PENYELESAIAN PERSAMAAN KDV (KORTEWEG DE VRIES) DENGAN METODE ITERASI VARIASI

SKRIPSI

OLEH
DINDA RIZKI MAULINA
NIM. 15610001

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

PENYELESAIAN PERSAMAAN KDV (KORTEWEG DE VRIES) DENGAN METODE ITERASI VARIASI

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Dinda Rizki Maulina
NIM. 15610001

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2019

PENYELESAIAN PERSAMAAN KDV (KORTEWEG-DE VRIES)
DENGAN METODE ITERASI VARIASI

SKRIPSI

Oleh
Dinda Rizki Maulina
NIM. 15610001

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 09 Mei 2019

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Mohammad Jamhuri, M.Si	Muhammad Khudzaifah, M.Si
NIP.19810502 200501 1 004	NIP.19900511 20160801 1 057

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PENYELESAIAN PERSAMAAN KDV (KORTEWEG DE VRIES) DENGAN METODE ITERASI VARIASI

SKRIPSI

Oleh
Dinda Rizki Maulina
15610001

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai salah satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 21 Mei 2019

Penguji Utama	: Dr. Usman Pagalay, M.Si	....
Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Mohammad Jamhuri, M.Si	....
Anggota Penguji	: Muhammad Khudzaifah, M.Si	....

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: Dinda Rizki Maulina
NIM	: 15610001
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Penyelesaian Persamaan KdV (Korteweg de Vries) dengan Metode Iterasi Variasi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 Mei 2019

Yang membuat pernyataan,

Dinda Rizki Maulina

NIM. 15610001

MOTO

"Sesungguhnya, Aku sesuai prasangka hamba-Ku pada-Ku dan Aku bersamanya apabila ia memohon kepada-Ku"

(HR. Muslim)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Dalil dan Ibunda Yati tercinta, yang senantiasa dengan ikhlas dan istiqomah mendoakan, memberi nasihat, semangat,dan kasih sayang yang tak ternilai, serta adik tersayang Muhammad Ragil Zulkifly yang selalu menjadi kebanggan bagi penulis

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis
5. Muhammad Khudzaifah, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas sains dan teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Bapak dan Ibu serta adik tercinta yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Sahabat-sahabat terbaik penulis, yang selalu menemani, membantu , dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Amiin.*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 10 Mei 2019

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Maulina, Dinda Rizki, 2019. **Penyelesaian Persamaan KdV (Korteweg de Vries) dengan Metode Iterasi Variasi.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Mohammad Jamhuri, M.Si, (2) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Kata kunci: Metode Iterasi Variasi, Persamaan KdV, Solusi Analitik

Penelitian ini membahas tentang penyelesaian persamaan KdV yang merupakan persamaan diferensial parsial nonlinear menggunakan metode iterasi variasi. Persamaan diferensial parsial nonlinear dapat diselesaikan secara analitik maupun numerik. Metode iterasi variasi merupakan metode semi-analitik yang dapat digunakan untuk menyelesaiakan persamaan diferensial parsial nonlinear. Metode iterasi variasi merupakan metode yang menggunakan teori pengali Lagrange pada fungsi korektor untuk menemukan solusi. Pengali Lagrange dapat diidentifikasi secara optimal menggunakan integral parsial. Nilai pengali Lagrange yang didapatkan adalah -1 yang kemudian disubstitusikan ke fungsi korektor. Fungsi korektor digunakan sebagai formula iterasi untuk menghasilkan nilai $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$. Solusi analitik dari persamaan KdV dihasilkan dengan menentukan fungsi dari deret u_n. Pada penelitian ini digunakan dua nilai awal pada persamaan KdV. Pada nilai awal pertama solusi analitik didapatkan menggunakan formula jumlah deret geometri tak hingga. Pada nilai awal kedua solusi analitik didapatkan menggunakan ekspansi deret Taylor. Selanjutnya, juga disajikan simulasi dari solusi analitik yang dihasilkan. Disimpulkan bahwa metode iterasi variasi dalam penelitian ini dikategorikan sebagai salah satu metode yang menghasilkan solusi analitik pada persamaan KdV.

ABSTRACT

Maulina, Dinda Rizki. 2019. **The Solution of KdV (Korteweg de Vries) Equation using Variational Iteration Method**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisors: (1) Mohammad Jamhuri, M.Si, (2) Muhammad Khudzaifah, M.Si.

Keyword: Variational Iteration Method, KdV Equation, Analytical Solution.

This study discusses the solution of the KdV equation which is a nonlinear partial differential equation using the variational iteration method. Nonlinear partial differential equations can be solved analytically or numerically. Variational iteration method is a semi-analytic method that can be used to solve nonlinear partial differential equations. Variational iteration method is a method that uses Lagrange multiplier theory in the corrector function to find a solution. Lagrange multiplier can be identified optimally using partial integrals. The Lagrange multiplier obtained is -1 which is then substituted to the corrector function. The corrector function is used as an iterative formula to produce the values $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$. The analytic solution of the KdV equation is generated by determining the function of the series u_n. In this study two initial values are used in the KdV equation. At the first initial value the analytic solution is obtained using infinite geometry series formula. In the second initial value analytic solutions were obtained using Taylor series expansion. Furthermore, a simulation of the analytic solutions produced is also presented. It was concluded that the variational iteration method in this study was categorized as one method that produced an analytic solution to the KdVequation.

ملخص

ماولينا ، دندا رزقي ، ٢٠١٩. **الحل معادلات KdV (Korteweg de Vries) بطريقة التكرار البديل**. بحث الجمعي. شعبة الرياضيات ،كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة الحكومية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المستشارون: (١) محمد جمهوري ، ماجستير ، (٢) محمد خذيفة ، ماجستير

الكلمات المفتاحية: طريقة تكرار البديل ، معادلة KdV ، حل تحليلي

تناقش هذه الدراسة الحل من معادلة KdV وهي معادلة تفاضلية جزئية غير خطية باستخدام طريقة التكرار. يمكن حل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية تحليليًا أو عدديا. طريقة البديل هي طريقة شبه تحليلية يمكن استخدامها لحل المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية. طريقة ا البديل هي طريقة تستخدم نظرية امضاعفة لاغرانج في الدالة المصححة لإيجاد حل. يمكن تحديد مضاعفات لاجرانج على النحو الأمثل باستخدام تكاملات جزئية. يكون مضاعف لاغرانج الذي تم الحصول عليه هو ١− والذي يتم استبداله بعد ذلك ب بدالة المصحح. يتم استخدام الدالة مصحح كصيغة تكرارية لإنتاج القيم u_n ،... ، u_3 ، u_2 ، u_1. يتم إنشاء الحل التحليلي لمعادلة KdV عن طريق تحديد الدالة السلسلة u_n. في هذه الدراسة ، تستخدم قيمتان أوليتان في معادلة KdV. في القيمة الأولية الأولى ، يتم الحصول على الحل التحليلي باستخدام صيغة سلسلة هندسة لا نهائية. في القيم الأولية تم الحصول على كل الحلول التحليلية باستخدام سلسلة تايلور التوسع. علاوة على ذلك ، يتم تقديم محاكاة للحلول التحليلية المنتجة. وقد خلص إلى أن طريقة التكرار من الاختلاف في هذه الدراسة تم تصنيفها كطريقة واحدة تنتج حل تحليلي لمعادلة KdV.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Gelombang merupakan getaran yang mentransfer energi melalui materi atau ruang dengan transport massa yang sedikit atau tidak ada. Gelombang dari osilasi atau getaran dari media fisik atau bidang, di sekitar lokasi yang relatif tetap. Contoh gelombang dalam sains salah satunya adalah gelombang permukaan air. Pergerakan naik turunnya air dengan arah tegak lurus permukaan air yang membentuk kurva, bukit-bukit yang ada pada permukaan air tersebut adalah gelombang. Salah satu gelombang permukaan air yang dibahas dalam sains adalah gelombang soliter (Engelbrecht, 2015).

Gelombang soliter atau soliton adalah suatu gelombang yang mempertahankan bentuknya saat ia menjalar pada kecepatan konstan, soliton disebabkan oleh efek nonlinier dan efek dispersif dalam medium (efek dispersif merujuk pada hubungan dispersi, hubungan antara frekuensi dan kecepatan gelombang dalam medium atau kecepatan gelombang bervariasi sesuai dengan frekuensi) (Siahaan, 2015). Soliton adalah gelombang lokal yang merambat tanpa perubahan bentuk dan sifat kecepatan serta stabil terhadap benturan timbal balik (Saadi, 2010). Gelombang soliton dapat dimodelkan secara matematis untuk mempermudah melihat keadaan alam dalam bentuk sains. Salah satu model gelombang soliton yang sering digunakan adalah persamaan KdV (Korteweg de-Vries).

Persamaan KdV merupakan persamaan diferensial parsial urutan ketiga nonlinier yang memodelkan soliton gelombang air di kanal dangkal (Zabadal, 2011). Persamaan KdV didalamnya termuat amplitudo gelombang, percepatan gravitasi, kedalaman (yang tetap), dan cepat rambat gelombang. Persamaan diferensial parsial nonlinier dapat diselesaikan dengan analitik maupun numerik. Metode analitik akan menghasilkan solusi analitik, sedangkan metode numerik akan menghasilkan solusi pendekatan dengan gapat yang kecil.

Islam memandang masalah selalu memiliki solusi atau suatu masalah dapat diselesaiakan dengan suatu cara. Sebagaimana firmannya dalam surat al-insyiroh ayat 5-6.

فَإِنَّ مَعَ العُسْرِ يُسْرًا۝٥ إِنَّ مَعَ العُسْرِيُسْرًا۝٦

"*Maka sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (5). Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (6).*" (Q.S Al-insyiroh: 5-6)

Salah satu permasalahan dalam matematika adalah menemukan solusi dari suatu persamaan model matematika. Persamaan KdV adalah salah satu model matematika yang penelitiannya masih berfokus pada penggunaan metode yang mentransformasi persamaan KdV ke bentuk yang lebih sederhana. Kesulitan utama dalam menggunakan metode tersebut adalah persamaan integral yang diperoleh tidak selalu dapat diselesaikan dalam hal fungsi sederhana (Akdi, 2013). Bentuk persamaan KdV yang nonlinier dapat dicari solusinya menggunakan metode alternatif lain.

Persamaan differensial parsial nonlinier dapat dicari solusinya menggunakan beberapa metode seperti Adomian Decompotition Method (ADM), Exp-Function Method (EFM), Homotopy Pertubation Method (HPM), *Variational*

Iteration Method (VIM) dan yang lainnya. Pada penelitian ini akan digunakan VIM atau metode iterasi variasi sebagai metode untuk penyelesaian persamaan KdV.

Metode iterasi variasi atau *Variational Iteration Method* (VIM) merupakan metode untuk menyelesaikan persamaan differensial parsial dengan menggunakan pengali Lagrange. Selanjutnya, metode iterasi variasi akan disebut VIM pada penelitian ini. VIM merupakan metode semi-analitik untuk penyelesaian persamaan differensial parsial. Nilai awal pada metode ini dapat dipilih bebas dengan konstanta yang tidak diketahui. VIM dapat menyelesaikan persamaan differensial parsial nonlinier, sehingga persamaan KdV nonlinierpun dapat diselesaikan dengan metode ini. Penelitian sebelumnya juga menjadi salah satu alasan penggunaan VIM untuk mendapatkan solusi persamaan KdV.

