode ini adalah dapat dengan mudah diperluas ke semua jenis persamaan nonlinier. Metode ini pertama kali dikenalkan oleh He (2006) yang menyelesaikan persamaan gelombang dan He (2012) menyelesaikan permasalahan gelombang soliter, periodik dan solusi *compacton-like.* Adapun beberapa peneliti diantaranya Rahmatullah (2018) menyelesaikan persamaan Boussinesq- like, Matinfar (2014) tentang persamaan Sawada-Kotera, R.A, Talarposht (2016) tentang persamaan sine-Gordon dan Ostrovsky dan Aghdei (2017) tentang persamaan Harry Dym.

Seperti yang kita ketahui, menyelesaikan secara analitik khususnya pada masalah nonlinier bukanlah sesuatu yang mudah. Islam mengajarkan kita sebesar apapun masalah pasti selalu ada solusi atau cara untuk diselesaikan. Sebagaimana firman-Nya dalam surat al-insyiroh ayat 5-6:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Artinya: “*Maka sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (5). Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (6).”* (Q.S Al-insyiroh: 5-6)

Permasalahan dalam matematika seperti permasalahan penyelesaian secara analitik pada model persamaan Burgers tentunya memiliki cara untuk diselesaikan. Walaupun persaman ini sudah banyak dibahas dan diselesaikan dengan beberapa metode. Sehingga penulis akan mencari solusi analitik dari persamaan burger satu dimensi dengan Metode Fungsi Eksponensial (MFE).

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana penyelesaian persamaan Burgers satu dimensi menggunakan Metode Fungsi Eksponensial (MFE)?
2. Bagaimana simulasi solusi analitik dari persamaan Burgers satu dimensi dengan Metode Fungsi Eksponensial (MFE)?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah

1. Mengetahui langkah-langkah penyelesaian persamaan Burgers satu dimensi dengan Metode Fungsi Eksponensial (MFE).
2. Menggambarkan persamaan Burgers satu dimensi dengan Metode Fungsi Eksponensial (MFE).

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian dari penelitian ini adalah

1. Memahami langkah-langkah penyelesaian persamaan Burgers satu dimensi dengan Metode Fungsi Eksponensial (MFE).
2. Mengetahui simulasi persamaan Burgers satu dimensi dengan Metode Fungsi Eksponensial (MFE).

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx} \tag{1.1}$$

Dalam penelitian ini untuk menerapkan metode fungsi-Exponensial dan terbatas menyelesaikan solusi umum dari persamaan (1.1) dengan nilai $p = c = 1$ dan $q = d = 1$.

1.5 Metode Penelitian

Adapun tahapan penelitian ini adalah:

1. Langkah-langkah yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan Burgers dengan metode fungsi eksponensial dilakukan sebagai berikut

   a. Mengubah persamaan (1.1) menjadi persamaan differensial biasa, dengan cara memisalkan $u(x,t) = f(x,t) = kx + \omega t$. Misalkan $\eta = kx + \omega t$, sehingga $u(x,t) = u(\eta)$ sebagai variabel peubah. Oleh karena itu diperoleh persamaan diferensia biasa sebagai berikut

   $$\omega \frac{du(\eta)}{d\eta} + ku(\eta)\frac{du(\eta)}{d\eta} = \varepsilon \frac{d^2u(\eta)}{d\eta^2}$$

   Atau dapat ditulis menjadi

   $$\omega \frac{du(\eta)}{d\eta} + ku(\eta)\frac{du(\eta)}{d\eta} - k^2\varepsilon \frac{d^2u(\eta)}{d\eta^2} = 0 \tag{1.2}$$

   b. Selanjutnya memisalkan solusi dari persamaan (1.2) sebagai berikut

   $$u(\eta) = \frac{\sum_{n=-c}^{d} a_n \exp(n\eta)}{\sum_{m=-p}^{q} b_m \exp(m\eta)}$$

   Atau dapat ditulis menjadi

   $$u(\eta) = \frac{a_{-c}\exp(-c\eta) + \cdots + a_c \exp(d\eta)}{b_{-p}\exp(-p\eta) + \cdots + b_q \exp(q\eta)} \tag{1.3}$$

Dan menentukan nilai dari p, q, c, d. Pada penelitian ini akan dipilih satu jenis nilai dari p, q, c, d yaitu $p = c = d = q = 1$. Sehingga solusi dari persamaan (1.3) adalah

$$u(\eta) = \frac{a_{-1}\exp(-\eta) + a_0 + a_1\exp(\eta)}{b_{-1}\exp(-\eta) + b_0 + b_1\exp(\eta)} \tag{1.4}$$

c. Substitusikan persamaan (1.4) dalam persamaan (1.2), maka akan diperoleh bentuk

$$\sum_j C_j \exp(j\eta) = 0$$

Atau dapat dituliskan menjadi

$$A_1 \exp(\eta) + A_2 \exp(2\eta) + A_3 \exp(3\eta) + A_4 \exp(4\eta) + A_5 \exp(5\eta) = 0 \tag{1.5}$$

Dimana A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 adalah koefisien yang mengandung variabel-variabel

d. Selanjutnya adalah mencari nilai parameter menggunakan sistem aljabar. Adapun nilai parameter yang akan dicari adalah a_{-1}, a_1, a_0, b_{-1}, b_1, b_0

e. Setelah mendapatkan nilai parameter, selanjutnya adalah mensubstitusi nilai parameter yang diperoleh dalam persamaan (1.3) sehingga akan didapatkan solusi analitik secara umum

f. Selanjutnya uji validitas solusi analitik yang diperoleh, dengan cara substitusi solusi dalam bentuk awal yaitu (1.1). Jika hasil substitusi memenuhi bentuk awal, maka solusi tersebut valid sebagai solusi analitik.

2. Simulahi hasil pada penelitian ini dilakukan sebanyak tiga kali dengan nilai parameter sebagai berikut

   a. Simulasi solusi analitk persamaan Burgers pertama dengan $b_{-1} = 2,$ $b_0 = 1,\ k = 1,\ \varepsilon = 1,\ \omega = 1,\ -10 < x < 10, -10 < t < 10$

   b. Simulasi solusi analitk persamaan Burgers kedua dengan $b_{-1} = 2,\ b_1 = 1,\ k = 1,\ \varepsilon = 1,\ \omega = 1,\ -10 < x < 10, -10 < t < 10$

   c. Simulasi solusi analitk persamaan Burgers pertama dengan $a_0 = 1,$ $b_0 = 1,\ b_1 = 1,\ k = 1,\ \varepsilon = 1,\ \omega = 1,\ -10 < x < 10, -10 < t < 10.$

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada penelitian ini digunakan untuk menggambarkan secara umum topik bahasan di setiap bab dan sub-bab yang di uraikan, di antaranya:

BAB I Pendahuluan

Bab ini membahas latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II Kajian Pustaka

Kajian pustaka akan menguraikan tentang landasan masalah yang di bahas di bab berikutnya yaitu Metode Fungsi Eksponensial (MFE), persamaan Burger 1 dimensi, aturan rantai dan penyelesaian suatu permasalahan dalam perspektif Al-Qur'an.

BAB III Pembahasan

Bab ini menjelaskan tentang rumusan masalah dan hasil penelitian, yaitu penerapan Metode Fungsi Eksponensial (MFE) pada penyelesaian persamaan burger satu dimensi menggunakan metode tersebut dan simulasi hasil.

BAB IV Penutup

Bab penutup berisi tentang kesimpulan dan hasil penelitian yang telah dikerjakan dan berisi saran bagi pembaca yang akan melanjutkan penelitian yang berhubungan dengan persamaan atau metode yang digunakan pada penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Metode Fungsi Eksponensial (MFE)

Metode Fungsi Eksponensial (MFE) adalah salah satu pendekatan analitik yang terbaru dalam menyelesaikan persamaan differensial parsial nonlinier, metode ini telah digunakan oleh banyak penulis dalam berbagai macam masalah fisik dan aplikasi teknik untuk menyelesaikan berbagai jenis persamaan diferensial. Metode Fungsi Eksponensial (MFE) menyediakan cara yang mudah dan alat matematika yang penting untuk memecahkan persamaan evolusi nonlinier dalam matematika fisika. Telah terbukti bahwa metode ini bersifat langsung, ringkas, dasar dan efektif. Prosedur untuk mencari solusi dari metode ini akan lebih sederhana menggunakan bantuan Maple, Matlab, atau aplikasi lainnya. Dapat disimpulkan bahwa Metode Fungsi Eksponensial (MFE) dapat dengan mudah diperluas ke semua jenis persamaan nonlinier. Metode ini juga lebih efektif dan sederhana daripada metode lain dan banyak solusi dapat diperoleh diwaktu yang sama (Tallarposht, 2016).

Metode fungsi exponensial sering digunakan untuk mencari solusi soliter umum dan solusi periodik pada berbagai persamaan nonlinear (He, 2012; He 2013). Persamaan diferensial parsial nonlinear dalam bentuk

$$P(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{tt}, u_{tx}, \dots) = 0 \qquad (2.1)$$

Dimana P adalah polinomial pada $u = u\ (x,t)$, $u\ (x,t)$ adalah solusi dari persamaan (2.1) (Wazwaz, 2009).

Berikut ini adalah langkah-langkah penyelesaian persamaan diferensial parsial nonlinear dengan metode fungsi eksponensial (MFE)

Langkah 1

Mengubah persamaan (2.1) menjadi persamaan differensial biasa, dengan cara memisalkan $u(x,t) = u(\eta)$, $\eta = kx + \omega t$ sebagai variabel peubah. Dimana k, ω adalah kecepatan gelombang berjalan dan k adalah konstanta gelombang, ω, k konstanta tak nol (Islam, dkk, 2015). Kemudian mensubstitusi variabel peubah dalam persamaan (2.1), sehingga akan didapatkan persamaan differensial biasa yang bergantung terhadap η. Persamaan tersebut sebagai berikut

$$P(u, \omega u', ku', \omega^2 u'', ku'', ..) = 0 \tag{2.2}$$

Langkah 2

Selanjutnya memisalkan solusi persamaan (2.1) dengan polinomial dalam bentuk $u(\eta)$ sebagai berikut

$$u(\eta) = \frac{\sum_{n=-c}^{d} a_n \exp(n\eta)}{\sum_{m=-p}^{q} b_m \exp(m\eta)} \tag{2.3}$$

Dimana $a_n, b_m (n, m \in Z)$ konstanta yang belum diketahui. Sedangngkan c, d, p dan q adalah integer positif yang belum diketahui dan ditentukan nanti (Matinfar dkk, 2014) . Persamaan (3.5) ekuivalen dengan

$$u(\eta) = \frac{a_{-c} \exp(-\eta c) + \cdots + a_c \exp(\eta d)}{b_{-p} \exp(-\eta p) + \cdots + b_p \exp(\eta q)} \tag{2.4}$$

Untuk menentukan nilai dari c dan p, dengan cara menyamakan fungsi linier orde tertinggi dengan fungsi nonlinier orde tetinggi pada persamaan (2.2). Demikian pula untuk menentukan d dan q, dengan cara menyamakan fungsi linier orde terendah dengan fungsi nonlinier orde terendah pada persamaan (2.3) (Aghdaei dan mantifai, 2017).

Langkah 3

Memasukkan nilai-nilai c, d, p dan q ke dalam persamaan (2.4) dan kemudian menggantikan Persamaan (2.4) ke dalam Persamaan (2.2) dan Disederhanakan menjadi

$$\sum_{J} C_j \exp(j\eta) = 0 \tag{2.5}$$

Kemudian mengumpulkan semua koefisien C_j dan atur masing-masing mereka menjadi nol, karena hanya $C_j = 0$ yang memenuhi persamaan (2.5). setelah itu akan medapatkan sistem persamaan aljabar C_j untuk dicari masing-masing nilai parameternya.

Langkah 4

Selanjutnya menyelesaikan sistem persamaan C_j dengan menggunakan sistem aljabar, maka akan diperoleh beberapa nilai parameter yang berbeda.

Langkah 5

Nilai parameter yang diperoleh dari langkah 4 disubstitusi dalam persamaan (2.4), sehingga akan mendapatkan solusi analitik dari persamaan (2.1) (Roshid dkk, 2014).

Langkah 6

Selanjutnya adalah validasi solusi yang diperoleh pada langkah 5 dengan substitusi solusi dalam bentuk awal (2.1). Jika hasil substitusi memenuhi bentuk awal, maka boleh dikatakan solusi tersebut valid. Tapi jika solusi tidak memenuhi bentuk awal, maka solusi tersebut bukan solusi analitik dari (2.1).

2.2 Persamaan Burgers 1 Dimensi

Persamaan parabola quasilinear dikenal sebagai "persamaan Burger satu dimensi", dimana persamaan tersebut adalah persamaan differensial parsial non linier

$$u_t + uu_x = vu_{xx} \tag{2.6}$$

di mana v adalah konstanta yang mengatur viskositas kinematik, seperti dalam konteks mekanika fluida asli gas (Landajuela,2011).

Berdasarkan bentuknya persamaan Burgers terdapat dua macam, yaitu *Inviscid* Burgers dan *Viscid* Burgers. Persamaan Burgers dikatakan *Inviscid* jika persamaan tidak bergantung pada constanta viskositas atau $v = 0$. Namun jika bergantung pada konstanta viskositas dinamakan *Viscid* Burgers (Derickson, 2000). Jika $v > 0$ maka Persamaan (2.6) disebut persamaan Burgers *Viscid*, persamaan ini adalah persamaan diferensial parsial paling sederhana yang menggabungkan kedua nonlinear efek konveksi dan efek difusi. Sedangkan persamaan Burgers Inviscid sebagai berikut

$$u_t + uu_x = 0 \tag{2.7}$$

(Landajuela,2011).

Persamaan (2.7) Pertama kali dikenalkan oleh Bateman dalam sebuah karyanya yang berjudul "*Some Recent Researches On The Motion Of Fluids*". Ini merupakan kasus khusus dari beberapa model matematika turbulensi yang diperkenalkan sekitar tiga puluh tahun yang lalu oleh J. M. Burgers Burgers (dalam Benton dan Platzman, 1972).

2.3 Aturan Rantai

Jika suatu fungsi $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ yang terdiferensialkan pada $t \in D$ serta suatu fungsi $z = f(x, y)$ yang terdiferensialkan pada $\big(x(t), y(t)\big) \in D$. Sehingga fungsi $z = g(t) = f(x(t), y(t))$ juga terdiferensialkan di t dengan aturan yaitu (Purcel, 1997)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

Bukti:

Karena fungsi $z = f(x, y)$ terdiferensialkan di $(x, y) \in D$, sehingga berlaku:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}.\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}.\Delta y + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y$$

Dimana $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ dan $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ dengan

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0$$

dan

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) = 0$$

Untuk $\Delta t \neq 0$ berlaku

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\Delta x}{\Delta t}\varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\Delta t}\varepsilon_2$$

Karena $\Delta x = (t + \Delta t) - x(t)$ dan $\Delta y = (t + \Delta t) - y(t)$ sehingga untuk $t \to 0$ maka $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, mengakibatkan ε_1 dan ε_2 adalah fungsi dari Δt dengan

$$\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_1(\Delta t) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon_1 = 0$$

dan

$$\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_2(\Delta t) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon_2 = 0$$

Untuk $\Delta t \to 0$, diperoleh

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \text{ dan } \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$$

Selanjutnya dari beberapa hasil sebelumnya, maka

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\partial z}{\partial x} . \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} . \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\Delta x}{\Delta t} \varepsilon_1 + \frac{\Delta y}{\Delta t} \varepsilon_2 \right]$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} . \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} . \frac{dy}{dt}$$

Berdasarkan rumus diatas, dapat diketahui bahwa z merupakan fungsi satu peubah terhadap t untuk $\frac{dz}{dt}$ dan dapat dipandang juga sebagai suatu fungsi dua peubah terhadap x dan y untuk $\frac{\partial z}{\partial x}$ dan $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2.4 Penyelesaian Permasalahan dalam Perspektif Al-Qur'an

Sebelum ilmu pengetahuan ditemukan, al-Qur'an sudah menjelaskan terlebih dahulu tentang fenomena yang ada di dalam alam semesta ini. Manusia hanya mampu sedikit memahami yang ada pada al-Qur'an, sehingga perlu banyak dipelajari tentang isi al-Qur'an kemudian dikaitkan dengan ilmu pengetahuan yang saat ini. Sehingga adanya ilmu pengetahuan memberikan sumbangan yang besar untuk membuktikan dan memahami al-Qur'an yang berkaitan tentang fenomena alam.

وَهِيَ تَجْرِي بِهِمْ فِي مَوْجٍ كَالْجِبَالِ وَنَادَى نُوحٌ ابْنَهُ وَكَانَ فِي مَعْزِلٍ يَا بُنَيَّ ارْكَب مَّعَنَا وَلَا تَكُن مَّعَ الْكَافِرِينَ

Artinya : "*Dan bahtera itu berlayar membawa mereka dalam gelombang laksana gunung. Dan Nuh memanggil anaknya, sedang anak itu berada di tempat yang jauh terpencil: "Hai anakku, naiklah (ke kapal) bersama kami dan janganlah kamu berada bersama orang-orang yang kafir*"(Qs. Hud:42)

Menurut tafsir Jalalin (*Dan bahtera itu berlayar membawa mereka dalam gelombang laksana gunung*) menggambarkan tentang tinggi dan besarnya gelombang. (*Dan Nuh memanggil anaknya*) yaitu Kan`an (*sedangkan anaknya itu berada di tempat yang jauh*) dari bahtera *("Hai anakku! Naiklah bersama kami dan janganlah kamu berada bersama orang-orang yang kafir.")*

Sedangkan menurut tafsir Ibnu Katsir (2007) dan Nuh berkata, "Naiklah kamu sekalian ke dalamnya dengan menyebut nama Allah di waktu berlayar dan berlabuhnya. Sesungguhnya Tuhanku benar-benar Maha Pengampun lagi Maha Penyayang. Dan bahtera itu berlayar membawa mereka dalam gelombang laksana gunung. Dan Nuh memanggil anaknya, sedangkan anak itu berada di tempat yang jauh terpencil, "*Hai anakku, naiklah (ke kapal) bersama kami dan janganlah kamu berada bersama orang-orang yang kafir".* Anaknya menjawab, "*Aku akan mencari perlindungan ke gunung yang dapat memeliharaku dari air bah!*" Nuh berkata, "*Tidak ada yang melindungi hari ini dari azab Allah selain Allah (saja) Yang Maha Penyayang".* Dan gelombang menjadi penghalang antara keduanya; maka jadilah anak itu termasuk orang-orang yang ditenggelamkan. Allah Subhanahu wa ta'ala. berfirman menceritakan perihal Nabi Nuh A.S. , bahwa dia berkata kepada orang-orang yang diperintahkan agar dibawa masuk ke dalam bahteranya: *Naiklah kamu sekalian ke dalamnya dengan menyebut nama Allah di waktu berlayar dan berlabuhnya*. (Hud: 41) Yakni dengan menyebut nama Allah ia dapat berlayar di atas air, dan dengan menyebut nama Allah pula ia dapat berlabuh di akhir perjalanannya.

Firman Allah Subhanahu wa ta'ala. : Dan bahtera itu berlayar membawa mereka dalam gelombang laksana gunung (Qs. Hud: 42). Maksudnya, bahtera itu berlayar membawa mereka di atas permukaan air yang telah menggenangi semua daratan di bumi, yang ketinggiannya sampai menutupi puncak-puncak gunung yang tertinggi, dan lebih tinggi lima belas hasta darinya.

Menurut pendapat lain, tinggi banjir besar itu mencapai delapan puluh mil. Bahtera Nabi Nuh itu berlayar di atas permukaan air dengan seizin Allah dan dengan pengawasan, pemeliharaan, penjagaan, dan karuniaNya. Seperti yang disebutkan di dalam ayat lain, yaitu: Sesungguhnya Kami, tatkala air telah naik (sampai ke gunung), Kami bawa (nenek moyang) kalian ke dalam bahtera, agar Kami jadikan peristiwa itu peringatan bagi kalian dan agar diperhatikan oleh telinga yang mau mendengar. (Al-Haqqah: 11-12) Dan Kami angkut Nuh ke atas (bahtera) yang terbuat dari papan dan paku, yang berlayar dengan pemeliharaan Kami sebagai balasan bagi orang-orang yang diingkari (Nuh). Dan sesungguhnya telah Kami jadikan kapal itu sebagai pelajaran, maka adakah orang yang mau mengambil pelajaran' (Al-Qamar: 13-15) Adapun firman Allah Subhanahu wa ta'ala. : Dan Nuh memanggil anaknya. (Hud: 42) Yang dimaksud adalah anaknya yang keempat, namanya Yam; dia seorang kafir. Ayahnya memanggilnya di saat hendak menaiki bahtera dan menyerunya agar beriman serta naik bahtera bersama mereka sehingga tidak tenggelam seperti yang dialami oleh orang-orang yang kafir. Anaknya menjawab, "Aku akan mencari perlindungan ke gunung yang dapat memeliharaku dari air bah!

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini terdiri dari dua subbab yaitu subbab 3.1 memaparkan penyelesaian persamaan Burgers satu dimensi menggunakan metode fungsi eksponensial dan subbab 3.2 tentang simulasi.

3.1 Penyelesaian Metode Fungsi Eksponensial pada Persamaan Burgers Satu Dimensi

Persamaan Burgers 1 dimensi yang akan diselesaikan adalah

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx} \qquad (3.1)$$

Langkah-langkah yang di lakukan untuk menyelesaikan persamaan (3.1) menggunakan metode fungsi eksponensial sebagai berikut:

Langkah 1

Langkah pertama dari metode ini adalah mengubah persamaan (3.1) menjadi sebuah persamaan diferensial biasa dengan cara memisalkan

$$u(x,t) = f(x,t) = kx + \omega t$$

Misalkan $kx + \omega t = \eta$, sehingga $u(x,t) = kx + \omega t = u(\eta)$ He(2006). Validitas dari permisalan sendiri terbukti berhasil oleh He dalam persamaan KdV (He,2006).

Karakteristik persamaan Burgers dapat dinyatakan dalam sebuah paket gelombang. Sedangkan profil gelombang itu sendiri terdiri atas bilangan gelombang, periode gelombang dan panjang gelombang. Sedangkan bentuk gelombangnya yang akan dicari. Profil gelombang sediri dapat dinyatakan sebagai fungsi yang belum diketahui sebagai berikut

$$u(x,t) = f(x,t) = kx + \omega t$$

Dimana

$\omega =$ kecepatan gelombang

$k =$ bilangan gelombang

$x =$ jarak suatu titik terhadap titik asal

$t =$ waktu

Dalam fisika, persamaan umum gelombang dinyatakan sebagai berikut $y = \pm A\ sin(\omega t \pm kx)$. Berdasarkan persamaan tersebut fungsinya dalam bentuk sin, tetapi bisa berupa fungsi yang lain misalnya berupa cos. Hal ini menunjukkan bahwa solusi gelombang bisa bermacam-macam bentuk fungsinya, asalkan memuat nilai variabel x dan t atau dengan kata lain bergantung pada kedua variabel tersebut. Sehingga dalam penelitian ini penulis menuliskan solusi dari persamaan gelombang adalah

$$u(x,t) = kx + \omega t$$

Karena persamaan (3.1) akan diubah menjadi persamaan diferensial biasa yang bergantung terhadap satu variabel, maka $kx + \omega t$ dimisalkan menjadi sebuah variabel baru yaitu η. Sehingga dapat ditulis menjadi $u(x,t) = u(\eta)$.

Selanjutnya adalah mensubstitusi $u(\eta)$ dalam persamaan (3.1) yang menggunakan aturan rantai sebagai berikut

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{du(\eta)}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \omega \frac{du(\eta)}{d\eta} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{du(\eta)}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = k\frac{du(\eta)}{d\eta} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{du(\eta)}{d\eta}k\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} = k^2\frac{d^2u(\eta)}{d\eta^2} \quad (3.4)$$

Selanjutnya mensubstiusi persamaan (3.2), (3.3), dan (3.4) ke dalam persamaan (3.1) menjadi

$$\omega \frac{du(\eta)}{d\eta} + ku(\eta)\,\frac{du(\eta)}{d\eta} - k^2\varepsilon \frac{d^2u(\eta)}{d\eta^2} = 0 \tag{3.5}$$

Persamaan (3.5) merupakan persamaan baru yang berupa persamaan diferensial biasa. Persamaan (3.5) yang akan diselesaikan dengan metode fungsi eksponensial.

Langkah 2

Solusi persamaan Burgers diasumsikan dengan polinomial $\exp(\eta)$ sebagai berikut

$$u(\eta) = \frac{\sum_{n=-c}^{d} a_n \exp(n\eta)}{\sum_{m=-p}^{q} b_m \exp(m\eta)} \tag{3.6}$$

Persamaan (3.6) He (2006) didasari oleh pendekatan Padé, yang mana x diasumsikan sebagai exp(x). Sedangkan m, n didefinisikan sebagai -c < m < p dan -d < n < q yang sudah terbukti valid dalam Ebaid (2011), Sehingga didapatkan persamaan (3.6). Berikut adalah definisi pendekatan Padé:

Misalkan $h(u)$ adalah fungsi dengan deret pangkat di sekitar $u = 0$ dapat dituliskan sebagai:

$$h(u) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n u^n$$

Pendekatan Padé dari fungsi $h(u)$ dengan orde $[L/M]$ adalah fungsi rasional:

$$P^{\left[\frac{L}{M}\right]}(u) = \frac{\sum_{n=0}^{L} a_n u^n}{\sum_{n=0}^{M} b_n u^n}$$

Untuk u disekitar 0 (Baker, 1996).

Dimana a_n, $b_m (n, m \in Z)$ konstanta yang belum diketahui. Sedangkan c, d, p dan q adalah bilangan positif yang belum diketahui yang ditentukan kemudian. Sehingga persamaan (3.5) dapat ditulis menjadi

$$u(\eta) = \frac{a_{-c}\exp(-c\eta) + \cdots + a_d \exp(d\eta)}{b_{-p}\exp(-p\eta) + \cdots + b_q \exp(q\eta)} \tag{3.7}$$

Nilai p, c, q, d berupa bilangan integer positif. Misalkan jika dipilih $p = c = 1$ dan $q = d = 1$ maka akan menjadi

$$u(\eta) = \frac{a_{-1}\exp(-\eta) + a_0 + a_1\exp(\eta)}{b_{-1}\exp(-\eta) + b_0 + b_1\exp(\eta)} \tag{3.8}$$

Atau jika dipilih $p = c = 2$ dan $q = d = 1$ maka akan menjadi

$$u(\eta) = \frac{a_{-1}\exp(-\eta) + a_0 + a_1\exp(\eta) + a_2\exp(2\eta)}{b_{-1}\exp(-\eta) + b_0 + b_1\exp(\eta) + b_2\exp(2\eta)} \tag{3.9}$$

Pada penelitian ini hanya akan menyelesaikan $p = c = 1$ dan $q = d = 1$ yang mana bentuk $u(\eta)$ tertulis pada (3.8).

