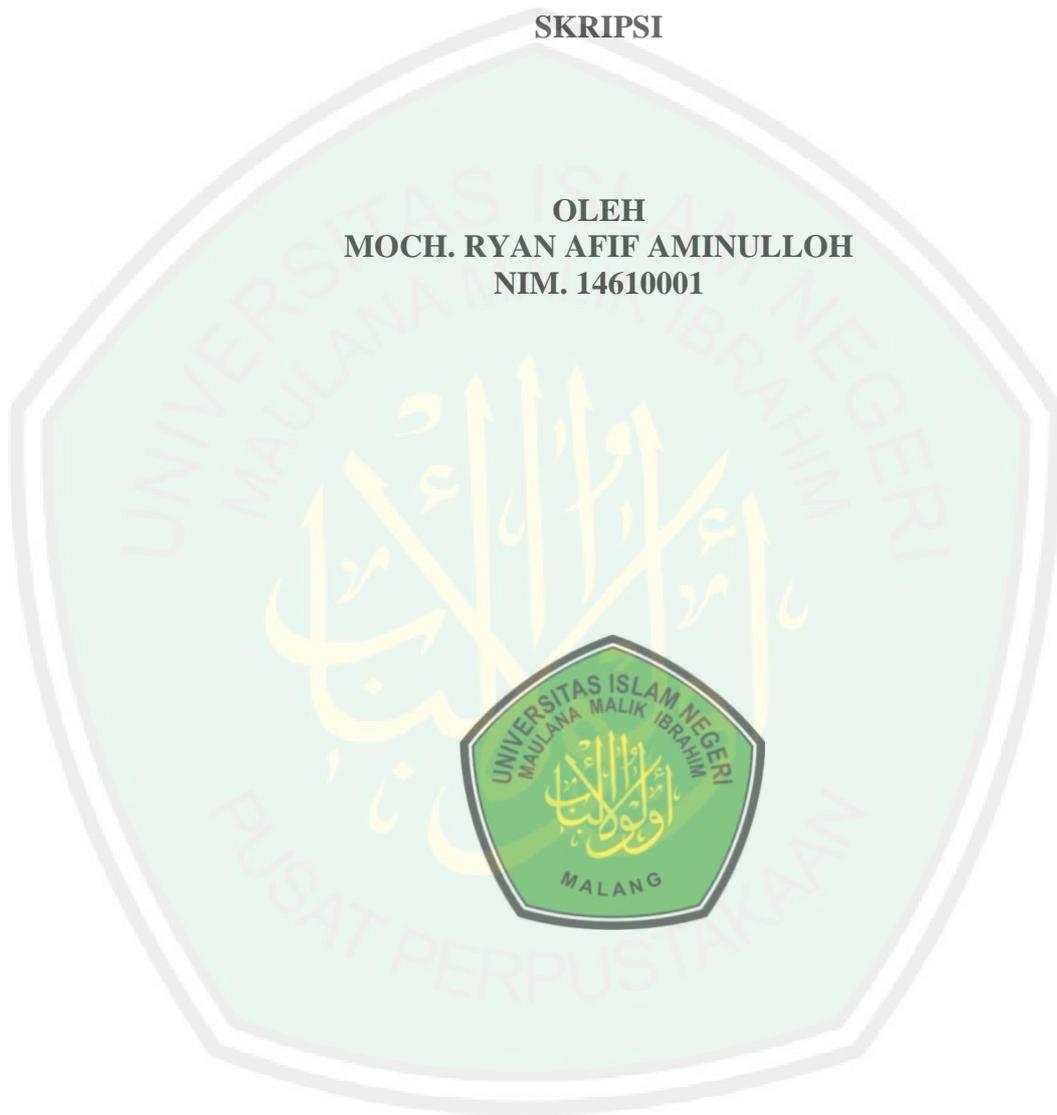


**MINIMAL LABEL TERBESAR DARI PELABELAN TITIK DAN SISI  
 $L(2, 1)$  PADA GRAF PETERSEN  $P(n, 1)$**

**SKRIPSI**

**OLEH  
MOCH. RYAN AFIF AMINULLOH  
NIM. 14610001**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2019**

**MINIMAL LABEL TERBESAR DARI PELABELAN TITIK DAN SISI  
 $L(2, 1)$  PADA GRAF PETERSEN  $P(n, 1)$**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh  
Moch. Ryan Afif Aminulloh  
NIM. 14610001**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2019**

**MINIMAL LABEL TERBESAR DARI PELABELAN TITIK DAN SISI  
 $L(2, 1)$  PADA GRAF PETERSEN  $P(n, 1)$**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Moch. Ryan Afif Aminulloh**  
**NIM. 14610001**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 09 Januari 2019

Penguji Utama : Dr. Abdussakir, M.Pd

Ketua Penguji : Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D

Sekretaris Penguji : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

Anggota Penguji : Juhari, M.Si



Mengetahui  
Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Moch. Ryan Afif Aminulloh

NIM : 14610001

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Minimal Label Terbesar dari Pelabelan Titik dan Sisi  $L(2, 1)$   
pada Graf Petersen  $P(n, 1)$

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 04 Desember 2018  
Yang membuat pernyataan



Moch. Ryan Afif Aminulloh  
NIM. 14610001

## MOTO

الْأَفْضَلُ لِلْمُبْتَدِي وَإِنْ أَحْسَنَ لِلْمُقْتَدِ

*"Lebih utama orang yang memulai dan sesungguhnya orang yang  
melanjutkannya lebih baik"*



## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Kedua orang tua, ayahanda tercinta Sutikno dan ibunda tercinta Mujiah, segenap keluarga penulis yang senantiasa dengan ikhlas mendo'akan, dan memberi nasihat, dan sahabat-sahabat penulis yang senantiasa menemani, membantu, dan memberi dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.



## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Segala puji bagi Allah Swt atas rahmat, taufik, serta hidayah-Nya. Sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Juhari, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

6. Muhammad Nafie Jauhari, M.Si, selaku dosen yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
7. Segenap Sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
8. Bapak Sutikno dan ibu Mujiah yang selalu memberikan do'a, semangat, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
9. Keluarga besar Pondok Sabillurosyad sebagai sahabat dan keluarga yang selalu menemani, membantu, dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
10. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Semoga Allah Swt melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Akhirnya penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca. *Amiin.*

*Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Malang, Desember 2018

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xii
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	xviii
<b>ABSTRAK</b> .....	xix
<b>ABSTRACT</b> .....	xx
<b>ملخص</b> .....	xxi
 <b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	4
1.3 Tujuan Penelitian .....	5
1.4 Manfaat Penelitian .....	5
1.5 Metode Penelitian .....	5
1.6 Sistematika Penulisan .....	6
 <b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Graf .....	7
2.2 Derajat Titik .....	8
2.3 Pelabelan Graf .....	10
2.4 Pelabelan $L(2, 1)$ .....	11
2.5 Berapakah Hasil Pelabelan $L(2, 1)$ pada Beberapa Graf .....	12
2.5.1 Graf Lintasan .....	12
2.5.2 Graf <i>Super Cycle</i> $Sc(n, r)$ untuk $r = 1$ .....	15
2.5.3 Segitiga <i>Sierpinski</i> .....	17
2.6 Graf Petersen .....	20

**BAB III PEMBAHASAN**

3.1	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf Petersen .....	23
3.1.1	Minimal Label Titik $L(2, 1)$ untuk $P(3k, 1); k > 0,$ $k \in \mathbb{Z}$ .....	23
3.1.2	Minimal Label Titik $L(2, 1)$ untuk $P(l + 12k, 1);$ $l = 4, 8; k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ .....	30
3.1.3	Minimal Label Titik $L(2, 1)$ untuk $P(l + 12k, 1);$ $l = 5, 13, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ .....	38
3.1.4	Minimal Label Titik $L(2, 1)$ untuk $P(l + 12k, 1);$ $l = 10, 14, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ .....	46
3.1.5	Minimal Label Titik $L(2, 1)$ untuk $P(l + 12k, 1);$ $l = 7, 11, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ .....	52
3.1	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf Petersen .....	59
3.2.1	Minimal Label Sisi $L(2, 1)$ untuk $P(4k, 1); k \geq 1,$ $k \in \mathbb{Z}$ .....	60
3.2.2	Minimal Label Sisi $L(2, 1)$ untuk $P(5k, 1); k \geq 1,$ $k \in \mathbb{Z}$ .....	65
3.2.3	Minimal Label Sisi $L(2, 1)$ untuk $P(5k + 3, 1); k \geq 2,$ $k \in \mathbb{Z}$ .....	71
3.2.4	Minimal Label Sisi $L(2, 1)$ untuk $P(5k + 4, 1); k \geq 1,$ $k \in \mathbb{Z}$ .....	76
3.2.5	Minimal Label Sisi $L(2, 1)$ untuk $P(5 + 4k, 1); k \geq 1,$ $k \in \mathbb{Z}$ .....	80
3.2.6	Minimal Label Sisi $L(2, 1)$ untuk $P(3, 1) \& P(l + 20k, 1);$ $l = 6, 11, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ .....	86
3.2.7	Minimal Label Sisi $L(2, 1)$ untuk $P(l + 20k, 1); l = 7, 22,$ $k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ .....	90

