KETERBATASAN PERUMUMAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL PADA RUANG MORREY YANG DIPERUMUM

SKRIPSI

OLEH
FARIDA NURUL ‘AINI
NIM. 15610008

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

KETERBATASAN PERUMUMAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL PADA RUANG MORREY YANG DIPERUMUM

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Farida Nurul 'Aini
NIM. 15610008

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

KETERBATASAN PERUMUMAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL PADA RUANG MORREY YANG DIPERUMUM

SKRIPSI

Oleh
Farida Nurul 'Aini
NIM. 15610008

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 3 Mei 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si.	Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19730705 200003 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si.
NIP. 19650414 200312 1 001

KETERBATASAN PERUMUMAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL PADA RUANG MORREY YANG DIPERUMUM

SKRIPSI

Oleh
Farida Nurul 'Aini
NIM. 15610008

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 29 Mei 2019

Penguji Utama	: Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc	....
Ketua Penguji	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji	: Ach. Nashichuddin, M.A	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Farida Nurul 'Aini

NIM : 15610008

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey yang Diperumum

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 3 Mei 2019
Yang membuat pernyataan

METERAI TEMPEL
6000

Farida Nurul 'Aini
NIM. 15610008

MOTO

“Lakukan semuanya hanya karena Allah, maka segala hal akan menjadi indah”

أَلَا بِذِكْرِ ٱللَّهِ تَطْمَئِنُّ ٱلْقُلُوبُ

“hanya dengan mengingat Allah-lah hati menjadi tenteram.”

PERSEMBAHAN

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَـٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Ayahanda Mustakim dan Ibunda Marfuah tercinta,

yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, semangat,

dan kasih sayang yang tak ternilai, serta adik tersayang Khoyruna Nurunnisak

yang selalu menjadi kebanggaan bagi penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt yang selalu melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey yang Diperumum" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw yang telah menuntun manusia dari jalan kegelapan menuju ke jalan yang terang benderang yaitu ad-Din al-Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan pengalaman berharga kepada penulis.

5. Ach. Nashichuddin, MA, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
6. Ari Kusumastuti, M.Pd, M.Si, selaku dosen wali yang selalu memberikan motivasi dan arahan kepada penulis.
7. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen yang telah memberikan bimbingan dalam proses perkuliahan.
8. Bapak dan Ibu serta adik tercinta yang selalu memberikan do'a, semangat dan motivasi demi keberhasilan penulis.
9. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materil maupun moril.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Selain itu, penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya. *Aamiin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 3 Mei 2019

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

ABSTRAK

Nurul 'Aini, Farida. 2019. **Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey yang Diperumum**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, MA.

Kata kunci: keterbatasan, perumuman operator integral fraksional, ruang Morrey yang diperumum.

Perumuman operator integral fraksional merupakan bentuk pengembangan operator integral fraksional jika $\rho(t) = t^{\alpha}$ dimana $0 < \alpha < n$ sehingga $I_{\rho} = I_{\alpha}$. Salah satu ahli matematika, Eridani telah membuktikan keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada ruang Morrey yang diperumum. Ruang Morrey yang diperumum merupakan bentuk perluasan dari ruang Morrey dan ruang Lebesgue. Perumuman operator integral fraksional dikatakan terbatas jika terdapat $C > 1$ sedemikian sehingga $\|Tx: Y\| \leq C\|x: X\|$ untuk setiap $x \in X$. Pada penelitian ini, pembuktian bahwa operator dikatakan terbatas menggunakan ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev dengan memanfaatkan fungsi maksimal operator dan ketaksamaan Holder.

Tujuan penelitian ini adalah menentukan keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada ruang Morrey yang diperumum, kemudian diperoleh suatu teorema yang menyatakan bahwa operator I_{ρ} terbatas dari $L^{p,\phi}$ ke $L^{q,\phi^{p/q}}$ dan I_{ρ} juga terbatas dari $L^{p,\phi}$ ke $L^{q,\psi}$. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan *(library research)*. Hasil penelitian ini adalah:

Keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada ruang Morrey yang diperumum terbatas pada

1. $L^{p,\phi}$ ke $L^{q,\phi^{\frac{p}{q}}}$
2. $L^{p,\phi}$ ke $L^{q,\psi}$.

Pada penelitian selanjutnya, disarankan untuk melakukan pembuktian keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada ruang yang lain.

ABSTRACT

Nurul 'Aini, Farida. 2019. **The Boundedness of Generalized Fractional Integral Operator on Generalized Morrey Spaces**. Thesis. Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, MA.

Keywords: the boundedness, generalized fractional operator integral, generalized Morrey spaces.

Generalized fractional integral operator is a form of development of fractional integral operator if $\rho(t) = t^{\alpha}$ where $0 < \alpha < n$ so that $I_\rho = I_\alpha$. Eridani had proven the boundedness of generalized fractional operator on generalized Morrey spaces. Generalized Morrey spaces is a form of expansion of the Morrey spaces and Lebesgue spaces. Generalized fractional operator is said to be bounded if $C > 1$ such that $\|Tx: Y\| \leq C\|x: X\|$ for $x \in X$. For this research, the proof that the operator is said to be bounded used Hardy-Littlewood-Sobolev inequality by utilizing the maximum operator function and Holder inequality.

The purpose of this research is to determine the boundedness of generalized fractional integral on generalized Morrey spaces, then obtain a theorem which states that the operator I_ρ is bounded from $L^{p,\phi}$ to $L^{q,\phi^{p/q}}$ and I_ρ are also bounded from $L^{p,\phi}$ to $L^{q,\psi}$. The methods used in this research is library research. The result of this research are:

The boundedness of generalized fractional integral on generalized Morrey spaces is bounded from

1. $L^{p,\phi}$ ke $L^{q,\phi^{\frac{p}{q}}}$
2. $L^{p,\phi}$ ke $L^{q,\psi}$.

For the next research, the researcher suggests to prove the boundedness of generalized fractional integral operator on other spaces.

ملخص

نورالعين، فريدة. ٢٠١٩. **القيود المفروضة على تعميم عن مشغلي متكامل كسري في فضأات موري المعمم.** بحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف الأولى :خير الرحمن، الماجستير ومشرف الثاني احمد ناصح الدين، الماجستير.

الكليمات الرئيسية: القيود، تعميم عن مشغلي متكامل كسري، فضأات موري المعمم.

المفروضة على تعميم عن مشغلي متكامل كسري هو شكل من أشكال تطوير مشغلي متكامل كسري إذا كانت $\rho(t) = t^{\alpha}$ حيث $0 < \alpha < n$ حيث $I_{\rho} = I_{\alpha}$. إريداني القيود المفروضة على تعميم عن مشغلي متكامل كسري في فضأات موري المعمم. فضأات موري المعمم هي شكل من أشكال توسيع فضأات موري المعمم و فضأات لبيسغوى. يقال أن تعميم عن مشغلي متكامل كسري محدود إذا كان $C > 1$ بحيث $\|Tx:Y\| \leq C\|x:X\|$ لكل $x \in X$. تثبت هذه الدراسة أن المشغل يقتصر على متباينات هاردي ليتلوود سوبوليف باستخدام دالة المشغل الاقص ومتباينات هولدير.

أهداف من هذا البحث هو تحديد القيود تعميم عن مشغلي متكامل كسري في فضأات موري المعمم. ثم الحصول على أن مشغلي I_{ρ} المحدودين من $L^{p,\phi}$ إلى $L^{q,\phi^{\frac{p}{q}}}$ و I_{ρ} المحدودين من $L^{p,\phi}$ إلى $L^{q,\psi}$. المنهج المستخدم في هذا البحث هي (بحث المكتبي). ونتائج هذا البحث هي:

يقيود تعميم عن مشغلي متكامل كسري في فضأات موري المعمم

١. $L^{p,\phi}$ إلى $L^{q,\phi^{\frac{p}{q}}}$

٢. $L^{p,\phi}$ إلى $L^{q,\psi}$

للباحث الأتي على الاحسن في مجال المختلف يعني تعميم عن مشغلي متكامل كسري من فضأات الاخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu operator yang menjadi bahan penelitian pada perkembangan analisis modern adalah operator integral fraksional. Operator ini diperkenalkan pertama kali oleh Marcel Riesz pada tahun 1886. Misalkan f fungsi bernilai real pada $\mathbb{R}^n$, untuk $0 < \alpha < n$ dan $x \in \mathbb{R}^n$, operator I_α yang memetakan fungsi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ke $I_\alpha f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

sering dikenal dengan sebutan operator integral fraksional (Gunawan, 2003).

Operator integral fraksional pertama kali dipelajari oleh G.H Hardy dan J.E Littlewood pada tahun 1928. Mereka berhasil membuktikan keterbatasan operator integral fraksional I_α di ruang Lebesgue $L^p(\mu)$ ke $L^q(\mu)$ dengan $0 < \alpha < n$ dan $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ dengan menggunakan operator maksimal yang dikenal sebagai ketaksamaan Hardy-Littlewood. Kemudian pada tahun 1930, seorang ahli matematika yang bernama Sergei Sobolev menyempurnakan keterbatasan operator I_α pada ruang Lebesgue dengan menggunakan operator maksimal yang dikenal dengan sebutan ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev.