Penelitian rujukan yang digunakan adalah penelitian yang dilakukan oleh (Mantifar, 2009) yang menggunakan VIM dan modifikasi VIM (MVIM) untuk menyelesaikan solusi persamaan Fisher. Persamaan Fisher adalah persamaan differensial parsial nonlinier. VIM dimulai dengan mencari nilai pengali Lagrange pada persamaan Fisher. Lalu dirumuskan formula VIM terhadap persamaan Fisher. Mantifar menjelaskan bahwa hasil yang didapatkan menggunakan VIM mendekati solusi analitiknya dan hasil yang diberikan MVIM lebih optimal dibandingkan hasil yang diberikan VIM. Penelitian lain juga dilakukan oleh (Neamaty & Darzi, 2010) yang membandingkan solusi dari *Variational Iteration Method* (VIM) dan *Homotopy Pertubation Method* (HPM). Neamaty menyatakan bahwa kedua metode tersebut sederhana dan efektif untuk mendapatkan solusi dari persamaan diferensial parsial nonlinier. Berbeda dengan metode analitik nonlinier lainnya, seperti metode pertubasi, VIM tidak tergantung pada parameter kecil, sehingga dapat menyelesaikan aplikasi dalam masalah nonlinier tanpa linierisasi atau pertubasi kecil. Perbandingan dengan metode dekomposisi adomian, VIM memperoleh solusi analitik lebih cepat dibandingkan menggunakan metode adomian (He J. H., 1998).

Penelitian sebelumnya pernah menggunakan ADM (Adomian Decomposition Method) untuk menganalisis solusi dari persamaan KdV (Akdi, 2013). Penelitian lain juga pernah menggunakan HAM (Homotopy Analysis Pertubation) untuk mencari solusi pada persamaan KdV (Jafari, 2010). Penelitian tersebut terbukti menghasilkan solusi yang mendekati solusi eksak pada orde 10. Penelitian ini difokuskan pada penyelesaian persamaan KdV menggunakan *Variational Iteration Method* (VIM) dengan nilai awal menggunakan nilai awal pada penelitian sebelumnya.

Solusi dari penelitian ini dapat dijadikan salah satu rujukan karena memberikan pendekatan baru terhadap solusi eksak persamaan KdV. Oleh karena itu, pada penelitian ini penulis akan menyelesaikan solusi persamaan KdV menggunakan *Variational Iteration Method*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pemaparan latar belakang maka didapatkan rumusan masalah pada penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana penyelesaian persamaan KdV dengan menggunakan metode iterasi variasi (*Variational Iteration Method*) pada nilai awal pertama?

2. Bagaimana penyelesaian persamaan KdV dengan menggunakan metode iterasi variasi (*Variational Iteration Method*) pada nilai awal kedua?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang disebutkan maka didapatkan tujuan pada penelitian ini yaitu:

1. Mengetahui penyelesaian persamaan KdV dengan menggunakan metode iterasi variasi (*Variational Iteration Method*) pada nilai awal pertama.
2. Mengetahui penyelesaian persamaan KdV dengan menggunakan metode iterasi variasi (*Variational Iteration Method*) pada nilai awal kedua.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Dengan mengetahui penyelesaian persamaan KdV dengan menggunakan metode iterasi variasi (*Variational Iteration Method*) pada nilai awal pertama, maka dapat dianalisis efektif atau tidaknya metode tersebut.
2. Dengan mengetahui penyelesaian persamaan KdV dengan menggunakan metode iterasi variasi (*Variational Iteration Method*) pada nilai awal kedua, maka dapat dianalisis efektif atau tidaknya metode tersebut.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Persamaan KdV yang digunakan berdasarkan (Saadi, 2010).

$$u_t - 3(u^2)_x + u_{xxx} = 0$$

2. Nilai awal pertama pada persamaan KdV mengikuti (Saadi, 2010).

$$u(0, x) = f(x) = 6x$$

3. Nilai awal kedua pada persamaan KdV mengikuti (Straus, 2008).

$$u(0, x) = 2\,\mathrm{sech}^2(x)$$

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan KdV dengan metode iterasi variasi yaitu:

1. Pada persamaan KdV dengan nilai awal pertama
   a. Mengubah persamaan KdV nonlinier ke dalam bentuk fungsi korektor VIM.
   b. Menentukan nilai fungsi pengali Lagrange (λ) menggunakan teori kalkulus variasi.
   c. Mensubstitusikan nilai pengali Lagrange yang ditemukan ke fungsi korektor.
   d. Mencari nilai $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ sehingga akan ditemukan hampiran dari solusi analitik pada persamaan KdV nonlinier.
   e. Menentukan solusi dari deret yang dihasilkan oleh VIM menggunakan deret geometri jika rasio antar sukunya sama.
   f. Menguji keanalitikan dari solusi VIM untuk mengetahui keefektifan VIM.
   g. Mensimulasikan solusi persamaan KdV dengan nilai awal pertama yang didapatkan dengan VIM.
2. Pada persamaan KdV dengan nilai awal kedua

a. Mengubah persamaan KdV nonlinier ke dalam bentuk fungsi korektor VIM.
b. Menentukan nilai fungsi pengali Lagrange (λ) menggunakan teori kalkulus variasi.
c. Mensubstitusikan nilai pengali Lagrange yang ditemukan ke fungsi korektor.
d. Mencari nilai $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ sehingga akan ditemukan hampiran dari solusi analitik pada persamaan KdV nonlinier
e. Menentukan solusi dari deret yang dihasilkan oleh VIM menggunakan ekspansi deret Taylor jika rasio antar sukunya berbeda.
f. Menguji keanalitikan dari solusi VIM untuk mengetahui keefektifan VIM.
g. Mensimulasikan solusi persamaan KdV yang didapatkan dengan VIM.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menyajikan kajian-kajian kepustakaan yang menjadi landasan teori dalam pembahasan terkait persamaan KdV yang diselesaikan menggunakan metode iterasi variasi (*Variational Iteration Method*).

Bab III Pembahasan

Bab ini menjabarkan tentang hasil dari penelitian yaitu penyelesaian persamaan KdV dengan metode *Variational Iteration Method* (VIM) pada nilai awal pertama dan nilai awal kedua serta dilengkapi dengan bukti keanalitikan solusi yang didapatkan.

Bab IV Penutup

Bab ini terdiri dari kesimpulan penelitian ini dan saran-saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan KdV

Ide fisika soliton sering dikatakan bermula di bulan Agustus 1934 ketika seorang John Scott Russel (1808-1882), fisikawan Skotlandia, mengamati fenomena gelombang air di kanal Edinburg-Glasgow. Gelombang air tersebut merambat lurus tanpa mengalami perubahan yang berarti pada bentuk maupun kecepatannya untuk jarak yang cukup panjang serta dalam rentang waktu relatif lama sepanjang kanal (Alatas, 2012).

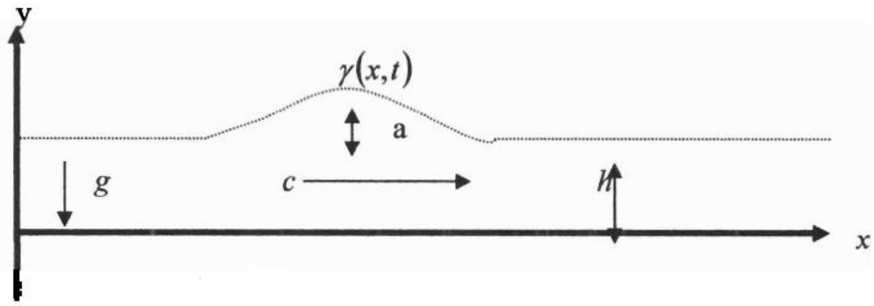
Penjelasan teoritis tentang gelombang yang ditemukan oleh John Scott Russel baru dapat dikemukakan oleh Diederik Johannes Korteweg dan mahasiswa PhD-nya, Gustav de Vries, pada tahun 1895. Mereka menurunkan suatu persamaan diferensial parsial nonlinier yang mengkonfirmasi eksistensi gelombang soliton yang John Scott Russel temukan (Oktavia, 2018).

Fenomena gelombang permukaan pada air dangkal dapat dijelaskan oleh persaman KdV. Persamaan KdV diperoleh dari persamaan dasar fluida ideal. Fluida ideal adalah fluida *incompressible* dan *invicid*, Fluida *incompressible* merupakan fluida yang tidak dapat dimampatkan, artinya volume dan massa jenisnya tidak berubah karena pengaruh tekanan (Tipler, 1998). Sedangkan fluida *invicid* adalah fluida tak kental. Bentuk dari persamaan KdV adalah

$$u(x,t)_t - 6u(x,t)u(x,t)_x + u(x,t)_{xxx} = 0$$

Persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai

$$u(x,t)_t - 3(u(x,t)^2)_x + u(x,t)_{xxx} = 0$$



Gambar 2.1 Bentuk Gelombang J.S Russell

Keterangan:

a = amplitudo gelombang

g = percepatan gravitasi

h = kedalaman tanpa gangguan

c = cepat rambat gelombang

persamaan gelombang air dangkal yang digunakan adalah tak rotasional (tak berotasi), tak kompresibel (tak termampatkan), invisid (tak kental) dan dibatasi oleh permukaan bebas pada bagian tas dan dibatasi oleh permukaan horizontal pada bagian bawah (Hidayati, 2006).

2.2 Metode Iterasi Variasi

Metode iterasi variasi dikenalkan oleh Ji-Huan He sebagai solusi barisan dari persamaan differensial nonlinier menggunakan formula iterasi (He J. , 1997). Ilustrasikan konsep dasar metode iterasi variasi, dimulai dengan memberikan persamaan diferensial nonlinier (Neamaty & Darzi, 2010):

$$L(u) + N(u) = g(t)$$

Dimana L adalah operator linier, N adalah operator nonlinier, dan $g(t)$ adalah bentuk nonhomogeneous (Fatoorehchi & Abolghaseimi, 2015). He telah memodifikasi metode pengali Lagrange ke metode iterasi yang yang disebut fungsi koreksi (He J. , 1997):

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_0^t \lambda[Lu_n(r) + N\tilde{u}(r) - g(r)]dr \tag{2.1}$$

Dimana λ adalah pengali Lagrange, yang bisa diidentifikasi dengan teori variasional (He J. , 2004). n menyatakan iterasi ke-n, dan $\tilde{u}_n$ adalah variasi terbatas yang memiliki syarat $\delta\tilde{u}_n = 0$ untuk mencapai kondisi stasioner. Dengan adanya variasi terbatas menunjukkan bahwa metode ini sangat efektif dan bisa menyelesaikan persamaan nonlinier. Untuk masalah linier, solusi eksaknya bisa didapatkan hanya dengan satu iterasi karena λ bisa diidentifikasi langsung (Neamaty & Darzi, 2010). Langkah utama dari VIM adalah menentukan nilai pengali Lagrange $\lambda(\xi)$ yang dapat diidentifikasi optimal. Integral parsial biasanya digunakan untuk menentukan pengali Lagrange $(\lambda(\xi))$. Dengan kata lain dapat menggunakan

$$\int \lambda(\xi)u_n'(\xi)d\xi = \lambda(\xi)u_n(\xi) - \int \lambda'(\xi)u_n(\xi)d\xi$$

$$\int \lambda(\xi)u_n''(\xi)d\xi = \lambda(\xi)u_n'(\xi) - \lambda'(\xi)u_n(\xi) + \int \lambda''(\xi)u_n(\xi)d\xi$$

dan seterusnya. Identifikasi tersebut diperoleh menggunakan integral parsial (Wazwaz, 2009). Selanjutnya contoh dapat ditulis sebagai berikut.