**BAB IV PENUTUP**

4.1	Kesimpulan .....	94
4.2	Saran .....	94

<b>DAFTAR RUJUKAN</b> .....	95
-----------------------------	----

**LAMPIRAN****RIWAYAT HIDUP**

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Graf $G$ dengan Himpunan Titik dan Sisi .....	7
Gambar 2.2	Graf dengan Derajat Titik .....	9
Gambar 2.3	Pelabelan Titik pada Graf .....	10
Gambar 2.4	Pelabelan Sisi pada Graf .....	11
Gambar 2.5	Pelabelan Total pada Graf .....	11
Gambar 2.6	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada $P_2$ .....	13
Gambar 2.7	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada $P_3$ .....	13
Gambar 2.8	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada $P_4$ .....	14
Gambar 2.9	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $Sc(2, 1)$ .....	15
Gambar 2.10	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $Sc(4, 1)$ .....	16
Gambar 2.11	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $Sc(6, 1)$ .....	17
Gambar 2.12	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Sepasang Subgraf <i>Honai</i> dari $Sc(n, 1)$ .....	17
Gambar 2.13	Pelabelan Sisi $\lambda'_{1,2} (ST_3^0)$ .....	18
Gambar 2.14	Pelabelan Titik Sisi $\lambda'_{1,2} (ST_3^1)$ .....	19
Gambar 2.15	Graf Petersen .....	21
Gambar 3.1	Graf $P(3, 1)$ .....	23
Gambar 3.2	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(3, 1)$ .....	24
Gambar 3.3	Graf $P(6, 1)$ .....	24
Gambar 3.4	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(6, 1)$ .....	25
Gambar 3.5	Graf $P(9,1)$ .....	25
Gambar 3.6	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(9, 1)$ .....	26
Gambar 3.7	Graf $P(12, 1)$ .....	26
Gambar 3.8	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(9,1)$ .....	27
Gambar 3.9	Graf $P(15, 1)$ .....	27
Gambar 3.10	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(15, 1)$ .....	28
Gambar 3.11	Graf $P(3k, 1); k > 0, k \in \mathbb{Z}$ .....	29
Gambar 3.12	Subgraf $P(3k, 1); k > 0, k \in \mathbb{Z}$ , dengan Aturan Pelabelan Titik $L(2, 1)$ .....	29

Gambar 3.13	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(3k, 1)$ ; $k > 0, k \in \mathbb{Z}$ .....	30
Gambar 3.14	Graf $P(4, 1)$ .....	30
Gambar 3.15	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada $P(4, 1)$ .....	31
Gambar 3.16	Graf $P(8, 1)$ .....	31
Gambar 3.17	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(8, 1)$ .....	32
Gambar 3.18	Graf $P(16, 1)$ .....	32
Gambar 3.19	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(16, 1)$ .....	33
Gambar 3.20	Graf $P(20, 1)$ .....	33
Gambar 3.21	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(20, 1)$ .....	34
Gambar 3.22	Graf $P(28, 1)$ .....	34
Gambar 3.23	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(28, 1)$ .....	35
Gambar 3.24	Graf $(32, 1)$ .....	35
Gambar 3.25	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(32, 1)$ .....	36
Gambar 3.26	Graf $P(l + 12k, 1)$ ; $l = 4, 8; k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ .....	37
Gambar 3.27	Subgraf $P(l + 12k, 1)$ ; $l = 4, 8; k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , dengan Aturan Pelabelan Titik $L(2, 1)$ .....	37
Gambar 3.28	$L(2, 1)$ pada Graf $P(l + 12k, 1)$ ; $l = 4, 8; k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ .....	38
Gambar 3.29	Graf $P(5, 1)$ .....	38
Gambar 3.30	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada $P(5, 1)$ .....	39
Gambar 3.31	Graf $P(13, 1)$ .....	39
Gambar 3.32	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(13, 1)$ .....	40
Gambar 3.33	Graf $P(17, 1)$ .....	40
Gambar 3.34	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(17, 1)$ .....	41
Gambar 3.35	Graf $P(25, 1)$ .....	41
Gambar 3.36	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(25, 1)$ .....	42
Gambar 3.37	Graf $P(29, 1)$ .....	42
Gambar 3.38	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(29, 1)$ .....	43
Gambar 3.39	Graf $P(l + 12k, 1)$ ; $l = 5, 13, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ .....	44
Gambar 3.40	Subgraf $P(l + 12k, 1)$ ; $l = 5, 13, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , dengan Aturan Pelabelan Titik $L(2, 1)$ .....	44

Gambar 3.41	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(l + 12k, 1)$ ; $l = 5, 13, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ .....	45
Gambar 3.42	Graf $P(10, 1)$ .....	45
Gambar 3.43	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada $P(10, 1)$ .....	46
Gambar 3.44	Graf $P(14, 1)$ .....	46
Gambar 3.45	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(14, 1)$ .....	47
Gambar 3.46	Graf $P(22, 1)$ .....	47
Gambar 3.47	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(22, 1)$ .....	48
Gambar 3.48	Graf $P(26, 1)$ .....	48
Gambar 3.49	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(26, 1)$ .....	49
Gambar 3.50	Graf $P(34, 1)$ .....	49
Gambar 3.51	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(34, 1)$ .....	50
Gambar 3.52	Graf $P(l + 12k, 1); l = 10, 14, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ .....	51
Gambar 3.53	Subgraf $P(l + 12k, 1); l = 10, 14, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , dengan Aturan Pelabelan Titik $L(2, 1)$ .....	51
Gambar 3.54	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(l + 12k, 1)$ ; $l = 10, 14, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ .....	52
Gambar 3.55	Graf $P(7, 1)$ .....	52
Gambar 3.56	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada $P(7, 1)$ .....	53
Gambar 3.57	Graf $P(11, 1)$ .....	53
Gambar 3.58	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(11, 1)$ .....	54
Gambar 3.59	Graf $P(19, 1)$ .....	54
Gambar 3.60	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(19, 1)$ .....	55
Gambar 3.61	Graf $P(23, 1)$ .....	55
Gambar 3.62	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(23, 1)$ .....	56
Gambar 3.63	Graf $P(31, 1)$ .....	56
Gambar 3.64	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(31, 1)$ .....	57
Gambar 3.65	Graf $P(l + 12k, 1); l = 7, 11, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ .....	58
Gambar 3.66	Subgraf $P(l + 12k, 1); l = 7, 11, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , dengan Aturan Pelabelan Titik $L(2, 1)$ .....	58

Gambar 3.67	Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf $P(l + 12k, 1)$ ; $l = 7, 11, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ .....	59
Gambar 3.68	Graf $P(4, 1)$ .....	59
Gambar 3.69	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada $P(4, 1)$ .....	60
Gambar 3.70	Graf $P(8, 1)$ .....	60
Gambar 3.71	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(8, 1)$ .....	61
Gambar 3.72	Graf $P(12, 1)$ .....	61
Gambar 3.73	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(12, 1)$ .....	62
Gambar 3.74	Graf $P(16, 1)$ .....	62
Gambar 3.75	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(16, 1)$ .....	63
Gambar 3.76	Graf $P(4k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ .....	63
Gambar 3.77	Subgraf $P(4k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ , dengan Aturan Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ .....	64
Gambar 3.78	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(4k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ .....	64
Gambar 3.79	Graf $P(5, 1)$ .....	65
Gambar 3.81	Graf $P(10, 1)$ .....	65
Gambar 3.82	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(10, 1)$ .....	67
Gambar 3.83	Graf $P(15, 1)$ .....	67
Gambar 3.84	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(15, 1)$ .....	68
Gambar 3.85	Graf $P(5k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ .....	69
Gambar 3.86	Subgraf $P(5k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ , dengan Aturan Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ .....	69
Gambar 3.87	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(5k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ .....	70
Gambar 3.88	Graf $P(13, 1)$ .....	70
Gambar 3.89	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada $P(13, 1)$ .....	71
Gambar 3.90	Graf $P(18, 1)$ .....	71
Gambar 3.91	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(18, 1)$ .....	72
Gambar 3.92	Graf $P(23, 1)$ .....	72
Gambar 3.93	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(23, 1)$ .....	73
Gambar 3.94	Graf $P(5k + 3, 1); k \geq 2; k \in \mathbb{Z}$ .....	74

Gambar 3.95	Subgraf $P(5k + 3, 1); k \geq 2; k \in \mathbb{Z}$ , dengan Aturan Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ .....	74
Gambar 3.96	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(5k + 3, 1); k \geq 2; k \in \mathbb{Z}$ .	75
Gambar 3.97	Graf $P(9, 1)$ .....	75
Gambar 3.98	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(9, 1)$ .....	76
Gambar 3.99	Graf $P(14, 1)$ .....	76
Gambar 3.100	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(14, 1)$ .....	75
Gambar 3.101	Graf $P(19, 1)$ .....	78
Gambar 3.102	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(19, 1)$ .....	79
Gambar 3.103	Graf $P(5k + 4, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ .....	79
Gambar 3.104	Subgraf $P(5k + 4, 1); k \in \mathbb{Z}$ , dengan Aturan Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ .....	80
Gambar 3.105	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(5k + 4, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ .	80
Gambar 3.106	Graf $P(9, 1)$ .....	81
Gambar 3.107	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(9, 1)$ .....	81
Gambar 3.108	Graf $P(13, 1)$ .....	82
Gambar 3.109	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(13, 1)$ .....	82
Gambar 3.110	Graf $P(17, 1)$ .....	83
Gambar 3.111	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(17, 1)$ .....	84
Gambar 3.112	Graf $P(5 + 4k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ .....	84
Gambar 3.113	Subgraf $P(5 + 4k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ , dengan Aturan Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ .....	85
Gambar 3.114	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(5 + 4k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ ..	85
Gambar 3.115	Graf $P(4, 1)$ .....	86
Gambar 3.116	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada $P(3, 1)$ .....	86
Gambar 3.117	Graf $P(6, 1)$ .....	87
Gambar 3.118	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(6, 1)$ .....	87
Gambar 3.119	Graf $P(11, 1)$ .....	87
Gambar 3.120	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada $P(11, 1)$ .....	88
Gambar 3.121	Graf $P(26, 1)$ .....	88

Gambar 3.122	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada $P(26, 1)$ .....	89
Gambar 3.123	Graf $P(7, 1)$ .....	90
Gambar 3.124	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada $P(7, 1)$ .....	90
Gambar 3.125	Graf $P(22, 1)$ .....	91
Gambar 3.126	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(22, 1)$ .....	91
Gambar 3.127	Graf $P(27, 1)$ .....	92
Gambar 3.128	Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf $P(27, 1)$ .....	92



## DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna yaitu sebagai berikut:

$V(G)$	: Himpunan titik dari graf $G$
$E(G)$	: Himpunan sisi dari graf $G$
$p(G)$	: ( <i>Order</i> ) banyaknya unsur di $V(G)$
$q(G)$	: ( <i>Ukuran</i> ) banyaknya unsur di $E(G)$
$N_G(v)$	: Lingkungan dari $v$
$\deg_G(v)$	: Derajat dari titik $v$
$D(G)$	: Derajat maksimum titik di $G$
$d(G)$	: Derajat minimum
$f$	: Fungsi atau pemetaan
$P_{n,1}$	: Graf Petersen
$ST_p^n$	: Segitiga <i>Sierpinski</i>
$P_n$	: Graf <i>Path</i>
$Sc(n,r)$	: Graf <i>Super Cycle</i> dengan $n$ <i>Cycle</i> dan $r$ hanoi
$\lambda_{2,1}$	: Minimal label terbesar pada pelabelan titik $L(2,1)$
$\lambda'_{2,1}$	: Minimal label terbesar pada pelabelan sisi $L(2,1)$

## ABSTRAK

Aminulloh, Moch Ryan Afif. 2018. **Minimal Label Terbesar dari Pelabelan Titik dan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf Petersen  $P(n, 1)$** . Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, (II) Juhari, M.Si.