Tahun 1938, C.B. Morrey yang juga merupakan seorang ahli matematika memperkenalkan salah satu ruang yang disebut dengan ruang Morrey. Ruang Morrey merupakan perluasan dari ruang Lebesgue. Selanjutnya pada tahun 1970, Spanne (dalam (Peetre, 1969)) memperluas ketaksamaan Hardy-Littlewood-

Sobolev dari ruang Lebesgue ke ruang Morrey. Kemudian (Adams, 1975) memperkuat hasil yang telah mereka buktikan dan juga disempurnakan oleh (Chiarenza dan Frasca, 1987).

E. Nakai berhasil memperumum ketaksamaan tersebut ke ruang Morrey diperumum. Selanjutnya pada tahun 2001, Nakai mempelajari keterbatasan perumuman operator integral fraksional (I_ρ) yang memetakan $f \to I_\rho f$ dari fungsi $\rho: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dan sebarang f dengan

$$I_\rho f(x) := \int_X f(y) \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

di ruang Morrey diperumum. Salah satu hasil penting yang diperoleh adalah keterbatasan operator tersebut pada ruang Morrey diperumum dengan ρ memenuhi kondisi *doubling*. Gunawan dkk juga telah membahas syarat perlu dan cukup keterbatasan operator tersebut pada ruang Morrey diperumum dengan ρ memenuhi kondisi *doubling*. Kemudian, Eridani dkk mengganti ρ dari kondisi *doubling* menjadi kondisi *growth* dengan tetap mempertahankan keterbatasan operator I_ρ pada ruang Morrey diperumum (Eridani, 2014).

Di dalam operator integral fraksional tersebut terdapat permasalahan yang diteliti yaitu mengenai keterbatasan. Permasalahan yang mencakup keterbatasan operator integral fraksional terus mengalami perkembangan. Perkembangan tersebut selalu bertambah dari zaman ke zaman. Allah berfirman di dalam al-Quran surat al-‘Alaq ayat 1 yang berbunyi:

اِقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِى خَلَقَ ۝١

“Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang Menciptakan.” (Q.S al-‘Alaq/96:1)

Kata (اقرأ) *iqra'* diambil dari kata kerja (قرأ) *qara'a* yang berarti menghimpun. Makna lainnya adalah menyampaikan, menelaah, membaca, mendalami, meneliti, mengetahui ciri-ciri sesuatu dan sebagainya, yang kesemuanya bermuara pada arti menghimpun. Dan kata (ربّ) *rabb* seakar dengan kata (تربية) *tarbiyah/pendidikan*. Kata ini memiliki arti yang berbeda-beda namun pada akhirnya arti-arti tersebut mengacu kepada pengembangan, peningkatan, ketinggian, kelebihan serta perbaikan (Shihab, 2002).

Seiring dengan adanya ilmu pengetahuan yang sudah ada, maka sangat tepat bagi manusia untuk terus berpikir atau mengembangkan ilmu pengetahuan yang ada secara lebih luas. Sehingga dapat menambah dan menemukan pengetahuan-pengetahuan yang lebih beraneka macam dan menarik serta meningkatkan keterampilan. Sama halnya dengan keterbatasan operator integral fraksional yang terus dilakukan pengembangan untuk mendapatkan penemuan-penemuan baru sehingga dapat digunakan dalam kehidupan sehari-hari.

Keterbatasan suatu operator merupakan sifat yang membawa kepada kondisi yang menarik untuk diteliti sehingga sangat diharapkan kondisi tersebut terpenuhi. Misalnya penerapan pada persamaan integral atau persamaan diferensial, keterbatasan suatu operator berperan memberikan pemahaman mengenai fenomena fisis tertentu. Selain itu pada bidang komputasi, pengerjaan komputasi akan jauh lebih mudah ketika bekerja dengan suatu operator yang terbatas.

Berdasarkan paparan di atas, penulis akan membuktikan bahwa operator I_ρ pada ruang Morrey yang diperumum terbatas dari $L^{p,\phi}(\mu)$ ke $L^{q,\phi^{p/q}}(\mu)$. Dan operator I_ρ juga terbatas dari $L^{p,\phi}(\mu)$ ke $L^{q,\psi}(\mu)$ dengan ρ memenuhi kondisi growth yaitu $\mu(B(x,r)) \leq Cr^s$ di mana $s = \frac{pq(n-\alpha)}{pq+p-q}$. Kajian mengenai keterbatasan operator dan pengembangan hasil-hasil penelitian tersebut banyak merujuk pada jurnal ataupun artikel. Sehingga penulis ingin mengkaji lagi dengan melengkapi bukti-bukti yang belum banyak menjelaskan tentang hal tersebut secara detail. Oleh karena itu, penulis merumuskan judul "Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional Pada Ruang Morrey yang Diperumum".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana keterbatasan operator I_ρ di ruang Morrey yang diperumum terbatas dari $L^{p,\phi}(\mu)$ ke $L^{q,\phi^{p/q}}(\mu)$?
2. Bagaimana keterbatasan operator I_ρ di ruang Morrey yang diperumum terbatas dari $L^{p,\phi}(\mu)$ ke $L^{q,\psi}(\mu)$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui keterbatasan operator I_ρ di ruang Morrey yang diperumum terbatas dari $L^{p,\phi}(\mu)$ ke $L^{q,\phi^{p/q}}(\mu)$.
2. Mengetahui keterbatasan operator I_ρ di ruang Morrey yang diperumum terbatas dari $L^{p,\phi}(\mu)$ ke $L^{q,\psi}(\mu)$.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Dengan mengetahui keterbatasan operator I_ρ di ruang Morrey yang diperumum untuk $L^{p,\phi}(\mu)$ ke $L^{q,\phi^{p/q}}(\mu)$, maka dapat dianalisis terbatas atau tidaknya operator I_ρ dari $L^{p,\phi}(\mu)$ ke $L^{q,\phi^{p/q}}(\mu)$.
2. Dengan mengetahui keterbatasan operator I_ρ di ruang Morrey yang diperumum untuk $L^{p,\phi}(\mu)$ ke $L^{q,\psi}(\mu)$, maka dapat dianalisis terbatas atau tidaknya operator I_ρ dari $L^{p,\phi}(\mu)$ ke $L^{q,\psi}(\mu)$.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini akan dibuktikan keterbatasan operator I_ρ di ruang Morrey yang diperumum sehingga tidak akan membuktikan atau membahas hasil-hasil yang serupa pada ruang lainnya.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*library research*). Metode ini dilakukan dengan mengumpulkan informasi atau rujukan yang berasal dari buku, jurnal dan sumber lainnya yang berkaitan dengan teori yang dibahas. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membuktikan keterbatasan dari perumuman operator integral fraksional pada ruang Morrey yang diperumum untuk operator I_ρ terbatas dari $L^{p,\phi}(\mu)$ ke

$L^{q,\phi^{p/q}}(\mu)$ melalui teorema Hardy-Littlewood-Sobolev dan memanfaatkan ketaksamaan Holder serta fungsi maksimal Hardy-Littlewood.

2. Membuktikan keterbatasan dari perumuman operator integral fraksional pada ruang Morrey yang diperumum untuk operator I_ρ terbatas dari $L^{p,\phi}(\mu)$ ke $L^{q,\psi}(\mu)$ melalui teorema Hardy-Littlewood-Sobolev dan memanfaatkan ketaksamaan Holder serta fungsi maksimal Hardy-Littlewood.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan digunakan untuk mempermudah dalam memahami penelitian ini. Dalam sistematika penulisan penelitian ini terbagi menjadi empat bab dan masing-masing bab dibagi dalam subbab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini terdiri dari teori-teori yang digunakan untuk mendukung pembahasan dan menjawab rumusan masalah. Kajian Pustaka dalam penelitian ini meliputi: integral Lebesgue, integral fraksional, keterbatasan operator, operator integral fraksional, perumuman operator integral fraksional, ruang Morrey yang diperumum, dan operator maksimal Hardy-Littlewood serta kajian agama.

Bab III Pembahasan

Bab ini menguraikan secara keseluruhan langkah-langkah yang disebutkan dalam metode penelitian dan menjawab semua rumusan masalah. Pembahasan dalam penelitian ini meliputi: keterbatasan operator integral fraksional pada ruang Morrey yang diperumum dan kajian agama.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Integral Lebesgue

Definisi 2.1 Integral Lebesgue

Misalkan f adalah fungsi sederhana dan terukur dengan representasi standar $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, $E_i = \{x \in X | f(x) = \alpha_i\}$ saling asing dan terukur. Bilangan $\alpha_i \in \mathbb{R}$ dan χ_{E_i} adalah fungsi karakteristik pada $E_i \in X$. Asumsikan bahwa E berukuran berhingga, maka integral Lebesgue dari f didefinisikan dengan

$$\int f(x) d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i).$$

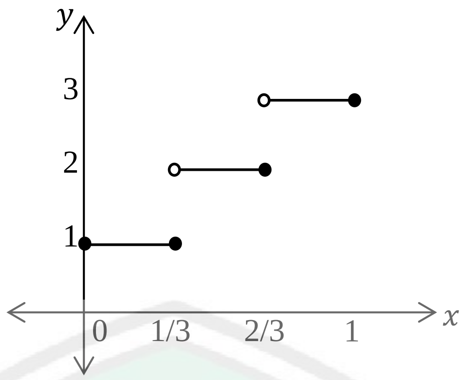
Selanjutnya integral Lebesgue dari f dapat ditulis $\int f$. Jika E himpunan terukur, maka $\int_B f = \int f \chi_B$ (Bartle, 1995:28).