Diberikan persamaan diferensial parsial nonlinear berikut yang akan diselesaikan dengan metode iterasi variasi

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0$$

Dengan masalah nilai awal $u(x,0) = x$

Persamaan tersebut merupakan persamaan burger *inviscid* (tak kental). Persamaan ini berlaku pada dinamika gas, dengan nilai awal $u(x,0) = x$ maka saat $t = 0$ tekanan gas dimulai dengan nilai x yang pertama.

Penyelesaian:

Persamaan dapat dibentuk $u_t(x,t) + uu_x(x,t) = 0$, kemudian dibuat fungsi koreksinya yaitu

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(\xi)\left\{u_n(x,\xi)_\xi + \tilde{u}_n(x,\xi)\big(\tilde{u}_n(x,\xi)\big)_x\right\}d\xi, \tag{2.2}$$

Setelah itu akan ditentukan nilai fungsi pengali Lagrange(λ)menggunakan kalkulus variasi.

Kondisi stasioner didapatkan dengan $\delta\tilde{u}_n = 0$ sehingga persamaan (2.2) menjadi

$$\delta u_{n+1}(t) = \delta u_n(t) + \delta\int_0^t \lambda(\xi)\left\{u_n(x,\xi)_\xi + \tilde{u}_n(x,\xi)\big(\tilde{u}_n(x,\xi)\big)_x\right\}d\xi$$

$$0 = \delta u_n(t) + \delta\int_0^t \lambda(\xi)u_n(x,\xi)_\xi d\xi + \delta\int_0^t \lambda(\xi)\left(\tilde{u}_n(x,\xi)\big(\tilde{u}_n(x,\xi)\big)_x\right)d\xi$$

$$0 = \delta u_n(t) + \delta\int_0^t \lambda(\xi)u_n(x,\xi)_t d\xi + \int_0^t \lambda(\xi)\delta\left(\tilde{u}_n(x,\xi)\big(\tilde{u}_n(x,\xi)\big)_x\right)d\xi$$

$$0 = \delta u_n(t) + \delta\int_0^t \lambda(\xi)u_n(x,\xi)_\xi d\xi - 0$$

$$0 = \delta u_n(t) + \delta\left[\lambda(t)u_n(x,\xi) - \int_0^t \lambda'\,(t)u_n(x,t)d\xi\right]$$

$$0 = \delta u_n(t) + \delta\lambda(t)u_n(x,t) - \delta\int_0^t \lambda'(t)u_n(x,t)d\xi$$

$$0 = [1 + \lambda(t)]\delta u_n(t)|_{t=\xi} - \int_0^t \lambda'(t)\delta u_n(t)dt$$

menghasilkan kondisi stasioner sebagai berikut

$$1 + \lambda(t)|_{\xi=t} = 0$$

$$\lambda'(t)|_{\xi=t}$$

sehingga didapatkan nilai pengali lagrange

$$\lambda = -1$$

Selanjutnya nilai pengali lagrange disubstitusikan ke fungsi koreksi VIM menjadi

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \left\{(u_n(x,\xi))_\xi + u_n(x,\xi)\big(u_n(x,\xi)\big)_x\right\} d\xi,$$

Selanjutnya dilakukan iterasi pertama dengan $u_0 = x^2$

$$u_1(x,t) = u_0(x,t) - \int_0^t \left\{(u_0(x,\xi))_\xi + u_0(x,\xi)\big(u_0(x,\xi)\big)_x\right\} d\xi$$

$$= x - \int_0^t \{0 + (x \cdot 1)\} d\xi$$

$$= x - \int_0^t x\, d\xi$$

$$= x - xt$$

Selanjutnya hasil $u_1(x,t)$ digunakan sebagai nilai awal pada iterasi selanjutnya yaitu mencari nilai u_2

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) - \int_0^t \left\{(u_1(x,\xi))_\xi + u_1(x,\xi)\big(u_1(x,\xi)\big)_x\right\} d\xi$$

$$= x - xt - \int_0^t \{0 + (x - x\xi)(1 - \xi)\} d\xi$$

$$= x - xt - \int_0^t (x - 2x\xi + x\xi^2) d\xi$$

$$= x - xt - \left[x\xi - x\xi^2 + \frac{x\xi^3}{3}\right]_0^t$$

$$= x - xt + xt^2 - \frac{xt^3}{3}$$

Selanjutnya hasil $u_2(x,t)$ digunakan sebagai nilai awal pada iterasi selanjutnya yaitu mencari nilai u_3, u_4 ... dan seterusnya. Didapatkan solusi

$$u_2(x,t) = x - xt + xt^2 - \frac{1}{3}xt^3$$

$$u_3(x,t) = x - xt + xt^2 - xt^3 + \frac{2}{3}\mathrm{xt}^4 + \cdots$$

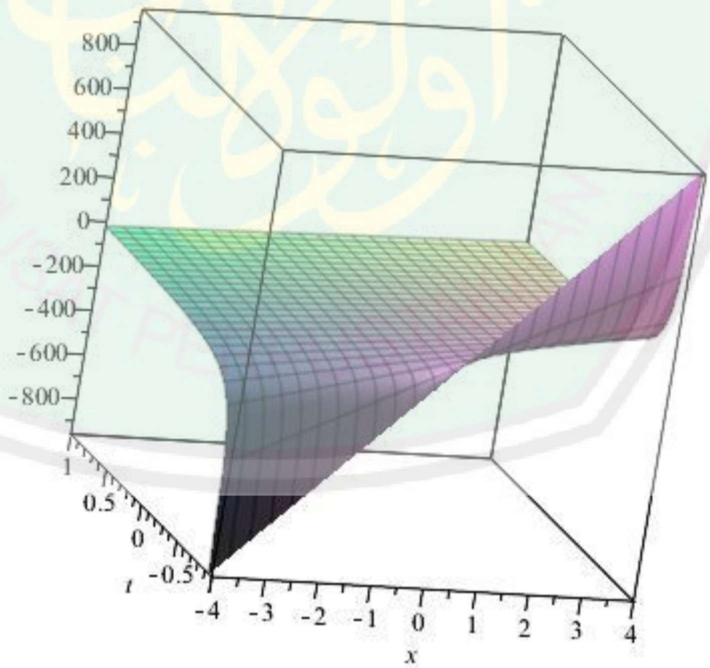
$$\vdots$$

$$u_n(x,t) = x(1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + \cdots + t^n)$$

dan solusi eksaknya yaitu:

$$u(x,t) = \frac{x}{1+t}, \qquad |t| < 1$$

Berikut, diberikan plot solusi dari persamaan KdV untuk $u(x,0) = x$ dengan $-4 < x < 4$ dan $-1 < t < 1$.



Gambar 2.2 Simulasi Solusi Persamaan Diferensial Parsial Nonlinear dengan $-4 < x < 4$ dan $-1 < t < 1$

Dari hasil simulasi tersebut ketika kondisi nilai awal yaitu $u(x,0) = x$, tinggi gelombang ada pada 0 ketika $x = 0$. Prilaku gelombang untuk solusi $u(x,t) = \frac{x}{1+t}$ yaitu gelombang terus naik sesuai dengan pertambahan x dan t. Puncak tertinggi gelombang yang didapatkan yaitu sebesar 900.

2.3 Pengali Lagrange Umum

Pengali Lagrange umum bisa digunakan untuk membentuk fungsi koreksi pada persamaan nonlinear. Untuk memahami konsep dari pengali Lagrange, diberikan persamaan nonlinear

$$f(x) = 0, \quad x \in R. \tag{2.3}$$

Jika x_n merupakan akar aproksimasi dari persamaan (2.3), maka berlaku:

$$f(x_n) \neq 0. \tag{2.4}$$

Pada persamaan (2.4), fungsi koreksi dapat dinyatakan dengan

$$x_{n+1} = x_n + \lambda f(x_n), \tag{2.5}$$

dimana λ adalah pengali Lagrange, yang dapat diidentifikasi secara optimal dengan

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 0 \tag{2.6}$$

Jika persamaan (2.5) diturunkan terhadap x_n diperoleh

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 1 + \lambda f'(x_n) \tag{2.7}$$

Dengan memperhatikan persamaan (2.6), maka dari persamaan (2.7) diperoleh

$$\lambda = -\frac{1}{f'(x_n)} \tag{2.8}$$

Dengan mensubstitusikan nilai λ ke persamaan (2.5), menghasilkan formula iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Selanjutnya, dengan menambahkan fungsi sembarang $g(x_n)$ pada persamaan (2.5) maka dapat mengkonstruksi fungsi koreksi menjadi

$$x_{n+1} = x_n + \lambda g(x_n) f(x_n) \qquad (2.9)$$

Jika persamaan (2.9) diturunkan terhadap x_n diperoleh

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 1 + \lambda\big(g(x_n) f'(x_n) + g'(x_n) f(x_n)\big). \qquad (2.10)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.6), dan disubstitusikan ke persamaan (2.10) menjadi

$$\lambda = -\frac{1}{\big(g(x_n) f'(x_n) + g'(x_n) f(x_n)\big)} \qquad (2.11)$$

Substitusikan persamaan (2.11) ke persamaan (2.10) sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n) f(x_n)}{g(x_n) f'(x_n) + g'(x_n) f(x_n)} \qquad (2.12)$$

Dengan $g(x_n) \neq 0$. Jika dipilih $g(x_n) = e^{\alpha n}$, dan diperoleh $g'(x_n) = -\alpha e^{-\alpha n}$. Kemudian substitusikan hasil ini ke persamaan (2.12) sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \alpha f(x_n)} \qquad (2.13)$$

Persamaan (2.13) merupakan metode iterasi bertipe Newton.

2.4 Kondisi Stasioner

Titik stasioner merupakan salah satu hal yang dicari dalam kakulus variasi selain memaksimumkan atau meminimumkan suatu fungsi. Contohnya pada dawai yang bergetar. Fisikawan mendefinisikan keadaan bergetarnya dawai tersebut sebagai energi kinetik yang dikurangi energi potensial, yaitu

$$A[u] = \int_{t_1}^{t^2} \int_0^L \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dxdt$$

yang menyatakan bahwa hal tersebut adalah stasioner. Ini berarti bahwa turunan dari $A[u]$ adalah nol. Yaitu $\frac{d}{d\epsilon}\big(A(u+\epsilon v)\big) = 0$ pada $\epsilon = 0$. Penurunan eksplisit dari $A(u+\epsilon v)$ terhadap ϵ mengarah ke

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} - T \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dxdt = 0$$

Untuk semua fungsi $v(x,t)$ yang hilang pada batas ruang-waktu. Selanjutnya digunakan integral parsial untuk mendapatkan

$$-\int_{t_1}^{t^2} \int_0^L \left(\frac{1}{2} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{2} T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (v) dxdt = 0$$

karena v sebarang di dalam D (D merupakan domain fungsi yang memenuhi syarat batas pada D), maka disimpulkan bahwa

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \; di \; D$$

yang disebut persamaan gelombang.