**Kata Kunci:** Pelabelan  $L(2, 1)$ , Graf Petersen  $P(n, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  yaitu pada suatu graf  $G$  adalah fungsi  $f$  dari himpunan titik  $V(G)$  ke himpunan semua bilangan non-negatif sehingga  $|f(u) - f(w)| \geq 2$  jika  $d(u, w) = 1$  dan  $|f(u) - f(w)| \geq 1$  jika  $d(u, w) = 2$  (Fatimah, dkk, 2016). Adapun definisi dari pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $G$  adalah suatu fungsi  $f$  dari  $E(G)$  ke bilangan bulat non-negatif sedemikian sehingga  $|f(e_1) - f(e_2)| \geq 1$  jika  $d(e_1, e_2) = 1$ , dan  $|f(e_1) - f(e_2)| \geq 2$  jika  $d(e_1, e_2) = 2$  untuk  $E(G)$  (Widad, 2017).

Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan minimal label terbesar titik dan sisi  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(n, 1)$ . Langkah yang digunakan adalah melabeli setiap titik dan sisi pada graf Petersen  $P(n, 1)$  dengan aturan pelabelan  $L(2, 1)$ . Kemudian dari graf Petersen yang sudah dilabeli dan sudah mendapatkan minimal label terbesar, selanjutnya dibuat suatu konjektur yang dirumuskan menjadi suatu teorema dan dilengkapi dengan bukti.

Hasil penelitian ini dapat menyimpulkan bahwa nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(n, 1)$ . Mendapatkan dua belas teorema untuk  $\lambda_{2,1}(P(n, 1))$  &  $\lambda'_{2,1}(P(n, 1))$ .

## ABSTRACT

Aminulloh, Moch Ryan Afif. 2018. **The Greatest Minimum Label of Vertex and Edge Labeling  $L(2, 1)$  of Petersen graph  $P(n, 1)$** . Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd. (II) Juhari, M.Si.

**Keywords:** Vertex and Edge Labeling  $L(2, 1)$  the Petersen graph

Vertex of labeling  $L(2, 1)$  that is on graph  $G$  is the function  $f$  of the set vertex  $V(G)$  to the set of all non-negative number so that  $|f(u) - f(w)| \geq 2$  jika  $d(u, w) = 1$  dan  $|f(u) - f(w)| \geq 1$  jika  $d(u, w) = 2$  (Fatimah, et al, 2016). With the resolution of labeling vertex edge of labeling  $L(2, 1)$  graph  $G$  is a function  $f$  of  $E(G)$  to non-negative integers so that  $|f(e_1) - f(e_2)| \geq 1$  if  $d(e_1, e_2) = 1$ , and  $|f(e_1) - f(e_2)| \geq 2$  if  $d(e_1, e_2) = 2$  for  $E(G)$  (Widad, 2017).

The purpose of this research is to determine the greatest minimum label of vertex and edge labeling  $L(2, 1)$  the Petersen graph  $P(n, 1)$ . The step used is labeling each vertex and edge on the Petersen graph  $P(n, 1)$  with the labeling rule  $L(2, 1)$ . Then from the Petersen graph which has been labeled and has obtained the greatest minimum label, a conjecture is then made which is formulated into a theorem and equipped with the proof.

The results of this study can conclude that biggest minimum label of vertex and edge labeling  $L(2, 1)$  the Petersen graph  $P(n, 1)$  is as follows. Get twelve theorems for  $\lambda_{2,1}(P(n, 1))$  &  $\lambda'_{2,1}(P(n, 1))$ .

## ملخص

أمين الله ، موتش ريان عفيف. ٢٠١٨. أكبر علامة على الحد الأدنى من علامات الجانبية  $L(2,1)$  في الرسم البياني  $Petersen P(n,1)$  ، بحث جامعي. ثميراشعبة الرياضيات ، كلية العلوم والتكنولوجيا ، جامعة الدولة الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج المشر<sup>(١)</sup> : الحج واهجو هانق إراوان الما جستير<sup>(٢)</sup> جوهار الما جستير .

الكلمات الرئيسية:  $Petersen$  تلون الاوؤس و الأضلاع  $L(2,1)$ 

كان الغرض من هذه الدراسة هو تحديد أكبر حد أدنى روؤس التسمية و أضلاع  $L(2,1)$  في تلون  $Petersen P(n,1)$ . الخطوة المستخدمة هي تسمية كل روؤس و أضلاع على تلون  $Petersen P(n,1)$  مع قاعدة العلامات  $L(2,1)$ . ثم من تلون الذي تم تسميته وحصل على أكبر علامة تجارية ، يتم وضع التخمين الذي تم صياغته في نظرية ومزود بالأدلة. يمكن أن تستنتج نتائج هذه الدراسة أن الحد الأدنى لقيمة تسمية روؤس ووضع العلامات على النحو التالي. لحصول على اثني عشر نظريات  $Petersen P(n,1)$  في تلون  $L(2,1)$  الجانبية  $\lambda_{2,1}(P(n,1))$  و  $\lambda'_{2,1}(P(n,1))$ .

# BAB I

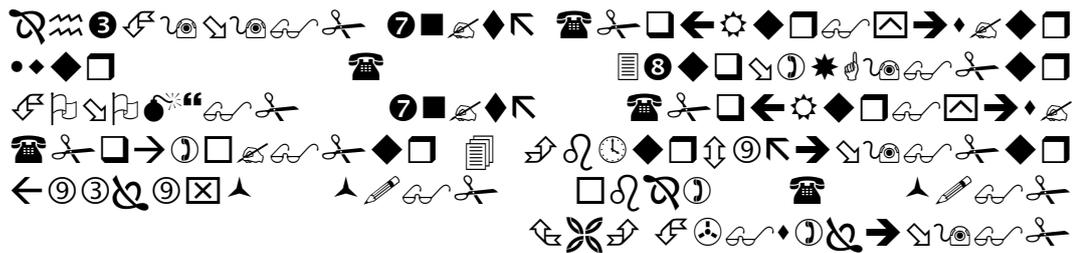
## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu yang mempunyai banyak terapan dalam kehidupan, salah satu cabang ilmu matematika adalah teori graf. Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang banyak dimanfaatkan dalam kehidupan sehari-hari, misalnya dalam pembuatan pemancar radio, dan pengaturan jadwal.

Graf  $G$  adalah pasangan  $(V(G), E(G))$  dengan  $V(G)$  adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan  $E(G)$  adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di  $V(G)$  yang disebut sisi. Banyaknya unsur di  $V(G)$  disebut *order* dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $p(G)$ , dan banyaknya unsur di  $E(G)$  disebut ukuran dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $q(G)$ . Jika graf yang dikaji hanya graf  $G$ , maka *order* dan ukuran dari  $G$  cukup ditulis  $p$  dan  $q$ . Graf dengan *order*  $p$  dan ukuran  $q$  dapat disebut graf  $(p, q)$  (Abdussakir, dkk, 2009: 4).

Implementasi penelitian ini bila dikaitkan dengan al-Quran, maka peneliti mengambil potongan surat al-Ma'idah (5:2), dikarenakan penelitian ini membahas tentang graf. Dalam graf terdapat hubungan antara titik dan sisi yang bila dikaitkan kedalam ayat tersebut menerangkan tentang hubungan antara manusia dengan Allah Swt (*hablumminallah*) dan hubungan antara manusia dengan Allah Swt (*hablumminannas*).



Artinya: *“Dan tolong-menolonglah kamu dalam (mengerjakan) kebajikan dan takwa, dan jangan tolong-menolong dalam berbuat dosa dan pelanggaran. Dan bertakwalah kamu kepada Allah, sesungguhnya Allah amat berat siksa-Nya”* (QS. Al-Ma’idah 5:2).

Dalam Tafsir Ibnu Katsir, menerangkan tentang potongan ayat *“Dan tolong-menolonglah kamu dalam (mengerjakan) kebajikan dan takwa, dan jangan tolong-menolong dalam berbuat dosa dan pelanggaran”*. Maksudnya adalah Allah Swt memerintahkan kepada hamba-hambanya yang beriman untuk saling menolong dalam berbuat kebaikan yaitu kebajikan dan meninggalkan hal-hal yang mungkar, hal ini dinamakan ketakwaan. Allah Swt melarang mereka bantu-membantu dalam kebatilan serta tolong-menolong dalam perbuatan dosa dan hal-hal yang diharamkan. Ibnu Jahir mengatakan bahwa dosa itu adalah meninggalkan apa yang diperintahkan Allah untuk dikerjakan, dan pelanggaran itu artinya melampaui apa yang digariskan oleh Allah dalam agama kalian, serta melupakan apa yang difardukan oleh Allah atas diri kalian dan atas orang lain.

Menurut pendapat ahli tafsir lain, maksud dari potongan ayat di atas adalah *“dan tolong-menolonglah kamu dalam”* mengerjakan kebajikan, melakukan yang diperintahkan Allah, *“dan takwa”* takut kepada larangan-Nya *“dan janganlah tolong menolong dalam berbuat dosa”* melakukan maksiat dan permusuhan, sebab yang demikian itu melanggar hukum-hukum Allah. *“Bertakwalah kepada Allah”* takut kepada Allah dengan melakukan perintah-Nya dan meninggalkan larangan-Nya, karena *“Sungguh Allah sangat berat siksa-Nya”* kepada orang yang tidak taat kepada-Nya.

Pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif. Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik. Jika domainnya sisi, maka disebut pelabelan sisi. Jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (Budiasti, 2010).

Pelabelan titik  $L(2,1)$  yaitu pada suatu graf  $G$  adalah fungsi  $f$  dari himpunan titik  $V(G)$  ke himpunan semua bilangan non-negatif sehingga  $|f(u) - f(w)| \geq 2$  jika  $d(u, w) = 1$  dan  $|f(u) - f(w)| \geq 1$  jika  $d(u, w) = 2$  (Fatimah, dkk, 2016). Adapun definisi dari pelabelan sisi  $L(2,1)$  pada graf  $G$  adalah suatu fungsi  $f$  dari  $E(G)$  ke bilangan bulat non-negatif sedemikian sehingga  $|f(e_1) - f(e_2)| \geq 1$  jika  $d(e_1, e_2) = 1$ , dan  $|f(e_1) - f(e_2)| \geq 2$  jika  $d(e_1, e_2) = 2$  untuk  $E(G)$  (Widad, 2017). Dalam permasalahan ini sangatlah diperlukan algoritma tertentu untuk mempermudah dalam mengerjakannya, sehingga dapat mencari solusi terbaik dari pelabelan tersebut. Salah satu algoritma yang dapat digunakan adalah algoritma *backtracking*. Secara sistematis algoritma ini untuk mencari solusi persoalan di antara semua kemungkinan yang ada, dan hanya mencari ke arah yang mempunyai solusi saja, sehingga waktu pencarian dapat dihemat (Munir, 2005). Untuk mempercepat dalam dengan metode algoritma *backtracking* maka perlu menggunakan bantuan aplikasi, dalam penelitian ini aplikasi yang digunakan adalah Matlab.

Kajian tentang pelabelan  $L(2,1)$  telah dilakukan, di antaranya Lum (2007) membahas mengenai minimal label terbesar dari pelabelan  $L(2,1)$  pada graf derajat maksimum  $\Delta$ . Kemudian Lina Nikmatul Karimah (2012) yaitu membahas pelabelan  $L(2,1)$  pada graf *Super Chycle*. Perbedaan skripsi ini

dengan penelitian sebelumnya yaitu terletak pada jenis domain pelabelan dan graf yang digunakan. Pada penelitian sebelumnya hanya menggunakan domain titik, sedangkan pada penelitian ini menggunakan domain titik dan sisi, dan graf yang digunakan dalam penelitian ini adalah graf Petersen.

Graf Petersen adalah graf dengan  $2n$  titik  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan sisi  $u_i \rightarrow u_{i+1}$ ,  $v_i \rightarrow v_{i+k}$  dan  $u_i \rightarrow v_i$  (Asmiati, 2016). Graf ini mempunyai beberapa keunikan satu graf ini mempunyai  $2n$  titik dan semua titiknya mempunyai derajat yang sama yaitu berderajat tiga, sehingga jika digambarkan membentuk gambar yang teratur. Kemudian dalam indeks buku "*Examples and Counterexamples in Theory Graph*" karangan Copabianco dan Molluzo (1978), graf ini muncul sebanyak sembilan kali sebagai contoh penyangkal maupun sifat unik yang berkaitan dengan macam-macam topik pada teori graf. Maka dari keunikan tersebut, peneliti mengambil graf Petersen sebagai objek untuk diteliti.

Berdasarkan pemaparan tersebut di atas, maka penelitian ini dimaksudkan untuk mencari minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(n, 1)$ .

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, rumusan masalah penelitian ini adalah bagaimana minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(n, 1)$ .

### 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(n, 1)$ .

### 1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat yaitu dapat menentukan minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(n, 1)$ .

### 1.5 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, penulis menggunakan metode studi pustaka, yaitu penelitian yang dilakukan dengan cara mengumpulkan data-data maupun informasi dengan bantuan berbagai macam material seperti buku, catatan, dokumen, jurnal, artikel, dan sebagainya yang berkaitan dengan pembahasan. Penelitian ini meliputi langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi graf Petersen beserta gambarnya  $P((n, 1); n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ .
2. Melabeli setiap titik dan sisi pada graf Petersen  $P(n, 1)$  dengan aturan pelabelan  $L(2, 1)$ .
3. Membuat konjektur (dugaan awal) berdasarkan pola yang ditemukan pada pelabelan titik dan dan sisi pada graf Petersen  $P(n, 1)$ , dengan aturan pelabelan  $L(2, 1)$ .
4. Merumuskan konjektur sebagai suatu teorema.
5. Menghasilkan teorema tentang minimal label titik dan sisi  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(n, 1)$  yang dilengkapi dengan bukti.

Dalam penggunaan algoritma *backtracking*, peneliti hanya mengambil hasil minimal label terbesar dari setiap minimal label titik dan sisi  $P(n, 1)$ , bukan untuk dijadikan sebagai acuan pola pelabelan. Adapun bukti penggunaan algoritma ini tidak diipaparkan dalam penelitian ini, tetapi langkah-langkah penggunaan algoritma ini bisa dilihat dalam lampiran.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan penelitian ini, agar memudahkan dalam pemahaman maka penulis membagi menjadi empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab-subbab. Adapun sistematika penulisan sebagai berikut.

### Bab I Pendahuluan

Pada bab ini, penulis menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

### Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini, penulis menjelaskan tentang konsep atau dasar teori yang mendukung bagian pembahasan yang meliputi definisi, teorema, sifat-sifat serta contoh yang berhubungan dengan pembahasan, dan menjelaskan tentang kajian graf dalam al-Quran.

### Bab III Pembahasan

Pada bab ini, menjelaskan tentang minimal label terbesar titik dan sisi  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(n, 1)$ .

### Bab IV Penutup

Pada bab ini, menyimpulkan hasil penelitian yang telah dilakukan dan saran yang dapat dijadikan sebagai acuan penelitian selanjutnya.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Graf

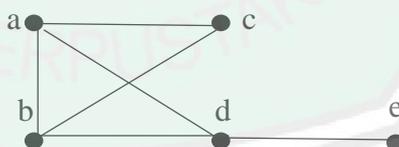
Graf  $G$  adalah pasangan  $(V(G), E(G))$  di mana  $V(G)$  adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan  $E(G)$  adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di  $V(G)$  yang disebut sisi. Banyaknya unsur di  $V(G)$  disebut *order* dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $p(G)$ , dan banyaknya unsur di  $E(G)$  disebut ukuran dari  $G$  dan dilambangkan dengan  $q(G)$ . Jika graf yang dikaji hanya graf  $G$ , maka *order* dan ukuran dari  $G$  cukup ditulis  $p$  dan  $q$ . Graf dengan *order*  $p$  dan ukuran  $q$  dapat disebut graf- $(p, q)$  (Abdussakir, dkk, 2009: 4).

Berikut akan diperlihatkan graf  $G$  yang memuat himpunan titik  $V(G)$  dan himpunan sisi  $E(G)$ .

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}.$$

Graf  $G$  tersebut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 2.1 Graf  $G$  dengan Himpunan Titik dan Sisi

Graf  $G$  memiliki 5 titik sehingga *order*  $G$  adalah  $p = 5$ . Graf  $G$  memiliki 6 sisi sehingga ukuran graf  $G$  adalah  $q = 6$ .

Graf  $G$  dengan himpunan titik dan sisi masing-masing

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$$

dapat ditulis dengan

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

dengan

$$e_1 = (a, b)$$

$$e_2 = (a, c)$$

$$e_3 = (a, d)$$

$$e_4 = (b, d)$$

$$e_5 = (b, c)$$

$$e_6 = (d, e)$$

Sisi  $e = (u, v)$  dikatakan menghubungkan titik  $u$  dan  $v$ . Jika  $e = (u, v)$  adalah sisi di graf  $G$ , maka  $u$  dan  $v$  disebut terhubung langsung (*adjacent*),  $v$  dan  $e$  serta  $u$  dan  $e$  disebut terikat langsung (*incident*), dan titik  $u$  dan  $v$  disebut ujung dari  $e$ . Dua sisi berbeda  $e_1$  dan  $e_2$  disebut terhubung langsung (*adjacent*), jika terkait langsung pada satu titik yang sama (Abdussakir, dkk, 2009: 6).

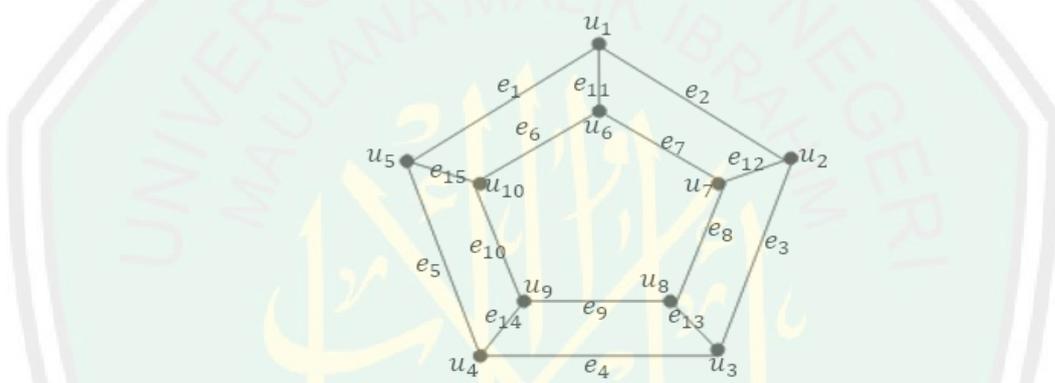
## 2.2 Derajat Titik

Abdussakir, dkk (2009:9) menyatakan bahwa jika  $v$  adalah himpunan titik pada graf  $G$ , maka himpunan semua titik di  $G$  yang terhubung langsung dengan  $v$  disebut lingkungan dari  $v$  dan ditulis  $N_G(v)$ . Derajat dari titik  $v$  di graf  $G$ , ditulis dengan  $\deg_G(v)$ , adalah banyaknya sisi di  $G$  yang terkait langsung dengan  $v$ . Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat suatu graf  $G$ , maka ditulis  $\deg_G(v)$  disingkat menjadi  $\deg(v)$  dan  $N_G(v)$  disingkat menjadi  $N(v)$ . Jika

dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik  $v$  di graf  $G$  adalah banyaknya anggota dalam  $N(v)$ . Jadi,  $\deg(v) = |N(v)|$ .