Contoh:

Fungsi $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ didefinisikan dengan

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika} \quad x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ 2 & \text{jika} \quad x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ 3 & \text{jika} \quad x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

Hitunglah nilai dari $\int_{[0,1]} f(x) dx$!



Penyelesaian:

Interval [0,1] dibagi menjadi $\left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right] \cup \left(\frac{2}{3},1\right]$.

$\mu\left(\left[0,\frac{1}{3}\right]\right) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

$\mu\left(\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\mu\left(\left(\frac{2}{3},1\right]\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\int_{[0,1]} f(x)dx = \left(1 \times \frac{1}{3}\right) + \left(2 \times \frac{1}{3}\right) + \left(3 \times \frac{1}{3}\right)$

$= 2$

Jadi, nilai dari $\int_{[0,1]} f(x)dx = 2$.

Lemma 2.1 Ketaksamaan Holder

Jika $p, q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dan $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2, \dots, n$, maka

$$\left|\sum x_i y_i\right| \leq \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

dimana $|x|$ adalah norma euclid untuk $\mathbb{R}$.

Bukti:

Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \geq 0$. Substitusikan $a^{1/\alpha}$ dan $b^{1/\beta}$ pada a dan b di $a^{\alpha} b^{\beta} \leq \alpha a + \beta b$, dengan $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$, sehingga diperoleh

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

untuk $a_i = \frac{x_i}{(\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}}$, $b_i = \frac{y_i}{(\sum |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}}$ dan dengan memanfaatkan ketaksamaan Minkowski, maka diperoleh

$$\left|\sum a_i b_i\right| \leq \sum |a_i b_i| \leq \sum \left(\frac{|a_i|^p}{p} + \frac{|b_i|^q}{q}\right) = \frac{1}{p}\left(\sum |a_i|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{q}\left(\sum |b_i|_q^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

sehingga

$$\frac{|\sum x_i y_i|}{(\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

atau dapat disimpulkan bahwa

$$\left|\sum x_i y_i\right| \leq \left(\sum |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

terbukti (Muscat, 2014:151).

Lemma 2.2 Ketaksamaan Holder untuk $\mathbb{R}^2$

Jika $p, q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dan $x_i, y_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, \dots, n$, maka

$$\left\|\sum x_i y_i\right\|_{\mathbb{R}^2} \leq \left(\sum \|x_i\|_{\mathbb{R}^2}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum \|y_i\|_{\mathbb{R}^2}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

dimana $\|x\|_{\mathbb{R}^2}$ adalah norma euclid untuk $\mathbb{R}$ berdimensi 2 ($\mathbb{R}^2$) yang didefinisikan sebagai

$$\|x\|_{\mathbb{R}^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Bukti:

Misalkan $a, b \in \mathbb{R}^2$, $\alpha, \beta \geq 0$. Substitusikan $a^{1/\alpha}$ dan $b^{1/\beta}$ pada a dan b di $a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$, dengan $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$, sehingga diperoleh

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

untuk $a_i = \frac{x_i}{(\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}}$, $b_i = \frac{y_i}{(\sum |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}}$ dan dengan memanfaatkan ketaksamaan Minkowski, maka diperoleh

$$\left\| \sum a_i b_i \right\|_{\mathbb{R}^2} \leq \sum \|a_i b_i\|_{\mathbb{R}^2} \leq \sum \left(\frac{\|a_i\|_{\mathbb{R}^2}^p}{p} + \frac{|b_i|_{\mathbb{R}^2}^q}{q} \right)$$

$$= \frac{1}{p} \left(\sum \|a_i\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{q} \left(\sum \|b_i\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

sehingga

$$\frac{\|\sum x_i y_i\|_{\mathbb{R}^2}}{(\sum \|x_i\|_{\mathbb{R}^2}^p)^{\frac{1}{p}} (\sum \|y_i\|_{\mathbb{R}^2}^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

atau dapat disimpulkan bahwa

$$\left\| \sum x_i y_i \right\|_{\mathbb{R}^2} \leq \left(\sum \|x_i\|_{\mathbb{R}^2}^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum \|y_i\|_{\mathbb{R}^2}^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

terbukti (Muscat, 2014:152).

Lemma 2.2 Ketaksamaan Holder untuk $\mathbb{R}^n$

Jika $p, q \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dan $x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1,2, \dots, n$, maka

$$\left\| \sum x_i y_i \right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \left(\sum \|x_i\|_{\mathbb{R}^n}^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum \|y_i\|_{\mathbb{R}^n}^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

dimana $\|x\|_{\mathbb{R}^n}$ adalah norma euclid untuk $\mathbb{R}$ berdimensi n ($\mathbb{R}^n$) yang didefinisikan sebagai

$$\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^n}$$

Bukti:

Misalkan $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \geq 0$. Substitusikan $a^{1/\alpha}$ dan $b^{1/\beta}$ pada a dan b di $a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b$, dengan $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$, sehingga diperoleh

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

untuk $a_i = \frac{x_i}{(\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}}$, $b_i = \frac{y_i}{(\sum |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}}$ dan dengan memanfaatkan ketaksamaan Minkowski, maka diperoleh

$$\left\|\sum a_i b_i\right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \sum \|a_i b_i\|_{\mathbb{R}^n} \leq \sum \left(\frac{\|a_i\|_{\mathbb{R}^n}^p}{p} + \frac{|b_i|_{\mathbb{R}^n}^q}{q}\right)$$

$$= \frac{1}{p}\left(\sum \|a_i\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{q}\left(\sum \|a_i\|_q^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

sehingga

$$\frac{\|\sum x_i y_i\|_{\mathbb{R}^n}}{\left(\sum \|x_i\|_{\mathbb{R}^n}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum \|y_i\|_{\mathbb{R}^n}^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

atau dapat disimpulkan bahwa

$$\left\|\sum x_i y_i\right\|_{\mathbb{R}^n} \leq \left(\sum \|x_i\|_{\mathbb{R}^n}^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum \|y_i\|_{\mathbb{R}^n}^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

terbukti (Muscat, 2014:152).

Contoh:

Diberikan $x_i = 2^{-i}$, $y_i = 2^i$, $p = 2$, dan $N = 10$.

Akan dibuktikan bahwa $|\sum x_i y_i| \leq (\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$.

Penyelesaian:

- Untuk $x_i = 2^{-i}$, $p = 2$, dan $N = 10$

 Maka,

$$\left(\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{N}|2^{-i}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{N}(2^{-i})^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{N} 2^{-ip}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N}(2^p)^{-i}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2^p}\right)^i\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2^p}\right)\left(\frac{1}{2^p}\right)^{i-1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

 Berdasarkan deret geometri, maka diperoleh

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2^p}\right)\left(\frac{1}{2^p}\right)^{i-1}\right)^{\frac{1}{p}} = \left[\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2^p}\right)^N}{1-\left(\frac{1}{2^p}\right)}\right)\left(\frac{1}{2^p}\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{0{,}99}{0{,}75}\right)(0{,}25)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{0{,}33}$$

- Untuk $y_i = 2^i$, $p = 2$, dan $N = 10$

 Karena $p = 2$, maka $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow q = 2$

 sehingga,

$$\left(\sum_{i=1}^{N}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{N}|2^i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} (2^i)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} 2^{iq} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} (2^q)^i \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N} (2^q)(2^q)^{i-1} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Berdasarkan deret geometri, maka diperoleh

$$\left(\sum_{i=1}^{N} (2^q)(2^q)^{i-1} \right)^{\frac{1}{q}} = \left[\left(\frac{1-(2^q)^N}{1-(2^q)} \right) (2^q) \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left[\left(\frac{1-(4)^{10}}{1-(4)} \right) (4) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{-1048575}{-3} \right) (4) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{1398100}$$

- Untuk $|\sum x_i y_i|$

$$\left| \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{N} (2^{-i})(2^i) \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{N} 2^{-i+i} \right| = \left| \sum_{i=1}^{N} 2^0 \right| = \left| \sum_{i=1}^{N} 1 \right| = 1$$

sehingga diperoleh

$$\left(\sum\left|2^{-i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\left|2^{i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{0{,}33}\right)\left(\sqrt{1398100}\right)$$

$$= 679{,}24 \geq 1 = \left|\sum_{i=1}^{N}\left(2^{-i}\right)\left(2^{i}\right)\right|$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\left(2^{-i}\right)\left(2^{i}\right)\right| \leq \left(\sum\left|2^{-i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\left|2^{i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

terbukti.

Akibat 2.1 Ketaksamaan Holder

Jika $1 < p < \infty$ maka untuk setiap $f \in L^p(X,\mu)$ dan $g \in L^q(X,\mu)$ dengan $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, maka

$$\left|\int_X fg\, d\mu\right| \leq \int_X |fg|\, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

dengan

$$\|f\|_p = \left\{\int_X |f|^p d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} \text{ dan } \|g\|_q = \left\{\int_X |g|^q d\mu\right\}^{\frac{1}{q}}$$

Bukti:

Jelas bahwa setiap $f \in L^p(X,\mu)$ dan $g \in L^q(X,\mu)$, bilangan $\|f\|_p$ dan $\|g\|_q$ merupakan dua bilangan real.