Langkah 3

Substitusikan (3.8) dalam persamaan (3.5) dengan penjelasan sebagai berikut

$$\frac{du(\eta)}{d\eta}$$

$$= \frac{\frac{d}{d\eta}(a_{-1}\exp(-\eta) + a_0 + a_1\exp(\eta))(b_{-1}\exp(-\eta) + b_0 + b_1\exp(\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_0 + b_1\exp(\eta))^2}$$

$$- \frac{(a_{-1}\exp(-\eta) + a_0 + a_1\exp(\eta))\frac{d}{d\eta}(b_{-1}\exp(-\eta) + b_0 + b_1\exp(\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_0 + b_1\exp(\eta))^2}$$

$$= \frac{-a_{-1}\exp(-\eta) + a_1\exp(\eta)}{b_{-1}\exp(-\eta) + b_0 + b_1\exp(\eta)} - (a_{-1}\exp(-\eta) + a_0 + a_1\exp(\eta))\frac{-b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_0 + b_1\exp(\eta))^2} \tag{3.10}$$

$$\frac{d^2u(\eta)}{d\eta^2}$$

$$=\left(\frac{\frac{d}{d\eta}[-a_{-1}\exp(-\eta)+a_1\exp(\eta)](b_{-1}\exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^2}\right.$$

$$\left.-\frac{(-a_{-1}\exp(-\eta)+a_1\exp(\eta))\frac{d}{d\eta}[b_{-1}\exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta)]}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^2}\right)$$

$$-\left[\left(\frac{\frac{d}{d\eta}[(a_{-1}\exp(-\eta)+a0+a_1\exp(\eta))(-b_{-1}\exp(-\eta)+b_1\exp(\eta))]((b_{-1}\exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^2\ )}{((b_{-1}\exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^2)^2}\right)\right.$$

$$\left.-\left(-\frac{(a_{-1}\exp(-\eta)+a0+a_1\exp(\eta))(-b_{-1}\exp(-\eta)+b_1\exp(\eta))\frac{d}{d\eta}[(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^2]}{((b_{-1}\exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^2\ )^2}\right)\right]$$

$$=\frac{a_{-1}\ \exp(-\eta)+a_1\ \exp(\eta)}{b_{-1}\ \exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta)}$$

$$-\frac{(-a_{-1}\exp(-\eta)+a_1\exp(\eta))(-b_{-1}\exp(-\eta)+b_1\exp(\eta))}{(b_{-1}\exp(\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^2}$$

$$-\left(\frac{(a_{-1}\exp(-\eta)+a_0+a_1\exp(\eta))(b_{-1}\ \exp(-\eta)+b_1\exp(\eta))}{(b_{-1}\exp(\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^2}\right.$$

$$+\frac{(-a_{-1}\exp(-\eta)+a_1\exp(\eta))(-b_{-1}\ \exp(-\eta)+b_1\exp(\eta))}{(b_{-1}\exp(\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^2}$$

$$\left.-2\frac{(a_{-1}\exp(-\eta)+a_0+a_1\exp(\eta))(-b_{-1}\ \exp(-\eta)+b_1\exp(\eta))^2}{(b_{-1}\exp(\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^3}\right)$$

$$=\frac{a_{-1}\ \exp(-\eta)+a_1\ \exp(\eta)}{b_{-1}\ \exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta)}$$

$$-\frac{(-a_{-1}\exp(-\eta)+a_1\exp(\eta))(-b_{-1}\exp(-\eta)+b_1\exp(\eta))}{(b_{-1}\exp(\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^2}$$

$$-\frac{(a_{-1}\exp(-\eta)+a_0+a_1\exp(\eta))(b_{-1}\ \exp(-\eta)+b_1\exp(\eta))}{(b_{-1}\exp(\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^2}$$

$$-\frac{(-a_{-1}\exp(-\eta)+a_1\exp(\eta))(-b_{-1}\ \exp(-\eta)+b_1\exp(\eta))}{(b_{-1}\exp(\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^2}$$

$$+2\frac{(a_{-1}\exp(-\eta)+a_0+a_1\exp(\eta))(-b_{-1}\ \exp(-\eta)+b_1\exp(\eta))^2}{(b_{-1}\exp(\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^3}$$

$$= \frac{a_{-1}\ \exp(-\eta) + a_1\ \exp(\eta)}{b_{-1}\ \exp(-\eta) + b_0 + b_1 \exp(\eta)} \tag{3.11}$$

$$- 2\frac{(-a_{-1} \exp(-\eta) + a_1 \exp(\eta))(-b_{-1} \exp(-\eta) + b_1 \exp(\eta))}{(b_{-1} \exp(\eta) + b_0 + b_1 \exp(\eta))^2}$$

$$+ 2\frac{(a_{-1} \exp(-\eta) + a_0 + a_1 \exp(\eta))(-b_{-1}\ \exp(-\eta) + b_1 \exp(\eta))^2}{(b_{-1} \exp(\eta) + b_0 + b_1 \exp(\eta))^3}$$

$$- \frac{(a_{-1} \exp(-\eta) + a_0 + a_1 \exp(\eta))(b_{-1}\ \exp(-\eta) + b_1 \exp(\eta))}{(b_{-1} \exp(\eta) + b_0 + b_1 \exp(\eta))^2}$$

Selanjutnya mensubstitusi persamaan (3.10) dan (3.11) ke dalam persamaan (3.5) menjadi

$$\omega\left(\frac{-a_{-1} \exp(-\eta) + a_1 \exp(\eta)}{b_{-1} \exp(-\eta) + b_0 + b_1 \exp(\eta)}\right. \tag{3.12}$$

$$\left. - (a_{-1} \exp(-\eta) + a_0 + a_1 \exp(\eta))\frac{-b_{-1} \exp(-\eta) + b_1 \exp(\eta)}{(b_{-1} \exp(-\eta) + b_0 + b_1 \exp(\eta))^2}\right)$$

$$+ k\left(\left(\frac{a_{-1} \exp(-\eta) + a_0 + a_1 \exp(\eta)}{b_{-1} \exp(-\eta) + b_0 + b_1 \exp(\eta)}\right)\left(\frac{-a_{-1} \exp(-\eta) + a_1 \exp(\eta)}{b_{-1} \exp(-\eta) + b_0 + b_1 \exp(\eta)}\right.\right.$$

$$- (a_{-1} \exp(-\eta) + a_0$$

$$\left.\left. + a_1 \exp(\eta))\frac{-b_{-1} \exp(-\eta) + b_1 \exp(\eta)}{(b_{-1} \exp(-\eta) + b_0 + b_1 \exp(\eta))^2}\right)\right)$$

$$- k^2 \varepsilon\left(\frac{a_{-1}\ \exp(-\eta) + a_1\ \exp(\eta)}{b_{-1}\ \exp(-\eta) + b_0 + b_1 \exp(\eta)}\right.$$

$$- \frac{\big(2(-a_{-1} \exp(-\eta) + a_1 \exp(\eta))\big)(-b_{-1} \exp(-\eta) + b_1 \exp(\eta))}{(b_{-1} \exp(-\eta) + b_0 + b_1 \exp(\eta))^2}$$

$$+ \frac{\big(2(a_{-1} \exp(-\eta) + a_0 + a_1 \exp(\eta))\big)(-b_{-1} \exp(-\eta) + b_1 \exp(\eta))^2}{(b_{-1} \exp(-\eta) + b_0 + b_1 \exp(\eta))^3}$$

$$\left.- \frac{(a_{-1} \exp(-\eta) + a_0 + a_1 \exp(\eta))(b_{-1} \exp(-\eta) + b_1 \exp(\eta))}{(b_{-1} \exp(\eta) + b_0 + b_1 \exp(\eta))^2}\right) = 0$$

Persamaan (3.12) dapat ditulis menjadi

$$\omega\left(\frac{-a_{-1}\exp(-\eta)+a_1\exp(\eta)}{((b_{-1}\exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^3)}((b_{-1}\exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^2)\right. \tag{3.13}$$

$$-(a_{-1}\exp(-\eta)+a_0$$

$$+a_1\exp(\eta))\frac{-b_{-1}\exp(-\eta)+b_1\exp(\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^3}((b_{-1}\exp(-\eta)+b_0$$

$$\left.+b_1\exp(\eta))^1)\right)$$

$$+k\left(\left(\frac{a_{-1}\exp(-\eta)+a_0+a_1\exp(\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^3}\right)\left(\frac{-a_{-1}\exp(-\eta)+a_1\exp(\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^3}\right.\right.$$

$$-(a_{-1}\exp(-\eta)+a_0$$

$$+a_1\exp(\eta))\frac{-b_{-1}\exp(-\eta)+b_1\exp(\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^3}((b_{-1}\exp(-\eta)+b_0$$

$$\left.\left.+b_1\exp(\eta))^1)\right)\right)$$

$$-k^2\varepsilon\left(\frac{a_{-1}\exp(-\eta)+a_1\exp(\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^3}((b_{-1}\exp(-\eta)+b_0\right.$$

$$+b_1\exp(\eta))^2)$$

$$-\frac{\left(2(-a_{-1}\exp(-\eta)+a_1\exp(\eta))\right)(-b_{-1}\exp(-\eta)+b_1\exp(\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^3}((b_{-1}\exp(-\eta)$$

$$+b_0+b_1\exp(\eta))^1)$$

$$+\frac{\left(2(a_{-1}\exp(-\eta)+a_0+a_1\exp(\eta))\right)(-b_{-1}\exp(-\eta)+b_1\exp(\eta))^2}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^3}$$

$$-\frac{(a_{-1}\exp(-\eta)+a_0+a_1\exp(\eta))(b_{-1}\exp(-\eta)+b_1\exp(\eta))}{(b_{-1}\exp(\eta)+b_0+b_1\exp(\eta))^3}((b_{-1}\exp(-\eta)$$

$$\left.+b_0+b_1\exp(\eta))^1)\right)=0$$

Disederhanakan menjadi

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\left(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0+b_1\exp(\eta)\right)^3}\Bigg(4\Bigg(\bigg(\varepsilon\Big(b_1^2a_{-1}+\frac{1}{4}b_0^2a_1-\frac{1}{4}b_1a_0b_0 \\
&-b_1a_1b_{-1}\Big)k^2 \\
&+\left(-\frac{1}{2}a_1^2b_{-1}+\left(\frac{1}{2}a_{-1}a_1+\frac{1}{4}a_0^2\right)b_1-\frac{1}{4}a_0b_0a_1\right)k \\
&+\frac{1}{2}\Big(b_1^2a_{-1}+\frac{1}{2}b_1a_0b_0-b_1a_1b_{-1} \\
&-\frac{1}{2}b_0^2a_1\Big)\omega\bigg)\exp(3\eta) \\
&+\bigg(-\frac{3}{2}\varepsilon\left(\left(b_1a_0-\frac{1}{2}a_1b_0\right)b_{-1}-\frac{1}{2}a_{-1}b_0b_1\right)k^2 \\
&+\frac{3}{4}a_0(a_{-1}b_1-a_1b_{-1})k \\
&+\frac{3}{4}\omega b_0(a_{-1}b_1-a_1b_{-1})\bigg)\exp(2\eta) \\
&+\frac{1}{4}(a_0b_1-a_1b_0)(\varepsilon k^2b_1+ka_1+\omega b_1)\exp(4\eta) \\
&+\bigg(-\left(-a_1b_{-1}^2+\left(b_1a_{-1}+\frac{1}{4}a_0b_0\right)b_{-1}-\frac{1}{4}a_{-1}b_0^2\right)\varepsilon k^2 \\
&+\left(\left(-\frac{1}{2}a_{-1}a_1-\frac{1}{4}a_0^2\right)b_{-1}+\frac{1}{4}a_{-1}a_0b_0+\frac{1}{2}a_{-1}^2b_1\right)k \\
&+\frac{1}{2}\Big(-a_1b_{-1}^2+\left(b_1a_{-1}-\frac{1}{2}a_0b_0\right)b_{-1} \\
&+\frac{1}{2}a_{-1}b_0^2\Big)\omega\bigg)\exp(\eta) \\
&+\frac{1}{4}(-a_{-1}b_0+b_0b_{-1})(\varepsilon k^2b_{-1}-ka_{-1} \\
&-\omega b_{-1})\Bigg)\exp(\eta)\Bigg)=0
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

$$
\begin{aligned}
-4\Bigg(\Bigg(&\varepsilon\left(b_1^2a_{-1}+\frac{1}{4}b_0^2a_1-\frac{1}{4}b_1a_0b_0-b_1a_1b_{-1}\right)k^2\\
&+\left(-\frac{1}{2}a_1^2b_{-1}+\left(\frac{1}{2}a_{-1}a_1+\frac{1}{4}a_0^2\right)b_1-\frac{1}{4}a_0b_0a_1\right)k\\
&+\frac{1}{2}\left(b_1^2a_{-1}+\frac{1}{2}b_1a_0b_0-b_1a_1b_{-1}-\frac{1}{2}b_0^2a_1\right)\omega\Bigg)e^{3\eta}\\
&+\Bigg(-\frac{3}{2}\varepsilon\left(\left(b_1a_0-\frac{1}{2}a_1b_0\right)b_{-1}-\frac{1}{2}a_{-1}b_0b_1\right)k^2\\
&+\frac{3}{4}a_0(a_{-1}b_1-a_1b_{-1})k+\frac{3}{4}\omega b_0(a_{-1}b_1-a_1b_{-1})e^{\eta}\\
&+\frac{1}{4}(-a_{-1}b_0+a_0b_{-1})\Bigg)e^{2\eta}\\
&+\frac{1}{4}(a_0b_1-a_1b_0)(\varepsilon k^2b_1+ka_1+\omega b_1)e^{4\eta}\\
&+\Bigg(-\left(-a_1b_{-1}^2+\left(b_1a_{-1}+\frac{1}{4}a_0b_0\right)b_{-1}-\frac{1}{4}a_{-1}b_0^2\right)\epsilon k^2\\
&+\left(\left(-\frac{1}{2}a_{-1}a_1-\frac{1}{4}a_0^2\right)b_{-1}+\frac{1}{4}a_{-1}a_0b_0+\frac{1}{2}a_{-1}^2b_1\right)k\\
&+\frac{1}{2}\left(-a_1b_{-1}^2+\left(b_1a_{-1}-\frac{1}{2}a_0b_0\right)b_{-1}+\frac{1}{2}a_{-1}b_0^2\right)\omega\Bigg)e^{\eta}\\
&+\frac{1}{4}(-a_{-1}b_0+a_0b_{-1})(\varepsilon k^2b_{-1}-ka_{-1}-\omega b_{-1})\Bigg)e^{\eta}\\
&=0
\end{aligned}
$$

Persamaan di atas diekspansi menjadi sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
&-(\exp(\eta))^2 k a_{-1} a_0 b_0 + 2(\exp(\eta))^2 \omega a_{-1} b_{-1} b_1 + (\exp(\eta))^2 \omega a_0 b_{-1} b_0 \\
&- \exp(\eta)\, \varepsilon k^2 a_0 b_{-1}^2 + \exp(\eta)\, k a_{(-1)} a_0 b_{-1} \\
&- \exp(\eta)\, \omega a_{-1} b_{-1} b_0 - (\exp(\eta))^5 \varepsilon k^2 a_0 b_1^2 \\
&- 4(\exp(\eta))^4 \varepsilon k^2 a_{-1} b_1^2 - (\exp(\eta))^4 \varepsilon k^2 a_1 b_0^2 \\
&- (\exp(\eta))^5 k a_0 a_1 b_1 + (\exp(\eta))^5 \omega a_1 b_0 b_1 \\
&- 2(\exp(\eta))^4 k a_{-1} a_1 b_1 + (\exp(\eta))^4 k a_0 a_1 b_0 \\
&- (\exp(\eta))^4 \omega a_0 b_0 b_1 + 2(\exp(\eta))^4 \omega a_1 b_{-1} b_1 \\
&- (\exp(\eta))^2 \varepsilon k^2 a_{-1} b_0^2 - 4(\exp(\eta))^2 \varepsilon k^2 a_1 b_{-1}^2 \\
&- 3(\exp(\eta))^3 k a_1 a_0 b_1 + 3(\exp(\eta))^3 k a_0 a_1 b_{-1} \\
&- 3(\exp(\eta))^3 \omega a_{-1} b_0 b_1 + 3(\exp(\eta))^3 \omega a_1 b_{-1} b_0 \\
&+ \exp(\eta)\, \varepsilon k^2 a_{-1} b_{-1} b_0 + \left(exp(\eta)\right)^5 \varepsilon k^2 a_1 b_0 b_1 \\
&+ (\exp(\eta))^4 \varepsilon k^2 a_0 b_0 b_1 + 4(\exp(\eta))^4 \varepsilon k^2 a_1 b_{-1} b_1 \\
&- 3(\exp(\eta))^3 \varepsilon k^2 a_{-1} b_0 b_1 + 6(\exp(\eta))^3 \varepsilon k^2 a_0 b_{-1} b_1 \\
&- 3(\exp(\eta))^3 \varepsilon k^2 a_1 b_{-1} b_0 + 4(\exp(\eta))^2 \varepsilon k^2 a_{-1} b_{-1} b_1 \\
&+ (\exp(\eta))^2 \varepsilon k^2 a_0 b_{-1} b_0 - \exp(\eta)\, k a_{-1}^2 b_0 \\
&+ \exp(\eta)\, \omega a_0 b_{-1}^2 + (\exp(\eta))^5 k a_1^2 b_0 \\
&- (\exp(\eta))^5 \omega a_0 b_1^2 - (\exp(\eta))^4 k a_0^2 b_1 \\
&+ 2(\exp(\eta))^4 \omega a_{-1} b_1^2 + (\exp(\eta))^2 k a_{-1}^2 b_1 \\
&+ (\exp(\eta))^2 k a_0^2 b_{-1} - (\exp(\eta))^2 \omega a_{-1} b_0^2 \\
&+ 2(\exp(\eta))^2 \omega a_1 b_{-1}^2 = 0
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Selanjutnya mengelompokan persamaan (3.15) dengan pangkat yang sama seperti berikut

$$(-\varepsilon k^2 a_0 b_1^2 + \varepsilon k^2 a_1 b_0 b_1 - k a_0 a_1 b_1 + k a_1^2 b_0 - \omega a_0 b_1^2 \tag{3.16}$$
$$+ \omega a_1 b_0 b_1)(\exp(\eta))^5$$
$$+ (-4\varepsilon a_{-1} b_1^2 + \varepsilon k^2 a_0 b_0 b_1 + 4\varepsilon k^2 a_1 b_{-1} b_1 - \varepsilon k^2 a_1 b_0^2$$
$$- 2k a_{-1} a_1 b_1 - k a_0^2 b_1 + k a_0 a_1 b_0 + 2k a_1^2 b_{-1}$$
$$- 2\omega a_{-1} b_1^2 - \omega a_0 b_0 b_1 + 2\omega a_1 b_{-1} b_1$$
$$+ \omega a_1 b_0^2)(\exp(\eta))^4$$
$$+ (-3\varepsilon k^2 a_{-1} b_0 b_1 + 6\varepsilon k^2 a_0 b_{-1} b_1 - 3\varepsilon k^2 a_1 b_{-1} b_0$$
$$- 3k a_{-1} a_0 b_1 + 3k a_0 a_1 b_{-1} - 3\omega a_{-1} b_0 b_1$$
$$+ 3\omega a_1 b_{-1} b_0)(\exp(\eta))^3$$
$$+ (4\varepsilon k^2 a_{-1} b_{-1} b_1 - \varepsilon k^2 a_{-1} b_0^2 + \varepsilon k^2 a_0 b_{-1} b_0$$
$$- 4\varepsilon k^2 a_1 b_{-1}^2 - 2k a_{-1}^2 b_1 - k a_{-1} a_0 b_0 + 2k a_{-1} a_1 b_{-1}$$
$$+ k a_0^2 b_{-1} - 2\omega a_{-1} b_{-1} b_1 - \omega a_{-1} b_0^2 + \omega a_0 b_{-1} b_0$$
$$+ 2\omega a_1 b_{-1}^2)(\exp(\eta))^2$$
$$+ (\varepsilon k^2 a_{-1} b_{-1} b_0 - \varepsilon k^2 a_0 b_{-1}^2 - k a_{-1}^2 b_0 + k a_{-1} a_0 b_{-1}$$
$$- \omega a_{-1} b_{-1} b_0 + \omega a_0 b_{-1}^2) \exp(\eta) = 0$$

Kemudian memisalkan koefisien yang diperoleh dari persamaan (3.17), Pangkat $\exp \eta^n$ dari persamaan (3.16) terbagi menjadi lima yaitu $(exp(\eta))^5, (exp(\eta))^4, (exp(\eta))^3, (exp(\eta))^2, (exp(\eta))^1$.

Dimana koefisien dari $(exp(\eta))^1$ dimisalkan dengan A_1, koefisien dari $(exp(\eta))^2$ dimisalkan dengan A_2, koefisien dari $(exp(\eta))^3$ dimisalkan dengan A_3, koefisien dari $\left(exp(\eta)\right)^4$ dimisalkan dengan A_4 dan yang terakhir dari koefisien dari $\left(exp(\eta)\right)^5$ dimisalkan dengan A_5. Sehingga ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
A_1 &= \varepsilon k^2 a_{-1} b_{-1} b_0 - \varepsilon k^2 a_0 b_{-1}^2 - k a_{-1}^2 b_0 + k a_{-1} a_0 b_{-1} \\
&\quad - \omega a_{-1} b_{-1} b_0 + \omega a_0 b_{-1}^2 \\
A_2 &= 4\varepsilon k^2 a_{-1} b_{-1} b_1 - \varepsilon k^2 a_{-1} b_0^2 + \varepsilon k^2 a_0 b_{-1} b_0 - 4\varepsilon k^2 a_1 b_{-1}^2 \\
&\quad - 2k a_{-1}^2 b_1 - k a_{-1} a_0 b_0 + 2k a_{-1} a_1 b_{-1} + k a_0^2 b_{-1} \\
&\quad - 2\omega a_{-1} b_{-1} b_1 - \omega a_{-1} b_0^2 + \omega a_0 b_{-1} b_0 \\
&\quad + 2\omega a_1 b_{-1}^2 \\
A_3 &= -3\varepsilon k^2 a_{-1} b_0 b_1 + 6\varepsilon k^2 a_0 b_{-1} b_1 - 3\varepsilon k^2 a_1 b_{-1} b_0 \\
&\quad - 3k a_{-1} a_0 b_1 + 3k a_0 a_1 b_{-1} - 3\omega a_{-1} b_0 \\
&\quad + 2\omega a_1 b_{-1} b_0 \\
A_4 &= -4\varepsilon k^2 a_{-1} b_1^2 + \varepsilon k^2 a_0 b_0 b_1 + 4\varepsilon k^2 a_1 b_{-1} b_1 - \varepsilon k^2 a_1 b_0^2 \\
&\quad - 2k a_{-1} a_1 b_1 - k a_0^2 b_1 + k a_0 a_1 b_0 + 2k a_1^2 b_{-1} \\
&\quad - 2\omega a_{-1} b_1^2 - \omega a_0 b_0 b_1 + 2\omega a_1 b_{-1} b_1 \\
&\quad + \omega a_1 b_0^2 \\
A_5 &= -\varepsilon k^2 a_0 b_1^2 + \varepsilon k^2 a_1 b_0 b_1 + k a_0 a_1 b_1 + k a_1^2 b_0 - \omega a_0 b_1^2 \\
&\quad + \omega a_1 b_0 b_1
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Sehingga (3.17) dapat ditulis menjadi

$$A_1 = (a_{-1} b_0 - a_0 b_{-1})(\varepsilon k^2 b_{-1} - k a_{-1} - \omega b_{-1}) \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= -4a_1\left(\varepsilon k^2 - \frac{1}{2}\omega\right) b_{-1}^2 \\
&\quad + \left(\varepsilon(4a_{-1} b_1 + a_0 b_0)k^2 + (2a_{-1} a_1 + a_0^2)k \right. \\
&\quad \left. + \omega(-2a_{-1} b_1 + a_0 b_0)\right) b_{-1} \\
&\quad - a_{-1}(k^2 b_0^2 \varepsilon + (2a_{-1} b_1 + a_0 b_0)k + \omega b_0^2)
\end{aligned}$$

$$A_3 = 6\varepsilon\left(\left(b_1a_0 - \frac{1}{2}a_1b_0\right)b_{-1} - \frac{1}{2}a_{-1}b_0b_1\right)k^2$$

$$- 3a_0(a_{-1}b_1 - a_1b_{-1})k - 3\omega b_0(a_{-1}b_1 - a_1b_{-1})$$

$$A_4 = -4a_{-1}\left(\varepsilon k^2 + \frac{1}{2}\omega\right)b_1^2$$

$$+ \left(\varepsilon(a_0b_0 + 4a_1b_{-1})\,k^2 + (-2a_{-1}a_1 - a_0^2)k\right.$$

$$\left.- \omega(a_0b_0 - 2a_1b_{-1})\right)b_1$$

$$- a_1(k^2b_0^2\varepsilon + (-a_0b_0 - 2a_1b_{-1})k - \omega b_0^2)$$

$$A_5 = -(a_0b_1 - a_1b_0)\big((\epsilon k^2 + \omega)b_1 + ka_1\big)$$

Berdasarkan (3.17), maka persamaan (3.16) dapat ditulis menjadi

$$A_1\exp(\eta) + A_2\exp(2\eta) + A_3\exp(3\eta) + A_4\exp(4\eta) + A_5\exp(5\eta) = 0 \qquad (3.19)$$

Dimana A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 adalah sebuah koefisien yang akan dicari cari nilai parameternya. Adapun nilai koefisien dari persamaan (3.18) yang memenuhi bentuk dari (3.19) adalah bernilai nol. Sehingga persamaan (3.18) ditulis menjadi sebagai berikut

$$\varepsilon k^2a_{-1}b_{-1}b_0 - \varepsilon k^2a_0b_{-1}^2 - ka_{-1}^2b_0 + ka_{-1}a_0b_{-1} - \omega a_{-1}b_{-1}b_0 +$$
$$\omega a_0b_{-1}^2=0$$

$$4\varepsilon k^2a_{-1}b_{-1}b_1 - \varepsilon k^2a_{-1}b_0^2 + \varepsilon k^2a_0b_{-1}b_0 - 4\varepsilon k^2a_1b_{-1}^2 - 2ka_{-1}^2b_1$$

$$- ka_{-1}a_0b_0 + 2ka_{-1}a_1b_{-1} + ka_0^2b_{-1} - 2\omega a_{-1}b_{-1}b_1$$

$$- \omega a_{-1}b_0^2 + \omega a_0b_{-1}b_0 + 2\omega a_1b_{-1}^2 = 0$$

$$-3\varepsilon k^2a_{-1}b_0b_1 + 6\varepsilon k^2a_0b_{-1}b_1 - 3\varepsilon k^2a_1b_{-1}b_0 - 3ka_{-1}a_0b_1$$

$$+ 3ka_0a_1b_{-1} - 3\omega a_{-1}b_0 + 2\omega a_1b_{-1}b_0 = 0$$

(3.20)

$$-4\varepsilon k^2a_{-1}b_1^2+\varepsilon k^2a_0b_0b_1+4\varepsilon k^2a_1b_{-1}b_1-\varepsilon k^2a_1b_0^2-2ka_{-1}a_1b_1$$
$$-ka_0^2b_1+ka_0a_1b_0+2ka_1^2b_{-1}-2\omega a_{-1}b_1^2$$
$$-\omega a_0b_0b_1+2\omega a_1b_{-1}b_1+\omega a_1b_0^2=0$$
$$-\varepsilon k^2a_0b_1^2+\varepsilon k^2a_1b_0b_1+ka_0a_1b_1+ka_1^2b_0-\omega a_0b_1^2+\omega a_1b_0b_1=0$$

Langkah 4

Selanjutnya adalah mencari nilai parameter dari sistem persamaan (3.20). Adapun nilai parameter yang akan dicari adalah a_{-1}, a_0, a_1, b_0, b_{-1} dan b_1 Berikut adalah penjabaran mencari nilai parameter