Titik yang berderajat 0 disebut titik terasing atau titik terisolasi. Titik yang berderajat 1 disebut titik ujung atau titik akhir. Selanjutnya titik yang berderajat genap disebut titik genap dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil. Derajat maksimum titik di  $G$  dilambangkan dengan  $D(G)$  dan derajat minimum titik di  $G$  dilambangkan dengan  $d(G)$  (Abdussakir, dkk, 2009).

Contoh :



Gambar 2.2 Graf dengan Derajat Titik

Berdasarkan Gambar 2.2 diperoleh bahwa:

$$N(u_1) = \{u_2, u_5, v_1\} \quad N(v_1) = \{v_2, v_5, u_1\}$$

$$N(u_2) = \{u_1, u_3, v_2\} \quad N(v_2) = \{v_1, v_3, u_2\}$$

$$N(u_3) = \{u_1, u_4, v_3\} \quad N(v_3) = \{v_2, v_4, v_3\}$$

$$N(u_4) = \{u_3, u_5, v_4\} \quad N(v_4) = \{v_3, v_5, u_4\}$$

$$N(u_5) = \{u_4, u_1, v_5\} \quad N(v_5) = \{v_4, v_1, u_5\}$$

Dengan demikian, derajat masing-masing titik pada Gambar 2.2 adalah

$$\deg(u_1) = 3 \quad \deg(v_1) = 3$$

$$\deg(u_2) = 3 \quad \deg(v_2) = 3$$

$$\deg(u_3) = 3$$

$$\deg(v_3) = 3$$

$$\deg(u_4) = 3$$

$$\deg(v_4) = 3$$

$$\deg(u_5) = 3$$

$$\deg(v_5) = 3$$

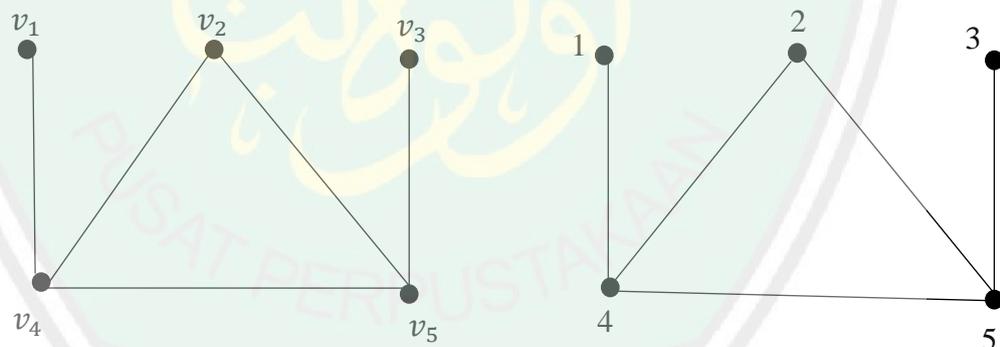
### 2.3 Pelabelan Graf

Hasil penelitian Budiasti (2010) mengatakan bahwa pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (bilangan bulat positif). Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*).

Contoh: Pelabelan Titik

Diberikan graf  $G$  sebagai berikut.

Didefinisikan  $f(v_1) = 1, f(v_2) = 2, f(v_3) = 3, f(v_4) = 4, f(v_5) = 5$

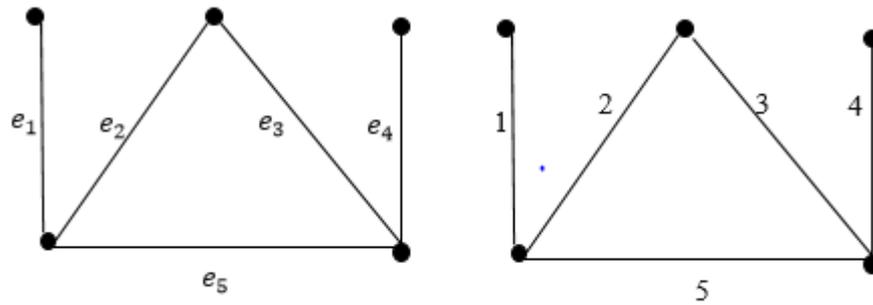


Gambar 2.3 Pelabelan Titik pada Graf

Contoh: Pelabelan Sisi

Diberikan graf  $G$  sebagai berikut.

Didefinisikan  $f(e_1) = 1, f(e_2) = 2, f(e_3) = 3, f(e_4) = 4, f(e_5) = 5$



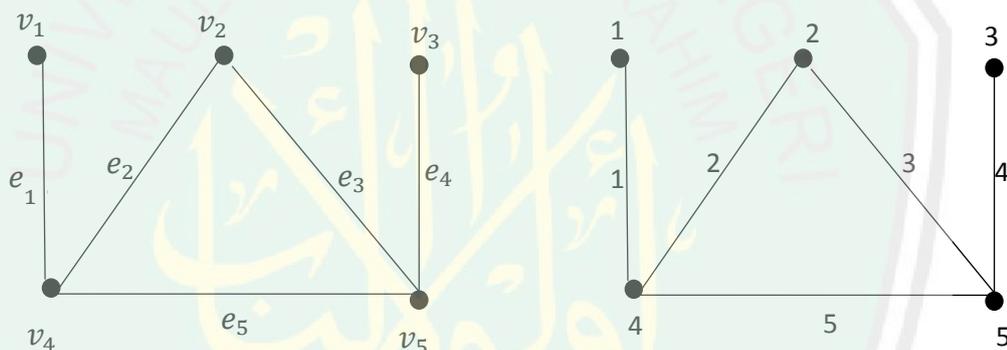
Gambar 2.4 Pelabelan Sisi pada Graf

Contoh: Pelabelan Total

Diberikan graf  $G$  sebagai berikut.

Didefinisikan  $f(v_1) = 1, f(v_2) = 2, f(v_3) = 3, f(v_4) = 4, f(v_5) = 5$

$f(e_1) = 1, f(e_2) = 2, f(e_3) = 3, f(e_4) = 4, f(e_5) = 5$



Gambar 2.5 Pelabelan Total pada Graf

## 2.4 Pelabelan $L(2, 1)$

Konsep pelabelan titik dengan syarat berjarak dua, pertama kali dikemukakan oleh Griggs Roberts pada tahun 1992, yang diperoleh karena adanya permasalahan dari penetapan *transmitter* saluran yang dikemukakan oleh Hale pada tahun 1980. Misal diberikan sejumlah *transmitter* yang harus ditetapkan salurnya pada masing-masing *transmitter*, dalam masalah ini tidak boleh adanya frekuensi yang tumpang tindih. Untuk mengurangi tumpang tindih frekuensi, maka dua buah *transmitter* yang sangat dekat harus diberi saluran dengan minimal

dua. *Transmitter-transmitter* tersebut direpresentasikan menjadi titik-titik graf dan terdapat sisi-sisi yang menghubungkan dua *transmitter*. Dua *transmitter* disebut dekat jika titik-titik yang mempresentasikan dua *transmitter* tersebut minimal dua (Agnarsson & Halldorsson, 2003).

Pelabelan  $L(2,1)$  yaitu pada sebuah graf  $G$  adalah fungsi  $f$  dari himpunan *verteks*  $V(G)$  ke himpunan semua bilangan non-negatif sehingga  $|f(u) - f(w)| \geq 2$  jika  $d(u, w) = 1$  dan  $|f(u) - f(w)| \geq 1$  jika  $d(u, w) = 2$  (Fatimah, dkk, 2016). Apadapun definisi dari pelabelan sisi  $L(2,1)$  pada graf  $G$  adalah suatu fungsi  $f$  dari  $E(G)$  ke bilangan bulat non-negatif sedemikian sehingga  $|f(e_1) - f(e_2)| \geq 1$  jika  $d(e_1, e_2) = 1$ , dan  $|f(e_1) - f(e_2)| \geq 2$  jika  $d(e_1, e_2) = 2$  untuk  $e_1, e_2 \in E(G)$  (Widad, 2017). Pendapat lain dari pelabelan  $L(2,1)$  adalah pelabelan graf dengan titik atau sisi yang berdekatan harus memiliki minimal jarak label minimal dua sedangkan titik atau sisi yang terhubung oleh lintasan dengan panjang dua harus memiliki label yang berbeda dengan selisih minimal satu (Hale, 1998). Minimal label terbesar dari pelabelan  $L(2,1)$  dinotasikan dengan  $\lambda_{2,1}$  (Shao, dkk, 2008). Maka penulis menotasikan untuk minimal label terbesar pada titik adalah  $\lambda_{2,1}$  dan menotasikan untuk minimal label terbesar pada sisi adalah  $\lambda'_{2,1}$ .

## 2.5 Beberapa Hasil Pelabelan $L(2,1)$ pada Beberapa Graf

### 2.5.1 Graf Lintasan

Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari sebuah lintasan tunggal. Graf lintasan dengan  $n$  titik dilambangkan dengan  $P_n$ . Lintasan yang panjangnya  $n$  dari simpul awal  $v_0$  ke simpul tujuan  $v_n$  di dalam graf adalah barisan berselang-seling

simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk  $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ . sedemikian sehingga  $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$  adalah sisi-sisi dari graf (Munir, 2005).

Berikut ini akan dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf lintasan sebagai berikut.



**Gambar 2.6** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada  $P_2$

Dimulai dengan melakukan pelabelan pada salah satu titik dengan label 0. Maka titik berikutnya dilabeli label paling minimal yang mungkin, yaitu 2. Berdasarkan Gambar 2.7 dapat diketahui bahwa  $\lambda_{2,1}(P_2) = 2$ .

Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada  $P_3$  sebagai berikut.