Karena $f \in L^p(X,\mu)$ dan $g \in L^q(X,\mu)$, dengan $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ dan $1 < p < \infty$ dengan memanfaatkan Lemma Young, maka diperoleh

$$\frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q}\int_X |fg|\,d\mu = \int_X \frac{|f|}{\|f\|_p}\cdot\frac{|g|}{\|g\|_q}\,d\mu \leq \int_X \left\{\frac{1}{p}\cdot\frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}\right\} d\mu$$

$$= \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{\|f\|_p^p}\int_X |f|^p\,d\mu + \frac{1}{q}\cdot\frac{1}{\|g\|_q^q}\int_X |g|^q\,d\mu$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa

$$\int_X |fg|\,d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

terbukti (Darmawijaya, 2007:239).

Contoh (Nelson, 2015:120):

1. Misalkan $X = [0,1]$, μ adalah ukuran pada X dan $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

   Buktikan bahwa $f(x) \in L^3(X,\mu)$!

   Bukti:

   Karena $f(x) \in L^3[0,1]$ akan dibuktikan bahwa $\|f\|_3 < \infty$ artinya $\left(\int_0^1 |f(x)|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} < \infty$, sedemikian sehingga

$$\left(\int_0^1 |f(x)|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\int_0^1 |x^2|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\int_0^1 |x^6| dx\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\int_0^1 x^6 dx\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\frac{1}{7}x^7|_0^1\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{7}} < \infty$$

Jadi, karena $\left(\int_0^1 |f(x)|^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{7}} < \infty$ maka terbukti bahwa $f(x) \in L^3[0,1]$.

2.2 Integral Fraksional

Integral fraksional memiliki beberapa versi modern, antara lain versi Riemann, versi Liouville, versi Riemann-Liouville, dan versi Weyl. Dari berbagai versi yang ada, secara umum perbedaannya terdapat pada batas pengintegralan pada setiap versi. Definisi ini diturunkan dari berbagai cara sehingga terdapat versi-versi yang berbeda (Himah, 2017).

Definisi 2.2 Integral Fraksional

Misalkan $\varphi(x) \in (a, b)$, integral

$$I_{a^+}^{\alpha}\varphi(x) \coloneqq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(x)}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \qquad x > a$$

$$I_{b^-}^{\alpha}\varphi(x) \coloneqq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(x)}{(\tau-x)^{1-\alpha}} d\tau \qquad b < x$$

dimana $\alpha > 0$, maka kedua persamaan di atas disebut integral fraksional dari orde α. Biasanya juga disebut integral fraksional kiri dan kanan secara berturut-turut. Nama untuk integral di atas disebut integral fraksional Riemann-Liouville (Samko, 1983:33).

Contoh:

Misalkan $\varphi(x) = \tau^{\lambda}$ dimana $\lambda > -1$ dengan $a = 0$, maka integral fraksional kiri dari $\varphi(x)$ adalah sebagai berikut:

$$I_{0^+}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(x)}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\tau^\lambda}{(x-\tau)^{1-\alpha}} d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\tau^\lambda}{\left(x\left(1-\frac{\tau}{x}\right)\right)^{1-\alpha}} d\tau$$

$$= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\tau^\lambda}{\left(1-\frac{\tau}{x}\right)^{1-\alpha}} d\tau$$

$$= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\tau^\lambda}{\left(1-\frac{\tau}{x}\right)^{1-\alpha}} d\tau$$

$$= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{1}{x} \frac{\tau^\lambda}{\left(1-\frac{\tau}{x}\right)^{1-\alpha}} d\tau$$

Misalkan $z = \frac{\tau}{x}$ dan $dz = \frac{1}{x} d\tau$

$$I_{0^+}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{1}{x} \frac{\tau^\lambda}{\left(1-\frac{\tau}{x}\right)^{1-\alpha}} d\tau$$

$$= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\tau^\lambda}{(1-z)^{1-\alpha}} dz$$

$$= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{x^\lambda \left(\frac{\tau}{x}\right)^\lambda}{(1-z)^{1-\alpha}} dz$$

$$= \frac{x^{\alpha}x^{\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{z^\lambda}{(1-z)^{1-\alpha}} dz$$

$$= \frac{x^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (1-z)^{\alpha-1} z^\lambda \, dz$$

Selanjutnya dengan menggunakan fungsi beta, maka persamaan di atas dapat diubah menjadi seperti berikut:

$$I_{0^+}^{\alpha}\varphi(x) = \frac{x^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (1-z)^{\alpha-1} z^\lambda \, dz$$

$$= \frac{x^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (1-z)^{\alpha-1} z^{(\lambda+1)-1}\, dz$$

$$= \frac{x^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)} x^{\alpha+\lambda}$$

Jadi, integral fraksional kiri dari fungsi $\varphi(x)$ adalah $\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)} x^{\alpha+\lambda}$.

2.3 Keterbatasan Operator

Operator merupakan suatu pemetaan dari ruang bernorma yang satu ke ruang bernorma yang lain. Misalkan X dan Y adalah ruang bernorma, suatu operator T dari ruang X ke ruang Y dikatakan terbatas jika terdapat $C > 1$ sedemikian sehingga

$$\|Tx: Y\| \leq C\|x: X\| \text{ untuk setiap } x \in X,$$

dengan $\|x: X\|$ adalah notasi dari norma x di ruang X. Dengan demikian, operator T dikatakan terbatas di ruang X, jika T terbatas dari ruang X ke ruang X (Nainggolan, 2015).

2.4 Operator Integral Fraksional

Definisi 2.3 Operator Integral Fraksional

Misalkan f fungsi bernilai real pada $\mathbb{R}^n$, untuk $0 < \alpha < n$ dan $x \in \mathbb{R}^n$, operator I_α yang memetakan fungsi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ke $I_\alpha f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy$$

sering dikenal dengan sebutan operator integral fraksional (Gunawan, 2003).

Ditunjukkan dengan bola $B \coloneqq B(x,r) \coloneqq \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$ dengan pusat x dan jari-jari $r > 0$, dan $|B(x,r)|$ ukuran Lebesgue, yaitu $|B(x,r)| = \omega_n r^n$ dimana ω_n adalah volume dari suatu bola di $\mathbb{R}^n$.

2.5 Perumuman Operator Integral Fraksional

Misalkan $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$. Suatu fungsi $\rho: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dan sebarang f, perumuman potensial Riesz yang memetakan $f \to I_\rho f$ didefinisikan dengan

$$I_\rho f(x) := \int_X f(y) \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y).$$

Operator I_ρ disebut perumuman operator integral fraksional jika $\rho(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < n$ maka $I_\rho = I_\alpha$ (Nakai, 2001). Berikut adalah pembuktian bahwa operator I_ρ disebut perumuman operator integral fraksional jika $\rho(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < n$ maka $I_\rho = I_\alpha$.

diketahui bahwa $I_\rho f(x) = \int_X f(y) \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$

misalkan $\rho(t) = t^\alpha$

maka diperoleh,

$$I_\rho f(x) = \int_X f(y) \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$= \int_X f(y) \frac{\delta(x,y)^\alpha}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$= \int_X f(y) \frac{1}{\delta(x,y)^n} \frac{1}{\delta(x,y)^{-\alpha}} d\mu(y)$$

$$= \int_X \frac{f(y)}{\delta(x,y)^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

dimana telah diketahui bahwa $I_\alpha f(x) = \int_X \frac{f(y)}{\delta(x,y)^{n-\alpha}} d\mu(y)$. Dengan demikian, terbukti bahwa $I_\rho = I_\alpha$.

Dalam definisi I_ρ, diasumsikan bahwa ρ memenuhi kondisi berikut (Eridani, 2004):

1) $\int_0^1 \frac{\rho(t)}{t} dt < \infty$

2) Jika $\frac{1}{2} \leq \frac{r}{s} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{C_1} \leq \frac{\rho(r)}{\rho(s)} \leq C_1$

Jika ρ memenuhi kondisi penggandaan, maka untuk setiap bilangan bulat k dan $r > 0$ berlaku bahwa jika $2^k r \leq \delta(x,y) < 2^{k+1}r$, maka $\frac{1}{2} \leq \frac{\delta(x,y)}{2^{k+1}r} \leq 2$, sehingga $\frac{1}{C_1} \leq \frac{\rho(\delta(x,y))}{\rho(2^{k+1}r)} \leq C_1$. Oleh karena itu,

$$\frac{1}{C}\rho(2^{k+1}r) \leq \rho\big(\delta(x,y)\big) \leq C\rho(2^{k+1}r).$$

dan diperoleh

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\rho(t)}{\rho(2^{k+1}r)} \leq C$$

jika $2^k r \leq t < 2^{k+1}r$ sehingga

$$\frac{1}{C}\rho(2^{k+1}r) \leq \rho(t) \leq C\rho(2^{k+1}r).$$

Oleh karena itu,

$$\rho(2^{k+1}r) \leq C \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(t)}{t}.$$

Dalam penelitian ini, disumsikan bahwa

$$\int_r^\infty \frac{\phi(t)}{t} dt \le C\phi(r), \qquad \int_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \le C\rho(r)\phi(t), \qquad (r > 0)$$

untuk $C > 0$.