(Straus, 2008)

2.5 Deret Taylor

Misalkan $f(x)$ fungsi sebarang yang dapat dinyatakan sebagai suatu deret pangkat sebagai berikut:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

Dengan c_n, $n = 1,2,3, \ldots$, menyatakan koefisien deret pangkat dan a menyatakan titik pusatnya.

Andaikan f adalah suatu fungsi yang mempunyai turunan dari semua tingkatan pada x_0 maka deret Taylor untuk f disekitar $x = x_0$ didefinisikan sebagai

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Pada kasus tertentu deret Taylor disebut deret Maclaurin pada saat $x_0 = 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!}(x)^k$$

(Anton, 2012)

2.6 Ketunggalan Solusi Persamaan Diferensial Parsial

Diberikan persamaan diferensial parsial dengan syarat batas tipe Dirichlet

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} & = f(x,t) \quad 0 < x < L, t > 0 \\ u(x,0) & = \phi(x) \\ u(0,t) & = g(t), \qquad u(L,t) = h(t) \end{cases} \tag{2.14}$$

Bukti ketunggalan:

Misalkan $u_1(x,t)$ dan $u_2(x,t)$ merupakan dua solusi (2.14) akan ditunjukkan bahwa $u_1(x,t) = u_2(x,t)$. Tuliskan $w(x,t) \equiv u_1(x,t) - u_2(x,t)$ maka $w(x,t)$ memenuhi

$$\begin{cases} w_t - kw_{xx} & = 0, \quad 0 < x < L, t > 0 \\ u(x,0) & = 0 \\ w(0,t) & = 0, \qquad w(L,t) = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

Terapkan prinsip maksimum dan minimum pada persamaan dengan syarat batas dan syarat awal di atas akan menghasilkan $w(x,t) = 0$ atau $u_1(x,t) = u_2(x,t)$

Alternatif: metode energi untuk membuktikan ketunggalan solusi persamaan dferensial parsial. Misalkan $u_1(x,t)$ dan $u_2(x,t)$ merupakan dua solusi dari (2.14), misalkan $w(x,t) \equiv u_1(x,t) - u_2(x,t)$, maka $w(x,t) \equiv u_1(x,t) - u_2(x,t)$, maka $w(x,t)$ memenuhi (2.15)

$$0 = 0 \cdot w = (w_t - kw_{xx})w = (1/2w^2)_t + (-kw_2w)_x + kw_x^2$$

Integralkan terhadap x dengan batas 0 dan L, maka

$$0 = \int_0^L (1/2w^2)_t \, dx - kw_x w|_{x=0}^{x=L} + k\int_0^L w_x^2 \, dx$$

atau

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \frac{1}{2} w^2 \, dx = -k\int_0^L w_x^2 \, dx$$

Berarti $\int_0^L w^2 \, dx$ turun untuk setiap $t \geq 0$

$$\int_0^L w^2 \, dx \leq \int_0^L w(x,0)^2 \, dx,$$

Sedangkan $\int_0^L w(x,0)^2 \, dx = 0$, jadi $w \equiv 0$ atau $u_1(x,t) = u_2(x,t)$.

(Straus, 2008)

2.7 Kajian Islam tentang Ciri Orang Berakal

إِنَّ فِى خَلْقِ السَّمَوَتِ وَآلْأَرْضِ وَآخْتِلَفِ آلَّيْلِ والنَّهَارِ والفُلكِ آلَّتِى تَجْرِى
فِى الْبحْرِ بِمَا يَنْفَعُ آلنَّاسَ وَمَآ أَنْزَلَ آللَّهُ مِنَ آلسَّمَآءِ مِن مَّآءٍ فَأَحْيَابِهِ آلْأَرْضَ
بَعْدَ مَوْتِهَا مِن كُلِّ دَآبَّةٍ وَ تَصْرِيْفُ آلرِّيَحِ وَآلسَّحَابِ آلمسَخَّرِ بَيْنَ آلسَّمَآءِ
وَآلْأَرْضِ لَأَيَتٍ لِّقَوْمٍ يَعْقِلُوْنَ ١٦٤

Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya malam dan siang, bahtera yang berlayar di laut membawa apa yang berguna bagi manusia, dan apa yang Allah turunkan dari langit berupa air, lalu dengan air itu Dia hidupkan bumi setelah mati (kering)-nya dan Dia sebarkan di bumi itu segala jenis hewan,dan pengisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi; sungguh (terdapat) tanda-tanda (keesaan dan kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan. (Q.S Al-Baqoroh:164)

Dalam tafsir (Imani, 2010) dijelaskan bahwa ayat ini mengandung alasan dan dalil untuk membuktikan eksistensi Tuhan dan keesaan-Nya. Dia Yang Mahagung, merupakan sebab dari segala sebab dan sumber pengetahuan, kekuatan, dan keteraturan. Fakta bahwa keseragaman dan keteraturan, secara umum, merupakan tanda-tanda bagi eksistensi kecerdasan dan pengetahuan, di mana keselarasan merupakan suatu alasan akan keesaan. Ketika dihadapkan dengan berbagai aspek "keteraturan" di dunia eksistensi, maka akan ditemui keselarasan (harmoni) dan kesatuan tindakan dalam gerakan alam raya. Selain itu juga akan dihadapkan dengan sumber pengetahuan dan kekuatan tunggal yang menjadi sumber semua sebab yang agung ini.

Dalam tafsir (Ath-thabari, 2009) Abu Ja'far mengatakan: yang benar, bahwa Allah memperingatkan kepada para hamba-Nya bahwa ayat-ayat ini adalah bukti ketauhidan dan ketuhanan-Nya. Dan mungkin saja sebab turunnya adalah seperti yang dikatakan oleh Atha', dan mungkin juga seperti yang dikatakan oleh

Said bin Jubair dan Abu Dhuha, karena tidak ada dalil hadits yang pasti mana diantara dua pendapat tersebut yang benar, karenanya menurut kami kedua-duanya adalah benar. Penakwilan firman Allah: (*inna fii kholqissamaawaati*) (Abu Ja'far mengatakan: penakwilannya: sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi. Dan makna (*kholaqosy syitaa i*) Berarti menciptakan sesuatu dan mewujudkannya dari tidak ada menjadi ada.

Sebagian mereka berkata: ia memiliki penciptaan selainnya. Mereka berdalil dengan ayat ini dan dengan ayat surah Al Kahfi yang artinya: "*Aku tidak menghadirkan mereka (iblis dan anak cucunya) untuk menyaksikan penciptaan langit dan bumi dan tidak (pula) penciptaan diri mereka sendiri*". (QS. AL Kahfi (18):51). Mereka mengatakan: tidaklah Allah menciptakan sesuatu kecuali Dia menghendakinya. Mereka berkata: jadi, segala sesuatu adalah terjadi dengan kehendak-Nya, dan kehendak adalah penciptaan baginya.

Dalam kitab (Al-Maraghi, 2012) dijelaskan bahwa fenomena yang menunjukkan keesaan allah dalam ayat ini diantaranya adalah:

1. Langit, yang benda-bendanya terdiri dari berbagai jenis atau kelompok. Setiap kelompok memilki tatanan tersendiri secara teratur, dan setiap satuan darikelompok tersebut mempunyai tatanan yang sama pula.
2. Bumi, bentuk, materi, dan segala sesuatu yang ada di dalamnyaberupa benda-benda padat, tetumbuhandan aneka ragam satwa, manfaat setiap benda yang saling berbeda, semuanya menunjukkan bahwa penciptanya Maha Berilmu, Maha Bijaksana, Maha Mengetahui.

Allah berfirman

وَفِى ٱلْأَرْضِ ءَايَٰتٌ لِّلْمُوقِنِينَ ﴿٢٠﴾

Dan di bumi itu terdapat tanda-tanda (kekuasaan Allah) bagi orang-orang yang yakin. (adz,Dzariyat 51:20)

3. Silih bergantinya siang dan malam dan bergilirnya antar keduanya. Padda semuanya terkandung manfaat dan kemashlahatan bagi umat manusia

وَهُوَ ٱلَّذِى جَعَلَ ٱلَّيْلَ وَٱلنَّهَارَ خِلْفَةً لِّمَنْ أَرَادَ أَن يَذَّكَّرَ أَوْ أَرَادَ
شُكُورًا ﴿٦٢﴾

Dan Dia (pula) yang menjadikan malam dan siang silih berganti bagi orang yang ingin mengambil pelajaran atau orang yang ingin bersyukur. (Al-furqon,25:62)

4. Al-Fulk adalah kata yang pengertiannya boleh satu perahu atau banyak perahu. Bukti keesaan Allah melalui masalah ini membutuhkan pengetahuan tentang tabiat air laut dan kaidah-kaidah gaya tarik, tabiat udara, angina,awan dan listrik yang merupakan penggerak utama kapal-kapal di masa sekarang. Semuanya itu berjalan sesuai dengan hukum-hukum yang menunjukkan bahwa hal tersebut bersumber dari suatu kekuatan yang menciptakan seluruh tatanan,yakni kekuatan Ilahi Yang Maha Esa dan Maha Mengetahui. Seperti firman Allah:

وَمِنْ ءَايَٰتِهِ ٱلْجَوَارِ فِى ٱلْبَحْرِ كَٱلْأَعْلَٰمِ ﴿٣٢﴾ إِن يَشَأْ يُسْكِنِ ٱلرِّيحَ فَيَظْلَلْنَ
رَوَاكِدَ عَلَىٰ ظَهْرِهِۦٓ إِنَّ فِى ذَٰلِكَ لَءَايَٰتٍ لِّكُلِّ صَبَّارٍ شَكُورٍ ﴿٣٣﴾

Dan diantara tanda-tanda kekuasaan-nya ialah kapal-kapal (yang berlayar) di laut seperti gunung-gunung (32) Jika Dia menghedaki Dia akan menenangkan angina, maka jadilah kapal-kapal itu terhenti di permukaan laut(33) (Asy-syuara,42:32-33)

5. Dalam ayat ini dijelaskan bagaimana hujan turun

آللَّه آلَّذِى يُرْسِلُ الرِّيَحَ فَتُثِيْرُ سَحَابًا فَيَبْسُطُهُ, فِى السَّمَآءِ كَيْفَ يَشَآءُ وَيَجْعَلُهُ, كِسَفًا فَتَرَى آلْوَدْقَ يَخْرُجُ مِنْ خِلَلِهِ فَإِذَآ أَصَابَ بِهِ مَن يَّشَآءُ مِن عِبَادِهِ إِذَا هُمْ يَسْتَبْشِرُونَ ﴿٤٨﴾

"*Allah, dia-lah yang mengirimkan angin, lalu angin itu menggerakkan awan dan Allah membentangkannya di langit menurut yang dikehendaki-Nya dan menjadikannya bergumpal-gumpal; lalu kamu lihat hujan keluar dari celah-celahnya* (ar-Rum, 30:48)

6. Di dalam mengendalikan arah angin ini, sudah barang tentu sesuai dengan kodrat Allah dan sunnatullah yang diciptakan oleh Yang Maha Bijaksana.
7. Pada mendung yang berkelompok dengan ketebalannya di udara itu untuk kepentingan turunnya hujan di berbagai negara dengan cara turun yang teratur.