**Gambar 2.7** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada  $P_3$

Pada Gambar 2.7 dapat dilabeli dengan titik yang paling kiri dengan label 0, kemudian yang tengah dengan label 3, dan yang terakhir yang paling kanan dengan label 1. Sehingga,  $\lambda_{2,1}(P_3) \leq 3$ . Diklaim bahwa  $P_3$  tidak dapat dilabeli dengan 0, 1, dan 2. Label 1 tidak dapat digunakan di manapun karena akan bertetangga dengan 0, 1 atau 2, dan semua kemungkinan tersebut bertentangan dengan syarat pelabelan titik  $L(2, 1)$ . Sehingga label yang tersedia hanyalah label 0 dan 2 untuk melabeli tiga titik. Dengan prinsip sarang merpati, dua dari tiga titik tersebut pasti memiliki label yang sama (Lum, 2007).

Sebelum membahas pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada  $P_4$ , diperhatikan lemma berikut.

**Lemma 1.** Jika  $H$  adalah subgraf dari  $G$ , maka  $\lambda_{2,1}(H) \leq \lambda_{2,1}(G)$ .

**Bukti:** Misal  $\lambda_{2,1}(G) = m$  dengan pelabelan sebagai berikut  $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$ . Maka  $g: V(H) \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$ , yang didefinisikan sebagai  $g(v) = f(v)$  untuk setiap  $v \in V(H)$  adalah suatu pelabelan  $H$  yang menggunakan label tidak lebih dari  $m$ . Dengan demikian,  $\lambda_{2,1}(H) \leq m = \lambda_{2,1}(G)$ . Maka dapat dilakukan pelabelan terhadap  $H$  dengan menggunakan pelabelan dari  $G$  pada titik-titik yang bersesuaian (Lum, 2007).

Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada  $P_4$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 2.8** Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada  $P_4$

Karena  $P_3$  adalah subgraf dari  $P_4$ , maka dari lemma 1 dapat diketahui bahwa  $\lambda_{2,1}(P_4) \geq \lambda_{2,1}(P_3) = 3$ .  $P_4$  dapat dilabeli dengan susunan label  $2 - 0 - 3 - 1$ . Sehingga,  $\lambda_{2,1}(P_4) \geq 3$ , artinya  $\lambda_{2,1}(P_4) = 3$ .

**Teorema 1.**  $\lambda_{2,1}(P_n) = 4, \forall n \geq 5$ .

**Bukti:** Sebelumnya, ditunjukkan bahwa  $\lambda_{2,1}(P_5) = 4$ .  $P_5$  dapat dilabeli dengan susunan label  $2 - 0 - 3 - 1 - 4$ . Sehingga,  $\lambda_{2,1}(P_5) \leq 4$ . Diklaim bahwa  $P_5$  tidak dapat dilabeli dengan 0, 1, 2, dan 3. Label 1 dan 2 tidak dapat digunakan untuk melabeli titik-titik yang ujung (titik-titik yang berderajat satu) tanpa melanggar syarat pelabelan  $L(2, 1)$ . Sehingga  $\lambda_{2,1}P_5 = 4$ .

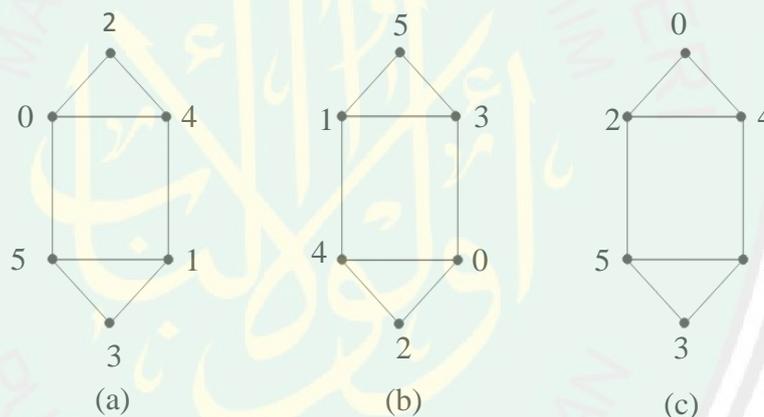
Selanjutnya, ditunjukkan  $\lambda_{2,1}(P_n) = 4$  untuk  $n > 5$ . Misal  $P_n$  adalah suatu lintasan dengan panjang lebih dari 5. Karena  $P_n$  adalah subgraf dari lintasan tersebut, maka  $\lambda_{2,1}(P_n) \geq \lambda_{2,1}(P_5) = 4$ .  $P_n$  dapat dilabeli dengan susunan label

seperti pada  $P_5$  dan dapat diulang-ulang  $(2, 0, 3, 1, 4, 2, 0, 3, \dots)$  tanpa melanggar syarat pelabelan  $L(2, 1)$ . Dengan demikian,  $\lambda_{2,1}(P_n) \leq 4$ . Sehingga, dari dua ketaksamaan tersebut diperoleh  $\lambda_{2,1}(P_n) = 4, \forall n \geq 5$  (Lum, 2007).

### 2.5.2 Graf Super Cycle $Sc(n, r)$ untuk $r = 1$

Graf Super Cycle adalah graf yang diperoleh dari  $C_n$  dengan mengganti semua titiknya menjadi  $Hnr$ , kemudian salah satu titik ujung  $Hnr$  yang berderajat 2 dihubungkan dengan salah satu titik  $Hnr$  lain yang juga berderajat 2 (Jauhari, 2013:17).

Berikut ini dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $Sc(2, 1)$  sebagai berikut.

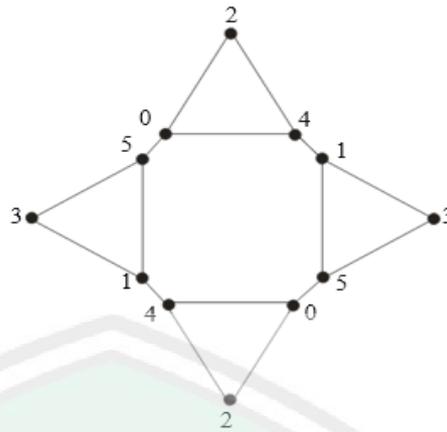


**Gambar 2.9** Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $Sc(2, 1)$

Berdasarkan Gambar 2.9 dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}(Sc(2, 1)) = 5$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $Sc(4, 1)$ . Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $Sc(4, 1)$  mengikuti pola seperti pada Gambar 2.10 bagian (a) kemudian pola tersebut dicopy searah jarum jam. Berikut pelabelan  $L(2, 1)$  pada graf  $Sc(4, 1)$  adalah sebagai berikut.



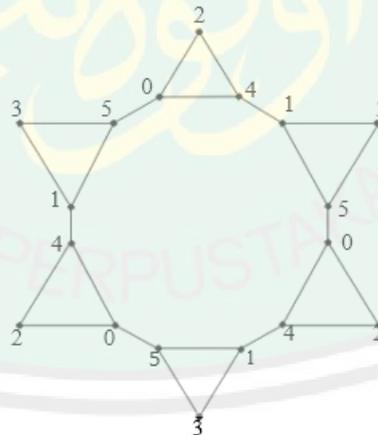
**Gambar 2.10** Pelabelan  $L(2, 1)$  pada Graf  $Sc(4, 1)$

Berdasarkan Gambar 2.10 dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}(Sc(4, 1)) = 5$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $Sc(6, 1)$ .

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $Sc(6, 1)$  mengikuti pola seperti pada Gambar 2.10 bagian (a) kemudian pola tersebut dicopy searah jarum jam. Berikut pelabelan  $L(2, 1)$  pada graf  $Sc(6, 1)$  adalah sebagai berikut.



**Gambar 2.11** Pelabelan  $L(2, 1)$  pada Graf  $Sc(6, 1)$

Berdasarkan Gambar 2.11 dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}(Sc(6, 1)) = 5$$

Berdasarkan data di atas, karena  $\lambda_{2,1}(Sc(2,1)) = 5, \lambda_{2,1}(Sc(4,1)) = 5, \lambda_{2,1}(Sc(6,1)) = 5$ , maka diperoleh dugaan bahwa

$$\lambda_{2,1}(Sc(n,1)) = 5, \text{ untuk } n \text{ genap}$$

Sehingga dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

Untuk sebarang graf *Super Cycle*  $Sc(n,1)$  dengan  $n$  genap, maka minimal label terbesar untuk pelabelan  $L(2,1)$  dari  $Sc(n,1)$  adalah  $\lambda_{2,1}(Sc(n,1)) = 5$ .

**Bukti:** Graf  $Sc(n,1)$  untuk  $n$  genap dapat diambil subgraf Hanoi dan dapat dilabeli sesuai aturan pelabelan  $L(2,1)$  sebagai berikut.



**Gambar 2.12** Pelabelan titik  $L(2,1)$  pada Sepasang Subgraf Hanoi dari  $Sc(n,1)$

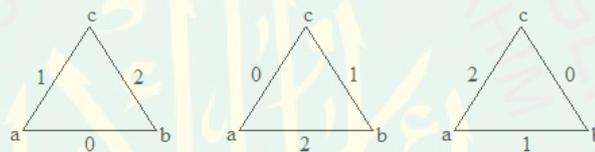
Pelabelan tersebut adalah pelabelan titik  $L(2,1)$ . Sehingga, untuk melabeli  $Sc(n,1)$ , hanya perlu melabeli subgrafnya dengan label 0, 2, 4 dan 1, 3, 5. Kemudian label tersebut dikopi searah jarum jam, seiring bertambahnya  $n$  tanpa perlu menambahkan bilangan baru lagi. Dengan demikian,  $\lambda_{2,1}(Sc(n,1)) = 5$ , untuk  $n$  genap (Karimah, 2016).

### 2.5.3 Segitiga Sierpinski

Hinz, dkk (2016:12) menyatakan bahwa segitiga Sierpinski dilambangkan dengan  $ST_p^n$  dengan  $p = 3$  dan  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Kemudian salah satu cara membangun graf segitiga Sierpinski adalah menggunakan iterasi. Mulai

dengan graf komplit yang memiliki 3 titik,  $ST_3^0 \cong K_3$  dan beri label  $ST_3^0 \cong \hat{T} := \{0, 1, 2\}$ , label ini akan di anggap sebagai 0 satuan panjang.