1. Pertama akan dicari nilai parameter dari a_{-1}, caranya mengelompokan a_{-1} dari persamaan dari sistem (3.20)

$$-ka_{-1}^2b_0+a_{-1}(\varepsilon k^2b_{-1}b_0-\omega b_{-1}b_0+ka_0b_{-1})-\varepsilon k^2a_0b_{-1}^2+\omega a_0b_{-1}^2=0$$

Kemudian nilai dari a_{-1}adalah

$$a_{-1(1,2)}=\frac{-(\varepsilon k^2b_{-1}b_0-\omega b_{-1}b_0+ka_0b_{-1})}{2(-kb_0)} \tag{3.21}$$

$$\frac{\pm\sqrt{(\varepsilon k^2b_{-1}b_0-\omega b_{-1}b_0+ka_0b_{-1})^2-4(-kb_0)(-\varepsilon k^2a_0b_{-1}^2+\omega a_0b_{-1}^2)}}{2(-kb_0)}$$

Selanjutnya adalah memisalkan setiap suku agar memudahkan dalam penyelesaian menjadi sebagai berikut

$$a=(\varepsilon k^2b_{-1}b_0-\omega b_{-1}b_0+ka_0b_{-1})^2$$
$$=k^4\varepsilon^2b_{-1}^2b_0^2+2k^3\varepsilon a_0b_{-1}^2b_0-2k^2\omega\varepsilon b_{-1}^2b_0^2+k^2a_0^2b_{-1}^2-2k\omega\, a_0b_{-1}^2b_0$$
$$+\omega^2b_{-1}^2b_0^2$$

$$b=4(-kb_0)(-\varepsilon k^2a_0b_{-1}^2+\omega a_0b_{-1}^2)$$
$$=-4kb_0(-\varepsilon k^2a_0b_{-1}^2+\omega a_0b_{-1}^2)$$

$$= 4\varepsilon k^3 b_0 a_0 b_{-1}^2 - 4k\omega b_0 a_0 b_{-1}^2$$

$$c = (\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 - \omega b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1})^2 - 4(-k b_0)(-\varepsilon k^2 a_0 b_{-1}^2 + \omega a_0 b_{-1}^2)$$

$$a - b = k^4 \varepsilon^2 b_{-1}^2 b_0^2 + 2k^3 \varepsilon a_0 b_{-1}^2 b_0 - 2k^2 \omega \varepsilon b_{-1}^2 b_0^2 + k^2 a_0^2 b_{-1}^2 - 2k\omega\, a_0 b_{-1}^2 b_0 + \omega^2 b_{-1}^2 b_0^2 - (4\varepsilon k^3 b_0 a_0 b_{-1}^2 - 4k\omega b_0 a_0 b_{-1}^2)$$

$$= k^4 \varepsilon^2 b_{-1}^2 b_0^2 + 2k^3 \varepsilon a_0 b_{-1}^2 b_0 - 4\varepsilon k^3 b_0 a_0 b_{-1}^2 - 2k^2 \omega \varepsilon b_{-1}^2 b_0^2 + k^2 a_0^2 b_{-1}^2 - 2k\omega\, a_0 b_{-1}^2 b_0 + 4k\omega b_0 a_0 b_{-1}^2 + \omega^2 b_{-1}^2 b_0^2$$

$$= k^4 \varepsilon^2 b_{-1}^2 b_0^2 - 2k^3 \varepsilon a_0 b_{-1}^2 b_0 - 2k^2 \omega \varepsilon b_{-1}^2 b_0^2 + k^2 a_0^2 b_{-1}^2 + 2k\omega\, a_0 b_{-1}^2 b_0 + \omega^2 b_{-1}^2 b_0^2$$

$$= (k^2 \varepsilon b_{-1} b_0 - k a_0 b_{-1} - \omega b_{-1} b_0)^2$$

Maka persamaan (3.21) dapat ditulis kembali menjadi

$$a_{-1(1)} = \frac{-(\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 - \omega b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1})}{2(-k b_0)}$$

$$\frac{\pm\sqrt{(\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 - \omega b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1})^2 - 4(-k b_0)(-\varepsilon k^2 a_0 b_{-1}^2 + \omega a_0 b_{-1}^2)}}{2(-k b_0)}$$

$$= \frac{-(\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 - \omega b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1})}{2(-k b_0)} + \frac{\sqrt{a - b}}{2(-k b_0)}$$

$$= \frac{-(\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 - \omega b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1})}{2(-k b_0)} + \frac{\sqrt{(k^2 \varepsilon b_{-1} b_0 - k a_0 b_{-1} - \omega b_{-1} b_0)^2}}{2(-k b_0)}$$

$$= \frac{-(\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 - \omega b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1}) + (k^2 \varepsilon b_{-1} b_0 - k a_0 b_{-1} - \omega b_{-1} b_0)}{2(-k b_0)}$$

$$= \frac{-\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 + \omega b_{-1} b_0 - k a_0 b_{-1} + (k^2 \varepsilon b_{-1} b_0 - k a_0 b_{-1} - \omega b_{-1} b_0)}{2(-k b_0)}$$

$$= \frac{-2k a_0 b_{-1}}{2(-k b_0)}$$

$$= \frac{a_0 b_{-1}}{b_0}$$

$$a_{-1(2)} = \frac{-(\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 - \omega b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1})}{2(-k b_0)}$$

$$\frac{-\sqrt{(\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 - \omega b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1})^2 - 4(-k b_0)(-\varepsilon k^2 a_0 b_{-1}^2 + \omega a_0 b_{-1}^2)}}{2(-k b_0)}$$

$$= \frac{-(\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 - \omega b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1})}{2(-k b_0)} - \frac{\sqrt{a-b}}{2(-k b_0)}$$

$$= \frac{-(\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 - \omega b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1})}{2(-k b_0)} \frac{-\sqrt{(k^2 \varepsilon b_{-1} b_0 - k a_0 b_{-1} - \omega b_{-1} b_0)^2}}{2(-k b_0)}$$

$$= \frac{-(\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 - \omega b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1}) - (k^2 \varepsilon b_{-1} b_0 - k a_0 b_{-1} - \omega b_{-1} b_0)}{2(-k b_0)}$$

$$= \frac{-\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 + \omega b_{-1} b_0 - k a_0 b_{-1} - (k^2 \varepsilon b_{-1} b_0 - k a_0 b_{-1} - \omega b_{-1} b_0)}{2(-k b_0)}$$

$$= \frac{-\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 + \omega b_{-1} b_0 - k a_0 b_{-1} - k^2 \varepsilon b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1} + \omega b_{-1} b_0}{-2k b_0}$$

$$= \frac{-2\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 + 2\omega b_{-1} b_0}{-2k b_0}$$

$$= \frac{\varepsilon k^2 b_{-1} - \omega b_{-1}}{k}$$

$$= \frac{b_{-1}(\varepsilon k^2 - \omega)}{k}$$

Maka di peroleh

$$a_{-1(1)} = \frac{a_0 b_{-1}}{b_0} \qquad (3.22)$$

atau

$$a_{-1(2)} = \frac{b_{-1}(\varepsilon k^2 - \omega)}{k} \qquad (3.23)$$

Dari nilai a_{-1} (3.22) dan (3.23) yang diperoleh yang digunakan adalah (3.23) saja, karena hasil operasi dari (3.22) jika di substitusikan dalam A_2, A_3, A_4

dan A_5 (3.20) akan menghasilkan nilai nol semua, sehingga jika hal ini dilakukan maka tidak mendapatkan informasi selanjutnya.

Selanjutnya substitusi $a_{-1_{(2)}}$(3.23) dalam A_2 pada (3.20) maka diperoleh

$$4\varepsilon k^2 \frac{b_{-1}\left(\varepsilon k^2-\omega\right)}{k} b_{-1}b_1 - \varepsilon k^2 \frac{b_{-1}\left(\varepsilon k^2-\omega\right)}{k} b_0^2 + \varepsilon k^2 a_0 b_{-1} b_0 - 4\varepsilon k^2 a_1 b_{-1}^2$$
$$- 2k\left(\frac{b_{-1}\left(\varepsilon k^2-\omega\right)}{k}\right)^2 b_1 - k\frac{b_{-1}(\varepsilon-\omega)}{k} a_0 b_0 + 2k\frac{b_{-1}\left(\varepsilon k^2-\omega\right)}{k} a_1 b_{-1}$$
$$+ k a_0^2 b_{-1} - 2\omega \frac{b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)}{k} b_{-1}b_1 - \omega\frac{b_{-1}\left(\varepsilon k^2-\omega\right)}{k} b_0^2 + \omega a_0 b_{-1} b_0$$
$$+ 2\omega a_1 b_{-1}^2 = 0$$

$$4\varepsilon k b_{-1}^2 b_1(\varepsilon k^2-\omega) - \varepsilon k b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega) b_0^2 + \varepsilon k^2 b_{-1} a_0 b_0 - 4\varepsilon k^2 a_1 b_{-1}^2$$
$$- \frac{2b_{-1}^2(\varepsilon k^2-\omega)^2 b_1}{k} - b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega) a_0 b_0 + 2b_{-1}^2(\varepsilon k^2-\omega) a_1$$
$$+ k b_{-1} a_0^2 - \frac{2\omega b_{-1}^2 b_1(\varepsilon k^2-\omega)}{k} - \frac{\omega b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega) b_0^2}{k}$$
$$+ \omega b_{-1} a_0 b_0 + 2\omega a_1 b_{-1}^2 = 0$$

Sehingga persamaan A_2 menjadi

$$\frac{1}{k}\left(b_{-1}(2\varepsilon^2 k^4 b_{-1} b_1 - \varepsilon k^4 b_0 - 2\varepsilon k^3 a_1 b_{-1} - 2\varepsilon k^2 \omega b_{-1} b_1 + k^2 a_0^2 + 2k\omega a_0 b_0 + \omega^2 b_0^2)\right) = 0 \tag{3.24}$$

Selanjutnya adalah substitusi a_{-1} (3.22) dalam A_3 (3.20)

$$-3\varepsilon k^2 \frac{b_{-1}\left(\varepsilon k^2-\omega\right)}{k} b_0 b_1 + 6\varepsilon k^2 a_0 b_{-1} b_1 - 3\varepsilon k^2 a_1 b_{-1} b_0$$
$$- 3k\frac{b_{-1}\left(\varepsilon k^2-\omega\right)}{k} a_0 b_1 + 3k a_0 a_1 b_{-1} - 3\omega \frac{b_{-1}\left(\varepsilon k^2-\omega\right)}{k} b_0$$
$$+ 2\omega a_1 b_{-1} b_0 = 0$$

$$-3\epsilon kb_{-1}(\varepsilon\, k^2-\omega)b_0b_1+6\varepsilon b_{-1}b_1a_0-3\varepsilon k^2b_{-1}a_1b_0-3b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)a_0b_1$$
$$+3ka_0a_1b_{-1}-\frac{3\omega b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)b_0b_1}{k}+3\omega a_1b_{-1}b_0=0$$

Sehingga persamaan A_3 menjadi

$$-\frac{3b_{-1}(\varepsilon k^2b_1+ka_1+\omega b_1)(\varepsilon k^2b_0-ka_0-\omega b_0)}{k}=0 \quad (3.25)$$

Selanjutnya adalah substitusi a_{-1} (3.22) dalam A_4 (3.20) menjadi

$$-4\varepsilon k^2\frac{b_{-1}\left(\varepsilon k^2-\omega\right)}{k}b_1^2+\varepsilon k^2a_0b_0b_1+4\varepsilon k^2a_1b_{-1}b_1-\varepsilon k^2a_1b_0^2$$
$$-2k\frac{b_{-1}\left(\varepsilon k^2-\omega\right)}{k}a_1b_1-ka_0^2b_1+ka_0a_1b_0+2ka_1^2b_{-1}$$
$$-2\omega\frac{b_{-1}\left(\varepsilon k^2-\omega\right)}{k}b_1^2-\omega a_0b_0b_1+2\omega a_1b_{-1}b_1+\omega a_1b_0^2=0$$

$$-4\varepsilon kb_1^2b_{-1}\left(\varepsilon k^2-\omega\right)+\varepsilon k^2b_1a_0b_0+4\varepsilon k^2b_1a_1b_{-1}-\varepsilon k^2b_0^2a_1$$
$$-2b_1b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)a_1-kb_1a_0^2+ka_0b_0a_1+2ka_1^2b_{-1}$$
$$-\frac{2\omega b_1^2b_{-1}\left(\varepsilon k^2-\omega\right)}{k}-\omega b_1a_0b_0+2\omega b_1a_1b_{-1}+\omega b_0^2a_1=0$$

Sehingga persamaan A4 menjadi

$$\frac{1}{k}\Big(-4\varepsilon^2k^4b_{-1}b_1^2+\varepsilon\big((a_0b_0+2a_1b_{-1})b_1-b_0^2a_1\big)k^3 \quad (3.26)$$
$$+(2\epsilon\omega b_{-1}b_1^2-a_0^2b_1+a_0a_1b_0+2a_1^2b_{-1})k^2$$
$$-\big((a_0b_0-4a_1b_{-1})b_1-b_0^2a_1\big)\omega k+2\omega^2b_{-1}b_1^2\Big)$$
$$=0$$

Karena dalam persamaan A_5 tidak mengandung nol maka a_{-1} (3.22) tidak disubstitusikan

$$-\varepsilon a_0b_1^2+\varepsilon k^2a_1b_0b_1-ka_0a_1b_1+ka_1^2b_0-\omega a_0b_1^2+\omega a_1b_0b_1=0$$

Sehingga persamaan A_5 menjadi

$$-(a_0 b_1 - a_1 b_0)\big((\varepsilon k^2 + \omega) b_1 + k a_1\big) = 0$$

2. Selanjutnya mencari nilai parameter a_0 dari persamaan A_5 (3.20)

Dengan cara kemudian mengumpulkan suku yang mengandung a_0 untuk mencari nilai dari a_0

$$a_0(-\varepsilon k^2 b_1^2 - k a_1 b_1 - \omega b_1^2) + \varepsilon k^2 a_1 b_0 b_1 + k a_1^2 b_0 + \omega a_1 b_0 b_1 = 0$$

$$a_0(-\varepsilon k^2 b_1^2 - k a_1 b_1 - \omega b_1^2) = -\varepsilon k^2 a_1 b_0 b_1 - k a_1^2 b_0 - \omega a_1 b_0 b_1$$

$$a_0 = \frac{-\varepsilon k^2 a_1 b_0 b_1 - k a_1^2 b_0 - \omega a_1 b_0 b_1}{-\varepsilon k^2 b_1^2 - k a_1 b_1 - \omega b_1^2}$$

$$= \frac{a_1 b_0}{b_1}\left(\frac{-\varepsilon k^2 b_1 - k a_1 - \omega b_1}{-\varepsilon k^2 b_1 - k a_1 - \omega b_1}\right)$$

$$= \frac{a_1 b_0}{b_1} \qquad (3.27)$$

Selanjutnya substitusi a_0 (3.27) dalam persamaan A_2 (3.24)

$$4\varepsilon k b_{-1}^2 b_1(\varepsilon k^2 - \omega) - \varepsilon k b_{-1}(\varepsilon k^2 - \omega) b_0^2 + \varepsilon k^2 b_{-1}\frac{a_1 b_0}{b_1} b_0 - 4\varepsilon k^2 a_1 b_{-1}^2$$
$$- \frac{2 b_{-1}^2(\varepsilon k^2 - \omega)^2 b_1}{k} - b_{-1}(\varepsilon k^2 - \omega)\frac{a_1 b_0}{b_1} b_0 + 2 b_{-1}^2(\varepsilon k^2 - \omega) a_1$$
$$+ k b_{-1}\left(\frac{a_1 b_0}{b_1}\right)^2 - \frac{2\omega b_{-1}^2 b_1(\varepsilon k^2 - \omega)}{k} - \frac{\omega b_{-1}(\varepsilon k^2 - \omega) b_0^2}{k}$$
$$+ \omega b_{-1}\frac{a_1 b_0}{b_1} b_0 + 2\omega a_1 b_{-1}^2 = 0$$

$$4\varepsilon k b_{-1}^2 b_1(\varepsilon k^2-\omega)-\varepsilon k b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)b_0^2+\frac{\varepsilon k^2 b_{-1}a_1 b_0^2}{b_1}-4\varepsilon k^2 a_1 b_{-1}^2 \quad (3.28)$$

$$-\frac{2b_{-1}^2(\epsilon k^2-\omega)^2 b_1}{k}-\frac{b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)a_1 b_0^2}{b_1}$$

$$+2b_{-1}^2(\varepsilon k^2-\omega)a_1+\frac{k b_{-1}a_1^2 b_0^2}{b_1^2}-\frac{2\omega b_{-1}^2 b_1(\varepsilon k^2-\omega)}{k}$$

$$-\frac{\omega b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)b_0^2}{k}+\frac{\omega b_1 a_1 b_0^2}{b_1}+2\omega a_1 b_{-1}^2=0$$

Selanjutnya substitusi a_0 (3.27) dalam A_3 (3.25) menjadi

$$-3\varepsilon k b_{-1}(\varepsilon\, k^2-\omega)b_0 b_1+6\varepsilon b_{-1}b_1\frac{a_1 b_0}{b_1}-3\varepsilon k^2 b_{-1}a_1 b_0$$

$$-3b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)\frac{a_1 b_0}{b_1}b_1+3k\frac{a_1 b_0}{b_1}a_1 b_{-1}$$

$$-\frac{3\omega b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)b_0 b_1}{k}+3\omega a_1 b_{-1}b_0=0$$

$$-3\varepsilon k b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)b_0\, b_1+3\varepsilon k^2 b_{-1}a_1 b_0-3b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)a_1 b_0 \quad (3.29)$$

$$+\frac{3k_1^2 b_0 b_{-1}}{b_1}-\frac{3\omega b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)b_0 b_1}{k}+3\omega a_1 b_{-1}b_0$$

$$=0$$

Selanjutnya substitusi a_0 (3.27) dalam A_4 (3.26) menjadi

$$-4\varepsilon k b_1^2 b_{-1}\left(\varepsilon k^2-\omega\right)+\varepsilon k^2 b_1\frac{a_1 b_0}{b_1}b_0+4\varepsilon k^2 b_1 a_1 b_{-1}-\varepsilon k^2 b_0^2 a_1$$

$$-2b_1 b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)a_1-k b_1\left(\frac{a_1 b_0}{b_1}\right)^2+k\frac{a_1 b_0}{b_1}b_0 a_1+2k a_1^2 b_{-1}$$

$$-\frac{2\omega b_1^2 b_{-1}\left(\varepsilon k^2-\omega\right)}{k}-\omega b_1\frac{a_1 b_0}{b_1}b_0+2\omega b_1 a_1 b_{-1}+\omega b_0^2 a_1=0$$

$$-4\varepsilon k b_1^2 b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)+4\varepsilon k^2 b_1 a_1 b_{-1}-2b_1 b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega) \qquad (3.30)$$

$$+2ka_1^2 b_{-1}-\frac{2\omega b_1^2 b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)}{k}$$

$$+2\omega b_1 a_1 b_{-1}=0$$

3. Mencari nilai parameter a_1 dari persamaan A2 (3.28)

$$\frac{kb_{-1}b_0^2}{b_1^2}a_1^2+a_1\left(\frac{\varepsilon k^2 b_{-1}b_0^2}{b_1}-4\varepsilon k^2 b_{-1}^2-\frac{b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)b_0^2}{b_1}+2b_{-1}^2(\varepsilon k^2-\omega)+\frac{\omega b_1 b_0^2}{b_1}\right.$$

$$\left.+2\omega b_{-1}^2\right)-\frac{2b_{-1}^2(\varepsilon k^2-\omega)^2 b_1}{k}-\frac{2\omega b_{-1}^2 b_1(\varepsilon k^2-\omega)}{k}$$

$$-\frac{\omega b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)b_0^2}{k}+4\varepsilon k b_{-1}^2 b_1(\epsilon k^2-\omega)-\varepsilon k b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)b_0^2=0$$

$$a=\frac{kb_{-1}b_0^2}{b_1^2}$$

$$b=\left(\frac{\varepsilon k^2 b_{-1}b_0^2}{b_1}-4\varepsilon k^2 b_{-1}^2-\frac{b_{-1}\left(\varepsilon k^2-\omega\right)b_0^2}{b_1}+2b_{-1}^2\left(\varepsilon k^2-\omega\right)+\frac{\omega b_1 b_0^2}{b_1}+2\omega b_{-1}^2\right)$$

$$=\left(\frac{\varepsilon k^2 b_{-1}b_0^2}{b_1}-4\varepsilon k^2 b_{-1}^2-\frac{\left(\varepsilon k^2 b_{-1}b_0^2-\omega b_{-1}b_0^2\right)}{b_1}+\left(2\varepsilon k^2 b_{-1}^2-\omega 2b_{-1}^2\right)+\frac{\omega b_{-1}b_0^2}{b_1}\right.$$

$$\left.+2\omega b_{-1}^2\right)$$

$$=\left(\frac{\varepsilon k^2 b_{-1}b_0^2-\varepsilon k^2 b_{-1}b_0^2}{b_1}-4\varepsilon k^2 b_{-1}^2+2\varepsilon k^2 b_{-1}^2+\frac{\left(\omega b_{-1}b_0^2\right)}{b_1}+\frac{\omega b_{-1}b_0^2}{b_1}+2\omega b_{-1}^2\right.$$

$$\left.-2\omega b_{-1}^2\right)$$

$$=-2\varepsilon k^2 b_{-1}^2+\frac{2\omega b_{-1}b_0^2}{b_1}$$

$$c=\left(-\frac{2b_{-1}^2(\varepsilon k^2-\omega)^2 b_1}{k}-\frac{2\omega b_{-1}^2 b_1(\varepsilon k^2-\omega)}{k}-\frac{\omega b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)b_0^2}{k}\right.$$
$$\left.+4\varepsilon k b_{-1}^2 b_1(\epsilon k^2-\omega)-\varepsilon k b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)b_0^2\right)$$

$$a_{1(1,2)}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Maka didapatkan dua nilai a_1 yaitu

$$a_1=\frac{b_1(2\varepsilon k^2 b_{-1}b_1-\varepsilon k^2 b_0^2-\omega b_0^2)}{kb_0^2} \tag{3.31}$$

dan

$$a_1=\frac{b_1(\varepsilon k^2-\omega\ )}{k} \tag{3.32}$$

Substitusi a_1(3.31) dalam A_3 (3.29)

$$\begin{aligned}&-3\varepsilon k b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)b_0\, b_1\\&+3\varepsilon k^2 b_{-1}\frac{b_1(2\varepsilon k^2 b_{-1}b_1-\varepsilon k^2 b_0^2-\omega b_0^2)}{kb_0^2}b_0\\&-3b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)\frac{b_1(2\varepsilon k^2 b_{-1}b_1-\varepsilon k^2 b_0^2-\omega b_0^2)}{kb_0^2}b_0\\&+\frac{3k_1^2 b_0 b_{-1}}{b_1}-\frac{3\omega b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)b_0 b_1}{k}\\&+3\omega\frac{b_1(2\varepsilon k^2 b_{-1}b_1-\varepsilon k^2 b_0^2-\omega b_0^2)}{kb_0^2}b_{-1}b_0=0\end{aligned} \tag{3.33}$$

Substitusi a_1(3.31) dalam A4 (3.30)

$$-4\varepsilon k b_1^2 b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)+4\varepsilon k^2 b_1 \frac{b_1(2\varepsilon k^2 b_{-1}b_1-\varepsilon k^2 b_0^2-\omega b_0^2)}{k b_0^2} b_{-1}$$
$$-2b_1 b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)$$
$$+2k\frac{b_1(2\varepsilon k^2 b_{-1}b_1-\varepsilon k^2 b_0^2-\omega b_0^2)^2}{k b_0^2} b_{-1}$$
$$-\frac{2\omega b_1^2 b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)}{k}$$
$$+2\omega b_1 \frac{b_1(2\varepsilon k^2 b_{-1}b_1-\varepsilon k^2 b_0^2-\omega b_0^2)}{k b_0^2} b_{-1}=0 \quad (3.34)$$

4. Kemudian mencari nilai b_1 dari A_3 (3.33)

Persamaan (3.33) di sederhanakan menjadi

$$\frac{12 b_{-1}^3 \varepsilon^2 k^3 b_1^3}{b_0^3}-\frac{12 b_{-1}^2 \varepsilon^2 k^3 b_1^2}{b_0^3}=0 \quad (3.35)$$

Maka didapatkan b_1 dari persamaan (3.35)

$$b_1=\frac{b0^2}{b_{-1}} \quad (3.36)$$

Persamaan (3.36) jika disubstitusikan dalam A_4 (3.34) akan habis diperasikan. Jadi persamaan (3.36) adalah nilai parameter yang terakhir, yang artinya b_0 dan b_{-1} bernilai bebas.

Selanjutnya adalah substitusi nilai parameter yang diperoleh sebelumnya. Karena dalam a_1 (3.31) mengandung varibel b_1, maka (3.36) disubstitusi dalam (3.31) maka dapat ditulis

$$a_1=\frac{\frac{b0^2}{b_{-1}}\left(2\varepsilon k^2 b_{-1}\frac{b0^2}{b_{-1}}-\varepsilon k^2 b_0^2-\omega b_0^2\right)}{k b_0^2}$$

$$= \frac{\varepsilon k^2 b_0^2 - \omega b_0^2}{b_{-1} k} \quad (3.37)$$

Karena dalam a_0 (3.27) juga mengandung variabel b_1 maka subtitusikan persamaan (3.36) dalam (3.27), maka (3.27) dapat ditulis menjadi

$$a_0 = \frac{a_1 b_0}{\frac{b0^2}{b_{-1}}}$$
$$= \frac{a_1 b_{-1}}{b_0} \quad (3.38)$$

Selanjutnya substitusi (3.37) dalam (3.38) maka a_0 dapat dituliskan menjadi

$$a_0 = \frac{\frac{\varepsilon k^2 b_0^2 - \omega b_0^2}{b_{-1} k} b_{-1}}{b_0}$$
$$= \frac{\varepsilon k^2 b_0^2 - \omega b_0^2}{k b_0} \quad (3.39)$$

Langkah 6

Substusi nilai parameter yang didapat dalam $u(\eta)$ dalam persamaan (3.8) Kemudia substitusi nilai parameter yang di dapat dalam $u(\eta)$ maka menjadi

$$u(\eta) = \frac{\frac{b_{-1}(\varepsilon - \omega)\exp(-\eta)}{k} + \frac{\varepsilon k^2 b_0^2 - \omega b_0^2}{k b_0} + \frac{\varepsilon b_0^2 - \omega b_0^2}{b_{-1} k}\exp(\eta)}{b_{-1}\exp(-\eta) + b_0 + \frac{b_0^2 \exp(\eta)}{b_{-1}}}$$

$$= \frac{\frac{b_0 b_{-1}^2 (\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-\eta)}{k b_0 b_{-1}} + \frac{b_{-1}(\varepsilon b_0^2 - \omega b_0^2)}{k b_0 b_{-1}} + \frac{b_0(\varepsilon k^2 b_0^2 - \omega b_0^2)}{k b_0 b_{-1}}\exp(\eta)}{\frac{b_{-1} b_{-1}}{b_{-1}}\exp(-\eta) + \frac{b_{-1}}{b_{-1}} b_0 + \frac{b_0^2 \exp(\eta)}{b_{-1}}}$$

$$= \left(\frac{b_0 b_{-1}^2 (\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-\eta)}{k b_0 b_{-1}} + \frac{b_{-1}(\varepsilon k^2 b_0^2 - \omega b_0^2)}{k b_0 b_{-1}} + \frac{b_0(\varepsilon k^2 b_0^2 - \omega b_0^2)}{k b_0 b_{-1}}\exp(\eta)\right)\left(\frac{b_{-1}}{b_{-1}^2 \exp(-\eta) + b_0 b_{-1} + b_0^2 \exp(\eta)}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon k^2 - \omega}{k} \quad (3.40)$$

Persamaan (3.40) merupakan solusi dari persaman (3.5), karena menghasilkan solusi yang konstan maka akan dicari solusi yang tidak konstan.