Jika terdapat konstanta $C > 0$, berlaku

$$\rho(r) \le C\phi(r)^{\frac{p}{q}-1}.$$

2.6 Ruang Morrey yang Diperumum

Seperti yang telah dijelaskan pada latar belakang, E. Nakai (2001) telah membuktikan bahwa operator integral fraksional juga terbatas pada ruang Morrey yang diperumum. Selanjutnya, ruang Morrey yang diperumum didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.4 Untuk $1 \le p < \infty$. Misalkan $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Ruang Morrey diperumum $L^{p,\phi} = L^{p,\phi}(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai ruang kelas ekuivalen dari semua fungsi $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ yang memenuhi

$$\|f\|_{L^{p,\phi}} = \sup_B \frac{1}{\phi(\mu(B))}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

dimana $B \coloneqq B(x,r)$ merupakan sebarang bola terbuka di $\mathbb{R}^n$, $\phi(B) = \phi(r)$ dan $\mu(B)$ ukuran Lebesgue dari B.

Untuk fungsi tertentu ϕ, ruang $L^{p,\phi}$ direduksi ke beberapa ruang klasik. Misalnya, jika $\phi(r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ dimana $0 \le \lambda < n$ maka $L^{p,\phi}$ adalah ruang Morrey klasik $L^{p,\lambda}$. Adapun ruang Morrey itu sendiri didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi f yang terintegralkan secara lokal pada $\mathbb{R}^n$, yaitu seperti yang dinyatakan dalam definisi berikut,

Definisi 2.5 *Untuk* $1 \leq p < \infty$ *dan* $0 \leq \lambda \leq n$, *ruang Morrey* $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ *didefinisikan oleh*

$$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) := \{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n): \|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < +\infty\}$$

dengan

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{B=B(x,r)} \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_B |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Dalam hal ini, $B = B(x,r)$ merupakan bola buka berdimensi n dengan pusat $x \in \mathbb{R}^n$ dan berjari-jari $r > 0$, yaitu $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n: |x - y| < r\}$. Untuk setiap bola $B = B(x,r)$ berdimensi n mempunyai suatu fakta bahwa

$$\mu(B) \leq Cr^n$$

dimana n adalah suatu bilangan dimensi yang tetap dan C adalah konstanta yang tidak bergantung pada x dan r, dengan $\mu(B)$ menyatakan ukuran Lebesgue dari B (Gunawan, 2006).

Selanjutnya, hubungan antara ruang Lebesgue dengan ruang Morrey klasik dinyatakan dengan pernyataan bahwa jika $\phi(r) = c > 0$ fungsi konstan, maka

$$\|f\|_{L^{\infty,\phi}} = \sup_B \frac{1}{\phi(\mu(B))}\|f\|_{L^\infty(B)} = \sup_B \frac{1}{c}\|f\|_{L^\infty(B)} = \frac{1}{c}\|f\|_{L^\infty},$$

atau $L^{\infty,\phi} = L^\infty$. Perhatikan ketaksamaan berikut

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |g(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} = \|g\|_{L^\infty(B)} \leq \|g\|_{L^\infty}$$

menyatakan bahwa $L^{p,n} \supseteq L^\infty$. Sementara itu,

$$\|f\|_{L^{p,0}} = \sup_{B}\left(\int_{B}|f(y)|^{p}dy\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^{n}}|f(y)|^{p}dy\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^{p}}$$

menyatakan bahwa $L^{p,0} = L^{p}$ (Eridani, 2012).

Di samping itu, Ruang L^p sendiri merupakan generalisasi dari ruang fungsi-fungsi yang terintegralkan kuadrat (*square integrable*) L^2. Dengan demikian, ruang L^p dapat disebut sebagai ruang fungsi-fungsi yang terintegralkan p-kali (*p-integrable*). Ruang L^p yang diperkenalkan oleh Henry Lebesgue (1875-1941) merupakan ruang lengkap terhadap norma L^p. Ruang L^p dan norma L^p didefinisikan sebagai berikut,

Definisi 2.6 Untuk $0 < p < \infty$, dan himpunan terukur $E \subset \mathbb{R}^n$, $L^p(E)$ adalah ruang fungsi Lebesgue dengan norma (quasinorma untuk $p < 1$)

$$\|f\|_{L^{p}(E)} = \left(\int_{E}|f(x)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Untuk $p = \infty$, $\|f\|_{L^{\infty}(E)}$ adalah norma supremum esensial yang biasa (*essential supremum norm*) dapat ditulis L^p untuk $L^p(\mathbb{R}^n)$ dan $\|f\|_p$ untuk $\|f\|_{L^p}$ (Adam, 1996:2).

Ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$. Untuk $1 \le p < \infty$, ruang ini merupakan ruang yang beranggotakan semua fungsi $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dengan

$$\int_{\mathbb{R}^{n}}|f(x)|^{p}dx < \infty.$$

Untuk $p = \infty$, anggotanya adalah semua fungsi $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dengan

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^{n}}|f(x)| < \infty.$$

yang dimaksud dengan 'ruang' dalam hal ini adalah ruang vektor, jika $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, maka $\alpha f + \beta g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Ruang $L^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan ruang bernorma dengan 'norma'

$$\|f\|_p \coloneqq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

untuk $1 \leq p < \infty$. atau

$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$$

untuk $p = \infty$.

2.7 Operator Maksimal Hardy-Littlewood

Fungsi maksimal diperlukan untuk membuktikan keterbatasan operator integral dalam ruang Lebesgue maupun ruang lainnya. Fungsi maksimal Hardy-Littlewood didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.7 Fungsi maksimal Hardy-Littlewood

Misalkan fungsi f terintegral lokal pada $\mathbb{R}^n$. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$, fungsi maksimal Hardy-Littlewood pada fungsi terintegral lokal f didefinisikan sebagai

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{|y|\leq r} |f(x-y)| dy.$$

Selain itu, M juga disebut operator maksimal Hardy-Littlewood.

Misalkan $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ dan $x \in \mathbb{R}^n$, digunakan fungsi maksimal berikut

$$Mf(x) = \sup_{B(x,r)} \frac{1}{\mu\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy.$$

dimana $B(x,r)$ merupakan bola dengan pusat x dan jari-jari $r > 0$, dan $\mu\big(B(x,r)\big)$ adalah ukuran Lebesgue (Lu, Shanzen, dkk, 2007:1).

2.8 Perintah Berpikir dalam Al-Quran

Sebagaimana yang telah dijelaskan pada Bab I dapat dikatakan bahwa manusia harus selalu memikirkan segala sesuatu tentang kebesaran dan kekuasaan Allah Swt. Hakikatnya, seseorang yang selalu berpikir akan semakin bertambah banyak ilmunya dan akan bermanfaat ilmunya ketika seseorang tersebut mengamalkan atau membagikannya kepada orang lain. Ilmu yang terdapat di dunia ini merupakan salah satu kekuasaan Allah Swt. Manusia dapat mempelajari atau tidaknya tentang kekuasaan Allah Swt sebagaimana yang telah dijelaskan dalam al-Quran surat al-Baqarah/2:269 berikut

يُؤْتِي الْحِكْمَةَ مَنْ يَشَاءُ ۚ وَمَنْ يُؤْتَ الْحِكْمَةَ فَقَدْ أُوتِيَ خَيْرًا كَثِيرًا ۗ وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّا أُولُو الْأَلْبَابِ

"Allah menganugerahkan Al Hikmah (kefahaman yang dalam tentang Al Quran dan As Sunnah) kepada siapa yang dikehendaki-Nya. dan Barangsiapa yang dianugerahi hikmah, ia benar-benar telah dianugerahi karunia yang banyak. dan hanya orang-orang yang berakallah yang dapat mengambil pelajaran (dari firman Allah)." (Q.S. al-Baqarah/2:269)

Maksud dari ayat tersebut menurut tafsir Ibnu Katsir, kata "الْحِكْمَةَ" bukanlah kenabian melainkan ilmu fiqih dan al-Quran. Abul aliyah mengatakan "الْحِكْمَةَ" ialah takut kepada Allah, karena takut kepada Allah merupakan puncak dari hikmah. Sedangkan Ibnu Wahab meriwayatkan dari Malik yang mengatakan sesungguhnya hikmah itu adalah pengetahuan mengenai agama Allah dan merupakan perkara yang dimaksudkan oleh Allah ke dalam hati manusia sebagai rahmat dan karunianya. Dan orang yang tidak dapat mengambil pelajaran yang dimaksudkan adalah tiada orang yang dapat memanfaatkan pelajaran dan peringatan kecuali hanya orang yang mempunyai pemahaman dan akal dengan begitu manusia dapat memahami *khitab* (perintah Allah) (Ad-Dimasyqi, 2000:109).

Sedangkan maksud ayat tersebut menurut tafsir Jalalain adalah Allah memberikan hikmah, artinya ilmu yang berguna yang dapat mendorong manusia untuk bekerja dan berkarya (kepada siapa yang dikehendaki-Nya dan barang siapa yang telah diberi hikmah itu, maka sungguh ia telah diberi kebaikan yang banyak) karena hikmah itu akan menuntunnya kepada kebahagiaan yang abadi. (dan tiadalah yang dapat mengambil pelajaran). Asalnya ta diidghamkan pada dzal hingga menjadi yadzdzakkaru, (kecuali orang-orang berakal) (Al-Mahalli dan As-Suyuti, 2008:150).