Berikut ini dilakukan pelabelan sisi  $L(1, 2)$  pada segitiga Sierpinski. Graf  $ST_3^0$  tidak ada sisi yang berjarak dua, sehingga salah satu kemungkinan contoh dalam memberi label  $ST_3^0$  adalah misal  $f(e_i) = x_i, \forall e_i \in E(ST_3^0)$ , label minimal yang mungkin pada graf ini adalah  $f(e_1) < f(e_2) < f(e_3) = x_1 < x_2 < x_3$ . Karena  $d(e_i, e_j) = 1$ , untuk  $i \neq j$ , misalkan label tersebut dimulai dari 0, 1, 2, ... maka  $x_1 < x_2 < x_3 = 0 < 1 < 2$ . Contoh beberapa kemungkinan pelabelan  $L(1, 2)$  graf  $ST_3^0$  pada Gambar 2.13 berikut.

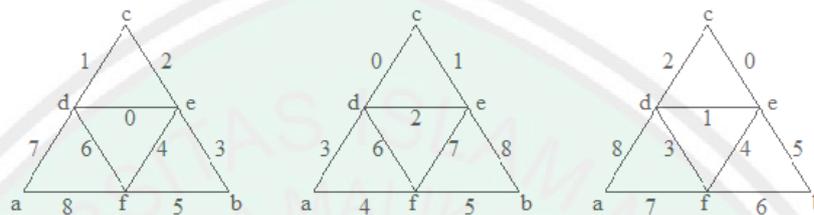


**Gambar 2.13** Pelabelan Sisi  $\lambda'_{1,2}(ST_3^0)$

Nilai minimal label terbesar pelabelan sisi  $L(1, 2)$  graf  $ST_3^0$  ( $\lambda'_{1,2}(ST_3^0)$ ) adalah 2. Selanjutnya, graf  $ST_3^1$  adalah graf Segitiga Sierpinski iterasi pertama. Graf  $ST_3^1$  dengan banyaknya titik adalah enam, banyaknya sisi adalah sembilan, dan jarak terjauh adalah dua. Terdapat sisi yang berjarak satu dan sisi yang berjarak dua pada graf tersebut, maka untuk memberi label graf  $ST_3^1$  dengan cara yang sama dengan pelabelan graf sebelumnya. Label yang mungkin untuk graf  $ST_3^1$ , misal  $f(e_i) = x_i, \forall e_i \in E(ST_3^1)$ , maka  $f(e_1) < f(e_2) < \dots < f(e_9) = x_1 < x_2 < \dots < x_9$  karena  $1 \leq d(e_i, e_j) \leq 2$ , untuk  $i \neq j$ , misalkan label sisi dimulai dari 0, 1, 2, ..., maka  $x_1 < x_2 < \dots < x_9 = 0 < 1 < \dots < 8$ , dalam artian semua label sisi berbeda pada graf ini karena jarak terjauh adalah dua sehingga

memenuhi aturan pelabelan  $L(1, 2)$ . Berdasarkan uraian tersebut label terbesar graf  $ST_3^1$  adalah  $f(e_9) = x_9 = 8$  maka nilai minimal label terbesar  $\lambda'_{1,2}(ST_3^1) = 8$ .

Beberapa contoh kemungkinan pelabelan sisi  $L(1, 2)$  pada graf  $ST_3^1$  pada Gambar 2.14 berikut:



Gambar 2.14 Label Sisi  $\lambda'_{1,2}(ST_3^1)$

Sehingga, nilai minimal label terbesar untuk graf  $ST_3^1$  ( $\lambda'_{1,2}(ST_3^1)$ ) adalah 8. Selanjutnya, graf  $ST_3^2$  adalah graf segitiga Sierpinski iterasi ke dua, graf  $ST_3^2$  memiliki 15 titik dan 27 sisi. Mengikuti langkah yang sama untuk pemberian label graf  $ST_3^2$  dengan pelabelan sebelumnya. Perhatikan setiap sisi yang terhubung langsung dan sisi yang berjarak dua, kemudian berikan label paling minimal yang mungkin sedemikian sehingga memenuhi pelabelan  $L(1, 2)$ , setelah melakukan pengamatan diperoleh hasil nilai minimal label terbesar graf  $ST_3^2$  dengan batas atas adalah 13.

**Teorema 2:** Graf segitiga Sierpinski  $ST_3^n$  untuk  $n \geq 2$ , memiliki nilai minimal label terbesar dari pelabelan sisi  $L(1, 2)$  adalah  $\lambda'_{1,2}(ST_3^n) \leq 13$ .

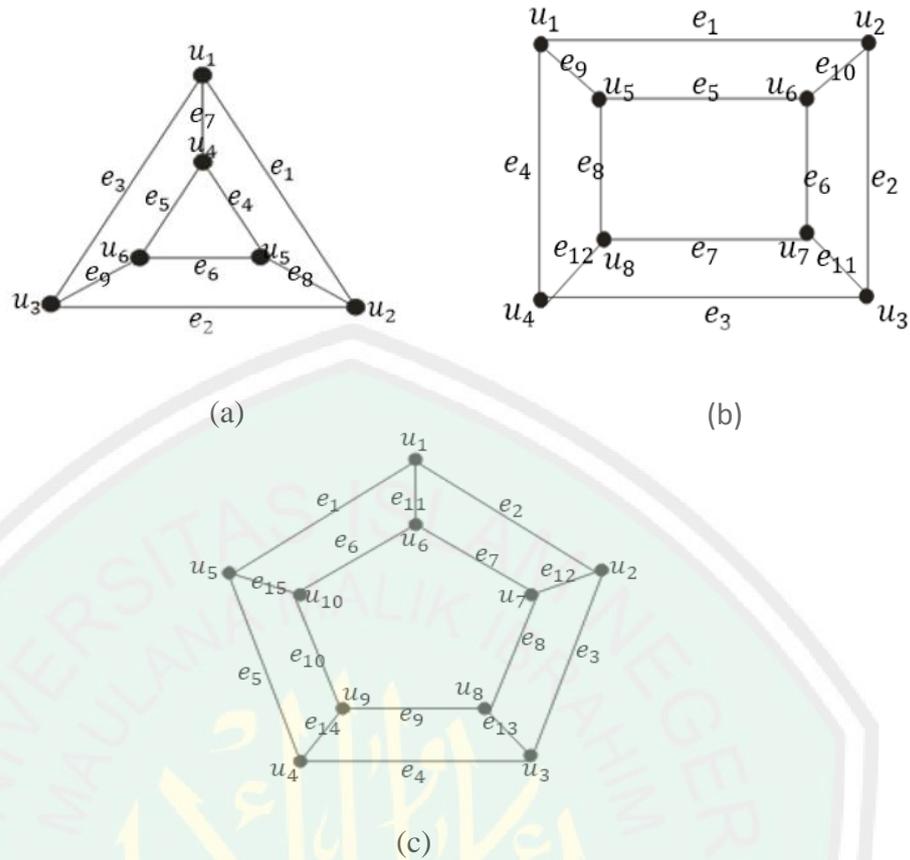
**Bukti:** Berdasarkan definisi yang telah diberikan, yaitu suatu fungsi  $f$  dari  $E(ST_3^n)$  ke bilangan bulat non negatif sedemikian sehingga  $|f(e_1) - f(e_2)| \geq 1$  jika  $d(e_1, e_2) = 1$ , dan  $|f(e_1) - f(e_2)| \geq 2$  jika  $d(e_1, e_2) = 2$  untuk  $e_1, e_2 \in E(ST_3^n)$ , graf segitiga Sierpinski adalah graf yang dibangkitkan dari pada graf

iterasi sebelumnya maka berlaku  $ST_3^0 \subseteq ST_3^1 \subseteq ST_3^2 \subseteq \dots \subseteq ST_3^n$  sedemikian sehingga  $\lambda_{1,2}(ST_3^0) \leq \lambda_{1,2}(ST_3^1) \leq \lambda_{1,2}(ST_3^2) \leq \dots \leq \lambda_{1,2}(ST_3^n)$ . Perhatikan label graf iterasi ke dua ( $ST_3^2$ ) yaitu diperoleh minimal label terbesar adalah 13, karena graf selanjutnya ( $ST_3^3$ ) merupakan graf yang memuat segitiga sebanyak tiga kali lipat dari graf ( $ST_3^2$ ), sehingga label sisi untuk graf  $ST_3^3$  akan lebih besar sama dengan nilai minimal label terbesar graf  $ST_3^2$  dengan cara meletakkan sebarang label  $\{0, 1, 2, \dots, 13\}$  sedemikian sehingga label-label tersebut memenuhi aturan pelabelan  $L(1, 2)$ . Cara yang sama untuk graf  $ST_3^4, ST_3^5, \dots, ST_3^n$ . Hasil pengamatan tersebut diperoleh  $\lambda_{1,2}(ST_3^0) \leq \lambda_{1,2}(ST_3^1) \leq \lambda_{1,2}(ST_3^2) \leq \dots \leq \lambda_{1,2}(ST_3^n)$ , namun pemberian label ini dilakukan secara manual dan diperoleh nilai minimal label terbesar pelabelan sisi  $L(1, 2)$  dengan batas atas adalah 13 untuk graf  $ST_3^n$  untuk  $n \geq 2$ , karena label  $\{0, 1, 2, \dots, 13\}$  akan selalu berlaku untuk graf segitiga Sierpinski iterasi ke empat, lima, dan seterusnya.

## 2.6 Graf Petersen

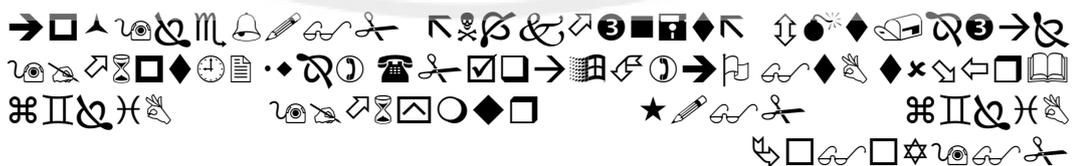
Graf Petersen  $P_{n,k}$  adalah graf dengan  $2n$  titik  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan sisi  $u_i \rightarrow u_{i+1}, v_i \rightarrow v_{i+k}$  dan  $u_i \rightarrow v_i$  (Asmiati, 2016).

Penamaan graf Petersen diambil dari nama Peter Christian Julius Petersen untuk menghargainya, karena telah membuktikan bahwa graf ini tidak terfaktor-1. Graf Petersen sangat populer untuk dipelajari karena keunikannya sebagai contoh penyangkal di banyak tempat dan mempunyai banyak sifat-sifat menarik (Holton dan Sheehan, 1993).