Untuk mendapatkan nilai parameter yang lain dengan cara mengulangi langkah yang sama seperti di atas. Adapun penyeleseaian untuk mencari nilai parameter dijelaskan dalam lampiran. Berikut adalah nilai parameter yang diperoleh

Nilai paraameter yang pertama

$$a_{-1} = \frac{(\varepsilon k^2 - \omega)b_{-1}}{k} \tag{3.41}$$

$$a_0 = -\frac{(\varepsilon k^2 + \omega)b_0}{k}$$

$$a_1 = 0,\ b_1 = 0$$

$$b_0 = b_0, b_{-1} = b_{-1}$$

Selanjutnya substitusi (3.41) dalam persamaan (3.8), maka dapat ditulis menjadi

$$u(\eta) = \frac{\frac{(\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}}{k}\exp(-\eta) - \frac{(\varepsilon k^2-\omega)b_0}{k}}{b_{-1}\exp(-\eta) + b_0}, \eta = kx + \omega t$$

$$= \frac{(\varepsilon k^2 - \omega)b_{-1}\exp(-\eta) - (\varepsilon k^2 - \omega)b_0}{kb_{-1}\exp(-\eta) + kb_0} \tag{3.42}$$

$$u(x,t) = \frac{(\varepsilon k^2 - \omega)b_{-1}\exp(-kx - \omega t) - (\varepsilon k^2 - \omega)b_0}{kb_{-1}\exp(-kx - \omega t) + kb_0} \tag{3.43}$$

Berikut ini adalah didapatkan nilai parameter kedua

$$a_{-1} = \frac{(2\varepsilon k^2 - \omega)b_{-1}}{k} \tag{3.44}$$

$$a_1 = -\frac{(2\varepsilon k^2 + \omega)b_1}{k}$$

$$a_0 = 0$$

$$b_0 = 0$$

$$b_{-1} = b_{-1}$$

$$b_1 = b_1$$

Selanjutnya substitusi (3.44) dalam persamaan (3.8), maka dapat ditulis menjadi

$$u(\eta)=\frac{\frac{(2\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}}{k}\exp(-\eta)-\frac{(2\varepsilon k^2+\omega)b_1}{k}}{b_{-1}\exp(-\eta)+b_1\exp(\eta)},\eta=kx+\omega t \tag{3.45}$$

$$u(x,t)=\frac{\frac{(2\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}}{k}\exp(-kx-\omega t)-\frac{(2\varepsilon k^2+\omega)b_1}{k}}{b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t)} \tag{3.46}$$

Berikut adalah nilai parameter yang ketiga

$$a_{-1}=\frac{1}{4}\frac{(\varepsilon^2k^2b_0^2-k^2a_0^2-2k\omega a_0b_0-\omega^2b_0^2)(\varepsilon k^2-\omega)}{\varepsilon^2k^5b_1} \tag{3.47}$$

$$a_1=-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)}{k}$$

$$b_{-1}=\frac{1}{4}\frac{(\varepsilon^2k^2b_0^2-k^2a_0^2-2k\omega a_0b_0-\omega^2b_0^2)}{\varepsilon^2k^4b_1}$$

$$a_0=a_0$$

$$b_0=b_0$$

$$b_1=b_1$$

Selanjutnya substitusi (3.47) dalam $u(\eta)$ pada persamaan (3.8), maka dapat ditulis menjadi

$$u(\eta)= \tag{3.48}$$

$$\frac{\frac{1}{4}\frac{(\varepsilon^2k^2b_0^2-k^2a_0^2-2k\omega a_0b_0-\omega^2b_0^2)(\varepsilon k^2-\omega)\exp(-\eta)}{\varepsilon^2k^5b_1}+a_0-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)\exp(\eta)}{k}}{\frac{1}{4}\frac{(\varepsilon^2k^2b_0^2-k^2a_0^2-2k\omega a_0b_0-\omega^2b_0^2)\exp(-\eta)}{\varepsilon^2k^4b_1}+b_0+b_1\exp(\eta)}$$

dengan $\eta=kx+\omega t$

$$u(x,t)= \tag{3.49}$$

$$\frac{\frac{1}{4}\frac{(\varepsilon^2k^2b_0^2-k^2a_0^2-2k\omega a_0b_0-\omega^2b_0^2)(\varepsilon k^2-\omega)\exp(-kx-\omega t)}{\varepsilon^2k^5b_1}+a_0-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)\exp(kx+\omega t)}{k}}{\frac{1}{4}\frac{(\varepsilon^2k^2b_0^2-k^2a_0^2-2k\omega a_0b_0-\omega^2b_0^2)\exp(-kx-\omega t)}{\varepsilon^2k^4b_1}+b_0+b_1\exp(kx+\omega t)}$$

Persamaan (3.40), (3.43), (3.46) dan (3.49) adalah solusi analitik dari persamaan Burgers satu dimensi.

Langkah 7

Selanjutnya adalah membuktikan validitas dari solusi yang dperoleh, dengan cara sbstitusi solusi dalam persamaan (3.5) dan (3.1). Jika hasil substitusi memenuhi bentuk awal maka solusi yang diperoleh dikatakan valid sebagai solusi analitik dari persamaan (3.1). Berikut ini adalah penjelasanya

Berikut ini adalah pembuktian solusi analitik yang didapatkan

1. Pembuktian solusi (3.40) yang di substitusi dalam (3.5) dan (3.1)

$$\omega \frac{d\left(\frac{\varepsilon k^2-\omega}{k}\right)}{d\eta} + k\left(\frac{\varepsilon k^2-\omega}{k}\right)\frac{d\left(\frac{\varepsilon k^2-\omega}{k}\right)}{d\eta} - k^2\varepsilon\frac{d^2\left(\frac{\varepsilon k^2-\omega}{k}\right)}{d\eta^2} = 0$$

$$\omega(0) + k\left(\frac{\varepsilon k^2-\omega}{k}\right) - k^2\varepsilon(0) = 0$$

$$0 = 0$$

Karena solusi yang diperoleh dari persamaan (3.40) tidak mengandung variabel bebas x dan t, sehingga tidak perlu di substitusikan dalam (3.1). Berdasarkan penjabaran di atas maka solusi dari (3.40) valid dikatakan sebagai solusi analitik dari persamaan (3.1) tapi bersifat konstan.

2. Pembuktian solusi (3.42) dan (3.43) yang di substitusi dalam (3.5) dan (3.1)

Pertama substitusi persamaan (3.42) dalam (3.5)

$$\frac{du(\eta)}{d\eta} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{(\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-\eta) - (\varepsilon k^2-\omega)b_0}{kb_{-1}\exp(-\eta) + kb_0}\right)$$

$$= \Bigg(\frac{d}{d\eta}\Big(\big(\varepsilon k^2-\omega\big)b_{-1}\exp(-\eta)-\big(\varepsilon k^2+\omega\big)b_0\Big)kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0$$

$$-\frac{d}{d\eta}(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)\Big(\big(\varepsilon k^2-\omega\big)b_{-1}\exp(-\eta)$$

$$-\big(\varepsilon k^2+\omega\big)b_0\Big)\Bigg)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \Bigg(\Bigg(\big(\varepsilon k^2-\omega\big)b_{-1}\frac{d}{d\eta}\exp(-\eta)+\frac{d}{d\eta}\big(\varepsilon k^2+\omega\big)b_0\Bigg)(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)$$

$$-\left(kb_{-1}\frac{d}{d\eta}\exp(-\eta)+\frac{d}{d\eta}kb_0\right)\Big(\big(\varepsilon k^2-\omega\big)b_{-1}\exp(-\eta)$$

$$-\big(\varepsilon k^2+\omega\big)b_0\Big)\Bigg)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \Bigg(\Bigg((\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-\eta)\frac{d}{d\eta}(-\eta)+0\Bigg)(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)$$

$$-\left(kb_{-1}\exp(-\eta)\frac{d}{d\eta}(-\eta)+0\right)\big((\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-\eta)$$

$$-(\varepsilon k^2+\omega)b_0\big)\Bigg)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \Big((-(\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-\eta))(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)$$

$$+(kb_{-1}\exp(-\eta))\big((\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-\eta)$$

$$-(\varepsilon k^2+\omega)b_0\big)\Big)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)^2}\right)$$

$$=\frac{(-(\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-\eta))(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)}{(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)^2} \tag{3.50}$$

$$+\frac{(kb_{-1}\exp(-\eta))\big((\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-\eta)-(\varepsilon k^2+\omega)b_0\big)}{(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)^2}$$

Untuk mempermudah dalam pengerjaan suku dari persamaan (3.5) akan ada yang dimisalkan sebagai berikut

$a = b_{-1}\exp(-\eta)$

Maka persamaan (3.50) dapat ditulis menjadi

$$= \frac{(-(\varepsilon k^2-\omega)a)(ka+kb_0)}{(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)^2} + \frac{(ka)\big((\varepsilon k^2-\omega)a-(\varepsilon k^2+\omega)b_0\big)}{(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)^2}$$

$$= \frac{(-a\varepsilon k^2+a\omega)(ka+kb_0)}{(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)^2} + \frac{(ka)\big((a\varepsilon k^2-\omega a)-(b_0\varepsilon k^2+b_0\omega)\big)}{(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)^2}$$

$$= \frac{(-a^2\varepsilon k^3 - a\varepsilon k^3 b_0 + a^2\omega k + a\omega k b_0)}{(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)^2} + \frac{(a^2\varepsilon k^3 - \omega a^2 k - b_0\varepsilon k^3 a - kab_0\omega)}{(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)^2}$$

$$= \frac{(-a^2\varepsilon k^3 - a\varepsilon k^3 b_0 + a^2\omega k + a\omega k b_0 + a^2\varepsilon k^3 - \omega a^2 k - b_0\varepsilon k^3 a - kab_0\omega)}{(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)^2}$$

$$= \frac{(-a^2\varepsilon k^3 + a^2\varepsilon k^3 - a\varepsilon k^3 b_0 - b_0\varepsilon k^3 a + a^2\omega k - \omega a^2 k + a\omega k b_0 - kab_0\omega)}{(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0)^2}$$

$$= \frac{(0-2b_0\varepsilon k^3 a + 0 + 0)}{k^2(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2}$$

$$= \frac{(-2b_0\varepsilon k a)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2} \tag{3.51}$$

Selanjutnya karena $a = b_{-1}\exp(-\eta)$, maka persamaan (3.51) dapat ditulis kembali menjadi

$$= \frac{(-2b_0\varepsilon k b_{-1}\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2} \tag{3.52}$$

Selanjutnya

$$\frac{d^2u(\eta)}{d\eta^2} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{du(\eta)}{d\eta}\right) = \frac{d}{d\eta}\left(-\frac{2\varepsilon k b_0 b_{-1}\exp(-\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2}\right)$$

$$= -2\varepsilon k b_0 b_{-1}\frac{d}{d\eta}\frac{\exp(-\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2}$$

$$= -2\frac{\frac{d}{d\eta}\exp(-\eta)\,(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2 - \exp(-\eta)\frac{d}{d\eta}(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2}{((b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2)^2}\varepsilon k b_0 b_{-1}$$

$$= -2\varepsilon k b_0 b_{-1}\left(\frac{-\exp(-\eta)\,(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2 - 2(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)\exp(-\eta)\frac{d}{d\eta}(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^4}\right)$$

$$= -2\varepsilon k b_0 b_{-1}\frac{-\exp(-\eta)\,(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2 - 2(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)\exp(-\eta)\left(b_{-1}\frac{d}{d\eta}\exp(-\eta)+\frac{d}{d\eta}b_0\right)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^4}$$

$$= -2\varepsilon k b_0 b_{-1}\frac{-\exp(-\eta)\,(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2 - 2(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)\exp(-\eta)\,(-b_{-1}\exp(-\eta)+0)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^4}$$

$$= -2\varepsilon k b_0 b_{-1}\frac{-\exp(-\eta)\,(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2 + 2(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)b_{-1}\exp(-2\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^4}$$

$$= -2\varepsilon k b_0 b_{-1}\frac{-\exp(-\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2} + 2\varepsilon k b_0 b_{-1}\frac{-2b_{-1}\exp(-2\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}$$

$$= \frac{2\varepsilon k b_0 b_{-1}\exp(-\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2} - \frac{4\varepsilon k b_0 b_{-1}^2\exp(-2\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}$$

$$= \frac{2\varepsilon k b_0 b_{-1}\exp(-\eta)(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2} - \frac{4\varepsilon k b_0 b_{-1}^2\exp(-2\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}$$

$$= \frac{2\varepsilon k b_0 b_{-1}^2\exp(-2\eta) + 2\varepsilon k b_0 b_{-1} b_0\exp(-\eta) - 4\varepsilon k b_0 b_{-1}^2\exp(-2\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}$$

$$= \frac{2\varepsilon k b_0 b_{-1}^2\exp(-2\eta) - 4\varepsilon k b_0 b_{-1}^2\exp(-2\eta) + 2\varepsilon k b_0 b_{-1} b_0\exp(-\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}$$

$$= \frac{-2\varepsilon k b_0 b_{-1}^2\exp(-2\eta) + 2\varepsilon k b_0 b_{-1} b_0\exp(-\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}$$

$$= \frac{-2\varepsilon k b_0 b_{-1}\exp(-\eta)(b_{-1}\exp(-\eta)-b_0)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3} \tag{3.53}$$

Selanjutnya substitusi (3.52) dan (3.53) dalam (3.5) dapat dituliskan menjadi

$$\omega\left(\frac{(-2b_0\varepsilon k b_{-1}\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2}\right)$$
$$+ k\frac{(\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-\eta) - (\varepsilon k^2-\omega)b_0}{kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0}\left(\frac{(-2b_0\varepsilon k b_{-1}\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2}\right)$$
$$- k^2\varepsilon\left(\frac{-2\varepsilon k b_0 b_{-1}\exp(-\eta)(b_{-1}\exp(-\eta)-b_0)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}\right) = 0$$

$$\omega\left(\frac{(-2b_0\varepsilon k b_{-1}\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2}\right) \tag{3.53}$$

$$+\frac{(\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-\eta)-(\varepsilon k^2-\omega)b_0}{b_{-1}\exp(-\eta)+b_0}\left(\frac{(-2b_0\varepsilon k b_{-1}\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2}\right)$$

$$-k^2\varepsilon\left(\frac{-2\varepsilon k b_0 b_{-1}\exp(-\eta)(b_{-1}\exp(-\eta)-b_0)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}\right)=0$$

Kemudian persamaan (3.53) dimisalkan setiap suku agar mempermudah dalam menyelesaikan, berikut adalah pejabarannya

$$p=\frac{-2b_0\varepsilon k b_{-1}\exp(-\eta)\,\omega}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2}$$

$$q=\frac{(\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-\eta)-(\varepsilon k^2-\omega)b_0}{b_{-1}\exp(-\eta)+b_0}\left(\frac{(-2b_0\varepsilon k b_{-1}\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2}\right)$$

$$=\frac{-2b_0\varepsilon k b_{-1}^2\exp(-2\eta)\,(\varepsilon k^2-\omega)+2b_0\varepsilon k b_{-1}\exp(-\eta)\,(\varepsilon k^2-\omega)b_0}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}$$

$$=\frac{(-2b_0\varepsilon^2k^3b_{-1}^2\exp(-2\eta)+2b_0\varepsilon k b_{-1}^2\exp(-2\eta)\,\omega)+(2b_0^2\varepsilon^2k^3b_{-1}\exp(-\eta)-2b_0^2\varepsilon k b_{-1}\exp(-\eta)\,\omega)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}$$

$$r=-k^2\varepsilon\left(\frac{-2\varepsilon k b_0 b_{-1}\exp(-\eta)(b_{-1}\exp(-\eta)-b_0)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}\right)$$

$$=\left(\frac{2\varepsilon^2k^3b_0b_{-1}\exp(-\eta)(b_{-1}\exp(-\eta)-b_0)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}\right)$$

$$=\frac{2\varepsilon^2k^3b_0b_{-1}^2\exp(-2\eta)-2\varepsilon^2k^3b_0b_{-1}\exp(-\eta)b_0}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}$$

berdasarkan permisalan di atas, persamaan (3.53) dapat dituliskan menjadi

$$p+q+r=0$$

$$\frac{-2b_0\varepsilon k b_{-1}\exp(-\eta)\,\omega}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^2}+\frac{(-2b_0\varepsilon^2k^3b_{-1}^2\exp(-2\eta)+2b_0\varepsilon k b_{-1}^2\exp(-2\eta)\,\omega)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}$$

$$+\frac{(2b_0^2\varepsilon^2k^3b_{-1}\exp(-\eta)-2b_0^2\varepsilon k b_{-1}\exp(-\eta)\,\omega)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}$$

$$+\frac{2\varepsilon^2k^3b_0b_{-1}^2\exp(-2\eta)-2\varepsilon^2k^3b_0b_{-1}\exp(-\eta)b_0}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}=0$$

$$\frac{-2b_0\varepsilon k b_{-1}\exp(-\eta)\,\omega(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}$$
$$+\frac{(-2b_0\varepsilon^2k^3b_{-1}^2\exp(-2\eta)+2b_0\varepsilon k b_{-1}^2\exp(-2\eta)\,\omega)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}$$
$$+\frac{(2b_0^2\varepsilon^2k^3b_{-1}\exp(-\eta)-2b_0^2\varepsilon k b_{-1}\exp(-\eta)\,\omega)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}$$
$$+\frac{2\varepsilon^2k^3b_0b_{-1}^2\exp(-2\eta)-2\varepsilon^2k^3b_0b_{-1}\exp(-\eta)b_0}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}=0$$

$$\frac{(-2b_0\varepsilon k\omega b_{-1}^2\exp(-2\eta)-2b_0^2\varepsilon k b_{-1}\exp(-\eta)\,\omega)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}$$
$$+\frac{(-2b_0\varepsilon^2k^3b_{-1}^2\exp(-2\eta)+2b_0\varepsilon k b_{-1}^2\exp(-2\eta)\,\omega)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}$$
$$+\frac{(2b_0^2\varepsilon^2k^3b_{-1}\exp(-\eta)-2b_0^2\varepsilon k b_{-1}\exp(-\eta)\,\omega)}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}$$
$$+\frac{2\varepsilon^2k^3b_0b_{-1}^2\exp(-2\eta)-2\varepsilon^2k^3b_0b_{-1}\exp(-\eta)b_0}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}=0$$

$$(-2b_0\varepsilon k\omega b_{-1}^2\exp(-2\eta)+2b_0\varepsilon k\omega b_{-1}^2\exp(-2\eta)-2b_0^2\varepsilon k b_{-1}\exp(-\eta)\,\omega$$
$$+2b_0^2\varepsilon k b_{-1}\exp(-\eta)\,\omega$$
$$-2b_0\varepsilon^2k^3b_{-1}^2\exp(-2\eta)$$
$$+2\varepsilon^2k^3b_0b_{-1}^2\exp(-2\eta)-2\varepsilon^2k^3b_0^2b_{-1}\exp(-\eta)$$
$$+2b_0^2\varepsilon^2k^3b_{-1}\exp(-\eta))\left(\frac{1}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}\right)=0$$

$$(0+0+0+0)\left(\frac{1}{(b_{-1}\exp(-\eta)+b_0)^3}\right)=0$$

$$0=0$$

selanjutnya substitusi (3.43) dalam persamaan (3.1)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-(\varepsilon k^2-\omega)b_0}{kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\varepsilon k^2 - \omega\right)b_{-1}\exp(-kx - \omega t) - \left(\varepsilon k^2 + \omega\right)b_0\right)kb_{-1}\exp(-kx - \omega t) + kb_0\right.$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}(kb_{-1}\exp(-kx - \omega t) + kb_0)\left(\left(\varepsilon k^2 - \omega\right)b_{-1}\exp(-kx - \omega t)\right.$$

$$\left.\left. - \left(\varepsilon k^2 + \omega\right)b_0\right)\right)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx - \omega t) + kb_0)^2}\right)$$

$$= \left(\left(\left(\varepsilon k^2 - \omega\right)b_{-1}\frac{\partial}{\partial x}\exp(-kx - \omega t) - \left(\varepsilon k^2 + \omega\right)\frac{\partial}{\partial x}b_0\right)kb_{-1}\exp(-kx - \omega t)\right.$$

$$+ kb_0$$

$$- \left(kb_{-1}\frac{\partial}{\partial x}\exp(-kx - \omega t)\right.$$

$$\left. + k\frac{\partial}{\partial x}b_0\right)\left(\left(\varepsilon k^2 - \omega\right)b_{-1}\exp(-kx - \omega t)\right.$$

$$\left.\left. - \left(\varepsilon k^2 + \omega\right)b_0\right)\right)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx - \omega t) + kb_0)^2}\right)$$

$$= \left(\left(\left(\varepsilon k^2 - \omega\right)b_{-1}\exp(-kx - \omega t)\frac{\partial}{\partial x}(-kx - \omega t) - 0\right)kb_{-1}\exp(-kx - \omega t)\right.$$

$$+ kb_0$$

$$- \left(kb_{-1}\exp(-kx - \omega t)\frac{\partial}{\partial x}(-kx - \omega t)\right.$$

$$\left. + 0\right)\left(\left(\varepsilon k^2 - \omega\right)b_{-1}\exp(-kx - \omega t)\right.$$

$$\left.\left. - \left(\varepsilon k^2 + \omega\right)b_0\right)\right)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx - \omega t) + kb_0)^2}\right)$$

$$= \left(\left(-k\left(\varepsilon k^2 - \omega\right)b_{-1}\exp(-kx - \omega t)\right)kb_{-1}\exp(-kx - \omega t) + kb_0\right.$$

$$- \left(-k^2 b_{-1}\exp(-kx - \omega t)\right)\left(\left(\varepsilon k^2 - \omega\right)b_{-1}\exp(-kx - \omega t)\right.$$

$$\left.\left. - \left(\varepsilon k^2 + \omega\right)b_0\right)\right)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx - \omega t) + kb_0)^2}\right)$$

$$= \Big(-k^2\big(\varepsilon k^2-\omega\big)b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t)-k^2\big(\varepsilon k^2-\omega\big)b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)$$

$$-\Big(-k^2\big(\varepsilon k^2-\omega\big)b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t)$$

$$+k^2\big(\varepsilon k^2+\omega\big)b_0b_{-1}\exp(-kx$$

$$-\omega t)\Big)\Big)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \Big(-k^2\big(\varepsilon k^2-\omega\big)b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t)-k^2\big(\varepsilon k^2-\omega\big)b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)$$

$$+k^2\big(\varepsilon k^2-\omega\big)b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t)$$

$$-k^2\big(\varepsilon k^2+\omega\big)b_0b_{-1}\exp(-kx$$

$$-\omega t)\Big)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \Big(-k^2\big(\varepsilon k^2-\omega\big)b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t)+k^2\big(\varepsilon k^2-\omega\big)b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t)$$

$$-k^2\big(\varepsilon k^2-\omega\big)b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)$$

$$-k^2\big(\varepsilon k^2+\omega\big)b_0b_{-1}\exp(-kx$$

$$-\omega t)\Big)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \Big(0-k^2\big(\varepsilon k^2-\omega\big)b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)$$

$$-k^2\big(\varepsilon k^2+\omega\big)b_0b_{-1}\exp(-kx$$

$$-\omega t)\Big)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \big(-\varepsilon k^4b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+\omega k^2b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)$$

$$-\varepsilon k^4b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)$$

$$-\omega k^2b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\big)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \left(-\varepsilon k^4 b_0 b_{-1} \exp(-kx - \omega t) - \varepsilon k^4 b_0 b_{-1} \exp(-kx - \omega t)\right.$$

$$+ \omega k^2 b_0 b_{-1} \exp(-kx - \omega t)$$

$$\left. - \omega k^2 b_0 b_{-1} \exp(-kx - \omega t)\right) \left(\frac{1}{(kb_{-1} \exp(-kx - \omega t) + kb_0)^2}\right)$$

$$= \left(-\varepsilon k^4 b_0 b_{-1} \exp(-kx - \omega t) - \varepsilon k^4 b_0 b_{-1} \exp(-kx - \omega t)\right.$$

$$\left. + 0\right) \left(\frac{1}{(kb_{-1} \exp(-kx - \omega t) + kb_0)^2}\right)$$

$$= \left(-2\varepsilon k^4 b_0 b_{-1} \exp(-kx - \omega t)\right) \left(\frac{1}{(kb_{-1} \exp(-kx - \omega t) + kb_0)^2}\right)$$

$$= \frac{-2\varepsilon k^4 b_0 b_{-1} \exp(-kx - \omega t)}{k^2 (b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_0)^2}$$

$$= \frac{-2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1} \exp(-kx - \omega t)}{(b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_0)^2} \tag{3.54}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1} \exp(-kx - \omega t)}{(b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_0)^2}\right)$$

$$= -2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\exp(-kx - \omega t)}{(b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_0)^2}\right)$$

$$= -2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1} \left(\frac{(b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_0)^2 \frac{\partial}{\partial x} \exp(-kx - \omega t)}{(b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_0)^4}\right.$$

$$\left. - \frac{\exp(-kx - \omega t) \frac{\partial}{\partial x} (b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_0)^2}{(b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_0)^4}\right)$$

$$= -2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1} \left(\frac{(b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_0)^2 \exp(-kx - \omega t) \frac{\partial}{\partial x} (-kx - \omega t)}{(b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_0)^4}\right.$$

$$\left. + \frac{-\exp(-kx - \omega t)\, 2(b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_0) \frac{\partial}{\partial x} (b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_0)^2}{(b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_0)^4}\right)$$

$$= -2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1}\left(\frac{-k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^2\exp(-kx-\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^4}\right.$$

$$\left.+\frac{-\exp(-kx-\omega t)\,2(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)\frac{\partial}{\partial x}(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^4}\right)$$

$$= -2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1}\left(\frac{-k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^2\exp(-kx-\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^4}\right.$$

$$\left.+\frac{-\exp(-kx-\omega t)\,2(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)\left(b_{-1}\frac{\partial}{\partial x}\exp(-kx-\omega t)+\frac{\partial}{\partial x}b_0\right)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^4}\right)$$

$$= -2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1}\left(\frac{-k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^2\exp(-kx-\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^4}\right.$$

$$\left.+\frac{-\exp(-kx-\omega t)\,2(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)\left(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\frac{\partial}{\partial x}(-kx-\omega t)+0\right)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^4}\right)$$

$$= -2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1}\left(\frac{-k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^2\exp(-kx-\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^4}\right.$$

$$\left.+\frac{-\exp(-kx-\omega t)\,2(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)(-kb_{-1}\exp(-kx-\omega t))}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^4}\right)$$

$$= -2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1}\left(\frac{-k\exp(-kx-\omega t)\,(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^2}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^4}\right.$$

$$\left.-\frac{-2kb_{-1}\exp(-2kx-2\omega t)\,(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^4}\right)$$

$$= -2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1}\left(\frac{-k\exp(-kx-\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^2}-\frac{-2kb_{-1}\exp(-2kx-2\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}\right)$$

$$= -2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1}\left(\frac{-k\exp(-kx-\omega t)\,(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}\right.$$

$$\left.-\frac{-2kb_{-1}\exp(-2kx-2\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}\right)$$

$$= -2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1}\left(\frac{-kb_{-1}\exp(-2kx-2\omega t)-kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)\,b_0}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}\right.$$

$$\left.-\frac{-2kb_{-1}\exp(-2kx-2\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}\right)$$