Dalam petikan ayat لَأَيَٰتٍ لِّقَوۡمٍ يَعۡقِلُونَ menjelaskan bahwa pada semua gejala itu terdapat petunjuk bagi orang-orang yang berpikir untuk mengetahui watak dan rahasia-rahasinya. Dengan demikian dapat dibedakan antara yang bermanfaat dan membahayakan, disamping dapat diketahui betapa teliti dan halusnya kekuasaan Yang Maha Menciptakan semuanya ini. Dapat disimpulkan bahwa hanya yang menciptakan semua inilah yang berhak untuk disembah dan ditaati.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai langkah-langkah penyelesaian persamaan KdV menggunakan metode iterasi variasi (*Variational Iteration Method*). Dimana metode tersebut akan diselesaikan pada subbab 3.1 menjelaskan penyelesaian persamaan KdV pada nilai awal pertama. Subbab 3.2 menjelaskan penyelesaian persamaan KdV pada nilai awal kedua.

3.1 Penyelesaian Persamaan KdV Menggunakan VIM pada Nilai Awal Pertama

Bentuk persamaan KdV nonlinier yang akan diselesaikan adalah: (Saadi, 2010)

$$u(x,t)_t - 3(u(x,t)^2)_x + u(x,t)_{xxx} = 0 \tag{3.1}$$

Diberikan nilai awal pertama

$$u(x,0) = 6x \tag{3.2}$$

Langkah 1

Membentuk fungsi korektor VIM persamaan KdV seperti persamaan (2.1) menjadi

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(\xi)\{u_n(x,\xi)_\xi - 3(\tilde{u}_n)^2(x,\xi)_x + \tilde{u}_n(x,\xi)_{xxx}\}\, d\xi \tag{3.3}$$

Dimana λ adalah nilai pengali Lagrange yang dapat diidentifikasi secara optimal dengan teori variasional, $u_n(t)$ adalah solusi pendekatan ke n terhadap t, dan $\tilde{u}_n(\xi)$ adalah suatu variasi terbatas, yang memiliki syarat $\delta\tilde{u}_n = 0$ untuk mencapai kondisi stasioner, dengan δ adalah turunan variasional.

Langkah 2

Mencari nilai pengali Lagrange(λ) menggunakan kalkulus variasi agar didapatkan nilai yang optimal. Dengan menurunkan fungsi korektor terhadap u_n maka akan persamaan (3.3) menjadi

$$\delta u_{n+1}(x,t) = \delta u_n(x,t) + \delta \int_0^t \lambda(\xi)\left\{u_n(x,\xi)_\xi - 3(\tilde{u}_n)^2(x,\xi)_x + \tilde{u}_n(x,\xi)_{xxx}\right\} d\xi \tag{3.4}$$

Pengali Lagrange(λ) diidentifikasi secara optimal dengan integral parsial (Wazwaz, 2009). Kondisi stasioner didapatkan dengan $\delta\tilde{u}_n = 0$ sehingga persamaan (3.4) menjadi

$$0 = \delta u_n(x,t) + \delta \int_0^t \lambda(\xi)(u_n)_\xi d\xi - \delta \int_0^t \lambda(\xi)(3(\tilde{u}_n)^2)_x + (\tilde{u}_n)_{xxx})d\xi$$

$$0 = \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\xi)(u_n)_\xi d\xi - \int_0^t \lambda(\xi)\delta(3(\tilde{u}_n)^2)_x + (\tilde{u}_n)_{xxx})d\xi$$

$$0 = \delta u_n(t) + \delta \int_0^t \lambda(\xi)(u_n)_\xi d\xi - 0$$

$$0 = \delta u_n(t) + \delta \left[\lambda(t)u_n(t) - \int_0^t \lambda'(\xi)u_n(t)d\xi\right]$$

$$0 = \delta u_n(t) + \delta\lambda(t)u_n(t) - \delta \int_0^t \lambda'(\xi)u_n(t)d\xi$$

$$0 = [1 + \lambda(t)]\delta u_n(t)|_{t=\xi} - \int_0^t \lambda'(\xi)\delta u_n(t)d\xi$$

menghasilkan kondisi stasioner sebagai berikut

$$1 + \lambda = 0 \tag{3.5}$$

Dan

$$\lambda' = 0 \tag{3.6}$$

karena

$$\lambda' = 0$$

$$\lambda = \int 0 d\xi$$

$$\lambda = c_1$$

dan didapatkan pula

$$1 + \lambda = 0$$

$$\lambda = -1$$

maka

$$\left.\begin{matrix} \lambda = c_1 \\ \lambda = -1 \end{matrix}\right\} c_1 = -1$$

dan dihasilkan nilai pengali lagrange

$$\lambda = -1$$

Persamaan (3.6) disebut dengan persamaan Euler-Lagrange, dan persamaan (3.5) disebut dengan kondisi batas alami.

Langkah 3

Tahap ketiga adalah mensubtitusikan nilai pengali Lagrange(λ) ke fungsi korektor untuk mendapatkan formula iterasi sebagai berikut

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \{u_n(x,\xi)_\xi - 3(\tilde{u}_n)^2(x,\xi)_x + \tilde{u}_n(x,\xi)_{xxx}\} d\xi \quad (3.7)$$

Langkah 4

Mencari nilai $u_1, u_2, u_3, \dots u_n$ sehingga akan ditemukan hampiran solusi dari persamaan KdV nonlinear. Selanjutnya untuk $n = 0$ maka persamaan (3.7) menjadi

$$u_1(x,t) = u_0(x,t) - \int_0^t \left\{u_{0_\xi}(x,\xi) - 3((u_0(x,\xi)^2)_x + (u_0(x,\xi))_{xxx}\right\} d\xi \quad (3.8)$$

Dengan $u_0(x,t)$ didefinisikan sebagai nilai awal yaitu,

$$u_0(x,t) = 6x. \tag{3.9}$$

Jika (3.8) disubstitusikan pada (3.9) maka didapatkan

$$u_1(x,t) = 6x - \int_0^t \left\{(6x)_\xi - 3(6x)_x^2 + (6x)_{xxx}\right\} d\xi$$

$$= 6x - \int_0^t \{0 - 3(72x) + 0\} d\xi$$

$$= 6\text{x} - \{-216\xi|_0^t\}$$

$$= 6x - \{-216t + 0\}$$

$$= 6x + 216t$$

$$u_1(x,t) = 6x(1 + 36t)$$

Selanjutnya, untuk $n = 1$, maka persamaan (3.7) menjadi

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) - \int_0^t \left\{u_1(x,\xi)_\xi - 3((u_1(x,\xi)^2)_x + (u_1(x,\xi))_{xxx}\right\} d\xi$$

Dan didefinisikan terlebih dahulu

$$u_1(x,\xi) = u_1(x,t)|_{t=\xi} = 6x(1 + 36\xi)$$

Sehingga diperoleh

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) - \int_0^t \left\{u_1(x,\xi)_\xi - 3((u_1(x,\xi)^2)_x + (u_1(x,\xi))_{xxx}\right\} d\xi$$

$$= 6x(1 + 36t) - \int_0^t \frac{\partial}{\partial\xi}\big(6x(1 + 36\xi)\big) d\xi - 3\int_0^t \frac{\partial}{\partial\xi}\big(6x(1 + 36\xi)\big) d\xi$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial^3}{\partial x^3}\big(6x(1 + 36\xi)\big) d\xi$$

Setelah diitegralkan diperoleh,

$$u_2(x,t) = 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 15552t^3).$$

Selanjutnya, untuk $n = 2,$ maka persamaan (3.7) menjadi

$$u_3(x,t) = u_2(x,t) - \int_0^t \{u_2(x,\xi)_\xi - 3((u_2(x,\xi)^2)_x + (u_2(x,\xi))_{xxx}\} d\xi$$

$$= 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 15552t^3)$$

$$- \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi}\big(6x(1 + 36t + 1296t^2 + 15552t^3)\big) d\xi$$

$$- 3\int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi}\big(6x(1 + 36t + 1296t^2 + 15552t^3)\big) d\xi$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial^3}{\partial x^3}\big(6x(1 + 36t + 1296t^2 + 15552t^3)\big) d\xi$$

Setelah diintegralkan diperoleh

$u_3(x,t) = 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 15552t^3 + 1119744t^4 + 20155392t^5)$.

Cara yang sama dilakukan untuk $n = 3$ sehingga didapatkan hasil $u_4(x,t)$ yaitu

$$u_4(x,t) = 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 46656t^3 + 1679616t^4 + 60466176t^5 + 2176782336t^6)$$

Langkah 5

Menentukan solusi analitik dari deret yang dihasilkan oleh VIM dengan cara memfaktorkan $u_4(x,t)$ untuk mengonfirmasi bentuk deretnya

$$u_4(x,t) = 6x(1 + (2^2 3^2)t + (2^4 3^4)t^2 + (2^6 3^6)t^3 + (2^8 3^8)t^4 + (2^{10} 3^{10})t^5 + (2^{12} 3^{12})t^6)$$

Kemudian didapatkan pola untuk $u_n(x,t)$ yaitu

$$u_n(x,t) = 6x(1 + (2^2 3^2)t + (2^4 3^4)t^2 + (2^6 3^6)t^3 + (2^8 3^8)t^4 + (2^{10} 3^{10})t^5 + (2^{12} 3^{12})t^6 + \cdots + (2^{2n} 3^{2n})^n) \quad (3.10)$$

Dari persamaan (3.10) dapat dihasilkan rasio sebesar

$$r = \frac{2^4 3^4 t^2}{2^2 3^2 t} = \frac{2^6 3^6 t^3}{2^4 3^4 t^2} = \frac{2^8 3^8 t^4}{2^6 3^6 t^3} = \frac{2^{10} 3^{10} t^5}{2^8 3^8 t^4} = \frac{2^{12} 3^{12} t^6}{2^{10} 3^{10} t^5} = 2^2 3^2 t,$$

dengan menggunakan rumus jumlah deret pada deret geometri tak hingga

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

maka persamaan (3.10) menjadi

$$S_\infty = \frac{1}{1-2^2 3^2 t}$$

$$S_\infty = \frac{1}{1-36t} \tag{3.11}$$

kemudian persamaan (3.11) dikalikan dengan $6x$ sehingga menghasilkan solusi

$$u(x,t) = \frac{6x}{1-36t}, \qquad |36t| < 1 \tag{3.12}$$

Langkah 6

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa solusi yang dihasilkan merupakan solusi eksak dari persamaan (3.1). Pembuktian dilakukan dengan mensubtitusikan persamaan (3.12) ke persamaan (3.1)

$$u(x,t)_t - 3\left(\left(u(x,t)\right)^2\right)_x + u(x,t)_{xxx}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{6x}{1-36t}\right) - 3\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{36x^2}{(1-36t)^2}\right)\right) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{6x}{1-36t}\right)$$

$$= \frac{216x}{(1-36t)^2} - 3\left(\frac{72x}{(1-36t)^2}\right) + 0$$

$$= 0$$

Terbukti bahwa solusi VIM (3.12) merupakan solusi eksak untuk persamaan KdV.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa (3.12) juga memenuhi nilai awal (3.2)

$$u(x,t) = \frac{6x}{1-36t}$$

$$u(x,0) = \frac{6x}{1-36(0)}$$

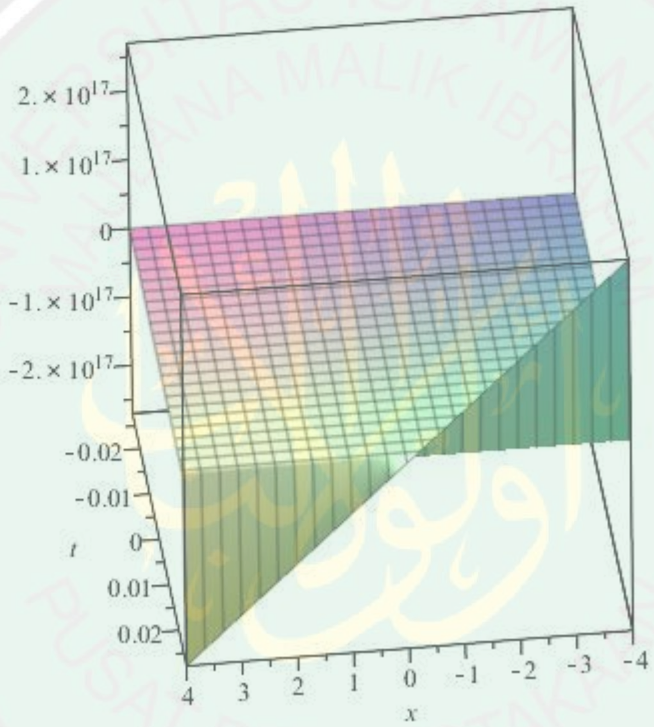
$$= \frac{6x}{1-0}$$

$$= 6x$$

Terbukti bahwa solusi VIM (3.12) memenuhi kondisi awal dari persamaan KdV.