Segala sesuatu yang telah Allah tetapkan dan berikan kepada manusia merupakan suatu anugerah atas kuasa-Nya. Anugerah tersebut dapat berupa akal yang sehat, pikiran yang jernih, atau hati yang bersih. Sehingga manusia harus dapat memanfaatkan atau menggunakannya dengan sebaik-baiknya. Apabila dihubungkan dengan ilmu-ilmu yang terus berkembang dapat disimpulkan bahwa ilmu tersebut akan memberikan kemaslahatan dan kebaikan untuk orang lain ketika seseorang dapat mengambil hikmah dengan mengembangkan ilmu tersebut.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dipaparkan mengenai pembuktian keterbatasan operator I_ρ pada ruang Morrey yang diperumum. Keterbatasan operator I_ρ pada ruang Morrey yang diperumum dapat ditunjukkan melalui ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev dan memanfaatkan ketaksamaan Holder serta fungsi maksimal Hardy-Littlewood. Selanjutnya, pembuktian keterbatasan operator tersebut akan dijabarkan pada subbab 3.1 dan subbab 3.2.

3.1 Keterbatasan Operator I_ρ pada Ruang Morrey yang Diperumum terbatas dari $L^{p,\phi}(\mu)$ ke $L^{q,\phi^{p/q}}(\mu)$

Teorema 3.1 *Misalkan* $\mu \in GC(s)$; $s = \frac{pq(n-\alpha)}{pq+p-q}$, $1 < p < q < \infty$. *Terdapat konstanta* $C > 0$ *sedemikian sehingga* I_ρ *terbatas dari* $L^{p,\phi}(\mu)$ *ke* $L^{q,\phi^{\frac{p}{q}}}(\mu)$.

Bukti. Asumsikan bahwa

$$\int_r^\infty \frac{\phi(t)}{t} dt \leq C\phi(r), \qquad \int_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \leq C\rho(r)\phi(t), \qquad (r > 0)$$

untuk $C > 0$. Jika terdapat konstanta $C > 0$, berlaku bahwa ρ memenuhi kondisi $\rho(2^{k+1}r) \leq C \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(t)}{t}$, dimana

$$\rho(r) \leq C\phi(r)^{\frac{p}{q}-1}$$

$L^{p,\phi}$ didefinisikan sebagai ruang Morrey yang diperumum, yang mana

$L^{p,\phi} = \{f \in L^p_{loc}(\mu) : \|f : L^{p,\phi}\| < \infty\}$

dimana, $\|f : L^{p,\phi}\| = \sup_B \frac{1}{\phi(\mu(B))} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}$

dan operator maksimal $Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y), x \in \mathbb{R}$

Sehingga, diperoleh

$$I_\rho f(x) = \int_{\delta(x,y)<r} f(y) \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) + \int_{\delta(x,y)\geq r} f(y) \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$= I(x) + II(x)$$

(i) untuk penyelesaian $I(x)$

$$|I(x)| = \left| \int_{\delta(x,y)<r} f(y) \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) \right|$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)<r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)<\frac{1}{2}r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) + \int_{\frac{1}{2}r\leq\delta(x,y)<r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)<\frac{1}{4}r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) + \int_{\frac{1}{4}r\leq\delta(x,y)<\frac{1}{2}r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}r\leq\delta(x,y)<r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)<\frac{1}{8}r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) + \int_{\frac{1}{8}r\leq\delta(x,y)<\frac{1}{4}r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{4}r\leq\delta(x,y)<\frac{1}{2}r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}r\leq\delta(x,y)<r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^k r}\leq\delta(x,y)<\frac{1}{2^{k+1}r}} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} \int_{2^k r\leq\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{\rho(2^k r)}{(2^k r)^n} \int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^k r)^n} \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(t)}{t}\, dt \int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^{k+1} r)^n} \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(t)}{t}\, dt \int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C\rho(r)\frac{1}{r^n} \sum_{k=-\infty}^{-1} \mu\left(B(x,2^{k+1}r)\right) \frac{1}{\mu\left(B(x,2^{k+1}r)\right)} \int_{B(x,2^{k+1}r)} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq Cr^{s-n}\phi(r)^{\frac{p}{q}-1} Mf(x)$$

Sehingga diperoleh

$$I(x) \leq Cr^{s-n}\phi(r)^{\frac{p}{q}-1} Mf(x)$$

(ii) untuk penyelesaian $II(x)$

$$|II(x)| = \left| \int_{\delta(x,y)\geq r} f(y) \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) \right|$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)\geq r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)\geq 2r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) + \int_{2r\leq\delta(x,y)\leq r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)\geq 4r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) + \int_{4r\leq\delta(x,y)\leq 2r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$+ \int_{2r\leq\delta(x,y)\leq r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k r\leq\delta(x,y)\leq 2^{k+1}r} |f(y)| \frac{\rho\big(\delta(x,y)\big)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho(2^k r)}{(2^k r)^n} \int_{\delta(x,y)\leq 2^{k+1}r} |f(y)| d\mu(y)$$

Berdasarkan ketaksamaan Holder, maka

$$II(x) \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho(2^k r)}{(2^k r)^n} \frac{\phi(2^k r)}{\phi(2^k r)} \left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} 1^q d\mu(y) \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k r)^n} \frac{1}{\phi(2^k r)} \left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} 1^q d\mu(y) \right)^{\frac{p-1}{p}} \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt$$

$$\leq C \frac{1}{r^n} \rho(r)\phi(r) \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\phi\big(\mu(B)\big)} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B 1^q d\mu(y) \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq C \frac{1}{r^n} \phi(r)^{\frac{p}{q}-1} \phi(r) \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\phi\big(\mu(B)\big)} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \right) \mu(B)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq C \frac{r^s}{r^n} \phi(r)^{\frac{p}{q}} \| f : L^{p,\phi} \|$$

$$\leq C r^{s-n} \phi(r)^{\frac{p}{q}} \| f : L^{p,\phi} \|$$

Sehingga diperoleh

$$II(x) \leq Cr^{s-n}\phi(r)^{\frac{p}{q}}\|f: L^{p,\phi}\|$$

Jadi,

$$I_\rho f(x) \leq I(x) + II(x)$$

$$I_\rho f(x) \leq Cr^{s-n}\phi(r)^{\frac{p}{q}-1}Mf(x) + Cr^{s-n}\phi(r)^{\frac{p}{q}}\|f: L^{p,\phi}\|$$

Jika dipilih $r > 0 \ni Cr^{s-n}\phi(r)^{\frac{p}{q}-1}Mf(x) = Cr^{s-n}\phi(r)^{\frac{p}{q}}\|f: L^{p,\phi}\|$

$$Cr^{s-n}\phi(r)^{\frac{p}{q}-1}Mf(x) = Cr^{s-n}\phi(r)^{\frac{p}{q}}\|f: L^{p,\phi}\|$$

$$\frac{\phi(r)^{\frac{p}{q}}}{\phi(r)^{\frac{p}{q}-1}} = C\left(\frac{Mf(x)}{\|f: L^{p,\phi}\|}\right)$$

$$\phi(r) = C\left(\frac{Mf(x)}{\|f: L^{p,\phi}\|}\right)$$

ambil $s = n$, maka diperoleh

$$I_\rho f(x) \leq Cr^{s-n}\left(\frac{Mf(x)}{\|f: L^{p,\phi}\|}\right)^{\frac{p}{q}-1} Mf(x) + Cr^{s-n}\left(\frac{Mf(x)}{\|f: L^{p,\phi}\|}\right)^{\frac{p}{q}} \|f: L^{p,\phi}\|$$

$$= Cr^0\left(\frac{Mf(x)}{\|f: L^{p,\phi}\|}\right)^{\frac{p}{q}-1} Mf(x) + Cr^0\left(\frac{Mf(x)}{\|f: L^{p,\phi}\|}\right)^{\frac{p}{q}} \|f: L^{p,\phi}\|$$

$$= CMf(x)^{\frac{p}{q}}\|f: L^{p,\phi}\|^{1-\frac{p}{q}} + CMf(x)^{\frac{p}{q}}\|f: L^{p,\phi}\|^{1-\frac{p}{q}}$$

$$= CMf(x)^{\frac{p}{q}}\|f: L^{p,\phi}\|^{1-\frac{p}{q}}$$

$$|I_\rho f(x)|^q \leq CMf(x)^p\|f: L^{p,\phi}\|^{q-p}$$

$$\int_X |I_\rho f(x)|^q \, d\mu(x) = C\|f: L^{p,\phi}\|^{q-p}\int_X Mf(x)^p \, d\mu(x)$$

$$\leq C\|f: L^{p,\phi}\|^{q-p}\|f: L^{p,\phi}\|^p$$

$$\leq \|f: L^{p,\phi}\|^q$$

$$\left\| |I_\alpha f| : L^{q,\phi^{p/q}}(\mu) \right\| \leq C \| f : L^{p,\phi} \|$$

Dengan demikian, terbukti bahwa terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga berlaku $\left\| |I_\alpha f| : L^{q,\phi^{p/q}}(\mu) \right\| \leq C \| f : L^{p,\phi} \|$ dengan syarat $\mu(B) \leq Cr^s$.