$$= -2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1}\left(\frac{-kb_{-1}\exp(-2kx-2\omega t)+2kb_{-1}\exp(-2kx-2\omega t)-kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)\,b_0}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}\right)$$

$$= -2\varepsilon k^3 b_0 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\left(\frac{b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-b_0}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}\right)$$

$$= \frac{-2\varepsilon k^3 b_0 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\,(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-b_0)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3} \qquad (3.55\ )$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-(\varepsilon k^2-\omega)b_0}{kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t}\left((\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-(\varepsilon k^2+\omega)b_0\right)kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0\right.$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0)\left((\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\right.$$

$$\left.\left.-(\varepsilon k^2+\omega)b_0\right)\right)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \left(\left(\left((\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\frac{\partial}{\partial t}\exp(-kx-\omega t)-(\varepsilon k^2+\omega)\frac{\partial}{\partial t}b_0\right)kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)\right.\right.$$

$$+kb_0$$

$$-\left(kb_{-1}\frac{\partial}{\partial t}\exp(-kx-\omega t)\right.$$

$$\left.+k\frac{\partial}{\partial t}b_0\right)\left((\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\right.$$

$$\left.\left.-(\varepsilon k^2+\omega)b_0\right)\right)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \left(\left(\left(\left(\varepsilon k^2-\omega\right)b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\frac{\partial}{\partial t}(-kx-\omega t)-0\right)kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0\right.\right.$$

$$-\left(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)\frac{\partial}{\partial t}(-kx-\omega t)\right.$$

$$\left.+0\right)\left(\left(\varepsilon k^2-\omega\right)b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\right.$$

$$\left.\left.-\left(\varepsilon k^2+\omega\right)b_0\right)\right)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \left(\left(-\omega\left(\varepsilon k^2-\omega\right)b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\right)kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0\right.$$

$$-(-k\omega b_{-1}\exp(-kx-\omega t))\left(\left(\varepsilon k^2-\omega\right)b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\right.$$

$$\left.\left.-\left(\varepsilon k^2+\omega\right)b_0\right)\right)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \left(-k\omega\left(\varepsilon k^2-\omega\right)b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t)-k\omega\left(\varepsilon k^2-\omega\right)b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\right)$$

$$-\left(-k\omega\left(\varepsilon k^2-\omega\right)b_{-1}^{2}\exp(-2kx-2\omega t)\right.$$

$$+k\omega\left(\varepsilon k^2+\omega\right)b_0b_{-1}\exp(-kx$$

$$\left.\left.-\omega t)\right)\right)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \left(-k\omega\left(\varepsilon k^2-\omega\right)b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t)-k\omega\left(\varepsilon k^2-\omega\right)b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\right.$$

$$+k\omega\left(\varepsilon k^2-\omega\right)b_{-1}^{2}\exp(-2kx-2\omega t)$$

$$-k\omega\left(\varepsilon k^2+\omega\right)b_0b_{-1}\exp(-kx$$

$$\left.-\omega t)\right)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \Big(-k\omega\big(\varepsilon k^2-\omega\big)b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t)+k\omega\big(\varepsilon k^2-\omega\big)b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t)$$

$$-k\omega\big(\varepsilon k^2-\omega\big)b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)$$

$$-k\omega\big(\varepsilon k^2+\omega\big)b_0b_{-1}\exp(-kx$$

$$-\omega t)\Big)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \Big(0-k\omega\big(\varepsilon k^2-\omega\big)b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)$$

$$-k\omega\big(\varepsilon k^2+\omega\big)b_0b_{-1}\exp(-kx$$

$$-\omega t)\Big)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \big(-\varepsilon k^3\omega b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+\omega^2kb_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)$$

$$-\varepsilon k^3\omega b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)$$

$$-\omega^2kb_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\big)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \big(-\varepsilon k^3\omega b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-\varepsilon k^3\omega b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)$$

$$+\omega^2kb_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)$$

$$-\omega^2kb_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\big)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \big(-\varepsilon k^3\omega b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-\varepsilon k^3\omega b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)$$

$$+0\big)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \big(-2\varepsilon k^3\omega b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\big)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0)^2}\right)$$

$$= \frac{-2\varepsilon k^3\omega b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)}{k^2(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^2}$$

$$= \frac{-2\varepsilon k\omega b_0b_{-1}\exp(-kx-\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^2} \tag{3.56}$$

Selanjutnya adalah substitusi persamaan (3.55) dan (3.56) dalam persamaan (3.1)

$$\frac{-2\varepsilon k\omega b_0 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^2}$$

$$+\left(\frac{(\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-(\varepsilon k^2-\omega)b_0}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)}\right)\frac{-2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^2}$$

$$=\varepsilon\frac{-2\varepsilon k^3 b_0 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\,(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-b_0)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}$$

$$\frac{-2\varepsilon k\omega b_0 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^2}$$

$$+\left(\frac{(\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-(\varepsilon k^2-\omega)b_0}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)}\right)\frac{-2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^2}$$

$$-\varepsilon\frac{-2\varepsilon k^3 b_0 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\,(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-b_0)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}=0$$

Selanjutnya persamaan di atas dimisalkan menjadi

$$a=\frac{-2\varepsilon k\omega b_0 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^2}$$

$$b=\left(\frac{(\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-(\varepsilon k^2-\omega)b_0}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)}\right)\frac{-2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^2}$$

$$c=-\varepsilon\frac{-2\varepsilon k^3 b_0 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\,(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-b_0)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}$$

Maka dapat dituliskan menjadi

$$a+b+c=0$$

$$a=k\frac{-2\varepsilon k\omega b_0 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\,(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}$$

$$=\frac{-2\varepsilon k^2\omega b_0 b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t)-2\varepsilon k^2\omega b_0^2 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}$$

$$b=\left(\frac{(\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-(\varepsilon k^2-\omega)b_0}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)}\right)\frac{-2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^2}$$

$$=\left(\frac{-2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t)\,(\varepsilon k^2-\omega)+2\varepsilon k^2(\varepsilon k^2-\omega)b_0^2 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}\right)$$

$$= \frac{(-2\varepsilon^2k^4b_0b_{-1}^2 \exp(-2kx-2\omega t) + 2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1}^2 \exp(-2kx-2\omega t)\,\omega)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}$$

$$+ \frac{2\varepsilon^2k^4b_0^2b_{-1}\exp(-kx-\omega t) - 2\varepsilon k^2 b_0^2 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\,\omega}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}$$

$$c = -\varepsilon k \frac{-2\varepsilon k^3 b_0 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\,(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-b_0)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}$$

$$= \frac{(2\varepsilon^2k^4b_0b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t) - 2\varepsilon^2k^4b_0^2b_{-1}\exp(-kx-\omega t))}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}$$

$$d = a + b$$

$$= \frac{-2\varepsilon k^2\omega b_0 b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t) - 2\varepsilon k^2\omega b_0^2 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}$$

$$+ \frac{(-2\varepsilon^2k^4b_0b_{-1}^2 \exp(-2kx-2\omega t) + 2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1}^2 \exp(-2kx-2\omega t)\,\omega)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}$$

$$+ \frac{2\varepsilon^2k^4b_0^2b_{-1}\exp(-kx-\omega t) - 2\varepsilon k^2 b_0^2 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\,\omega}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}$$

$$= \frac{-2\varepsilon k^2\omega b_0 b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t) + 2\varepsilon k^2 b_0 b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t)\,\omega}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}$$

$$+ \frac{2\varepsilon k^2\omega b_0^2 b_{-1}\exp(-kx-\omega t) - 2\varepsilon k^2 b_0^2 b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\,\omega}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}$$

$$+ \frac{(-2\varepsilon^2k^4b_0b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t))}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3} + \frac{2\varepsilon^2k^4b_0^2b_{-1}\exp(-kx-\omega t)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}$$

$$= \frac{0 + 0 - 2\varepsilon^2k^4b_0b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t) + 2\varepsilon^2k^4b_0^2b_{-1}\exp(-kx-\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}$$

$$= \frac{2\varepsilon^2k^4b_0b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t) + 2\varepsilon^2k^4b_0^2b_{-1}\exp(-kx-\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}$$

$$d + c =$$

$$\frac{-2\varepsilon^2k^4b_0b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t) + 2\varepsilon^2k^4b_0^2b_{-1}\exp(-kx-\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}$$

$$+ \frac{(2\varepsilon^2k^4b_0b_{-1}^2\exp(-2kx-2\omega t) - 2\varepsilon^2k^4b_0^2b_{-1}\exp(-kx-\omega t))}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3} = 0$$

$$\frac{-2\varepsilon^2 k^4 b_0 b_{-1}^2 \exp(-2kx-2\omega t) + 2\varepsilon^2 k^4 b_0 b_{-1}^2 \exp(-2kx-2\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3}$$

$$+\frac{2\varepsilon^2 k^4 b_0^2 b_{-1} \exp(-kx-\omega t) - 2\varepsilon^2 k^4 b_0^2 b_{-1} \exp(-kx-\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_0)^3} = 0$$

$$\frac{0}{\left(b_{-1}\exp\left(-kx-\omega t\right)+b_0\right)^3} = 0$$

$0 = 0$

3. Selanjutnya adalah pembuktian solusi (3.45), substitusikan persamaan (3.45) dalam (3.5), berikut adalah penjabarannya

$$\frac{du(\eta)}{d\eta} = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{(b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)\exp(-\eta) - b_1(2\varepsilon k^2+\omega)\exp(\eta))}{k(b_{-1}\exp(-\eta)+b_1\exp(\eta))}\right)\frac{du(\eta)}{d\eta}$$

$$= \Bigg(k(b_{-1}\exp(-\eta)+b_1\exp(\eta))\frac{d}{d\eta}(b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)\exp(-\eta)$$

$$- b_1(2\varepsilon k^2+\omega)\exp(\eta))$$

$$- (b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)\exp(-\eta)$$

$$- b_1(2\varepsilon k^2+\omega)\exp(\eta))\frac{d}{d\eta}k(b_{-1}\exp(-\eta)$$

$$+ b_1\exp(\eta))\Bigg)\left(\frac{1}{\left(k(b_{-1}\exp(-\eta)+b_1\exp(\eta))\right)^2}\right)$$

$$= \left(\left(b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)\frac{d}{d\eta}\exp(-\eta) - b_1(2\varepsilon k^2+\omega)\frac{d}{d\eta}\exp(\eta)\right)(kb_{-1}\exp(-\eta)\right.$$

$$+ kb_1\exp(\eta))$$

$$- \left(kb_{-1}\frac{d}{d\eta}\exp(-\eta) + kb_1\frac{d}{d\eta}\exp(\eta)\right)(b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)\exp(-\eta)$$

$$\left.- b_1(2\varepsilon k^2+\omega)\exp(\eta))\right)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_1\exp(\eta))^2}\right)$$

$$= \Bigg(\bigg(b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-\eta)\frac{d}{d\eta}(-\eta)$$

$$- b_1(2\varepsilon k^2 + \omega)\exp(\eta)\frac{d}{d\eta}(\eta)\bigg)(kb_{-1}\exp(-\eta) + kb_1\exp(\eta))$$

$$- \bigg(kb_{-1}\exp(-\eta)\frac{d}{d\eta}(-\eta)$$

$$+ kb_1\exp(\eta)\frac{d}{d\eta}(\eta)\bigg)(b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-\eta)\, s$$

$$- b_1(2\varepsilon k^2 + \omega)\exp(\eta))\Bigg)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-\eta) + kb_1\exp(\eta))^2}\right)$$

$$= ((-1b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-\eta) - 1b_1(2\varepsilon k^2 + \omega)\exp(\eta))(kb_{-1}\exp(-\eta)$$

$$+ kb_1\exp(\eta))$$

$$- (-1kb_{-1}\exp(-\eta) + 1kb_1\exp(\eta))(b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-\eta)$$

$$- b_1(2\varepsilon k^2 + \omega)\exp(\eta)))\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-\eta) + kb_1\exp(\eta))^2}\right)$$

$$= -kb_{-1}b_1(2\varepsilon k^2 + \omega) - kb_1^2(2\varepsilon k^2 + \omega)\exp(2\eta)$$

$$- kb_{-1}^2(2\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-2\eta) - kb_1b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)$$

$$- kb_1b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)$$

$$+ kb_1^2(2\varepsilon k^2 + \omega)\exp(2\eta) + kb_{-1}^2(2\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-2\eta)$$

$$- kb_{-1}b_1(2\varepsilon k^2 + \omega)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-\eta) + kb_1\exp(\eta))^2}\right)$$

$$= -kb_{-1}b_1(2\varepsilon k^2 + \omega) - kb_{-1}b_1(2\varepsilon k^2 + \omega)$$

$$- kb_1^2(2\varepsilon k^2 + \omega)\exp(2\eta) + kb_1^2(2\varepsilon k^2 + \omega)\exp(2\eta)$$

$$- kb_{-1}^2(2\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-2\eta) + kb_{-1}^2(2\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-2\eta)$$

$$- kb_1b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)$$

$$- kb_1b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-\eta) + kb_1\exp(\eta))^2}\right)$$

$$= -2kb_{-1}b_1(2\varepsilon k^2 + \omega) + 0 + 0$$

$$- 2kb_1b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-\eta) + kb_1\exp(\eta))^2}\right)$$

$$= -4b_{-1}b_1\varepsilon k^3 - 2kb_{-1}b_1\omega - 4b_1b_{-1}\varepsilon k^3$$

$$+ 2kb_1b_{-1}\omega\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-\eta) + kb_1\exp(\eta))^2}\right)$$

$$= -4b_{-1}b_1\varepsilon k^3 - 4b_1b_{-1}\varepsilon k^3 - 2kb_{-1}b_1\omega$$

$$+ 2kb_1b_{-1}\omega\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-\eta) + kb_1\exp(\eta))^2}\right)$$

$$= -8b_{-1}b_1\varepsilon k^3\left(\frac{1}{(kb_{-1}\exp(-\eta) + kb_1\exp(\eta))^2}\right)$$

$$= \frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k^3}{k^2(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^2}$$

$$= \frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^2} \tag{3.57}$$

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{d}{d\eta}\mathrm{u}(\eta)\right) = \frac{d}{d\eta}\left(\frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^2}\right)$$

$$= -8b_{-1}b_1\varepsilon k\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^2}\right)$$

$$= -8b_{-1}b_1\varepsilon k\left(\frac{\frac{d}{d\eta}(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^2}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}\right)$$

$$= -8b_{-1}b_1\varepsilon k\left(\frac{-2\left(b_{-1}\frac{d}{d\eta}\exp(-\eta) + b_1\frac{d}{d\eta}\exp(\eta)\right)}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}\right)$$

$$= -8b_{-1}b_1\varepsilon k\left(\frac{-2\left(b_{-1}\exp(-\eta)\frac{d}{d\eta}(-\eta) + b_1\exp(\eta)\frac{d}{d\eta}(\eta)\right)}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}\right)$$

$$= -8b_{-1}b_1\varepsilon k\left(\frac{-2(-1b_{-1}\exp(-\eta) + 1b_1\exp(\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}\right)$$

$$= -8b_{-1}b_1\varepsilon k\left(\frac{2b_{-1}\exp(-\eta) - 2b_1\exp(\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}\right)$$

$$= \left(\frac{-16\varepsilon k b_{-1}^2 b_1\exp(-\eta) + 16b_{-1}b_1^2\varepsilon k\exp(\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}\right)$$

$$= \frac{16b_{-1}b_1\varepsilon k(b_1\exp(\eta) - b_{-1}\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3} \tag{3.58}$$

Selanjutkan substitusi dalam persamaan (3.57), (3.58) dalam persamaan (3.5) maka menjadi

$$\omega\frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^2}$$
$$+ k\left(\frac{(2\varepsilon k^2 - \omega)b_{-1}\exp(-\eta) - (2\varepsilon k^2 + \omega)b_1\exp(\eta)}{k(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))}\right)\frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^2}$$
$$- \varepsilon k^2\frac{16b_{-1}b_1\varepsilon k(b_1\exp(\eta) - b_{-1}\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3} = 0$$

$$\omega\frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^2}$$
$$+ \left(\frac{(2\varepsilon k^2 - \omega)b_{-1}\exp(-\eta) - (2\varepsilon k^2 + \omega)b_1\exp(\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))}\right)\frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^2}$$
$$- \varepsilon k^2\frac{16b_{-1}b_1\varepsilon k(b_1\exp(\eta) - b_{-1}\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3} = 0$$

$$\omega\frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}$$
$$+ \left(\frac{(2\varepsilon k^2 - \omega)b_{-1}\exp(-\eta) - (2\varepsilon k^2 + \omega)b_1\exp(\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))}\right)\frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^2}$$
$$- \varepsilon k^2\frac{16b_{-1}b_1\varepsilon k(b_1\exp(\eta) - b_{-1}\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3} = 0$$

Memisalkan di atas sebagai sebuat variabel baru agar memudahkan dalam penyelesaian

$$a = \omega\frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}$$

$$b = \left(\frac{(2\varepsilon k^2 - \omega)b_{-1}\exp(-\eta) - (2\varepsilon k^2 + \omega)b_1\exp(\eta)}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))}\right)\frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^2}$$

$$c = -\varepsilon k^2 \frac{16b_{-1}b_1\varepsilon k(b_1\exp(\eta) - b_{-1}\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}$$

$$= \frac{-16b_{-1}b_1\varepsilon^2k^3(b_1\exp(\eta) - b_{-1}\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}$$

$$= \frac{(-16b_{-1}\varepsilon^2k^3b_1^2\exp(\eta) + -16b_1\varepsilon^2k^3\,b_{-1}^2\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}$$

Maka persamaan dapat ditulis menjadi

$$a + b - c = 0$$

Pertama selesaikan a terlebih dahulu menjadi

$$a = \frac{(-8b_{-1}^2b_1\varepsilon k\omega\exp(-\eta) - 8b_{-1}b_1^2\varepsilon k\omega\exp(\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}$$

$$b = \left(\frac{(2\varepsilon k^2b_{-1}\exp(-\eta) - \omega b_{-1}\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))}\right.$$

$$\left. - \frac{(2\varepsilon k^2b_1\exp(\eta) + \omega b_1\exp(\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))}\right)\left(\frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^2}\right)$$

$$= \frac{(2\varepsilon k^2b_{-1}\exp(-\eta) - \omega b_{-1}\exp(-\eta) - 2\varepsilon k^2b_1\exp(\eta) - \omega b_1\exp(\eta))(-8b_{-1}b_1\varepsilon k)}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}$$

$$= \frac{\left(-16b_{-1}^2b_1\varepsilon^2k^3\exp(-\eta) + 8b_{-1}^2b_1\varepsilon k\omega\exp(-\eta) + 16b_{-1}\varepsilon^2k^3b_1^2\exp(\eta) + 8b_{-1}b_1^2\varepsilon k\omega\exp(\eta)\right)}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}$$

$$c = \frac{(-16b_{-1}\varepsilon^2k^3b_1^2\exp(\eta) + -16b_1\varepsilon^2k^3\,b_{-1}^2\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}$$

$$d = a + b$$

$$= \frac{(-8b_{-1}^2b_1\varepsilon k\omega\exp(-\eta) + 8b_{-1}^2b_1\varepsilon k\omega\exp(-\eta) - 8b_{-1}b_1^2\varepsilon k\omega\exp(\eta) + 8b_{-1}b_1^2\varepsilon k\omega\exp(\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}$$

$$+ \frac{\left(-16b_{-1}^2b_1\varepsilon^2k^3\exp(-\eta) + 16b_{-1}\varepsilon^2k^3b_1^2\exp(\eta)\right)}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}$$

$$= \frac{(0 + 0 + 16b_{-1}\varepsilon^2k^3b_1^2\exp(\eta) - 16b_{-1}^2b_1\varepsilon^2k^3\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}$$

$$= \frac{(16b_{-1}\varepsilon^2k^3b_1^2\exp(\eta) - 16b_{-1}^2b_1\varepsilon^2k^3\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3}$$

$$d + c = 0$$

$$\frac{(16b_{-1}\varepsilon^2k^3b_1^2\exp(\eta) - 16b_{-1}^2b_1\varepsilon^2k^3\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3} + \frac{(-16b_{-1}\varepsilon^2k^3b_1^2\exp(\eta) + 16b_1\varepsilon^2k^3b_{-1}^2\exp(-\eta))}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3} = 0$$

$$\frac{\left(16b_{-1}\varepsilon^2k^3b_1^2\exp(\eta) - 16b_{-1}\varepsilon^2k^3b_1^2\exp(\eta) - 16b_{-1}\varepsilon^2k^3b_1^2\exp(-\eta) + 16b_{-1}^2b_1\varepsilon^2k^3\exp(-\eta)\right)}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3} = 0$$

$$\frac{0 + 0}{(b_{-1}\exp(-\eta) + b_1\exp(\eta))^3} = 0$$

$$0 = 0$$

Selanjutnya adalah substitusi solusi (3.43) dalam persamaan (3.1)

$$u(x,t) = \frac{b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-kx - \omega t) - b_1(2\varepsilon k^2 + \omega)\exp(kx + \omega t)}{k(b_{-1}\exp(-kx - \omega t) + b_1\exp(kx + \omega t))}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \Bigg(k(b_{-1}\exp(-kx - \omega t) + b_1\exp(kx + \omega t))\frac{\partial}{\partial x}(b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-kx - \omega t) - b_1(2\varepsilon k^2 + \omega)\exp(kx + \omega t)) - (b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-kx - \omega t) - b_1(2\varepsilon k^2 + \omega)\exp(kx + \omega t))\frac{\partial}{\partial x}k(b_{-1}\exp(-kx - \omega t) + b_1\exp(kx + \omega t))\Bigg)\left(\frac{1}{\left(k(b_{-1}\exp(-kx - \omega t) + b_1\exp(kx + \omega t))\right)^2}\right)$$

$$= \Bigg(k(b_{-1}\exp(-kx - \omega t) + b_1 \exp(kx$$

$$+ \omega t)) \Bigg(\Bigg(b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega) \frac{\partial}{\partial x} \exp(-kx - \omega t)$$

$$- b_1(2\varepsilon k^2 + \omega) \frac{\partial}{\partial x} \exp(kx + \omega t) \Bigg) \Bigg)$$

$$- (b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-kx - \omega t) - b_1(2\varepsilon k^2 + \omega)\exp(kx$$

$$+ \omega t))k \left(b_{-1} \frac{\partial}{\partial x} \exp(-kx - \omega t) + b_1 \frac{\partial}{\partial x} \exp(kx \right.$$

$$\left. + \omega t) \right) \Bigg) \left(\frac{1}{\left(k(b_{-1}\exp(-kx - \omega t) + b_1 \exp(kx + \omega t))\right)^2} \right)$$

$$= \Bigg(k(b_{-1}\exp(-kx - \omega t) + b_1 \exp(kx$$

$$+ \omega t)) \Bigg(\Bigg(b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-kx - \omega t) \frac{\partial}{\partial x} (-kx - \omega t)$$

$$- b_1(2\varepsilon k^2 + \omega)\exp(kx + \omega t) \frac{\partial}{\partial x} (kx + \omega t) \Bigg) \Bigg)$$

$$- (b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-kx - \omega t) - b_1(2\varepsilon k^2 + \omega)\exp(kx$$

$$+ \omega t))k \left(b_{-1}\exp(-kx - \omega t) \frac{\partial}{\partial x} (-kx - \omega t) + b_1 \exp(kx \right.$$

$$+ \omega t) \frac{\partial}{\partial x} (kx$$

$$\left. + \omega t) \right) \Bigg) \left(\frac{1}{\left(k(b_{-1}\exp(-kx - \omega t) + b_1 \exp(kx + \omega t))\right)^2} \right)$$

$$= \Big(k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx$$
$$+\omega t))\big((-kb_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)\exp(-kx-\omega t)$$
$$-kb_1(2\varepsilon k^2+\omega)\exp(kx+\omega t))\big)$$
$$-(b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)\exp(-kx-\omega t)-b_1(2\varepsilon k^2+\omega)\exp(kx$$
$$+\omega t))\big(k(-kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_1\exp(kx$$
$$+\omega t))\big)\Big)\left(\frac{1}{\big(k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))\big)^2}\right)$$

$$= \Big(k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx$$
$$+\omega t))\big((-kb_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)\exp(-kx-\omega t)$$
$$-kb_1(2\varepsilon k^2+\omega)\exp(kx+\omega t))\big)$$
$$-(b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)\exp(-kx-\omega t)-b_1(2\varepsilon k^2+\omega)\exp(kx$$
$$+\omega t))\big(k(-kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_1\exp(kx$$
$$+\omega t))\big)\Big)\left(\frac{1}{\big(k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))\big)^2}\right)$$

$$= -k^2b_{-1}b_1(2\varepsilon k^2+\omega)-k^2b_1^2(2\varepsilon k^2+\omega)\exp\big(2(kx+\omega t)\big)$$
$$-k^2b_{-1}^2(2\varepsilon k^2-\omega)\exp\big(-2(kx+\omega t)\big)-kb_1b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)$$
$$-kb_1b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)$$
$$+k^2b_1^2(2\varepsilon k^2+\omega)\exp\big(2(kx+\omega t)\big)+k^2b_{-1}^2(2\varepsilon k^2$$
$$-\omega)\exp\big(-2(kx+\omega t)\big)$$
$$-kb_{-1}b_1(2\varepsilon k^2$$
$$+\omega)\left(\frac{1}{\big(k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))\big)^2}\right)$$

$$= -k^2 b_{-1} b_1 (2\varepsilon k^2 + \omega) - k b_{-1} b_1 (2\varepsilon k^2 + \omega) - k b_1 b_{-1} (2\varepsilon k^2 - \omega)$$

$$- k b_1 b_{-1} (2\varepsilon k^2 - \omega) - k^2 b_1^2 (2\varepsilon k^2 + \omega) \exp\big(2(kx + \omega t)\big)$$

$$+ k^2 b_1^2 (2\varepsilon k^2 + \omega) \exp\big(2(kx + \omega t)\big)$$

$$- k^2 b_{-1}^2 (2\varepsilon k^2 - \omega) \exp\big(-2(kx + \omega t)\big) + k^2 b_{-1}^2 (2\varepsilon k^2$$

$$- \omega) \exp\big(-2(kx$$

$$+ \omega t)\big) \left(\frac{1}{\big(k(b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_1 \exp(kx + \omega t))\big)^2} \right)$$

$$= -2k^2 b_{-1} b_1 (2\varepsilon k^2 + \omega) - 2k^2 b_1 b_{-1} (2\varepsilon k^2 - \omega) + 0$$

$$+ 0 \left(\frac{1}{\big(k(b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_1 \exp(kx + \omega t))\big)^2} \right)$$

$$= -4 b_{-1} b_1 \varepsilon k^4 - 2k^2 b_{-1} b_1 \omega - 4 b_1 b_{-1} \varepsilon k^4$$

$$+ 2k^2 b_1 b_{-1} \omega \left(\frac{1}{\big(k(b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_1 \exp(kx + \omega t))\big)^2} \right)$$

$$= -4 b_{-1} b_1 \varepsilon k^4 - 4 b_1 b_{-1} \varepsilon k^4 - 2k^2 b_{-1} b_1 \omega$$

$$+ 2k^2 b_1 b_{-1} \omega \left(\frac{1}{\big(k(b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_1 \exp(kx + \omega t))\big)^2} \right)$$

$$= -8 b_{-1} b_1 \varepsilon k^4 \left(\frac{1}{\big(k(b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_1 \exp(kx + \omega t))\big)^2} \right)$$

$$= \frac{-8 b_{-1} b_1 \varepsilon k^4}{k^2 (b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_1 \exp(kx + \omega t))^2}$$

$$= \frac{-8 b_{-1} b_1 \varepsilon k^2}{(b_{-1} \exp(-kx - \omega t) + b_1 \exp(kx + \omega t))^2} \tag{3.59}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{u(x,t)}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k^2}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^2}\right)$$

$$=-8b_{-1}b_1\varepsilon k^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^2}\right)$$

$$=-8b_{-1}b_1\varepsilon k^2\left(\frac{-1\frac{\partial}{\partial x}(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^2}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^4}\right)$$

$$=-8b_{-1}b_1\varepsilon k^2\left(\frac{-2(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))\frac{\partial}{\partial x}(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^4}\right)$$

$$=-8b_{-1}b_1\varepsilon k^2\left(\frac{-2\left(b_{-1}\frac{\partial}{\partial x}\exp(-kx-\omega t)+b_1\frac{\partial}{\partial x}\exp(kx+\omega t)\right)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^3}\right)$$

$$=-8b_{-1}b_1\varepsilon k^2\left(\frac{-2\left(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)\frac{\partial}{\partial x}(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t)\frac{\partial}{\partial x}(kx+\omega t)\right)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^3}\right)$$

$$=-8b_{-1}b_1\varepsilon k^2\left(\frac{-2(-kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_1\exp(kx+\omega t))}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^3}\right)$$

$$=\left(\frac{-16\varepsilon k^3b_{-1}^2b_1\exp(-kx-\omega t)-16b_{-1}b_1^2\varepsilon k^3\exp(kx+\omega t)}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^3}\right)$$

$$=\frac{-16\varepsilon k^3b_{-1}b_1(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-b_1\exp(kx+\omega t))}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^3}\qquad(3.61)$$