Langkah 7

Mensimulasikan solusi persamaan KdV dengan nilai awal pertama yang didapatkan dengan VIM. Berikut, diberikan plot solusi dari persamaan KdV untuk $u(x,0) = 6x$ dengan $-4 < x < 4$ dan $-\frac{1}{36} < t < \frac{1}{36}$.



Gambar 3.1 Simulasi Persamaan KdV Nilai Awal Pertama dengan $-4 < x < 4$ dan $-\frac{1}{36} < t < \frac{1}{36}$

Dari hasil simulasi tersebut ketika kondisi nilai awal yaitu $u(x,0) = 6x$, tinggi gelombang ada pada 0 ketika $x = 0$. Prilaku gelombang untuk solusi $u(x,t) = \frac{6x}{1-36t}$ yaitu gelombang terus naik sesuai dengan pertambahan x dan t. Puncak tertinggi gelombang yang didapatkan yaitu sebesar 2×10^{17}.

3.2 Penyelesaian Persamaan KdV Menggunakan VIM pada Nilai Awal Kedua

Bentuk persamaan KdV nonlinier yang akan diselesaikan adalah persamaan (3.1) dengan nilai awal kedua yang diberikan

$$u(x,0) = u_0 = 2\,\mathrm{sech}^2(x) \tag{3.13}$$

Langkah 1

Membentuk fungsi korektor VIM persamaan KdV seperti persamaan (2.1) menjadi

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(\xi)\left\{(u_n(x,\xi))_\xi - 3\left(\left(\tilde{u}_n(x,\xi)\right)^2\right)_x + (\tilde{u}_n(x,\xi))_{xxx}\right\} d\xi$$

Langkah 2

Mencari nilai pengali lagrange menggunakan integral parsial dengan $\delta\tilde{u}_n = 0$. Dengan cara yang sama pada subbab 3.1 langkah 2, maka dihasilkan kondisi stasioner

$$1 + \lambda = 0$$

$$\lambda' = 0$$

Dengan cara yang sama pada subbab 3.1, maka dihasilkan nilai pengali lagrange

$$\lambda = -1$$

Langkah 3

Selanjutnya adalah mensubtitusikan nilai pengali Lagrange(λ) ke fungsi korektor untuk mendapatkan formula iterasi sebagai berikut

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \left\{ (u_n(x,\xi))_\xi - 3\left(\left(u_n(x,\xi)\right)^2 \right)_x + (u_n(x,\xi))_{xxx} \right\} d\xi \tag{3.14}$$

Pada persamaan (3.14) di atas

$$(u_n(x,\xi))_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi} u_n(x,\xi),$$

$$\left(\left(u_n(x,\xi)\right)^2 \right)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(u_n(x,\xi)\right)^2,$$

$$\left(u_n(x,\xi)\right)_{xxx} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} u_n(x,\xi)$$

$$u(x,\xi) = u(x,t)|_{t=\xi}$$

Langkah 4

Mencari nilai $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ sehingga akan ditemukan hampiran solusi dari persamaan KdV nonlinear. Selanjutnya, untuk $n = 0$ maka persamaan (3.14) menjadi

$$u_1(x,t) = u_0(x,t) - \int_0^t \left\{ u_{0_\xi}(x,\xi) - 3((u_0(x,\xi)^2)_x + (u_0(x,\xi))_{xxx} \right\} d\xi \tag{3.15}$$

Dengan $u_0(x,t)$ didefinisikan sebagai kondisi awal yaitu,

$$u_0(x,t) = 2\,\mathrm{sech}^2(x) \tag{3.16}$$

Jika (3.16) disubstitusikan pada (3.15) maka didapatkan

$$u_1(x,t) = 2\,\mathrm{sech}^2(x) - \int_0^t \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}(2\,\mathrm{sech}^2(x)) - 3\frac{\partial}{\partial x}((2\,\mathrm{sech}^2(x))^2) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}(2\,\mathrm{sech}^2(x)) \right\} d\xi$$

$$= 2\,\mathrm{sech}^2(x) - \int_0^t \left\{\frac{\partial}{\partial \xi}(2\,\mathrm{sech}^2(x)) - 3\frac{\partial}{\partial x}(4\,\mathrm{sech}^4(x)) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}(2\,\mathrm{sech}^2(x))\right\} d\xi$$

$$= 2\,\mathrm{sech}^2(x) - 2\int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi}(\mathrm{sech}^2(x))\, d\xi + 12\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{sech}^4(x)) \int_0^t d\xi - 2\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\mathrm{sech}^2(x)) \int_0^t d\xi$$

$$= 2\,\mathrm{sech}^2(x) + 12\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{sech}^4(x)) \int_0^t d\xi - 2\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\mathrm{sech}^2(x)) \int_0^t d\xi$$

$$= 2\,\mathrm{sech}^2(x) + 12\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{sech}^4(x))\xi|_0^t - 2\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\mathrm{sech}^2(x))\xi|_0^t$$

$$= 2\,\mathrm{sech}^2(x) + \left(12\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{sech}^4(x)) - 2\frac{\partial^3}{\partial x^3}(\mathrm{sech}^2(x))\right)t$$

$$u_1(x,t) = 2\,\mathrm{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}t$$

Selanjutnya, untuk $n = 1$, maka persamaan (3.10) menjadi

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) - \int_0^t \left\{(u_1(x,\xi))_\xi - 3((u_1(x,\xi)^2)_x + (u_1(x,\xi))_{xxx}\right\} d\xi$$

Dan didefinisikan terlebih dahulu

$$u_1(x,\xi) = u_1(x,t)|_{t=\xi} = 2\,\mathrm{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}\xi$$

Sehingga diperoleh

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) - \int_0^t \left\{(u_1(x,\xi))_\xi - 3((u_1(x,\xi)^2)_x + (u_1(x,\xi))_{xxx}\right\} d\xi$$

$$u_2(x,t) = \left(2\operatorname{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}t\right)$$

$$-\int_0^t \frac{\partial}{\partial\xi}\left(2\operatorname{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}\xi\right)d\xi$$

$$+3\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left(2\operatorname{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}\xi\right)^2 d\xi$$

$$-\int_0^t \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(2\operatorname{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}\xi\right)d\xi$$

$$= \left(2\operatorname{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}t\right) - \int_0^t \left(-\frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}\right)d\xi$$

$$+3\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{256\sinh^2(x)}{\cosh^6(x)}\xi^2 - \frac{64\sinh(x)}{\cosh^5(x)}\xi\right.$$

$$\left.+\frac{4}{\cosh^4(x)}\right)d\xi$$

$$-\int_0^t \left(\frac{128\xi}{\cosh^2(x)} - \frac{960\sinh^2(x)\,\xi}{\cosh^4(x)} + \frac{960\sinh^4(x)\,\xi}{\cosh^6(x)}\right.$$

$$\left.+\frac{32\sinh(x)}{\cosh^3(x)} - \frac{48\sinh(x)}{\cosh^5(x)}\right)d\xi$$

Setelah diintegralkan diperoleh:

$$u_2(x,t) = 2\operatorname{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}t - \left(-\frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}t\right)$$

$$+3\left(\frac{1024}{3}\frac{\sinh(x)}{\cosh^5(x)} - \frac{512\sinh(x)}{\cosh^7(x)}\right)t^3$$

$$+3\left(-\frac{128}{\cosh^6(x)} + \frac{160}{\cosh^5(x)}\right)t^2 - 3\frac{16\sinh(x)}{\cosh^5(x)}t$$

$$+\left(-\frac{480\sinh^4(x)}{\cosh^6(x)} + \frac{480\sinh^2(x)}{\cosh^4(x)} - \frac{64}{\cosh^2(x)}\right)t^2$$

$$-\left(-\frac{48\sinh^3(x)}{\cosh^5(x)} + \frac{32\sinh(x)}{\cosh^3(x)}\right)t$$

Atau dapat ditulis ulang

$$u_2(x,t) = 2\,\mathrm{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}t + \left(\frac{64}{\cosh^2(x)} - \frac{96}{\cosh^4(x)}\right)t^2 + \left(\frac{1024\sinh(x)}{\cosh^5(x)} - \frac{1536\sinh(x)}{\cosh^7(x)}\right)t^3 \quad (3.17)$$

Selanjutnya, untuk $n = 2$, maka persamaan (3.10) menjadi

$$u_3(x,t) = u_2(x,t) - \int_0^t \{(u_2(x,\xi))_\xi - 3((u_2(x,\xi)^2)_x + (u_2(x,\xi))_{xxx}\}\,d\xi$$

$$= \left(2\,\mathrm{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}t + \left(\frac{64}{\cosh^2(x)} - \frac{96}{\cosh^4(x)}\right)t^2\right)$$

$$- \int_0^t \frac{\partial}{\partial\xi}\left(2\,\mathrm{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}\xi + \left(\frac{64}{\cosh^2(x)} - \frac{96}{\cosh^4(x)}\right)\xi^2\right)d\xi$$

$$+3\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left(2\,\mathrm{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}\xi + \left(\frac{64}{\cosh^2(x)} - \frac{96}{\cosh^4(x)}\right)\xi^2\right)^2 d\xi$$

$$- \int_0^t \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(2\,\mathrm{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}\xi + \left(\frac{64}{\cosh^2(x)} - \frac{96}{\cosh^4(x)}\right)\xi^2\right)d\xi$$