3.2 Keterbatasan Operator I_ρ pada Ruang Morrey yang Diperumum terbatas dari $L^{p,\phi}(\mu)$ ke $L^{q,\psi}(\mu)$

Teorema 3.2 *Misalkan* $\mu \in GC(s)$; $s = \frac{pq(n-\alpha)}{pq+p-q}$, $1 < p < q < \infty$. *Terdapat konstanta* $C > 0$ *sedemikian sehingga* I_ρ *terbatas dari* $L^{p,\phi}(\mu)$ *ke* $L^{q,\psi}(\mu)$.

Bukti. Asumsikan bahwa

$$\int_r^\infty \frac{\phi(t)}{t} dt \leq C\phi(r), \qquad \int_r^\infty \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt \leq C\rho(r)\phi(t), \qquad (r > 0)$$

untuk $C > 0$. Jika terdapat konstanta $C > 0$, berlaku bahwa ρ memenuhi kondisi $\rho(2^{k+1}r) \leq C \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(t)}{t}$, dimana

$$\rho(r) \leq C\phi(r)^{-1}\psi(r)$$

$L^{p,\phi}$ didefinisikan sebagai ruang Morrey yang diperumum, yang mana

$L^{p,\phi} = \{ f \in L^p_{loc}(\mu) : \| f : L^{p,\phi} \| < \infty \}$

dimana, $\| f : L^{p,\phi} \| = \sup\limits_B \frac{1}{\phi(\mu(B))} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}$

dan operator maksimal $Mf(x) = \sup\limits_{B \ni x} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y), x \in \mathbb{R}$

sehingga,

$$I_\rho f(x) = \int_{\delta(x,y)<r} f(y) \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) + \int_{\delta(x,y)\geq r} f(y) \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$= I(x) + II(x)$$

Untuk penyelesaian $I(x)$, yaitu

$$|I(x)| = \left| \int_{\delta(x,y)<r} f(y) \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) \right|$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)<r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)<\frac{1}{2}r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) + \int_{\frac{1}{2}r\leq\delta(x,y)<r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)<\frac{1}{4}r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) + \int_{\frac{1}{4}r\leq\delta(x,y)<\frac{1}{2}r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}r\leq\delta(x,y)<r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)<\frac{1}{8}r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) + \int_{\frac{1}{8}r\leq\delta(x,y)<\frac{1}{4}r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{4}r\leq\delta(x,y)<\frac{1}{2}r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}r\leq\delta(x,y)<r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^k r}\leq\delta(x,y)<\frac{1}{2^{k+1} r}} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} \int_{2^k r\leq\delta(x,y)<2^{k+1} r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{\rho(2^k r)}{(2^k r)^n} \int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^k r)^n} \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(t)}{t}\, dt \int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^{k+1} r)^n} \int_{2^k r}^{2^{k+1}r} \frac{\rho(t)}{t}\, dt \int_{\delta(x,y)<2^{k+1}r} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C\rho(r) \frac{1}{r^n} \sum_{k=\infty}^{-1} \mu\left(B(x, 2^{k+1}r)\right) \frac{1}{\mu\left(B(x, 2^{k+1}r)\right)} \int_{B(x,2^{k+1}r)} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq C r^{s-n} \phi(r)^{-1} \psi(r) Mf(x)$$

diperoleh

$$I(x) \leq C r^{s-n} \phi(r)^{-1} \psi(r) Mf(x)$$

Untuk penyelesaian $II(x)$, yaitu

$$|II(x)| = \left| \int_{\delta(x,y)\geq r} f(y) \frac{\rho\left(\delta(x,y)\right)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) \right|$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)\geq r} |f(y)| \frac{\rho\left(\delta(x,y)\right)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)\geq 2r} |f(y)| \frac{\rho\left(\delta(x,y)\right)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) + \int_{2r\leq\delta(x,y)\leq r} |f(y)| \frac{\rho\left(\delta(x,y)\right)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \int_{\delta(x,y)\geq 4r} |f(y)| \frac{\rho\left(\delta(x,y)\right)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y) + \int_{4r\leq\delta(x,y)\leq 2r} |f(y)| \frac{\rho\left(\delta(x,y)\right)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$+ \int_{2r\leq\delta(x,y)\leq r} |f(y)| \frac{\rho\left(\delta(x,y)\right)}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k r \leq \delta(x,y) \leq 2^{k+1} r} |f(y)| \frac{\rho(\delta(x,y))}{\delta(x,y)^n} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho(2^k r)}{(2^k r)^n} \int_{\delta(x,y) \leq 2^{k+1} r} |f(y)| d\mu(y)$$

Berdasarkan ketaksamaan Holder, maka

$$II(x) \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho(2^k r)}{(2^k r)^n} \frac{\phi(2^k r)}{\phi(2^k r)} \left(\int_{\delta(x,y) < 2^{k+1} r} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\delta(x,y) < 2^{k+1} r} 1^q d\mu(y) \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k r)^n} \frac{1}{\phi(2^k r)} \left(\int_{\delta(x,y) < 2^{k+1} r} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_{\delta(x,y) < 2^{k+1} r} 1^q d\mu(y) \right)^{\frac{p-1}{p}} \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\rho(t)\phi(t)}{t} dt$$

$$\leq C \frac{1}{r^n} \rho(r)\phi(r) \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\phi(\mu(B))} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_B 1^q d\mu(y) \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq C \frac{1}{r^n} \phi(r)^{-1} \psi(r) \phi(r) \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\phi(\mu(B))} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \right) \mu(B)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leq C \frac{r^s}{r^n} \psi(r) \| f : L^{p,\phi} \|$$

$$\leq C r^{s-n} \psi(r) \| f : L^{p,\phi} \|$$

dan diperoleh

$$II(x) \leq C r^{s-n} \psi(r) \| f : L^{p,\phi} \|$$

sehingga

$$I_\rho f(x) \leq I(x) + II(x)$$

$$I_\rho f(x) \le Cr^{s-n}\phi(r)^{-1}\psi(r)Mf(x) + Cr^{s-n}\psi(r)\|f: L^{p,\phi}\|$$

Jika dipilih $r > 0 \ni Cr^{s-n}\phi(r)^{-1}\psi(r)Mf(x) = Cr^{s-n}\psi(r)\|f: L^{p,\phi}\|$

$$Cr^{s-n}\phi(r)^{-1}\psi(r)Mf(x) = Cr^{s-n}\psi(r)\|f: L^{p,\phi}\|$$

$$\frac{\psi(r)}{\phi(r)^{-1}\psi(r)} = C\left(\frac{Mf(x)}{\|f: L^{p,\phi}\|}\right)$$

$$\phi(r) = C\left(\frac{Mf(x)}{\|f: L^{p,\phi}\|}\right)$$

ambil $s = n$, maka diperoleh

$$I_\rho f(x) \le Cr^{s-n}\left(\frac{Mf(x)}{\|f: L^{p,\phi}\|}\right)^{-1}\psi(r)Mf(x) + Cr^{s-n}\psi(r)\|f: L^{p,\phi}\|$$

$$= Cr^{0}\left(\frac{Mf(x)}{\|f: L^{p,\phi}\|}\right)^{-1}\psi(r)Mf(x) + Cr^{0}\psi(r)\|f: L^{p,\phi}\|$$

$$\le C\psi(r)\|f: L^{p,\phi}\| + C\psi(r)\|f: L^{p,\phi}\|$$

$$\le C\psi(r)\|f: L^{p,\phi}\|$$

Jadi,

$$I_\rho f(x) \le C\psi(r)\|f: L^{p,\phi}\|$$

$$\frac{1}{\psi(r)}\left(\int_X |I_\rho f(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} = C\|f: L^{p,\phi}\|$$

$$\|I_\rho f(x): L^{q,\psi(r)}\| \le C\|f: L^{p,\phi}\|$$

Dengan demikian, terbukti bahwa terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga berlaku $\|I_\rho f(x): L^{q,\psi(r)}\| \le C\|f: L^{p,\phi}\|$ dengan syarat $\mu(B) \le Cr^s$.

3.3 Pengembangan Operator Integral dalam Pandangan Islam

Menurut prespektif islam, berpikir dalam istilah Arab disebut juga tafakur. Sedangkan menurut Al-Fairuzabadi, salah seorang linguis Muslim awal termuka, *al-fikr* (pikiran) adalah refleksi atas sesuatu, *afkar* adalah bentuk jamaknya. Menurut pandangannya, *fikr* dan *tafakur* merupakan sinonim dan memiliki arti yang sama. *Tafkir*, pikiran, merupakan gagasan abstrak, sementara *tafakkur*, berpikir adalah proses wacana reflektif yang hati-hati dan sistematik. Hal ini menjadi sebab bahwa makna berpikir dalam al-Quran tidak hanya mengacu pada satu istilah melainkan dengan beragam kata. Tafakur dapat diarahkan dalam beberapa tujuan, diantaranya pada penciptaan alam semesta, kekuasaan Allah Swt di alam semesta, dan dapat diarahkan untuk memahami dan menangkap pesan al-Quran (Badi dan Tajdin, 2007:15).

Salah satu tujuan tafakur adalah berupaya merenungkan dan menyadari bahwa ilmu di alam semesta sangatlah luas dan terus mengalami perkembangan di setiap zamannya. Sehingga, seseorang dapat terus mengembangkan ilmu pengetahuan dan dapat menemukan pengetahuan yang baru sekaligus disebarkan kepada orang lain. Dalam hal ini, hubungan antara perintah berpikir di dalam al-Quran dengan keluasan ilmu yang ada di alam semesta dapat menjadikan manusia untuk terus belajar dan berpikir sekaligus mensyukuri atas nikmatNya dengan cara mengikuti perkembangan dari zaman ke zaman.