Selanjutnya adalah substitusi terlebih dahulu (3.46) dalam (3.1)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \left(k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1\exp(kx+\omega t))\frac{\partial}{\partial t}(b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)\exp(-kx-\omega t) - b_1(2\varepsilon k^2+\omega)\exp(kx+\omega t)) - (b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)\exp(-kx-\omega t) - b_1(2\varepsilon k^2+\omega)\exp(kx+\omega t))\frac{\partial}{\partial t}k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1\exp(kx+\omega t))\right)\left(\frac{1}{\left(k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1\exp(kx+\omega t))\right)^2}\right)$$

$$= \left(k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1\exp(kx+\omega t))\left(\left(b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)\frac{\partial}{\partial t}\exp(-kx-\omega t) - b_1(2\varepsilon k^2+\omega)\frac{\partial}{\partial t}\exp(kx+\omega t)\right)\right) - (b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)\exp(-kx-\omega t) - b_1(2\varepsilon k^2+\omega)\exp(kx+\omega t))k\left(b_{-1}\frac{\partial}{\partial x}\exp(-kx-\omega t) + b_1\frac{\partial}{\partial x}\exp(kx+\omega t)\right)\right)\left(\frac{1}{\left(k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1\exp(kx+\omega t))\right)^2}\right)$$

$$= \left(k(b_{-1}\exp(-kx - \omega t) + b_1\exp(kx\right.$$

$$+ \omega t))\left(\left(b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-kx - \omega t)\frac{\partial}{\partial t}(-kx - \omega t)\right.\right.$$

$$\left.\left.- b_1(2\varepsilon k^2 + \omega)\exp(kx + \omega t)\frac{\partial}{\partial t}(kx + \omega t)\right)\right)$$

$$- (b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-kx - \omega t) - b_1(2\varepsilon k^2 + \omega)\exp(kx$$

$$+ \omega t))k\left(b_{-1}\exp(-kx - \omega t)\frac{\partial}{\partial t}(-kx - \omega t) + b_1\exp(kx\right.$$

$$+ \omega t)\frac{\partial}{\partial t}(kx$$

$$\left.\left.+ \omega t)\right)\right)\left(\frac{1}{\left(k(b_{-1}\exp(-kx - \omega t) + b_1\exp(kx + \omega t))\right)^2}\right)$$

$$= \left(k(b_{-1}\exp(-kx - \omega t) + b_1\exp(kx\right.$$

$$+ \omega t))\left((-\omega b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-kx - \omega t)\right.$$

$$\left.- \omega b_1(2\varepsilon k^2 + \omega)\exp(kx + \omega t))\right)$$

$$- (b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)\exp(-kx - \omega t) - b_1(2\varepsilon k^2 + \omega)\exp(kx$$

$$+ \omega t))\left(k(-\omega b_{-1}\exp(-kx - \omega t) + \omega b_1\exp(kx\right.$$

$$\left.\left.+ \omega t))\right)\right)\left(\frac{1}{\left(k(b_{-1}\exp(-kx - \omega t) + b_1\exp(kx + \omega t))\right)^2}\right)$$

$$= -k\omega b_{-1}b_1(2\varepsilon k^2+\omega) - k\omega b_1^2(2\varepsilon k^2+\omega)\exp\big(2(kx+\omega t)\big)$$
$$- k\omega b_{-1}^2(2\varepsilon k^2-\omega)\exp\big(-2(kx+\omega t)\big) - \omega b_1 b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)$$
$$- \omega b_1 b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)$$
$$+ k\omega b_1^2(2\varepsilon k^2+\omega)\exp\big(2(kx+\omega t)\big) + k\omega b_{-1}^2(2\varepsilon k^2$$
$$-\omega)\exp\big(-2(kx+\omega t)\big)$$
$$- k\omega b_{-1}b_1(2\varepsilon k^2$$
$$+\omega)\left(\frac{1}{\big(k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))\big)^2}\right)$$

$$= -k\omega b_{-1}b_1(2\varepsilon k^2+\omega) - k\omega b_{-1}b_1(2\varepsilon k^2+\omega) - \omega b_1 b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)$$
$$- \omega b_1 b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega) - k\omega b_1^2(2\varepsilon k^2+\omega)\exp\big(2(kx+\omega t)\big)$$
$$+ k\omega b_1^2(2\varepsilon k^2+\omega)\exp\big(2(kx+\omega t)\big)$$
$$- k\omega b_{-1}^2(2\varepsilon k^2-\omega)\exp\big(-2(kx+\omega t)\big) + k\omega b_{-1}^2(2\varepsilon k^2$$
$$-\omega)\exp\big(-2(kx$$
$$+\omega t)\big)\left(\frac{1}{\big(k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))\big)^2}\right)$$

$$= -2k\omega b_{-1}b_1(2\varepsilon k^2+\omega) - 2\omega b_1 b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega) + 0$$
$$+ 0\left(\frac{1}{\big(k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))\big)^2}\right)$$

$$= -4b_{-1}b_1\omega\varepsilon k^3 - 2kb_{-1}b_1\omega^2 k - 4b_1 b_{-1}\omega\varepsilon k^2$$
$$+ 2kb_1 b_{-1}\omega^2\left(\frac{1}{\big(k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))\big)^2}\right)$$

$$= -4b_{-1}b_1\omega\varepsilon k^3 - 4b_1 b_{-1}\omega\varepsilon k^2 - 2kb_{-1}b_1\omega^2 k$$
$$+ 2kb_1 b_{-1}\omega^2\left(\frac{1}{\big(k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))\big)^2}\right)$$

$$= -8b_{-1}b_1\omega\varepsilon k^3\left(\frac{1}{\left(k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))\right)^2}\right)$$

$$= \frac{-8b_{-1}b_1\omega\varepsilon k^3}{k^2(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^2}$$

$$= \frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k\omega}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^2} \tag{3.61}$$

selanjutkan substitusi dalam persamaan (3.60)dan (3.61) persamaan (3.1) menjadi

$$\frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k\omega}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^2}$$

$$+\left(\frac{b_{-1}\left(2\varepsilon k^2-\omega\right)\exp(-kx-\omega t)-b_1\left(2\varepsilon k^2+\omega\right)\exp(kx+\omega t)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))}\right)\frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k^2}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^2}$$

$$= \varepsilon\frac{-16\varepsilon k^3b_{-1}b_1(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^3}$$

$$\frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k\omega}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^2}$$

$$+\left(\frac{b_{-1}\left(2\varepsilon k^2-\omega\right)\exp(-kx-\omega t)-b_1\left(2\varepsilon k^2+\omega\right)\exp(kx+\omega t)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))}\right)\frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k^2}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^2}$$

$$-\varepsilon\frac{-16\varepsilon k^3b_{-1}b_1(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-b_1\exp(kx+\omega t))}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^3}=0$$

Memisalkan persamaan di atas setiap suku menjadi sebagai berikut

$$a = \frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k\omega}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^2}\left(\frac{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))}\right)$$

$$= \frac{\left(-8b_1\varepsilon k^2\omega\, b_{-1}^2\exp(-kx-\omega t)-8b_{-1}\varepsilon k^2\omega\, b_1^2\exp(kx+\omega t)\right)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^3}$$

$$b = \left(\frac{b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)\exp(-kx-\omega t)-b_1(2\varepsilon k^2+\omega)\exp(kx+\omega t)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))}\right)\frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k^2}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^2}$$

$$= \left(\frac{-8b_1\varepsilon k^2b_{-1}^2(2\varepsilon k^2-\omega)\exp(-kx-\omega t)+8b_{-1}\varepsilon k^2b_1^2(2\varepsilon k^2+\omega)\exp(kx+\omega t)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^3}\right)$$

$$= \frac{(-16b_1\varepsilon^2k^4b_{-1}^2\exp(-kx-\omega t)+8b_1\varepsilon k^2b_{-1}^2\exp(-kx-\omega t)\,\omega)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^3}$$

$$+\frac{(16b_{-1}\varepsilon^2k^4b_1^2\exp(kx+\omega t)+8b_{-1}\varepsilon k^2b_1^2\exp(kx+\omega t)\omega)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^3}$$

$$c = -\varepsilon\frac{-16\varepsilon k^3b_{-1}b_1(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^3}\frac{k}{k}$$

$$= \frac{16\varepsilon^2 k^4 b_{-1} b_1 (b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1 \exp(kx+\omega t))}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1 \exp(kx+\omega t))^3}$$

$$= \frac{(16\varepsilon^2 k^4 b_1 b_{-1}^2 \exp(-kx-\omega t) + 16\varepsilon^2 k^4 b_{-1} b_1^2 \exp(kx+\omega t))}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1 \exp(kx+\omega t))^3}$$

$$d = a + b = \frac{(-8b_1 \varepsilon k\omega\, b_{-1}^2 \exp(-kx-\omega t) - 8b_{-1}\varepsilon k\omega b_1^2 \exp(kx+\omega t))}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1 \exp(kx+\omega t))^3}$$

$$+ \frac{(-16b_1 \varepsilon^2 k^4 b_{-1}^2 \exp(-kx-\omega t) + 8b_1 \varepsilon k^2 b_{-1}^2 \exp(-kx-\omega t)\,\omega)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1 \exp(kx+\omega t))^3}$$

$$+ \frac{(16b_{-1}\varepsilon^2 k^4 b_1^2 \exp(kx+\omega t) + 8b_{-1}\varepsilon k^2 b_1^2 \exp(kx+\omega t)\omega)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1 \exp(kx+\omega t))^3}$$

$$= \frac{(-8b_1 \varepsilon k^2 \omega\, b_{-1}^2 \exp(-kx-\omega t) + 8b_1 \varepsilon k^2 b_{-1}^2 \exp(-kx-\omega t)\,\omega)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1 \exp(kx+\omega t))^3}$$

$$+ \frac{(-8b_{-1}\varepsilon k^2 \omega\, b_1^2 \exp(kx+\omega t) + 8b_{-1}\varepsilon k^2 b_1^2 \exp(kx+\omega t)\omega)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1 \exp(kx+\omega t))^3}$$

$$+ \frac{(-16b_1 \varepsilon^2 k^4 b_{-1}^2 \exp(-kx-\omega t)) + (16b_{-1}\varepsilon^2 k^4 b_1^2 \exp(kx+\omega t))}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1 \exp(kx+\omega t))^3}$$

$$= \frac{0 + 0 - 16b_1 \varepsilon^2 k^4 b_{-1}^2 \exp(-kx-\omega t) + 16b_{-1}\varepsilon^2 k^4 b_1^2 \exp(kx+\omega t)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1 \exp(kx+\omega t))^3}$$

$$= \frac{-16b_1 \varepsilon^2 k^4 b_{-1}^2 \exp(-kx-\omega t) + 16b_{-1}\varepsilon^2 k^4 b_1^2 \exp(kx+\omega t)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1 \exp(kx+\omega t))^3}$$

$$a + b + c = \frac{(16\varepsilon^2 k^4 b_1 b_{-1}^2 \exp(-kx-\omega t) + 16\varepsilon^2 k^4 b_{-1} b_1^2 \exp(kx+\omega t))}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1 \exp(kx+\omega t))^3}$$

$$+ \frac{-16b_1 \varepsilon^2 k^4 b_{-1}^2 \exp(-kx-\omega t) - 16b_{-1}\varepsilon^2 k^4 b_1^2 \exp(kx+\omega t)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1 \exp(kx+\omega t))^3}$$

$$= \frac{(16\varepsilon^2 k^4 b_1 b_{-1}^2 \exp(-kx-\omega t) - 16b_1 \varepsilon^2 k^4 b_{-1}^2 \exp(-kx-\omega t))}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1 \exp(kx+\omega t))^3}$$

$$+ \frac{16\varepsilon^2 k^4 b_{-1} b_1^2 \exp(kx+\omega t) - 16b_{-1}\varepsilon^2 k^4 b_1^2 \exp(kx+\omega t)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t) + b_1 \exp(kx+\omega t))^3}$$

$$= 0$$

$a + b + c = 0$

$$\frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k\omega}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^2} + \left(\frac{b_{-1}\left(2\varepsilon k^2-\omega\right)\exp(-kx-\omega t)-b_1\left(2\varepsilon k^2+\omega\right)\exp(kx+\omega t)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))}\right)\frac{-8b_{-1}b_1\varepsilon k^2}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^2}$$

$$-\varepsilon\frac{-16\varepsilon k^3 b_{-1}b_1(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-b_1\exp(kx+\omega t))}{(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))^3}=0$$

$0 = 0$

Berdasarkan penjabaran di atas maka solusi analitik yang diperoleh baik berupa $u(\eta)$ atau $u(x,t)$ valid dikatakan sebagai solusi analitik untuk persamaan (3.1), karena memenuhi bentuk awal dari (3.1) dan (3.5).

3.2 Simulasi Hasil

Pada subbab ini akan dijabarkan nilai solusi umum yang diperoleh dari subbab 3.1 berserta gambarnya

1. Berikut ini adalah solusi dari persamaan burgers pertama (3.43), dengan $b_{-1} = 2, b_0 = 1, k = 1, \varepsilon = 1, \omega = 1$, maka diperoleh

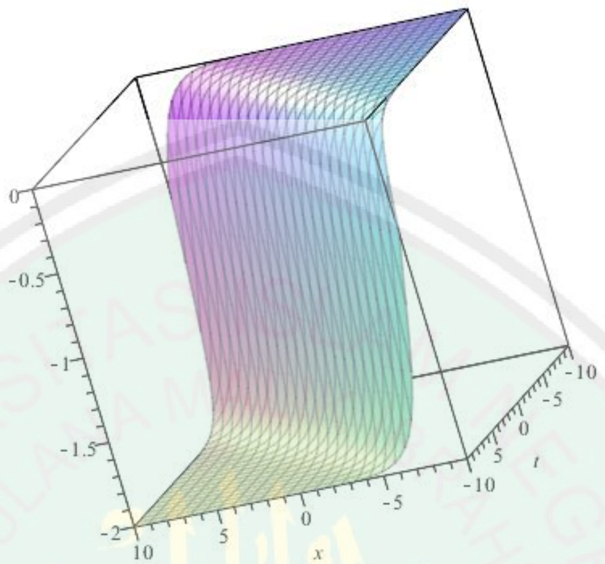
$$u(x,t) = -\frac{2}{2\exp(-t-x)+1} \tag{3.62}$$

dengan $-10 < x < 10$, $-10 < t < 10$ dan inkremen 4, maka diperoleh nilai sebagai berikut

Tabel 3.1 Nilai solusi (3.62)

x \ t	-10	-6	-2	2	6	10
-10	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0004	-0.0241	-0.8000
-6	0.0000	0.0000	-0.0004	-0.0241	-0.8000	-1.9465
-2	0.0000	-0.0004	-0.0241	-0.8000	-1.9465	-1.9990
2	-0.0004	-0.0241	-0.8000	-1.9465	-1.9990	-2.0000
6	-0.0241	-0.8000	-1.9465	-1.9990	-2.0000	-2.0000
10	-0.8000	-1.9465	-1.9990	-2.0000	-2.0000	-2.0000

Selanjutnya adalah menggambarkan nilai dari tabel 3.1 dalam plot 3 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut



Gambar 3.1 solusi pada persamaan (3.62) dengan $-10 < x < 10$, $-10 < t < 10$

2. Selanjutnya adalah solusi dari persamaan burgers kedua (3.46), dengan $b_{-1} = 2, b_1 = 1, k = 1, \varepsilon = 1, \omega = 1$maka diperoleh

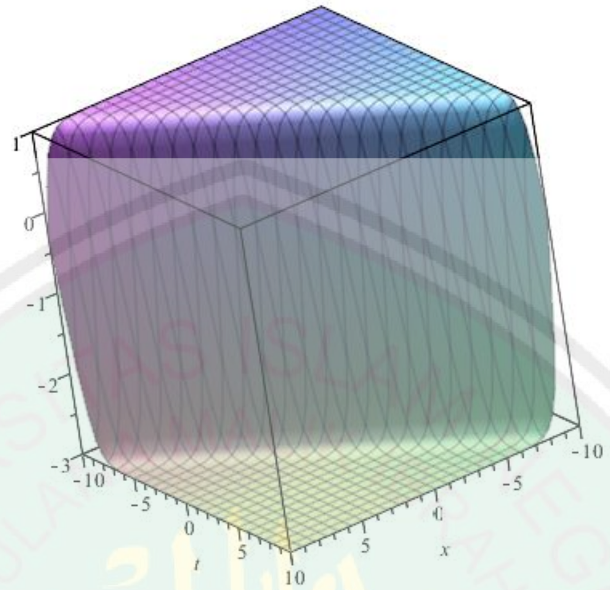
$$u(x,t) = \frac{2\exp(-t-x) - 3\exp(t+x)}{2\exp(-t-x) - 3\exp(t+x)} \qquad (3.63)$$

dengan $-10 < x < 10$, $-10 < t < 10$ dan inkremen 4, maka diperoleh nilai sebagai berikut

Tabel 3.2 Nilai solusi kedua (3.63)

x \ t	-10	-6	-2	2	6	10
-10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9993	-0.3333
-6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9993	-0.3333	-2.9973
-2	1.0000	1.0000	0.9993	-0.3333	-2.9973	-3.0000
2	1.0000	0.9993	-0.3333	-2.9973	-3.0000	-3.0000
6	0.9993	-0.3333	-2.9973	-3.0000	-3.0000	-3.0000
10	-0.3333	-2.9973	-3.0000	-3.0000	-3.0000	-3.0000

Selanjutnya adalah menggambarkan nilai dari tabel 3.2 dalam plot 3 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut



Gambar 3.2 solusi pada persamaan (3.63) dengan $-10 < x < 10$, $-10 < t < 10$

3. Berikut ini adalah solusi dari persamaan burgers ketiga (3.49), dengan $a_0 = 1, b_0 = 1, b_1 = 1, k = 1, \varepsilon = 1, \omega = 1$, maka diperoleh

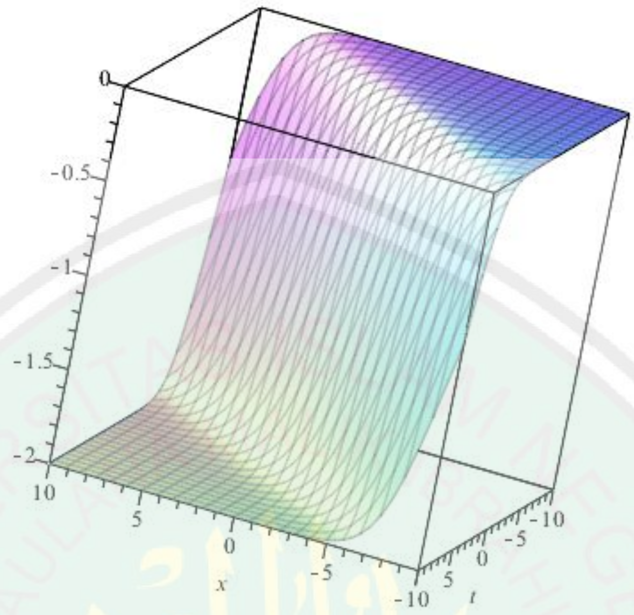
$$u(x,t) = \frac{1 - 2\exp(t + x)}{-\frac{3}{4}\exp(-t - x) + 1 + \exp(t + x)} \qquad (3.64)$$

dengan $-10 < x < 10$, $-10 < t < 10$ dan inkremen 4, maka diperoleh nilai sebagai berikut

Tabel 3.3 Nilai solusi ketiga (3.64)

x \ t	-10	-6	-2	2	6	10
-10	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0003	-0.0181	-0.6667
-6	0.0000	0.0000	-0.0003	-0.0181	-0.6667	-1.9293
-2	0.0000	-0.0003	-0.0181	-0.6667	-1.9293	-1.9987
2	-0.0003	-0.0181	-0.6667	-1.9293	-1.9987	-2.0000
6	-0.0181	-0.6667	-1.9293	-1.9987	-2.0000	-2.0000
10	-0.6667	-1.9293	-1.9987	-2.0000	-2.0000	-2.0000

Selanjutnya adalah menggambarkan nilai dari tabel 3.3 dalam plot 3 dimensi, maka diperoleh gambar sebagai berikut



Gambar 3.3 solusi pada persamaan (3.64) dengan $-10 < x < 10$, $-10 < t < 10$

Berdasarkan gambar 3.1, 3.2, dan 3.3 sekilas gambar tampak sama, tetapi sebenarnya antara gambar satu dengan yang lain berbeda. Dibuktikan dengan tabel berikut ini

Tabel 3.4 Nilai solusi (3.62)- solusi (3.63)

x \ t	-10	-6	-2	2	6	10
-10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0004	1.0235	0.4667
-6	1.0000	1.0000	1.0004	1.0235	0.4667	1.0508
-2	1.0000	1.0004	1.0235	0.4667	1.0508	1.0010
2	1.0004	1.0235	0.4667	1.0508	1.0010	1.0000
6	1.0235	0.4667	1.0508	1.0010	1.0000	1.0000
10	0.4667	1.0508	1.0010	1.0000	1.0000	1.0000

Berdasarkan tabel 3.4 terbukti bahwa solusi (3.62) dengan (3.63) tidak sama. Karena tidak ada yang habis dioperasikan. Selanjutnya adalah solusi (3.62) dikurangi solusi (3.64), berikut ini adalah penjabarannya

Tabel 3.5 Nilai solusi (3.62)- solusi (3.64)

x \ t	-10	-6	-2	2	6	10
-10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0060	0.1333
-6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0060	0.1333	0.0172
-2	0.0000	0.0001	0.0060	0.1333	0.0172	0.0003
2	0.0001	0.0060	0.1333	0.0172	0.0003	0.0000
6	0.0060	0.1333	0.0172	0.0003	0.0000	0.0000
10	0.1333	0.0172	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000

Berdasarkan tabel 3.5 terbukti bahwa solusi (3.62) dengan (3.64) tidak sama. Karena tidak ada yang habis dioperasikan. Pada titk (-10,-10), (-10,-6), (-10,-2), (-6,-10), (-6,-6) (-2.-10), (2,6), (6,6), (6,10), (10,2), (10,6) dan (10,10) menghasilkan nilai nol, tetapi itu tidak menunjukan bahwa solusi tersebut sama. Karena memang pada titik tersebut adalah bernilai nol. Selanjutnya adalah solusi (3.63) dikurangi solusi (3.64), berikut ini adalah penjabarannya

Tabel 3.6 Nilai solusi (3.63)- solusi (3.64)

x \ t	-10	-6	-2	2	6	10
-10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0003	1.0175	0.3333
-6	1.0000	1.0000	1.0003	1.0175	0.3333	1.0680
-2	1.0000	1.0003	1.0175	0.3333	1.0680	1.0013
2	1.0003	1.0175	0.3333	1.0680	1.0013	1.0000
6	1.0175	0.3333	1.0680	1.0013	1.0000	1.0000
10	0.3333	1.0680	1.0013	1.0000	1.0000	1.0000

Berdasarkan tabel 3.6 tampak jelas bahwa solusi (3.63) dan (3.64) adalah tidak sama.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan penelitian ini adalah metode fungsi eksponensial akurat dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinier pada persamaan Burgers satu dimensi.

1. Penerapan metode fungsi eksponensial pada persamaan Burgers satu dimensi diperoleh tiga solusi analitik sebagai berikut

   a. $u(\eta) = \frac{(\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-\eta)-(\varepsilon k^2-\omega)b_0}{kb_{-1}\exp(-\eta)+kb_0}, \eta = kx + \omega t$

   $$u(x,t) = \frac{(\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}\exp(-kx-\omega t)-(\varepsilon k^2-\omega)b_0}{kb_{-1}\exp(-kx-\omega t)+kb_0}$$

   b. $u(\eta) = \frac{b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)\exp(-\eta)-b_1(2\varepsilon k^2+\omega)\exp(\eta)}{k(b_{-1}\exp(-\eta)+b_1\exp(\eta))}, \eta = kx + \omega t$

   $$u(x,t) = \frac{b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)\exp(-kx-\omega t)-b_1(2\varepsilon k^2+\omega)\exp(kx+\omega t)}{k(b_{-1}\exp(-kx-\omega t)+b_1\exp(kx+\omega t))}$$

   c. $u(\eta) = \frac{\frac{1}{4}\frac{\left(\varepsilon^2k^2b_0^2-k^2a_0^2-2k\omega a_0b_0-\omega^2b_0^2\right)(\varepsilon k^2-\omega)\exp(-\eta)}{\varepsilon^2k^5b_1}+a_0-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)\exp(\eta)}{k}}{\frac{1}{4}\frac{\left(\varepsilon^2k^2b_0^2-k^2a_0^2-2k\omega a_0b_0-\omega^2b_0^2\right)\exp(-\eta)}{\varepsilon^2k^4b_1}+b_0+b_1\exp(\eta)},$

   $\eta = kx + \omega t$

   $u(x,t) =$

   $$\frac{\frac{1}{4}\frac{\left(\varepsilon^2k^2b_0^2-k^2a_0^2-2k\omega a_0b_0-\omega^2b_0^2\right)(\varepsilon k^2-\omega)\exp(-kx-\omega t)}{\varepsilon^2k^5b_1}+a_0-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)\exp(kx+\omega t)}{k}}{\frac{1}{4}\frac{\left(\varepsilon^2k^2b_0^2-k^2a_0^2-2k\omega a_0b_0-\omega^2b_0^2\right)\exp(-kx-\omega t)}{\varepsilon^2k^4b_1}+b_0+b_1\exp(kx+\omega t)}$$

   Dimana ε, k, ω adalah konstanta.

2. Berdasarkan simulasi dari gambar 3.1, 3.2 dan 3.3 memiliki gambar hampir sama, tapi ketika dijabarkan pada tabel tidak ada yang habis dioperasikan. Sehingga solusi analitik yang diperoleh dengan menggunakan metode fungsi eksponensial adalah tidak sama antara solusi satu dengan yang lain.

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya,disarankan untuk menggunakan metode fungsi eksponensial pada persaman diferensial parsial (PDP) nonlinier lainnya.