Berikutnya diperoleh

$$u_3(x,t) = \left(2\,\mathrm{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}t + \left(\frac{64}{\cosh^2(x)} - \frac{96}{\cosh^4(x)}\right)t^2\right)$$

$$- \int_0^t \frac{\partial}{\partial\xi}\left(2\,\mathrm{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}\xi + \left(\frac{64}{\cosh^2(x)} - \frac{96}{\cosh^4(x)}\right)\xi^2\right)d\xi$$

$$+3\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4}{\cosh^4(x)} - \frac{64\sinh(x)\,\xi}{\cosh^5(x)} + \frac{256\xi^2}{\cosh^4(x)} - \frac{384\xi^2}{\cosh^6(x)}\right.$$

$$+\frac{256\sinh^2(x)\,\xi^2}{\cosh^6(x)} - \frac{2048\sinh(x)\,\xi^3}{\cosh^5(x)}$$

$$+\frac{3072\sinh(x)\,\xi^3}{\cosh^7(x)} + \frac{4096\xi^4}{\cosh^4(x)} - \frac{12288\xi^4}{\cosh^6(x)}$$

$$\left.+\frac{9216\xi^4}{\cosh^8(x)}\right)d\xi$$

$$-\int_0^t \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(-\frac{2}{\cosh^2(x)} - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}\xi\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{64}{\cosh^2(x)} + \frac{96}{\cosh^4(x)}\right)\xi^2\right)d\xi$$

Setelah diintegralkan menjadi

$$u_3\,(x,t) = \left(2\,\mathrm{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}t + \left(\frac{64}{\cosh^2(x)} - \frac{96}{\cosh^4(x)}\right)t^2\right)$$

$$+\left(\frac{64}{\cosh^2(x)} - \frac{96}{\cosh^4(x)}\right)t^2 - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}t - \frac{48\sinh(x)}{\cosh^5(x)}t$$

$$+\left(-\frac{480\sinh^2(x)}{\cosh^6(x)} + \frac{96}{\cosh^4(x)}\right)t^2$$

$$+\left(-\frac{1536\sinh^3(x)}{\cosh^7(x)} + \frac{2304\sinh(x)}{\cosh^7(x)} - \frac{512\sinh(x)}{\cosh^5(x)}\right)t^3$$

$$+\left(-\frac{1536}{\cosh^4(x)} + \frac{7680\sinh^2(x)}{\cosh^6(x)} + \frac{2304}{\cosh^6(x)}\right.$$

$$\left.-\frac{16128\sinh^2(x)}{\cosh^8(x)}\right)t^4$$

$$+\left(-\frac{49152}{5}\frac{\sinh(x)}{\cosh^5(x)}+\frac{22184}{5}\frac{\sinh(x)}{\cosh^7(x)}-\frac{22184}{5}\frac{\sinh(x)}{\cosh^9(x)}\right)t^5$$

$$+\left(-\frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}+\frac{48\sinh(x)}{\cosh^5(x)}\right)t$$

$$+\left(\frac{64}{\cosh^2(x)}-\frac{480}{\cosh^4(x)}+\frac{480}{\cosh^6(x)}\right)t^2$$

$$+\left(-\frac{512}{3}\frac{\sinh(x)}{\cosh^3(x)}+\frac{2560\sinh(x)}{\cosh^5(x)}-\frac{3840\sinh^3(x)}{\cosh^7(x)}\right)t^3$$

Sedemikian hingga diperoleh:

$$\begin{aligned} u_3(x,t) &= 2\,\mathrm{sech}^2(x)-\frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}t+\left(\frac{64}{\cosh^2(x)}-\frac{96}{\cosh^4(x)}\right)t^2 \\ &+\left(-\frac{512}{3}\frac{\sinh(x)}{\cosh^3(x)}-\frac{512\sinh(x)}{\cosh^5(x)}\right)t^3 \\ &+\left(-\frac{22528}{\cosh^4(x)}+\frac{152576}{\cosh^6(x)}-\frac{280320}{\cosh^8(x)}+\frac{152064}{\cosh^{10}(x)}\right)t^4 \\ &+\cdots \end{aligned} \tag{3.18}$$

Pada persamaan (3.17) hasil deret dari $u_2(x,t)$ telah menunjukkan suku t^3 namun suku tersebut belum menjadi nilai suku yang benar. Suku t^3 yang sudah benar terdapat pada hasil perhitungan di $u_3(x,t)$. Begitupun dengan suku t^4, suku t^4 yang benar akan dihasilkan oleh perhitungan $u_4(x,t)$. Pada skripsi ini perhitungan dilakukan sampai $u_3(x,t)$.

Langkah 5

Menentukan solusi analitik dari deret yang dihasilkan VIM dengan cara mengidentifikasi bentuk deret yang telah dihasilkan. $u_3(x,t)$ bukan deret geometri karena rasio antar sukunya tidak sama. Deret pada $u_3(x,t)$ akan diidentifikasi menurut ekspansi deret Taylor. Selanjutnya tulis ulang persamaan (3.18) menjadi

$$u_3(x,t) = 2\,\text{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}t + \left(\frac{64}{\cosh^2(x)} - \frac{96}{\cosh^4(x)}\right)t^2$$

$$+\left(-\frac{512}{3}\frac{\sinh(x)}{\cosh^3(x)} - \frac{512\sinh(x)}{\cosh^5(x)}\right)t^3 + \cdots$$

$$= 2\left[\text{sech}^2(x) - \frac{8\sinh(x)}{\cosh^3(x)}t + \frac{32\cosh^2(x) - 48}{\cosh^4(x)}t^2\right.$$

$$\left.-\frac{256}{3}\frac{\sinh(x)\,(\cosh^2(x)+3)}{\cosh^5(x)}t^3 + \cdots\right]$$

$$= 2\left[\text{sech}^2(x) + \frac{\sinh(x)}{\cosh^3(x)}(-4t) + \frac{2\cosh^2(x) - 3}{\cosh^4(x)}(-4t)^2\right.$$

$$\left.-\frac{4}{3}\frac{\sinh(x)\,(\cosh^2(x)+3)}{\cosh^5(x)}(-4t)^3 + \cdots\right]$$

$$= 2\left[\text{sech}^2(x) + \frac{\sinh(x)}{\cosh^3(x)}(-4t) + \frac{1}{2!}\left(\frac{4\cosh^2(x) - 6}{\cosh^4(x)}\right)(-4t)^2\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3!}\frac{8\sinh(x)\,(\cosh^2(x)+3)}{\cosh^5(x)}(-4t)^3 + \cdots\right]$$

$$= 2\left[\text{sech}^2(x) + \frac{\sinh(x)\,\text{sech}^3(x)}{1!}(-4t)\right.$$

$$+\frac{(4\cosh^2(x) - 6)\,\text{sech}^4(x)}{2!}(-4t)^2$$

$$\left.+\frac{8\sinh(x)\,(\cosh^2(x)+3)\,\text{sech}^5(x)}{3!}(-4t)^3 + \cdots\right]$$

$$u_n(x,t) = 2\left[\text{sech}^2(x) + \frac{1}{1!}\frac{d}{dx}(\text{sech}^2(x))(-4t) + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}(\text{sech}^2(x))(-4t)^2\right.$$

$$+\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dx^3}(\text{sech}^2(x))(-4t)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(\text{sech}^2(x))(-4t)^n$$

$$\left.+\cdots\right]$$

Persamaan di atas dapat dituliskan sebagai

$$u_n(x,t) = 2\left[f(x) + \frac{1}{1!}f'(x)(-4t) + \frac{1}{2!}f''(x)(-4t)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)(-4t)^3 + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{n!}f'^n(x)(-4t)^n + \cdots\right]$$

Dengan $f(x) = \operatorname{sech}^2(x)$.

Perhatikan bahwa: Jika $f(x-4t)$,径deretkan disekitar x akan diperoleh

$$f(x-4t) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(-4t) + \frac{f''(x)}{2!}(-4t)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(-4t^3) + \cdots$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa

$$u(x,t) = 2f(x-4t) \tag{3.19}$$

Karena $f(x) = \operatorname{sech}^2(x)$ maka

$$u(x,t) = 2\operatorname{sech}^2(x-4t) \tag{3.20}$$

Langkah 6

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa solusi yang dihasilkan merupakan solusi eksak dari persamaan (3.1). Pembuktian dilakukan dengan mensubtitusikan persamaan (3.14) ke persamaan (3.1)

$$u(x,t)_t - 3\left(\left(u(x,t)\right)^2\right)_x + u(x,t)_{xxx}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(2\operatorname{sech}^2(x-4t)) - 3\left(\frac{\partial}{\partial x}(2\operatorname{sech}^2(x-4t))^2\right) + \frac{\partial^3}{\partial x^3}(2\operatorname{sech}^2(x-4t))$$

$$= 16\operatorname{sech}(x-4t)^2\tanh(x-4t) - 3(-16\operatorname{sech}^4(x-4t)\tanh(x-4t))$$
$$+ 16\operatorname{sech}(-x+4t)^2\tanh(-x+4t)^3$$
$$- 32\operatorname{sech}(-x+4t)^2\tanh(-x+4t)\,(-1+\tanh(-x+4t)^2)$$

$$= 16\operatorname{sech}^2(x-4t)\tanh(x-4t) - 48\operatorname{sech}^4(x-4t)\tanh(x-4t)$$
$$- 16\operatorname{sech}(-x+4t)^2\tanh(-x+4t)^3$$
$$- 32\operatorname{sech}(-x+4t)^2\tanh(-x+4t)^3\,(-1+\tanh(-x+4t)^2)$$

$$= \frac{16\sinh(-x+4t)}{\cosh(-x+4t)^3} - \frac{48\sinh(-x+4t)}{\cosh(-x+4t)^5}$$

$$- \frac{16(\cosh(-x+4t)^2 - 1)\sinh(-x+4t)}{\cosh(-x+4t)^5} + \frac{32\sinh(-x+4t)}{\cosh(-x+4t)^5}$$

$$= \frac{16\sinh(-x+4t)}{\cosh(-x+4t)^3} - \frac{16\sinh(-x+4t)}{\cosh(-x+4t)^5}$$

$$- \frac{16(\cosh(-x+4t)^2 - 1)\sinh(-x+4t)}{\cosh(-x+4t)^5}$$

$$= \frac{16\sinh(-x+4t)\cosh(-x+4t)^2 - 16\sinh(-x+4t)}{\cosh(-x+4t)^5}$$

$$- \frac{16(\cosh(-x+4t)^2 - 1)\sinh(-x+4t)}{\cosh(-x+4t)^5}$$

$$= 0$$

Terbukti bahwa solusi VIM (3.20) merupakan solusi eksak untuk persamaan KdV.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa (3.20) juga memenuhi nilai awal (3.16)

$$u(x,t) = 2\,\mathrm{sech}^2(x-4t)$$

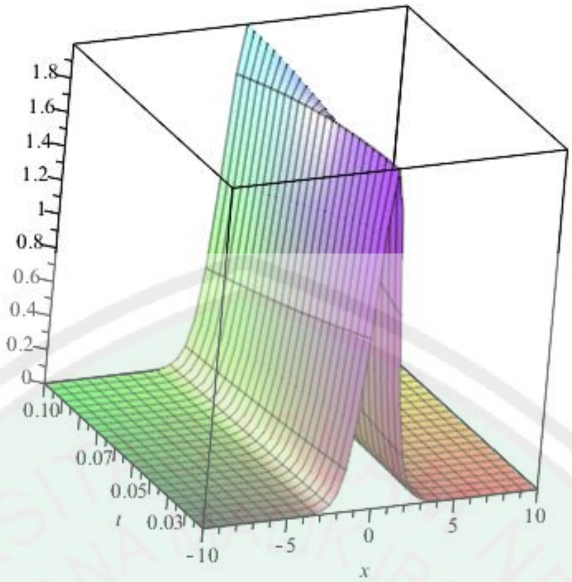
$$u(x,0) = 2\,\mathrm{sech}^2\big(x-4(0)\big)$$

$$= 2\,\mathrm{sech}^2(x)$$

Terbukti bahwa solusi VIM (3.20) memenuhi kondisi awal dari persamaan KdV.