Perkembangan ilmu dapat diketahui serupa dengan perkembangan keterbatasan operator integral fraksional berdasarkan sifat ukurannya yang mana dari ruang Lebesgue kemudian diperluas ke ruang Morrey dan ruang Morrey diperumum. Penelitian pertama kali dilakukan oleh G.H Hardy dan J.E Littlewood mengenai keterbatasan operator integral fraksional I_α di ruang Lebesgue menggunakan operator maksimal yang dikenal sebagai ketaksamaan Hardy-Littlewood. Selanjutnya Sergei Sobolev melakukan pengembangan mengenai keterbatasan tersebut dan diperoleh hasil yaitu ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolev. Kemudian, C.B. Morrey mengembangkan hasil tersebut dari ruang Lebesgue diperluas ke ruang Morrey. Ketaksamaan Hardy-Littlewood-Sobolav dari ruang Lebesgue ke ruang Morrey dikembangkan oleh Spanne. Hasil mereka kemudian diperkuat oleh Adams serta disempurnakan oleh Chiarenza dan Frasca. Nakai memperumum ketaksamaan tersebut ke ruang Morrey diperumum dan mempelajari keterbatasan perumuman operator integral fraksional $\left(I_\rho\right)$ di ruang Morrey diperumum. Gunawan dan Eridani juga mengkaji keterbatasan operator I_ρ pada ruang Morrey diperumum.

Pengembangan keterbatasan operator integral fraksional tidak luput dari proses berpikir dari ilmuan-ilmuan yang telah berhasil mengembangkan keterbatasan operator tersebut. Sehingga kajian keterbatasan operator integral fraksional merupakan salah satu bentuk penerapan dari hasil berpikir. Sebagaimana yang telah dijelaskan pada pembahasan sebelumnya tentang perintah berpikir di dalam al-Quran.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Operator I_ρ terbatas pada ruang Morrey yang diperumum $L^{p,\phi}(\mu)$ *ke* $L^{q,\phi^{\frac{p}{q}}}(\mu)$ telah diselesaikan dengan syarat $\mu(B) \leq Cr^s$, $s = \frac{pq(n-\alpha)}{pq+p-q}$. Kemudian, memisalkan $1 < p < q < \infty$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dan jika terdapat konstanta $C > 0$, maka berlaku bahwa ρ memenuhi kondisi $\rho(r) \leq C\phi(r)^{\frac{p}{q}-1}$, sehingga diperoleh ketaksamaan

$$\left\| I_\rho f : L^{q,\phi^{p/q}} \right\| \leq C \left\| f : L^{p,\phi} \right\|$$

atau dapat dikatakan bahwa I_ρ terbatas dari $L^{p,\phi}(\mu)$ *ke* $L^{q,\phi^{\frac{p}{q}}}(\mu)$.

2. Operator I_ρ terbatas pada ruang Morrey yang diperumum $L^{p,\phi}(\mu)$ *ke* $L^{q,\psi}(\mu)$ telah diselesaikan dengan syarat $\mu(B) \leq Cr^s$, $s = \frac{pq(n-\alpha)}{pq+p-q}$. Kemudian, memisalkan $1 < p < q < \infty$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dan jika terdapat konstanta $C > 0$, maka berlaku bahwa ρ memenuhi kondisi $\rho(r) \leq C\phi(r)^{-1}\psi(r)$, sehingga diperoleh ketaksamaan

$$\left\| I_\rho f(x) : L^{q,\psi(r)} \right\| \leq C \left\| f : L^{p,\phi} \right\|$$

atau dapat dikatakan bahwa I_ρ terbatas dari $L^{p,\phi}(\mu)$ *ke* $L^{q,\psi}(\mu)$.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis menfokuskan pada permasalahan keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada ruang Morrey yang diperumum. Untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengembangkan mengenai pembahasan keterbatasan perumuman operator integral fraksional pada ruang-ruang yang lain.

DAFTAR RUJUKAN

Adams, D.R. 1975. A note on Riesz potentials. *Duke Math. J.* 42. 765-778.

Adams, D.R., Hedberg, L.I. 1996. *Function Spaces and Potential Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Ad-Dimasyqi, A.A.F. 2000. Tafsir Ibnu Katsir Juz 3. Terjemahan Bahrun Abu Bakar. Bandung: Sinar Baru Algesindo.

Al-Mahalli, I.J dan As-Suyuti, I.J. 2008. *Tafsir Jalalain*. Terjemahan Bahrun Abu Bakar. Bandung: Sinar Baru Algesindo.

Badi, J dan Tajdin, M. 2004. *Islamic Creative Thinking-Berpikir Kreatif Berdasarkan Metode Qurani*. Bandung: Mizania.

Bartle, R.G. 1995. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Chiarenza, F., Frasca, M. 2002. Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function. *Ren. Mat*. 7. 273-279.

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Yogyakarta: FMIPA UGM.

Eridani, Gunawan, H., dan Nakai, E. 2004. On generalized fractional integral operators. *Scientiae mathematicae Japanicae Online.* 10. 307-318.

Eridani, Gunawan, H., Nakai, E., dan Sawano, Y. 2014. Characterization for the generalized fractional integral operators on Morrey spaces. *Math. Ineq.Appl*. 17(2). 761-777.

Eridani, Utoyo, M.I., dan Gunawan, H. 2012. A characterization for fractional integral operators on generalized Morrey spaces. *Anal. Theory Appl*. 28(3). 263-268.

Gunawan, G, dan Gunawan, H. 2006. Keterbatasan Operator Riesz di Ruang Morrey. *J. Math. And Its Appl.* 3(1). 27-40.

Gunawan, H. 2003. A note on the generalized fractional integral operators. Bandung: Departement of Mathematics, ITB.

Himah, F.A. 2017. *Aplikasi Integral Fraksional dan Turunan Fraksional pada Transformasi Laplace*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Muscat, J. 2014. *Functional Analysis*. Springer: New York.

Lu, Shanzen, dkk. 2007. *Singular Integrals and Related Topics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Nainggolan, S.P. 2015. *Karakteristik Operator Integral Fraksional Pada Ruang Morrey Klasik*. Skripsi tidak dipublikasikan (Online). Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.

Nakai, E. 2000. On generalized fractional integrals in the Orlics spaces. *Proc. Of the Second ISAAC Congress 2000*. 75-81.

Nakai, E. 2001. Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces. *Math. Nachr*. 166. 95-103.

Nakai, E. 2001. On generalized fractional integrals. *Taiwanese J. Math*. 5. 587-607.

Nelson, Gail S. 2015. *A User-Friendly Introduction to Lebesgue Measure and Integration*. Rhode Island:AMS.

Peetre, J. 1969. On the theory of $L_{p,\lambda}$ spaces. *J. Funct. Anal*. 4. 71-87.

Samko, S.G., Kilbas, A.A., dan Marichev, O.I. 1983. *Fractional Derivatives-Theory and Applications*. Amsterdam: Gordon Science Publiser.

Shihab, M.Q. 2002. *Tafsir Al Mishbah: pesan, kesan dan keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.

RIWAYAT HIDUP

Farida Nurul 'Aini, lahir di Tulungagung pada tanggal 26 Juli 1997. Biasa dipanggil Farida. Kakak dari Khoyruna Nurunnisak yang merupakan anak pertama dari 2 bersaudara dari pasangan Bapak Mustakim dan Ibu Marfuah. Selama di Malang bertempat tinggal di Jl. Kopral Usman 1/5 No. 35, Sukoharjo, Klojen, Malang tepatnya di PPTQ Nurul Furqon Kota Malang.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN 2 Ngebong dan lulus pada tahun 2009. Setelah itu melanjutkan ke SMPN 1 Campurdarat, lulus pada tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di MAN 2 Tulungagung dan lulus pada tahun 2015. Selanjutnya, pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang Jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, penulis berperan aktif pada organisasi intra maupun ekstra kampus dalam rangka mengembangkan kompentensi akademiknya. Penulis menjadi anggota Hai'ah Tahfidzul Qur'an di UIN Maliki Malang. Penulis juga menjadi asisten laboratorium jurusan Matematika. Selain itu, penulis juga turut serta dalam kepengurusan pondok.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Farida Nurul 'Aini
NIM : 15610008
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Keterbatasan Perumuman Operator Integral Fraksional Pada Ruang Morrey yang Diperumum
Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, MA

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	14 Maret 2019	Konsultasi Bab I	1.
2.	14 Maret 2019	Konsultasi Agama Bab I	2.
3.	15 Maret 2019	Konsultasi Bab II	3.
4.	17 Maret 2019	ACC Bab I & Bab II	4.
5.	18 Maret 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	5.
6.	26 April 2019	Konsultasi Bab III	6.
7.	30 April 2019	Konsultasi Bab IV & Abstrak	7.
8.	2 Mei 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	8.
9.	3 Mei 2019	ACC Bab III, IV & Abstrak	9.
10.	3 Mei 2019	ACC Kajian Keagamaan	10.
11.	3 Mei 2019	ACC Keseluruhan	11.

Malang, 3 Mei 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001