DAFTAR RUJUKAN

Aghdaei Mehdi Fazli Dan Manafian Jalil. 2017. *Application of* Metode Fungsi Eksponensial (MFE) *for Solving a Partial Differential Aquation Arising in Problems of Hydrodynamics*. IntJ.Appl.Comput.

Akpan Iyakino P. 2015. *Adomian Decomposition Approach To The Solution Of The Burger"s Equation*. American Journal Of Computional Mathematics.

Baker, George A dan Peter Graves-Morris. 1996. *Padé Approxtimants Second Edition*. UK. Cambridge University Press.

Bateman H. 1915. *Some Recent Research On The Motion Of Fluids*. Moh Wheather Rev.

Benton Edward R dan Platzman George W.1972. *A Table Of Solutions Of The One-Dimensional Burgers Equation.* Quarterly Of Applied Mathematics.

Derickson, R. G dan Pielke,R. A.2000. A Premilinary Study of the Burgers Equations with Symbolic Computation. *Journal of Computational Physics*.162:219-244.

Gamzaev, Kh. M. 2017. *Numerical Solution Of Combined Inverse Problem For Generalized Burgers Equation*. Journal of Mathematical Sciences.

He JH. 2012. Asymptotic Methods for Solitary Solutions and Compactons. *Abstract and Applied Analysis*.

He JH. 2013. *Exp-function Method for Fractional Differential Equations*. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation.

He ji-huan dan wuxu-hong. 2006. *Exp-Function Method Wave Equations. Chaos, Soliton And Fractals*.

Huda, Md. Azmol, M. Ali Akbar , Shewli Shamim Shanta. 2018. *The new types of wave solutions of the Burger's equation and the Benjamin–Bona–Mahony equation*. ScienceDirect: Journal of Ocean Engineering and Science.

Islam Rafiqul, Khan Kamaruzzaman, Akbar M.Ali, Islam, Md. Ekramul, dan Ahmed Md. Tanjir. 2015. *Travelling wave solutions of some nonlinear evolution equations.* ELSEVIER: Alexandria Engineering Journal.

Landajuela, M. 2011. *Burgers Equation*. Paris (FR): Basque Center for Applied Mathematics.

Matinfar M, Aminzadeh M dan Nemati M. 2014. *Exp-Function Method For The Exact Solution Of Sawada-Kotera Equation*. Indian J.Pure Appl.Math.

Matinfar M, Aminzadeh M dan Nemati M. 2014. *Exp-Function Method For The Exact Solution Of Sawada-Kotera Equation*. Indian J.Pure Appl.Math.

Purcel, E. J. 1997. *Calculus.* Mexico: Prentice Hall.

Rahmatullah, Rahmat Ellahi , Syed Tauseef Mohyud-Din , Umar Khan.2018. *Exact traveling wave solutions of fractional order Boussinesq-like equations by applying Exp-function method*. ELSEVIER: Results in Physics.

Roshid Harun-Or, Kabir Md Rashed, Bhowmik Rajandra Chadra dan Datta Bimal Kumar .2014. *Investigation of Solitary wave solutions for Vakhnenko-Parkes equation via exp-function and* $Exp(-\phi(\xi))$ *−expansion method*. Springer Plus: SpringerOpen Journal.

Syaikh M. Abdul Ghoffar Abdullah Bin Muhammad Bin Abdurrahman Bin Ishaq Alu. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 4*. Jakarta: Pustaka Imam-Syafi'i.

Tallarposht R.A, Ghasemi S.E, Rahmani.Y, Ganji D.D.2016. : *Application of Exp-function Method to Wave Solutions of the Sine-Gordon and Ostrovsky Equations*.Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series.

Wazwaz, A.-M. 2009. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory. Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory. Series: Nonlinear Physical Science, ISBN: 978-3-642-00250-2.* Springer Berlin Heidelberg (Berlin, Heidelberg), Edited by Abdul-Majid Wazwaz.

LAMPIRAN 1
MENCARI NILAI PARAMETER SOLUSI PERTAMA

Mencari nilai parameter a_{-1} dari A_1 (3.20)

$$-ka_{-1}^2 b_0 + (\varepsilon k^2 b_1 b_0 - \omega b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1}) a_{-1} - \varepsilon k^2 a_0 b_{-1}^2 + k a_{-1} a_0 b_{-1} + \omega a_0 b_{-1}^2 = 0 \tag{1}$$

Menggunakan rumus ABC untuk mendapatkan nilai a_{-1}

$$a_{-1_{(1,2)}} = -\frac{\varepsilon k^2 b_1 b_0 - \omega b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1}}{-2kb_0} \pm \frac{\sqrt{(\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 - \omega b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1})^2 - 4(-kb_0)(-\varepsilon k^2 a_0 b_{-1}^2 + \omega a_0 b_{-1}^2)}}{-2kb_0}$$

$$\begin{aligned}
a_{-1_{(1)}} &= \frac{-\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 + \omega b_{-1} b_0 - k a_0 b_{-1}}{-2kb_0} + \frac{\sqrt{(-\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 + \omega b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1})^2}}{-2kb_0} \\
&= \frac{-\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 + \omega b_{-1} b_0 - k a_0 b_{-1} - \varepsilon k^2 b_{-1} b_0 + \omega b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1}}{-2kb_0} \\
&= \frac{-2\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 + 2\omega b_{-1} b_0}{-2kb_0} \\
&= \frac{b_{-1}(\varepsilon k^2 - \omega)}{k}
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
a_{-1_{(1)}} &= \frac{-\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 + \omega b_{-1} b_0 - k a_0 b_{-1}}{-2kb_0} - \frac{\sqrt{(-\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 + \omega b_{-1} b_0 - k a_0 b_{-1})^2}}{-2kb_0} \\
&= \frac{-\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 + \omega b_{-1} b_0 - k a_0 b_{-1} + \varepsilon k^2 b_{-1} b_0 - \omega b_{-1} b_0 - k a_0 b_{-1}}{-2kb_0} \\
&= -\frac{2k a_0 b_{-1}}{-2kb_0} \\
&= \frac{a_0 b_{-1}}{b_0}
\end{aligned} \tag{3}$$

Selanjutnya adalah substitusi (3) in A_2 (3.20)

$$\begin{aligned}
&4\varepsilon k^2 \frac{a_0 b_{-1}}{b_0} b_{-1} b_1 - \varepsilon k^2 \frac{a_0 b_{-1}}{b_0} b_0^2 + \varepsilon k^2 a_0 b_{-1} b_0 - 4\varepsilon k^2 a_1 b_{-1}^2 \\
&-2k\left(\frac{a_0 b_{-1}}{b_0}\right) b_1 - k \frac{a_0 b_{-1}}{b_0} a_0 b_0 + 2k \frac{a_0 b_{-1}}{b_0} a_1 b_{-1} + k a_0^2 b_{-1} \\
&-2\omega \frac{a_0 b_{-1}}{b_0} b_{-1} b_1 - \omega \frac{a_0 b_{-1}}{b_0} b_0^2 + \omega a_0 b_{-1} b_0 + 2\omega a_1 b_{-1}^2 = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{4\varepsilon k^2 a_0 b_{-1}^2 b_1}{b_0} - 4\varepsilon k^2 a_1 b_{-1}^2 - \frac{2k a_0^2 b_{-1}^2 b_1}{b_0^2} + \frac{2k a_0 b_{-1}^2 a_1}{b_0} - 2\omega a_1 b_{-1}^2 = 0 \tag{4}$$

$$\frac{2(a_0 b_1 - a_1 b_0)(2\epsilon k^2 b_0 - k a_0 - \omega b_0) b_{-1}^2}{b_0^2} = 0 \tag{5}$$

- Substitusikan a_{-1} (3) substitution in A_3 (3.20)

$$-3\varepsilon k^2\frac{a_0b_{-1}}{b_0}b_0b_1+6\varepsilon k^2a_0b_{-1}b_1-3\varepsilon k^2a_1b_{-1}b_0$$
$$-3k\frac{a_0b_{-1}}{b_0}a_0b_1+3ka_0a_1b_{-1}-3\omega\frac{a_0b_{-1}}{b_0}b_0+2\omega a_1b_{-1}b_0=0$$
$$3\varepsilon k^2a_0b_{-1}b_1-3\varepsilon k^2a_1b_{-1}b_0-\frac{3ka_0^2b_{-1}b_1}{b_0}+3ka_0a_1b_{-1}-3\omega a_0b_{-1}b_1+3\omega a_1b_{-1}b_0=0 \quad (6)$$

$$\frac{3(a_0b_1-a_1b_0)\big((\epsilon k^2-\omega)b_0-ka_0\big)b_{-1}}{b_0}=0 \quad (7)$$

- Substitusikan a_{-1} (3) substitution in A_4 (3.20)

$$-4\varepsilon k^2\frac{a_0b_{-1}}{b_0}b_1^2+\varepsilon k^2a_0b_0b_1+4\varepsilon k^2a_1b_{-1}b_1-\varepsilon k^2a_1b_0^2-2k\frac{a_0b_{-1}}{b_0}a_1b_1-ka_0^2b_1$$
$$+ka_0a_1b_0+2ka_1^2b_{-1}-2\omega\frac{a_0b_{-1}}{b_0}b_1^2-\omega a_0b_0b_1+2\omega a_1b_{-1}b_1+\omega a_1b_0^2=0$$
$$-\frac{4\varepsilon k^2a_0b_{-1}b_1^2}{b_0}+\varepsilon k^2a_0b_0b_1+4\varepsilon k^2a_1b_{-1}b_1-\varepsilon k^2a_1b_0^2-\frac{2ka_0b_{-1}a_1b_1}{b_0}=0 \quad (8)$$

$$-ka_0^2b_1+ka_0a_1b_0+2ka_1^2b_{-1}-\frac{2\omega a_0b_{-1}b_1^2}{b_0}-\omega a_0b_0b_1+2\omega a_1b_{-1}b_1+\omega a_1b_0^2=0$$
$$\frac{(a_0b_1-a_1b_0)\left((\varepsilon k^2-\omega)b_0^2-ka_0b_0-4\left(\left(\varepsilon k^2-\frac{1}{2}\omega\right)b_1+\frac{1}{2}ka_1\right)b_{-1}\right.}{b_0}=0 \quad (9)$$

$$-\varepsilon k^2a_0b_1^2+\varepsilon k^2a_1b_0b_1-ka_0a_1b_1+ka_1^2b_0-\omega a_0b_1^2+\omega a_1b_0b_1=0 \quad (10)$$

- Mencari nilai b_{-1} dari A_2 (5)

Berdasarkan (5) dapat diketahui bahwa $b_{-1}=0$ maka langkah selanjutnya adalah substitusikan nilai dari b_{-1} dalam A_3 (7), A_4 (8), A_5(10)

- Selanjutnya adalah sunstitusi b_{-1} subtitution in A_4 (8)

$$\frac{(a_0b_1-a_1b_0)\left((\varepsilon k^2-\omega)b_0^2-ka_0b_0-4\left(\left(\varepsilon k^2-\frac{1}{2}\omega\right)b_1+\frac{1}{2}ka_1\right)b_{-1}\right)}{b_0}=0$$
$$\varepsilon k^2a_0b_0b_1-\varepsilon k^2a_1b_0^2-ka_0^2b_1+ka_0a_1b_0-\omega a_0b_0b_1+\omega a_1b_0^2=0 \quad (11)$$

$$\left((\varepsilon k^2-\omega)b_0-ka_0\right)(a_0b_1-a_1b_0)=0 \tag{12}$$

- Mencari nilai a_{-1} dari A_5 (10)

$$ka_1^2b_0+(\epsilon k^2b_0b_1-ka_0b_1+\omega b_0b_1)a_1-\epsilon k^2a_0b_1^2-\omega a_0b_1^2=0 \tag{13}$$

$$a_{1_{(1,2)}}=\frac{-(\epsilon k^2b_0b_1-ka_0b_1+\omega b_0b_1)}{2kb_0}\pm\frac{\sqrt{(\epsilon k^2b_0b_1-ka_0b_1+\omega b_0b_1)^2-4(b_0)(-\epsilon k^2a_0b_1^2-\omega a_0b_1^2)}}{-2kb_0}$$

$$a_{1_{(1)}}=\frac{-(\epsilon k^2b_0b_1-ka_0b_1+\omega b_0b_1)}{2kb_0}+\frac{\sqrt{(\epsilon k^2b_0b_1-ka_0b_1+\omega b_0b_1)^2-4(b_0)(-\epsilon k^2a_0b_1^2-\omega a_0b_1^2)}}{-2kb_0} \tag{14}$$

$$=-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)}{k}$$

$$a_{1_{(1)}}=\frac{-(\epsilon k^2b_0b_1-ka_0b_1+\omega b_0b_1)}{2kb_0}-\frac{\sqrt{(\epsilon k^2b_0b_1-ka_0b_1+\omega b_0b_1)^2-4(b_0)(-\epsilon k^2a_0b_1^2-\omega a_0b_1^2)}}{-2kb_0} \tag{15}$$

$$a_1=\frac{a_0b_1}{b_0}$$

- Selanjutnya substitusi a_1 (14) dalam A_4(11)

$$\epsilon k^2a_0b_0b_1-\epsilon k^2\left(-\frac{b_1(\epsilon k^2+\omega)}{k}\right)b_0^2-ka_0^2b_1^2+ka_0\left(-\frac{b_1(\epsilon k^2+\omega)}{k}\right)b_0-\omega b_0b_1+\omega\left(-\frac{b_1(\epsilon k^2+\omega)}{k}\right)\omega b_0^2=0$$

$$\epsilon k^2a_0b_0b_1+\epsilon k^2b_1(\epsilon k^2+\omega)b_0^2-ka_0^2b_1^2-a_0b_0-\omega b_0b_1-\frac{\omega b_1(\epsilon k^2+\omega)b_0^2}{k}=0 \tag{16}$$

$$-ka_0^2b_1+a_0(b_0b_1(\epsilon k^2+\omega)-\omega b_0b_1+\epsilon k^2a_0b_0b_1)+\epsilon k^2b_1(\epsilon k^2+\omega)b_0^2-\frac{\omega b_1(\epsilon k^2+\omega)b_0^2}{k}=0$$

$$\frac{b_1(\varepsilon^2k^4b_0^2-k^2a_0^2-2k\omega a_0b_0-\omega^2b_0^2)}{k}=0 \tag{17}$$

Berdasarkan (17) diperoleh nilai $b_1=0$

- Selanjutnya adalah mencari nilai a_0 dari (16)

$$-ka_0^2b_1 + a_0(b_0b_1(\varepsilon k^2 + \omega) - \omega b_0b_1 + \varepsilon k^2a_0b_0b_1) + \varepsilon k^2b_1(\varepsilon k^2 + \omega)b_0^2 - \frac{\omega b_1(\varepsilon k^2 + \omega)b_0^2}{k} = 0$$

$$a_{0_{(1,2)}} = -\frac{(b_0b_1(\epsilon k^2 + \omega) - \omega b_0b_1 + \epsilon k^2a_0b_0b_1)}{-2kb_0} \pm \frac{\sqrt{(b_0b_1(\epsilon k^2 + \omega) - \omega b_0b_1 + \epsilon k^2a_0b_0b_1)^2 - 4(-2kb_0) + \epsilon k^2b_1(\epsilon k^2 + \omega)b_0^2 - \frac{\omega b_1(\epsilon k^2+\omega)b_0^2}{k}}}{-2kb_0}$$

$$a_{0_1} = \frac{b_0(\varepsilon k^2 - \omega)}{k} \tag{18}$$

$$a_{0_2} = -\frac{b_0(\varepsilon k^2 + \omega)}{k} \tag{19}$$

Sehingga berdasarkan penjabaran di atas maka nilai parameter sebagai berikut

$$a_0 = -\frac{b_0(\varepsilon k^2 + \omega)}{k} \tag{20}$$

$$a_{-1} = -\frac{b_{-1}(\varepsilon k^2 - \omega)}{k} \tag{21}$$

$$a_1 = 0 \tag{22}$$

$$b_1 = 0 \tag{23}$$

Karena pada nilai parameter (20), (21), (22) dan (23) masih mengandung variabel a0 dan b−1maka nilai tersebut bernilai bebas. sehingga dapat dituliskan menjadi

$$b_0 = b_0$$

$$b_{-1} = b_{-1}$$

LAMPIRAN 2
NILAI PARAMTER SOLUSI KEDUA

- Mencari a_0 pada A_1 (3.20)

$$(\varepsilon k b_{-1}^2 + \omega b_{-1}^2 + k a_{-1} b_{-1}) a_0 + \varepsilon k a_{-1} b_{-1} b_0 - k a_{-1}^2 b_0 - \omega a_{-1} b_{-1} b_0 = 0$$

$$a_0 = \frac{-\varepsilon k a_{-1} b_{-1} b_0 + k a_{-1}^2 b_0 + \omega a_{-1} b_{-1} b_0}{\varepsilon k b_{-1}^2 + \omega b_{-1}^2 + k a_{-1} b_{-1}}$$
$$= \frac{a_{-1} b_0}{b_{-1}} \left(\frac{-\varepsilon k b_{-1} b_0 + k a_{-1} + \omega b_{-1}}{\varepsilon k b_{-1} + \omega b_{-1} + k a_{-1}} \right)$$
$$= \frac{a_{-1} b_0}{b_{-1}}$$

- Selanjutnya substitusi a_0 (1) dalam A_2, A_3, A_4, A_5(3.20)
- Selanjutnya substitusi a_0 (1) dalam A_2(3.20)

$$4\varepsilon k^2 a_{-1} b_{-1} b_1 - \varepsilon k^2 a_{-1} b_0^2 + \varepsilon k^2 \frac{a_{-1} b_0}{b_{-1}} b_{-1} b_0 - 4\varepsilon k^2 a_1 b_{-1}^2 - 2k a_{-1}^2 b_1 - k a_{-1} \frac{a_{-1} b_0}{b_{-1}} b_0 + 2k a_{-1} a_1 b_{-1} + k \left(\frac{a_{-1} b_0}{b_{-1}} \right) b_{-1} - 2\omega a_{-1} b_{-1} b_1 - \omega a_{-1} b_0^2 + \omega \frac{a_{-1} b_0}{b_{-1}} b_{-1} b_0 + 2\omega a_1 b_{-1}^2 = 0$$

$$4\varepsilon k^2 a_{-1} b_{-1} b_1 - 4\varepsilon k^2 a_1 b_{-1}^2 - 2k a_{-1}^2 b_1 + 2k a_{-1} a_1 b_{-1} - 2\omega a_{-1} b_{-1} b_1 + 2\omega a_1 b_{-1}^2 = 0 \quad (2)$$

- Selanjutnya substitusi a_0 (1) dalam A_3(3.20)

$$-3\varepsilon k^2 a_{-1} b_0 b_1 + 6\varepsilon k^2 \frac{a_{-1} b_0}{b_{-1}} b_{-1} b_1 - 3\varepsilon k^2 a_1 b_{-1} b_0 - 3k a_{-1} \frac{a_{-1} b_0}{b_{-1}} b_1 + 3k \frac{a_{-1} b_0}{b_{-1}} a_1 b_{-1} - 3\omega a_{-1} b_0 + 2\omega a_1 b_{-1} b_0 = 0$$

$$3\varepsilon k^2 a_{-1} b_0 b_1 - 3\varepsilon k^2 a_1 b_{-1} b_0 - 3k \frac{a_{-1}^2 b_0}{b_{-1}} b_1 + 3k a_{-1} a_1 b_0 - 3\omega a_{-1} b_0 + 2\omega a_1 b_{-1} b_0 \quad (3)$$

- Selanjutnya substitusi a_0 (1) dalam A_4(3.20)

$$-4\varepsilon k^2 a_{-1} b_1^2 + \varepsilon k^2 \frac{a_{-1} b_0}{b_{-1}} b_0 b_1 + 4\varepsilon k^2 a_1 b_{-1} b_1 - \varepsilon k^2 a_1 b_0^2 - 2k a_{-1} a_1 b_1 - k \left(\frac{a_{-1} b_0}{b_{-1}} \right)^2 b_1 + k \frac{a_{-1} b_0}{b_{-1}} a_1 b_0 + 2k a_1^2 b_{-1} - 2\omega a_{-1} b_1^2 - \omega \frac{a_{-1} b_0}{b_{-1}} b_0 b_1 + 2\omega a_1 b_{-1} b_1 + \omega a_1 b_0^2$$

$$\frac{(a_{-1} b_1 - a_1 b_{-1})(((-4\varepsilon k^2 - 2\omega) b_1 - 2k a_1) b_{-1}^2 + b_0^2 (\varepsilon k^2 - \omega) b_{-}}{b_{-1}^2} = 0 \quad (5)$$

- Selanjutnya substitusi a_0 (1) dalam A_5(3.20)

$$-\frac{\varepsilon k^2 a_{-1} b_0 b_1^2}{b_{-1}} + \varepsilon k^2 a_1 b_0 b_1 - \frac{k a_{-1} b_0 a_1 b-1}{b_{-1}} + k a_1^2 b_0 - \frac{\omega a_{-1} b_0 b_1^2}{b_{-1}} + \omega a_1 b_0 b_1 = 0 \qquad (6)$$

- Selanjutnya mencari nilai a_{-1} dalam A_5 (6)

$$-2ka_{-1}^2 b_1 + (4\varepsilon k^2 b_{-1} b_1 + 2k a_1 b_{-1} - 2\omega b_{-1} b_1) a_{-1} - 4\varepsilon k a_1 b_{-1}^2 + 2\omega a_1 b_{-1}^2 = 0$$

$$a_{-1(1,2)} = \frac{-(4\varepsilon k b_{-1} b_1 + 2k a_1 b_{-1} - 2\omega b_{-1} b_1)}{-2kb_0} - \frac{\sqrt{(4\varepsilon k^2 b_{-1} b_1 + 2k a_1 b_{-1} - 2\omega b_{-1} b_1)^2 - 4(-2kb_{-1})(-4\varepsilon k^2 a_1 b_{-1}^2 + 2\omega a_1 b_{-1}^2)}}{-2kb_{-1}}$$

$$= \frac{-(4\varepsilon k^2 b_{-1} b_1 + 2k a_1 b_{-1} - 2\omega b_{-1} b_1)}{2kb_0} + \frac{\sqrt{(4\varepsilon k^2 b_{-1} b_1 + 2k a_1 b_{-1} - 2\omega b_{-1} b_1)^2 - 4(-2kb_{-1})(-4\varepsilon k^2 a_1 b_{-1}^2 + 2\omega a_1 b_{-1}^2)}}{-2kb_{-1}}$$

$$a_{-1(1)} = \frac{a_1 b_{-1}}{b_1} \qquad (7)$$

$$a_{-1(2)} = \frac{b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)}{k} \qquad (8)$$

- Selanjutnya substitusi a_{-1} (8) dalam in A_3(3)

$$3\varepsilon k b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega) b_0 b_{-1} - 3\varepsilon k^2 a_1 b_{-1} b_0 - \frac{3b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega)^2 b_0 b_1}{k}$$
$$+3b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega) b_0 a_1 - \frac{3\omega b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega) b_0 b_1}{k} + 3\omega a_1 b_{-1} b_0 = 0$$
$$-6\varepsilon k b_{-1} b_0 \left(\varepsilon k^2 b_1 - \frac{1}{2} k a_1 - \frac{1}{2} \omega b_1\right) = 0 \qquad (9)$$

- Selanjutnya substitusi a_{-1} (8) dalam in A_4(5)

$$-4\varepsilon k b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega) b_1^2 + \varepsilon k (2\varepsilon k^2 - \omega) b_0^2 b_1 + a\varepsilon k^2 a_1 b_{-1} b_1 - \varepsilon k^2 a_1 b_0^2$$
$$-2b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega) a_1 b_1 - \frac{(2\varepsilon k^2 - \omega)^2 b_0^2 b_1}{k} + (2\varepsilon k^2 - \omega) b_0^2 a_1 + 2k a_1^2 b_{-1}$$
$$-\frac{2\omega b_{-1}(2\varepsilon k^2 - \omega) b_1^2}{k} - \frac{\omega (2\varepsilon k^2 - \omega) b_0^2 b_1}{k} + 2\omega a_1 b_{-1} b_1 + \omega a_1 b_0^2 = 0 \qquad (10)$$

$$-\frac{2(\varepsilon(4b_{-1} b_1 + b_0^2) k^2 + 2a_1 b_{-1} k + 2\omega b_{-1} b_1)\left(\varepsilon k^2 b_1 - \frac{1}{2} k a_1 - \frac{1}{2}\omega b_1\right)}{k} = 0$$

- Selanjutnya substitusi a_{-1} (8) dalam in A_5(6)

$$-\varepsilon k(2\varepsilon k^2-\omega)b_0b_1^2+\varepsilon k^2a_1b_0b_1-(2\varepsilon k^2-\omega)b_0a_1b_1 + ka_1^2b_0 - \frac{\omega(2\varepsilon k^2-\omega)b_0b_1^2}{k}+\omega a_1b_0b_1 - \frac{2(\varepsilon k^2b_1-ka_1-\omega b_1)\left(\varepsilon k^2b_1-\frac{1}{2}ka_1-\frac{1}{2}\omega b_1\right)b_0}{k}=0$$

Berdasarkan (9) $b_0=0$

A_4 dapat ditulis kembali menjadi

$$-4\varepsilon kb_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1^2+4\varepsilon k^2a_1b_{-1}b_1-2b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)a_1b_1+2ka_1^2b_{-1} - \frac{2\omega b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1^2}{k}+2\omega a_1b_{-1}b_1=0$$

- Mencari nilai $a_1(10)$

$$2ka_1^2b_{-1}+(4\varepsilon k^2a_1b_{-1}b_1-2b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1+2\omega b_{-1}b_1)a_1 -a\varepsilon kb_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1^2-\frac{2\omega b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1^2}{k}=0$$

$$a_1=\frac{-(4\varepsilon k^2a_1b_{-1}b_1-2b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1+2\omega b_{-1}b_1)}{2kb_0}-\frac{\sqrt{(4\varepsilon k^2a_1b_{-1}b_1-2b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1+2\omega b_{-1}b_1)^2}}{-2kb_{-1}} \frac{\sqrt{-4(-2kb_{-1})\left(-a\varepsilon kb_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1^2-\frac{2\omega b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1^2}{k}\right)}}{-2kb_{-1}}$$

$$=\frac{-(4\varepsilon k^2a_1b_{-1}b_1-2b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1+2\omega b_{-1}b_1)}{-2kb_{-1}}+\frac{\sqrt{(4\varepsilon k^2a_1b_{-1}b_1-2b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1+2\omega b_{-1}b_1)^2}}{-2kb_{-1}}+\frac{\sqrt{-4(-2kb_{-1})\left(-a\varepsilon kb_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1^2-\frac{2\omega b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1^2}{k}\right)}}{-2kb_{-1}}$$

$$a_0=\frac{b_1(2\varepsilon k^2-\omega)}{k}$$

$$a_1=\frac{-(4\varepsilon k^2a_1b_{-1}b_1-2b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1+2\omega b_{-1}b_1)}{-2kb_0}-\frac{\sqrt{(4\varepsilon k^2a_1b_{-1}b_1-2b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1+2\omega b_{-1}b_1)^2}}{-2kb_{-1}}+\frac{\sqrt{-4(-2kb_{-1})\left(-a\varepsilon kb_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1^2-\frac{2\omega b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1^2}{k}\right)}}{-2kb_{-1}}$$

$$=\frac{-(4\varepsilon k^2a_1b_{-1}b_1-2b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1+2\omega b_{-1}b_1)}{-2kb_{-1}}-\frac{\sqrt{(4\varepsilon k^2a_1b_{-1}b_1-2b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1+2\omega b_{-1}b_1)^2}}{-2kb_{-1}}$$

$$+\frac{\sqrt{-4(-2kb_{-1})\left(-a\varepsilon kb_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1^2-\frac{2\omega b_{-1}(2\varepsilon k^2-\omega)b_1^2}{k}\right)}}{-2kb_{-1}}$$

$$=-\frac{b_1(2\varepsilon k^2-\omega)}{k}$$

LAMPIRAN 3
MENCARI NILAI PARAMETER SOLUSI KETIGA

- Mencari nilai a_1 dari A_5(3.20)

$$-\varepsilon k^2 a_0 b_1^2 + \varepsilon k^2 a_1 b_0 b_1 - k a_0 a_1 b_1 + k a_1^2 b_0 - \omega a_0 b_1^2 + \omega a_1 b_0 b_1 = 0$$
$$k a_1^2 b_0 + a_1(\omega b_0 b_1 + \varepsilon k^2 b_0 b_1 - k a_0 b_1) - \omega a_0 b_1^2 - \varepsilon k^2 a_0 b_1^2 = 0$$

$$a_{1_{(1.2)}} = \frac{-(\omega b_0 b_1 + \varepsilon k^2 b_0 b_1 - k a_0 b_1)}{2kb_0} \pm \frac{\sqrt{(\omega b_0 b_1 + \varepsilon k^2 b_0 b_1 - k a_0 b_1)^2 - 4(kb_0)(-\omega a_0 b_1^2 - \varepsilon k^2 a_0 b_1^2)}}{2kb_0}$$

$$a_{1_{(1)}} = \frac{(-\omega a_0 b_1^2 - \varepsilon k^2 a_0 b_1^2)}{2kb_0} + \frac{\sqrt{(\omega b_0 b_1 + \varepsilon k^2 b_0 b_1 - k a_0 b_1)^2}}{2kb_0}$$
$$= \frac{(\omega b_0 b_1 + \varepsilon k^2 b_0 b_1 - k a_0 b_1) + \omega b_0 b_1 + \varepsilon k^2 b_0 b_1 - k a_0 b_1}{2kb_0}$$
$$= \frac{2k a_0 b_1}{2kb_0}$$
$$= \frac{a_0 b_1}{b_0} \quad (1)$$