Langkah 7

Mensimulasikan solusi persamaan KdV dengan nilai awal pertama yang didapatkan dengan VIM.Berikut, diberikan plot solusi dari persamaan KdV untuk $u(x,0) = 2\,\mathrm{sech}^2(x)$ dengan $-10 < x < 10$ dan $0.01 < t < 0.1$.



Gambar 3.2 Simulasi Persamaan KdV Nilai Awal Kedua dengan $-10 < x < 10$ dan $0.01 < t < 0.1$.

Dari hasil simulasi tersebut ketika kondisi nilai awal yaitu $u(x, 0) = 2\,\mathrm{sech}^2(x)$, tinggi gelombang ada pada 0 ketika $x = 0$. Prilaku gelombang untuk solusi $u(x, t) = 2\,\mathrm{sech}^2(x - 4t)$ yaitu gelombang terus naik sesuai dengan pertambahan x dan t. Puncak tertinggi gelombang yang didapatkan yaitu sebesar 2.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Adapun kesimpulan yang dapat diambil dari hasil dan pembahasan adalah sebagai berikut:

1. Pada persamaan KdV dengan nilai awal pertama didapatkan
   a. Fungsi korektor metode iterasi variasi menjadi

   $$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(\xi)\{u_n(x,\xi)_\xi - 3(\tilde{u}_n)^2(x,\xi)_x + \tilde{u}_n(x,\xi)_{xxx}\}\,d\xi$$

   b. Nilai pengali Lagrange yang didapatkan menggunakan integral parsial dan teori kalkulus variasi adalah -1.
   c. Pengali lagrange disubstitusikan ke fungsi korektor sehingga didapatkan

   $$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \lambda(\xi)\{u_n(x,\xi)_\xi - 3(\tilde{u}_n)^2(x,\xi)_x + \tilde{u}_n(x,\xi)_{xxx}\}\,d\xi$$

   d. $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$ yang didapatkan dengan nilai awal pertama $u(x,0) = 6x$ adalah

   $u_1(x,t) = 6x(1 + 36t)$,

   $u_2(x,t) = 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 15552t^3)$

$$u_3(x,t) = 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 15552t^3 + 1119744t^4 + 20155392t^5)$$

$$u_4(x,t) = 6x(1 + 36t + 1296t^2 + 46656t^3 + 1679616t^4 + 60466176t^5 + 2176782336t^6)$$

e. $u_4(x,t)$ merupakan deret geometri karena memiliki rasio yang sama antar sukunya, yaitu $2^2 3^2 t$. Menggunakan formula deret geometri tak hingga didapatkan solusi untuk persamaan KdV pada nilai awal pertama yaitu $u(x,t) = \frac{6x}{1-36t}$.

f. Solusi persamaan KdV pada nilai awal pertama yang diselesaikan dengan metode iterasi variasi adalah solusi analitik.

g. Simulasi dari persamaan KdV pada nilai awal pertama berada pada $-4 < x < 4$ dan $-\frac{1}{36} < t < \frac{1}{36}$.

2. Pada persamaan KdV dengan nilai awal kedua didapatkan

a. Fungsi korektor metode iterasi variasi menjadi

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda(\xi)\left\{u_n(x,\xi)_\xi - 3(\tilde{u}_n)^2(x,\xi)_x + \tilde{u}_n(x,\xi)_{xxx}\right\} d\xi$$

b. Nilai pengali Lagrange yang didapatkan menggunakan integral parsial dan teori kalkulus variasi adalah -1.

c. Pengali lagrange disubstitusikan ke fungsi korektor sehingga didapatkan

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \lambda(\xi)\left\{u_n(x,\xi)_\xi - 3(\tilde{u}_n)^2(x,\xi)_x + \tilde{u}_n(x,\xi)_{xxx}\right\} d\xi$$

d. $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$ yang didapatkan dengan nilai awal pertama $u(x,0) = 2\,\mathrm{sech}^2(x)$ adalah

$$u_1(x,t) = 2\,\mathrm{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}t$$

$$u_2 = 2\,\mathrm{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}t + \left(-\frac{64}{\cosh^2(x)} + \frac{96}{\cosh^4(x)}\right)t^2 + \left(\frac{-1024\sinh(x)}{\cosh^5(x)} + \frac{1536\sinh(x)}{\cosh^7(x)}\right)t^3$$

$$u_3(x,t) = 2\,\mathrm{sech}^2(x) - \frac{16\sinh(x)}{\cosh^3(x)}t + \left(-\frac{64}{\cosh^2(x)} + \frac{96}{\cosh^4(x)}\right)t^2 + \left(-\frac{512}{3}\frac{\sinh(x)}{\cosh^3(x)} + \frac{512\sinh(x)}{\cosh^5(x)}\right)t^3 + \cdots$$

e. $u_3(x,t)$ bukana deret geometri karena rasio antar sukunya tidak sama, sehingga diidentifikasi deret tersebut menggunakan ekspansi deret taylor. Ekspansi deret taylor menghasilkan solusi $u(x,t) = 2\,\mathrm{sech}^2(x - 4t)$.

f. Solusi persamaan KdV pada nilai awal kedua yang diselesaikan dengan metode iterasi variasi adalah solusi analitik.

g. Simulasi dari persamaan KdV pada nilai awal kedua berada pada $-10 < x < 10$ dan $0.01 < t < 0.1$.

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk menggunakan metode iterasi variasi pada persamaan diferensial parsial (PDP) nonlinear yang lain. Peneliti selanjutnya juga dapat menggunakan metode iterasi variasi yang telah termodifikasi untuk penyelesaian persamaan KdV atau persamaan nonlinier yang lain.

DAFTAR RUJUKAN

Akdi, M. 2013. Numerical KDV equation by the adomian decomposition method. *American Journal of Modern Physiscs*, 111-115.

Alatas, h. 2012. *Dinamika Nonlinier*. Bogor: Departemen Fisika Institut Pertanian Bogor.

Al-Maraghi, A. M. 2012. *Terjemah Tafsir Al-Maraghi 12*. Semarang: CV Toha Putra.

Anton, H. 2012. *Calculus Early Transcendentals*. USA: Laurie Rosatone.

Ath-thabari, A. J. 2009. *Tafsir Ath-Thabari*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Engelbrecht, J. 2015. What is wave motion. In *Questions About Elastic Waves* (pp. 9-19). Switzerland: Springer International Publishing.

Fatoorehchi, H., & Abolghaseimi, H. 2015. The Varitional Iterational Method for Theotrical Investigation of Falling Film Absorbses. *The National Academy of Science*, *38*(1), 67-70.

He, J. H. 1997. A new approach to nonlinier partial equations. *Communication in Nonlinier Science and Numerical Simulations*, *2*(4), 230-235.

He, J. H. 1998. Variational Iteration Method a kind of non linear analytic technique: some examples. *Non- Linear Mechanics*, 699-708.

He, J. H. 2004. Variational principle for some nonlinear partial differential equations with variable coefficients. *Chaos, Solitons & Fractals*, *19*(4), 847-851.

He, J. H. 2007. Variational iteration method- some recent results and new interpretations. *Journal Of Computational And Applied Mathematics*, 3-17.

Hidayati. 2006. *Model Analitik Persamaan Gelombang Nonlinear J.S Russell dan Solusinya melalui Transformasi backlund*. Padang: Universitas Negeri Padang.

Imani, A. k. 2010. *Tafsir Nurul Quran*. Jakarta: Al-Huda.

Jafari, H. 2010. Homotopy Analysis Method for KdV Equations. *Mathematics Subject Classification*, 89-98.

Mantifar, M. d. 2009. The applicationof the modified variational iteration method on the generalized Fisher's equation. *JAMC*, *31*, 165-179.

Neamaty, A., & Darzi, R. 2010. Comparison between the Variational Iteration Method and the Homotopy Pertubation Method for the Sturm-Liouville Differential Equation. *Boundary Value Problem*, 1-14.

Oktavia. 2018. Eksistensi Soliton pada Persamaan Korteweg de Vries. *Jurnal Matematika UNAND*, 9-16.

Saadi, F. 2010. Analyical Solutions of Korteweg-de Vries . *Engineering and Technology International Journal of Physical and Mathematical Sciences*, 1252-1256.

Siahaan, T. F. 2015. Penentuan Gelombang Soliton pada Fiber Bragg Grating dengan Menggunakan Metode Step-Split. *JOM FMIPA*, 212-218.

Straus, W. A. 2008. *Partial Differential Equation An Introduction* . New Jersey: John Willey & Sons, Inc.

Tipler, P. 1998. *Fisika untuk Sains dan Teknik.* Jakarta: Erlangga.

Wazwaz, A. M. 2009. *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory* . Karlskrona: Higher Education Press.

Zabadal, J. R. 2011. Exact Solutions to Korteweg-de Vries Equation Using Split Induced by Scaling., (pp. 1-10). Brazil.

RIWAYAT HIDUP

Dinda Rizki Maulina, lahir di Banyuwangi pada tanggal 18 Juli 1997, Biasa dipanggil Dinda. Kakak dari Muhammad Ragil Zulkifly yang merupakan anak pertama dari 2 bersaudara pasangan Bapak Dalil dan Ibu Yati.

Pendidikan dasarnya ditempuh di SD Muhammadiyah 3 Denpasar, Bali dan lulus pada tahun 2009. Setelah itu, dia melanjutkan sekolah di SMP Muhammdiyah 2 Denpasar, Bali dan lulus tahun 2012. Pendidikan selanjutnya ditempuh di MAN 1 Jembrana, Bali dan lulus tahun 2015. Selanjutnya pada tahun yang sama melanjutkan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang Jurusan Matematika Murni dan tinggal di Griya Kos Elis sejak semester 3.

Selama menjadi mahasiswa telah mengikuti beberapa kompetisi, diantaranya Peningkatan Kompetisi Riset Mahasiswa (PKRM) pada tahun 2018. Selain itu, disela-sela kesibukannya menjadi mahasiswa, dia juga aktif dalam organisasi intra yakni asisten laboratorium dan mengikuti dua komunitas yang ada di jurusan yakni SeMata dan MEC (Mathematic English Club).

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Dinda Rizki Maulina
NIM : 15610001
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Persamaan KdV (Korteweg de Vries) dengan Metode Iterasi Variasi
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si
Pembimbing II : Muhammad Khudzaifah, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	26 November 2018	Revisi Bab I	1.
2.	30 November 2018	Konsultasi Agama Bab I	2.
3.	15 Februari 2019	Konsultasi Bab II	3.
4.	01 Maret 2019	ACC Bab I & Bab II	4.
5.	15 Maret 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	5.
6.	04 April 2019	Konsultasi Bab III	6.
7.	09 April 2019	Konsultasi Bab IV & Abstrak	7.
8.	18 April 2019	Konsultasi Kajian Keagamaan	8.
9.	22 April 2019	ACC Bab III, IV & Abstrak	9.
10.	06 Mei 2019	ACC Kajian Keagamaan	10.
11.	09 Mei 2019	ACC Keseluruhan	11.
12.	09 Mei 2019	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 09 Mei 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001