Nilai parameter (1) tidak digunakan, karena jika disubtitusi pada A_1, A_2, A_3 dan A_4 menghasilkan nilai nol. Jadi kita tidak akan mendapatkan informasi apapun jika (1) digunakan

$$a_{1_{(2)}} = \frac{-(\omega b_0 b_1 + \varepsilon k^2 b_0 b_1 - k a_0 b_1)}{2kb_0} - \frac{\sqrt{(\omega b_0 b_1 + \varepsilon k^2 b_0 b_1 - k a_0 b_1)^2 - 4(kb_0)(-\omega a_0 b_1^2 - \varepsilon k^2 a_0 b_1^2)}}{2kb_0}$$
$$= -\frac{(\omega b_0 b_1 + \varepsilon k^2 b_0 b_1 - k a_0 b_1)}{2kb_0} + \frac{\sqrt{(\omega b_0 b_1 + \varepsilon k^2 b_0 b_1 - k a_0 b_1)^2}}{2kb_0}$$
$$= -\frac{(\omega b_0 b_1 + \varepsilon k^2 b_0 b_1 - k a_0 b_1) + \omega b_0 b_1 + \varepsilon k^2 b_0 b_1 - k a_0 b_1}{2kb_0}$$
$$= -\frac{2\omega b_0 b_1 + 2\varepsilon k^2 b_0 b_1}{2kb_0}$$
$$= -\frac{2 b_0 b_1(\varepsilon k^2 + \omega)}{2kb_0}$$
$$= -\frac{b_1(\varepsilon k^2 + \omega)}{k}$$

- Selanjutnya subtitusi a_1 dalam A_1 (3.20)

$$\varepsilon k^2 a_{-1} b_{-1} b_0 - \varepsilon k^2 a_0 b_{-1}^2 - k a_{-1}^2 b_0 + k a_{-1} a_0 b_{-1} - \omega a_{-1} b_{-1} b_0 + \omega a_0 b_{-1}^2 = 0 \quad (2)$$

$$(a_{-1}b_0 - a_0b_{-1})(\varepsilon k^2 b_{-1} - ka_{-1} - \omega b_{-1}) = 0$$

- Selanjutnya substitusi a_1 dalam A_2 (3.20)

$$4\varepsilon k^2 a_{-1}b_{-1}b_1 - \varepsilon k^2 a_{-1}b_0^2 + \varepsilon k^2 a_0 b_{-1}b_0 - 4\varepsilon k^2\left(-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)}{k}\right)b_{-1}^2 - 2ka_{-1}^2 b_1 - ka_{-1}a_0b_0 + 2ka_{-1}\left(-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)}{k}\right)b_{-1} + ka_0^2b_{-1} - 2\omega a_{-1}b_{-1}b_1 - \omega a_{-1}b_0^2 + \omega a_0 b_{-1}b_0 + 2\omega\left(-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)}{k}\right)b_{-1}^2 = 0$$

$$4\varepsilon k^2 a_{-1}b_{-1}b_1 - \varepsilon k^2 a_{-1}b_0^2 + \varepsilon k^2 a_0 b_{-1}b_0 + 4\varepsilon k b_1(\varepsilon k^2+\omega)b_{-1}^2 - 2ka_{-1}^2b_1 - ka_{-1}a_0b_0 - 2a_{-1}b_1(\varepsilon k^2+\omega)b_{-1} + ka_0^2b_{-1} - 2\omega a_{-1}b_{-1}b_1 - \omega a_{-1}b_0^2 + \omega a_0b_{-1}b_0 - 2\omega\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)}{k}b_{-1}^2 = 0 \quad (3)$$

- Selanjutnya substitusi a_1 dalam A_3 (3.20)

$$-3\varepsilon k^2 a_{-1}b_0b_1 + 6\varepsilon k^2 a_0b_{-1}b_1 - 3\varepsilon k^2\left(-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)}{k}\right)b_{-1}b_0 - 3ka_{-1}a_0b_1 + 3ka_0\left(-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)}{k}\right)b_{-1} - 3\omega a_{-1}b_0 + 2\omega\left(-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)}{k}\right)b_{-1}b_0 = 0$$

$$-3\varepsilon k^2 a_{-1}b_0b_1 + 6\varepsilon k^2 a_0b_{-1}b_1 + 3\varepsilon k b_1(\varepsilon k^2+\omega)b_{-1}b_0 - 3ka_{-1}a_0b_1 - 3a_0b_1(\varepsilon k^2+\omega)b_{-1} - 3\omega a_{-1}b_0 - 2\omega\left(\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)}{k}\right)b_{-1}b_0 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{3b_1(\varepsilon k^2b_{-1} - ka_{-1} - \omega b_{-1})(\varepsilon k^2 b_0 + ka_0 + \omega b_0)}{k} = 0 \quad (5)$$

- Selanjutnya substitusi a_1 dalam A_4 (3.20)

$$-4\varepsilon k^2 a_{-1}b_1^2 + \varepsilon k^2 a_0b_0b_1 + 4\varepsilon k^2\left(-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)}{k}\right)b_{-1}b_1 - \varepsilon k^2\left(-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)}{k}\right)b_0^2 - 2ka_{-1}\left(-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)}{k}\right)b_1 - ka_0^2b_1 + ka_0\left(-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)}{k}\right)b_0 + 2k\left(-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)}{k}\right)^2 b_{-1} - 2\omega a_{-1}b_1^2 - \omega a_0b_0b_1 + 2\omega\left(-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)}{k}\right)b_{-1}b_1 + \omega\left(-\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)}{k}\right)b_0^2 = 0$$

$$-4\varepsilon k^2 a_{-1} b_1^2 + \varepsilon k^2 a_0 b_0 b_1 + -\varepsilon k(\varepsilon k^2+\omega) b_{-1} b_1^2 + \varepsilon k b_1(\varepsilon k^2+\omega) b_0^2 + 2a_{-1} b_1^2(\varepsilon k^2+\omega) - k a_0^2 b_1 - a_0 b_1(\varepsilon k^2+\omega) b_0 + 2\frac{b_1^2(\varepsilon k^2+\omega)^2}{k} b_{-1} - 2\omega a_{-1} b_1^2 - \omega a_0 b_0 b_1 - 2\omega\left(\frac{(\varepsilon k^2+\omega)}{k}\right) b_{-1} b_1^2 - \omega\left(\frac{b_1(\varepsilon k^2+\omega)}{k}\right) b_0^2 = 0 \quad (6)$$

- Mencari nilai a_{-1} dari A_1 (2)

$$-k a_{-1}^2 b_0 + a_{-1}(\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1} - \omega b_{-1} b_0) - \varepsilon k^2 a_0 b_{-1}^2 + \omega a_0 b_{-1}^2 = 0$$

$$a_{-1(1,2)} = \frac{-(\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1} - \omega b_{-1} b_0)}{2kb_0} \pm \frac{\sqrt{(\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1} - \omega b_{-1} b_0)^2 - 4(kb_0)(-\varepsilon k^2 a_0 b_{-1}^2 + \omega a_0 b_{-1}^2)}}{2kb_0}$$

$$a_{-1(1)} = -\frac{(-\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 - k a_0 b_{-1} + \omega b_{-1} b_0)}{2kb_0} + \frac{\sqrt{(\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1} + \omega b_{-1} b_0)^2}}{2kb_0}$$

$$= -\frac{(-\varepsilon k^2 b_{-1} b_0 - k a_0 b_{-1} + \omega b_{-1} b_0) + \varepsilon k^2 b_{-1} b_0 + k a_0 b_{-1} + \omega b_{-1} b_0}{akb_0}$$

$$= -\frac{\omega b_{-1} b_0}{2kb_0}$$

$$= \frac{a_0 b_{-1}}{b_0} \quad (7)$$

Nilai parameter (7) tersebut tidak dipakai karena jika disubstitusi dalam (3), (4), (6), dan (3.20) menghasilkan nol

$$a_{-1(2)} = \frac{-(\omega b_0 b_1 + \varepsilon k^2 b_0 b_1 - k a_0 b_1)}{2kb_0} - \frac{\sqrt{(\omega b_0 b_1 + \varepsilon k^2 b_0 b_1 - k a_0 b_1)^2 - 4(kb_0)(-\omega a_0 b_1^2 - \varepsilon k^2 a_0 b_1^2)}}{2kb_0}$$

$$= -\frac{(\omega b_0 b_1 + \varepsilon k^2 b_0 b_1 - k a_0 b_1)}{2kb_0} + \frac{\sqrt{(\omega b_0 b_1 + \varepsilon k^2 b_0 b_1 + k a_0 b_1)^2}}{2kb_0}$$

$$= -\frac{(\omega b_0 b_1 + \varepsilon k^2 b_0 b_1 - k a_0 b_1 + \omega b_0 b_1 + \varepsilon k^2 b_0 b_1 + k a_0 b_1}{2kb_0}$$

$$= -\frac{-2\omega b_0 b_1 + 2\varepsilon k^2 b_0 b_1}{2kb_0}$$

$$= -\frac{2b_1 b_0(\varepsilon k^2 + \omega)}{2kb_0}$$

$$= \frac{b_{-1}\,(\varepsilon k^2\;-\;\omega)}{k} \tag{8}$$

- Selanjutnya substitusikan $a_{-1}(8)$ kedalam $A_2(3)$

$$4\varepsilon k^2\, b_{-1}\frac{\varepsilon k^2\;-\;\omega}{k}\; b_{-1}b_1\;-\;\varepsilon k^2\frac{b_{-1}(\,\varepsilon k^2\;-\;\omega)}{k}b_0^2 + \varepsilon k2\; a_0 b_{-1}b_0$$
$$+\;4\varepsilon k b_1\,(\varepsilon k^2\;+\;\omega)b_{-1}^2$$
$$-2k\left(\frac{b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)}{k}\right)^2\; b_1 -\; k\, b_{-1}\frac{\varepsilon k^2-\omega}{k}a_0 b_0$$
$$-2\;\frac{b_{-1}(\varepsilon k^2\;-\;\omega)}{k}\; b_1\,(\varepsilon k^2 +\;\omega)b_{-1}\;+\;ka_0^2\, b_{-1} - 2\omega\frac{b_{-1}(\,\varepsilon k^2\;-\;\omega)}{k}\; b_{-1}b_1$$
$$-\;\omega\, b_{-1}\frac{(\varepsilon k^2\;-\;\omega)}{k}\; b_0^2\;+\omega a_0 b_{-1}b_0\;-\;2\omega\, b_1\frac{\varepsilon k^2\;+\;\omega}{k}b_{-1}^2$$
$$= 0$$

$$4\varepsilon k(\,\varepsilon k^2-\omega)b_{-1}^2\, b_1 -\;\varepsilon k b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)b_0^2\;+\varepsilon k^2\, a_0 b_{-1}b_0 \tag{9}$$
$$+\;4\varepsilon k b_1\;\varepsilon k b_1(\varepsilon k^2+\omega)b_{-1}^2 - 2\frac{b_{-1}^2(\epsilon k^2-\omega)}{k}b_1$$
$$-\;kb_{-1}(\varepsilon k^2+\omega)a_0 b_0 - 2\frac{b_{-1}^2(\epsilon k^2-\omega)}{k}b_1(\epsilon k^2-\omega)$$
$$+\;ka_0^2 b_{-1} - 2\omega\frac{b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)}{k}b_{-1}b_1$$
$$-\;\omega\frac{b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega)}{k}b_0^2 + \omega a_0 b_{-1}b_0$$
$$-\;2\omega\frac{b_1(\varepsilon k^2-\omega)}{k}b_{-1}^2 = 0$$

$$b_{-1}\frac{(4\varepsilon^2 k^4\, b_{-1}b_1\;-\;\varepsilon^2 k^2\, b_0^2\;+\;k^2 a_0^2 + 2k\omega a_0 b_0 + \omega b_0^2}{k} = 0 \tag{10}$$

- Selanjutnya substitusikan a−1(8) dalam A3(4)

$$-3\varepsilon k^2\frac{b_{-1}(\,\varepsilon k^2\;-\;\omega)}{k}\; b_0 b_1\;+\;6\varepsilon k^2\, a_0 b_{-1}b_1 +\;+3\varepsilon k b_1\,(\varepsilon k^2\;+\;\omega)\, b_{-1}$$
$$-\;3k\, b_{-1}\frac{\varepsilon k^2\;-\;\omega}{k}\; a_0 b_1 - 3a_0 b_1(\varepsilon k^2+\omega)b_{-1}$$
$$-\;3\;\omega\frac{b_{-1}(\varepsilon k^2-\omega}{k}b_0 +\;2\omega\left(-\frac{b_1(\,\varepsilon k^2\;+\;\omega)}{k}\right)b_{-1} = 0$$
$$-3\varepsilon k b_{-1}\,(\varepsilon k^2\;-\;\omega)\, b_0 b_1\;+\;6\varepsilon k^2\, a_0 b_{-1}b_1\;+3\varepsilon k b_1(\,\varepsilon k^2\;+\;\omega)\, b_{-1}b_0$$
$$-\;3b_{-1}\,(\varepsilon k^2\;-\;\omega)\;\; a_0 b_1\;-3a_0 b_1(\,\varepsilon k^2\;+\;\omega)\, b_{-1}$$
$$-\;3\omega\, b_{-1}\frac{\varepsilon k^2\;-\;\omega}{k}\; b_0\;-\;3\omega\frac{b_1(\varepsilon k^2\;+\;\omega)}{k}b_{-1}b_0 = 0$$

$$-3b_{-1}b_0b_1\varepsilon^2 k^3 + 3\varepsilon k b_{-1}b_0b_1\omega + 6\varepsilon k^2 a_0b_{-1}b_1 + 3\varepsilon^2 k^3 b_1b_{-1}b_0 + 3\varepsilon k b_1b_{-1}b_0\omega - 3_{b-1}a_0b_1\varepsilon k^2 + 3\omega b_{-1}a_0b_1 - 3a_0b_1b_{-1}\varepsilon k^2 - 3\omega a_0b_1b_{-1} - \frac{(3\omega\varepsilon k^2 b_0b_1b_{-1} - 3\omega^2 b_0b_1b_{-1})}{k} - \left(\frac{(3\omega\varepsilon k^2 b_{-1}b_0b_1 + 3\omega^2 b_0b_1b_{-1})}{k}\right) = 0$$

$$-3b_{-1}b_0b_1\varepsilon^2 k^3 + 3\varepsilon^2 k^3 b_1b_{-1}b_0 + 3\varepsilon k b_{-1}b_0b_1\omega + 3\varepsilon k b_1b_{-1}b_0\omega + 6\varepsilon k^2 a_0b_{-1}b_1 - 3b_{-1}a_0b_1\varepsilon k_2 - 3a_0b_1b_{-1}\varepsilon k^2 + 3\omega b_{-1}a_0b_1 - 3\omega a_0b_1b_{-1} - \frac{(3\omega\varepsilon k^2 b_0b_1b_{-1} - 3\omega\varepsilon k^2 b_{-1}b_0b_1)}{k} - \frac{(3\omega^2 b_0b_1b_{-1} + 3\omega^2 b_0b_1b_{-1})}{k} = 0$$

$$0 = 0$$

- Selanjutnya substitusikan $a_{-1}(8)$ dalam $A_4(6)$

$$-4\varepsilon k^2 b_{-1}\frac{(\varepsilon k^2 - \omega)}{k} b_1^2 + \varepsilon k^2 a_0b_0b_1 + -\varepsilon k(\varepsilon k^2 + \omega) b_{-1}b_1^2 + \varepsilon k b_1 (\varepsilon k^2 + \omega) b_0^2 + 2\frac{b_{-1}(\varepsilon k^2 - \omega)}{k} b_1^2 (\varepsilon k^2 + \omega) - k a_0^2 b_1 - a_0b_1 (\varepsilon k^2 + \omega) b_0 + 2\frac{b_1^2 (\varepsilon k^2 + \omega)^2}{k} b_{-1} - 2\omega\frac{b_{-1} (\varepsilon k^2 - \omega)}{k} b_1^2 - \omega a_0b_0b_1 - 2\omega\left(\frac{(\varepsilon k^2 + \omega)}{k}\right) b_{-1}b_1^2 - \omega\left(\frac{b_1(\varepsilon k^2 + \omega)}{k}\right) b_0^2 = 0$$

$$-4\varepsilon k b_{-1}(\varepsilon k^2 - \omega)b_1^2 + \varepsilon k^2 a_0b_0b_1 + -\varepsilon k(\varepsilon k^2 + \omega)b_{-1}b_1^2 + \varepsilon k b_1(\varepsilon k^2 + \omega)b_0^2 + 2\frac{b_{-1}(\varepsilon k^2 - \omega)}{k}b_1^2(\varepsilon k^2 + \omega) - k a_0^2 b_1 - a_0b_1(\varepsilon k^2 + \omega)b_0 + 2\frac{b_1^2(\varepsilon k^2 + \omega)^2}{k}b_{-1} - 2\omega\frac{b_{-1}(\varepsilon k^2 - \omega)}{k}b_1^2 - \omega a_0b_0b_1 - 2\omega\left(\frac{(\varepsilon k^2 + \omega)}{k}\right)b_{-1}b_1^2 - \omega\left(\frac{b_1(\varepsilon k^2 + \omega)}{k}\right)b_0^2 = 0 \tag{11}$$

$$b_1\frac{(\varepsilon^2(-4b_{-1}b_1 + b_0^2)k^2 - k^2a_0^2 - 2\omega a_0b_0 - \omega^2 b_0^2)}{k} = 0 \tag{12}$$

- Selanjutnya mencari b_{-1} dari A_2 (9)

$$\frac{4\varepsilon^2k^4b_{-1}^2b_1 + b_{-1}(-\varepsilon^2k^2b_0^2 + k^2a_0^2 + 2k\omega a_0b_0 + \omega^2b_0^2)}{k} = 0$$

$$b_{-1_{(1)}} = \frac{-(-\varepsilon^2k^2b_0^2 + k^2a_0^2 + 2k\omega a_0b_0 + \omega^2b_0^2)}{2(4\varepsilon^2k^4b_1)} + \frac{\sqrt{(-\varepsilon^2k^2b_0^2 + k^2a_0^2 + 2k\omega a_0b_0 + \omega^2b_0^2)^2 - 4(4\varepsilon^2k^4b_1)}}{2(4\varepsilon^2k^4b_1)}$$

$$= \frac{-(-\varepsilon^2 k^2 b_0^2 + k^2 a_0^2 + 2k\omega a_0 b_0 + \omega^2 b_0^2)}{2(4\varepsilon^2 k^4 b_1)}$$
$$+ \frac{\sqrt{(-\varepsilon^2 k^2 b_0^2 + k^2 a_0^2 + 2k\omega a_0 b_0 + \omega^2 b_0^2)^2}}{2(4\varepsilon^2 k^4 b_1)}$$
$$= \frac{-(-\varepsilon^2 k^2 b_0^2 + k^2 a_0^2 + 2k\omega a_0 b_0 + \omega^2 b_0^2) - -\varepsilon^2 k^2 b_0^2 + k^2 a_0^2 + 2k\omega a_0 b_0 + \omega^2 b_0^2}{2(4\varepsilon^2 k^4 b_1)}$$
$$= 0$$

$$b_{-1_{(2)}} = \frac{-(-\varepsilon^2 k^2 b_0^2 + k^2 a_0^2 + 2k\omega a_0 b_0 + \omega^2 b_0^2)}{2(4\varepsilon^2 k^4 b_1)}$$
$$- \frac{\sqrt{(-\varepsilon^2 k^2 b_0^2 + k^2 a_0^2 + 2k\omega a_0 b_0 + \omega^2 b_0^2)^2 - 4(4\varepsilon^2 k^4 b_1)}}{2(4\varepsilon^2 k^4 b_1)}$$
$$= \frac{-(-\varepsilon^2 k^2 b_0^2 + k^2 a_0^2 + 2k\omega a_0 b_0 + \omega^2 b_0^2)}{2(4\varepsilon^2 k^4 b_1)}$$
$$+ \frac{\sqrt{(-\varepsilon^2 k^2 b_0^2 + k^2 a_0^2 + 2k\omega a_0 b_0 + \omega^2 b_0^2)^2}}{2(4\varepsilon^2 k^4 b_1)}$$
$$= \frac{-(-\varepsilon^2 k^2 b_0^2 + k^2 a_0^2 + 2k\omega a_0 b_0 + \omega^2 b_0^2) + (-\varepsilon^2 k^2 b_0^2 + k^2 a_0^2 + 2k\omega a_0 b_0 + \omega^2 b_0^2)}{2(4\varepsilon^2 k^4 b_1)}$$
$$= \frac{(2\varepsilon^2 k^2 b_0^2 - 2k^2 a_0^2 - 4k\omega a_0 b_0 - 2\omega^2 b_0^2)}{2(4\varepsilon^2 k^4 b_1)}$$
$$= \frac{2(\varepsilon^2 k^2 b_0^2 - k^2 a_0^2 - 2k\omega a_0 b_0 - \omega^2 b_0^2)}{2(4\varepsilon^2 k^4 b_1)}$$
$$= \frac{(\varepsilon^2 k^2 b_0^2 - k^2 a_0^2 - 2k\omega a_0 b_0 - \omega^2 b_0^2)}{(4\varepsilon^2 k^4 b_1)} \qquad (13)$$

- Selanjutnya substitusikan $b_{-1} = 0$ dalam A_4 (12)

$$b_1 \frac{\left(\varepsilon^2 \left(-4 \frac{(\varepsilon^2 k^2 b_0^2 - k^2 a_0^2 - 2k\omega a_0 b_0 - \omega^2 b_0^2)}{(4\varepsilon^2 k^4 b_1)} b_1 + b_0^2\right) k^2 - k^2 a_0^2 - 2\omega a_0 b_0 - \omega^2 b_0^2\right)}{k}$$
$$= 0$$
$$b_1 \left(-\frac{(\varepsilon^2 k^2 b_0^2 - k^2 a_0^2 - 2k\omega a_0 b_0 - \omega^2 b_0^2)}{(\varepsilon^2 k^5 b_1)} b_1 + b_0^2\right) k - k^2 a_0^2$$
$$- \frac{2\omega a_0 b_0}{k} - \frac{\omega^2 b_0^2}{k} = 0$$

- Selanjutnya substusi b_{-1}(13)dalam a_{-1} (8) menjadi, maka diperoleh a_{-1}yang baru yaitu

$$a_{-1} = \frac{\frac{(\varepsilon^2 k^2 b_0^2 - k^2 a_0^2 - 2k\omega a_0 b_0 - \omega^2 b_0^2)}{(4\varepsilon^2 k^4 b_1)} (\varepsilon k^2 - \omega)}{k}$$
$$= \frac{(\varepsilon^2 k^2 b_0^2 - k^2 a_0^2 - 2k\omega a_0 b_0 - \omega^2 b_0^2)(\varepsilon k^2 - \omega)}{(4\varepsilon^2 5 b_1)}$$

Sehingga jika nilai parameter yang sudah diperoleh di ataas dituliskan kembali

$$a_{-1} = \frac{1}{4}\frac{(\varepsilon^2 k^2 b_0^2 - k^2 a_0^2 - 2k\omega a_0 b_0 - \omega^2 b_0^2)(\varepsilon k^2 - \omega)}{\varepsilon^2 k^5 b_1}$$

$$a_1 = -\frac{b_1(\varepsilon k^2 + \omega)}{k}$$

$$b_{-1} = \frac{1}{4}\frac{(\varepsilon^2 k^2 b_0^2 - k^2 a_0^2 - 2k\omega a_0 b_0 - \omega^2 b_0^2)}{\varepsilon^2 k^4 b_1}$$

$$a_0 = a_0$$

$$b_0 = b_0$$

$$b_1 = b_1$$

RIWAYAT HIDUP

Evi Nor Laili Solikh Amin, lahir di Kediri pada tanggal 14 April 1997, biasa dipanggil Evi. Putri sulung dari dua bersaudara, kakak dari Ahmad Badrus Sholeh Amin.

Pendidikan formal berawal dari TK Dharma Wanita Kediri, kemudian pendidikan dasarnya ditempuh di SD Negeri Cerme 1 dan lulus pada tahun 2009, setelah itu melanjutkan ke SMP Negeri 1 Grogol dan lulus pada tahun 2012. Selanjutnya menempuh pendidikan menengah atas di SMA Negeri 1 Grogol Kediri dan lulus pada tahun 2015. Saat tahun yang sama dia melanjutkan studi dengan mengambil Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama menjadi mahasiswa telah mengikuti penelitian Kompetitif Riset Mahasiswa (PKRM) tahun 2018. Selain itu dia juga asisten laboratorium dan aktif dalam UKM LKP2M.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Evi Nor Laili Solikh Amin
NIM : 15610010
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Penerapan Metode Fungsi Eksponensial (MFE) pada Penyelesaian Persamaan Burgers Satu Dimensi
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	26 November 2018	Revisi Bab I	1.
2.	30 November 2018	Konsultasi Agama Bab I	2.
3.	15 Februari 2019	Konsultasi Bab II	3.
4.	01 Maret 2019	ACC Bab I & Bab II	4.
5.	15 Maret 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	5.
6.	04 April 2019	Konsultasi Bab III	6.
7.	09 April 2019	Konsultasi Bab IV & Abstrak	7.
8.	18 April 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	8.
9.	06 Mei 2019	ACC Bab III, IV & Abstrak	9.
10.	06 Mei 2019	ACC Kajian Keagamaan	10.
11.	09 Mei 2019	ACC Keseluruhan	11.
12.	09 Mei 2019	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 09 Mei 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001