Gambar 2.15 Graf Petersen

Berdasarkan Gambar 2.15 diketahui bahwa gambar (a, b, dan c) mempunyai derajat 3 yang teratur dan mempunyai  $2n$  titik  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \cup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan sisi  $u_i \rightarrow u_{i+1}, v_i \rightarrow v_{i+k}$  dan  $u_i \rightarrow v_i$ . Implementasi graf Petersen bila dikaitkan dengan al-Quran, maka peneliti mengambil surat al-Hujurat (49:112), dikarenakan ayat ini menerangkan tentang *hablumminallah* dan *hablumminannas*.



Artinya: “Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian). (QS. Ali 'Imron 3:112).

Dalam Tafsir Ibnu Katsir, menerangkan tentang potongan ayat “*Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia*”. Maksudnya, adalah Allah menetapkan kehinaan dan rendah diri mereka di manapun mereka berada. Karena itu, hidup mereka tidak merasa aman. Kemudian, pada ayat “*Kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) dan tali (perjanjian) dengan manusia*” maksudnya adalah jaminan keamanan dari orang lain buat mereka, seperti perjanjian perdamaian dan gencatan senjata serta tawanan bila keselamatan dijamin oleh seseorang dari kalangan kaum muslim, sekalipun si penjaminnya adalah seorang wanita muslimah. Demikian pula halnya perihal budak, menurut suatu pendapat dikalangan ulama.

Sehubungan dengan ayat ini Ibnu Abbas mengatakan bahwa “*kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia*” maksudnya adalah janji dengan Allah dan janji dengan manusia. Hal ini yang juga pernah diungkapkan oleh Mujahid, Ikrimah, Ata, Ad-Dahhak, Al-Hasan, Qatadah, As-Saddi, dan Ar-Rabi’ ibnu Anas.

## BAB III

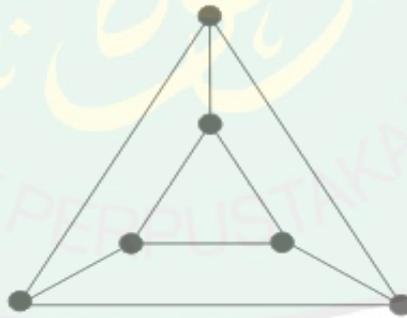
### PEMBAHASAN

#### 3.1 Pelabelan Titik $L(2, 1)$ pada Graf Petersen

Pada bab ini, akan dijelaskan minimal label titik  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(n, 1)$ , sebagaimana dalam menentukannya akan dibagi beberapa pembahasan. Pertama, jika  $n = P(3k, 1)$ ;  $k > 0, k \in \mathbb{Z}$ , kedua adalah jika  $n = P(l + 12k, 1)$ ;  $l = 4, 8; k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , ketiga adalah jika  $n = P(l + 12k, 1)$ ;  $l = 5, 3, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , keempat adalah jika  $n = P(l + 12k, 1)$ ;  $l = 10, 14, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , dan yang terakhir adalah jika  $n = P(l + 12k, 1)$ ;  $l = 7, 11, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ . Dari beberapa pembahasan tersebut digunakan untuk sebarang nilai ( $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ).

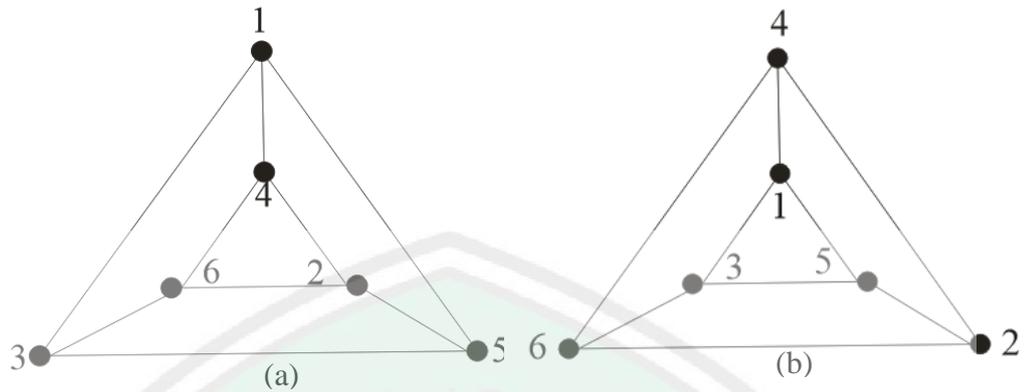
##### 3.1.1 Pelabelan Titik $L(2, 1)$ untuk $P(3k, 1)$ ; $k > 0, k \in \mathbb{Z}$

Berikut ini akan dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(3, 1)$ , yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.1** Graf  $P(3, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(3, 1)$  adalah sebagai berikut.

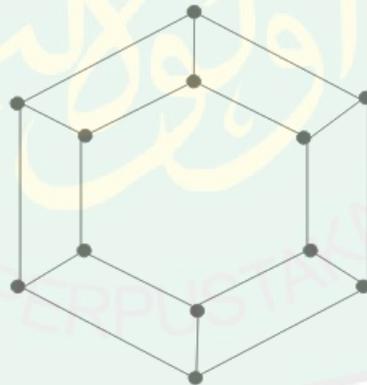


**Gambar 3.2** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada  $P(3, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.2 dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}(P(3, 1)) = 6$$

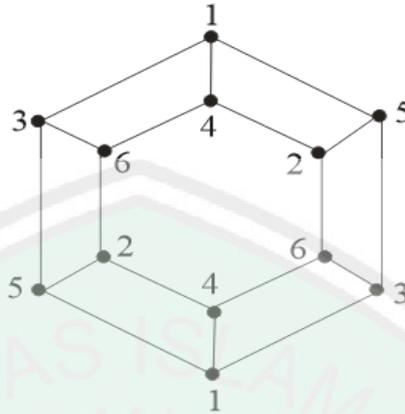
Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(6, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.3** Graf  $P(6, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(6, 1)$  mengikuti seperti Gambar 3.2 bagian (a). Kemudian, label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat

memenuhi titik pada graf  $P(6, 1)$ . Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(6, 1)$  adalah sebagai berikut.

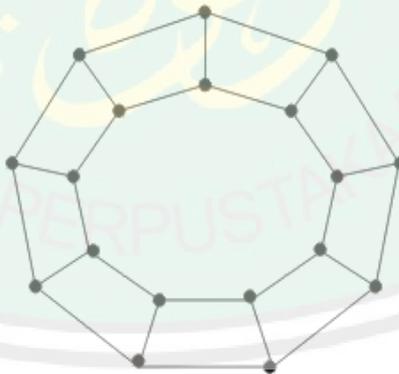


**Gambar 3.4** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(6, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.4 dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}(P(6, 1)) = 6$$

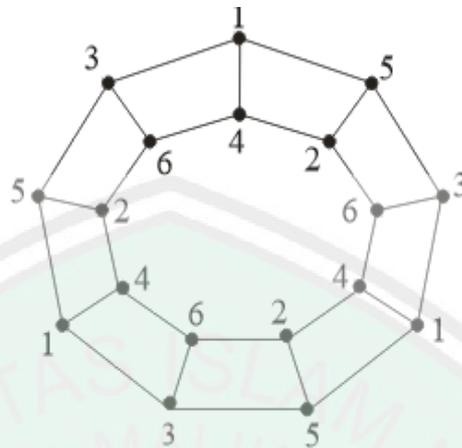
Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(9, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.5** Graf  $P(9, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(9, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.2 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat

memenuhi titik pada graf  $P(9, 1)$ . Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(9, 1)$  adalah sebagai berikut.

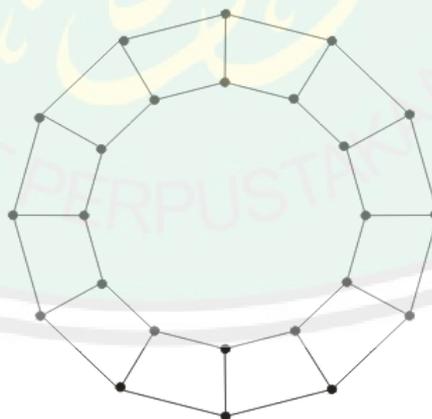


**Gambar 3.6** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(9, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.6 dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}(P(9, 1)) = 6$$

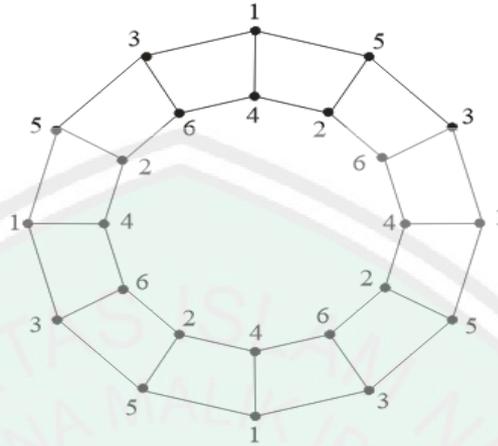
Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(12, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.7** Graf  $P(12, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(12, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.2 bagian (a). Kemudian, label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat

memenuhi titik pada graf  $P(12,1)$ . Berikut pelabelan titik  $L(2,1)$  pada graf  $P(12,1)$  adalah sebagai berikut.

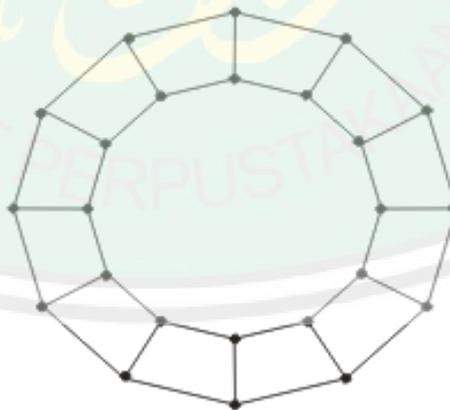


**Gambar 3.8** Pelabelan Titik  $L(2,1)$  pada Graf  $P(9,1)$

Berdasarkan Gambar 3.8 dapat diketahui bahwa

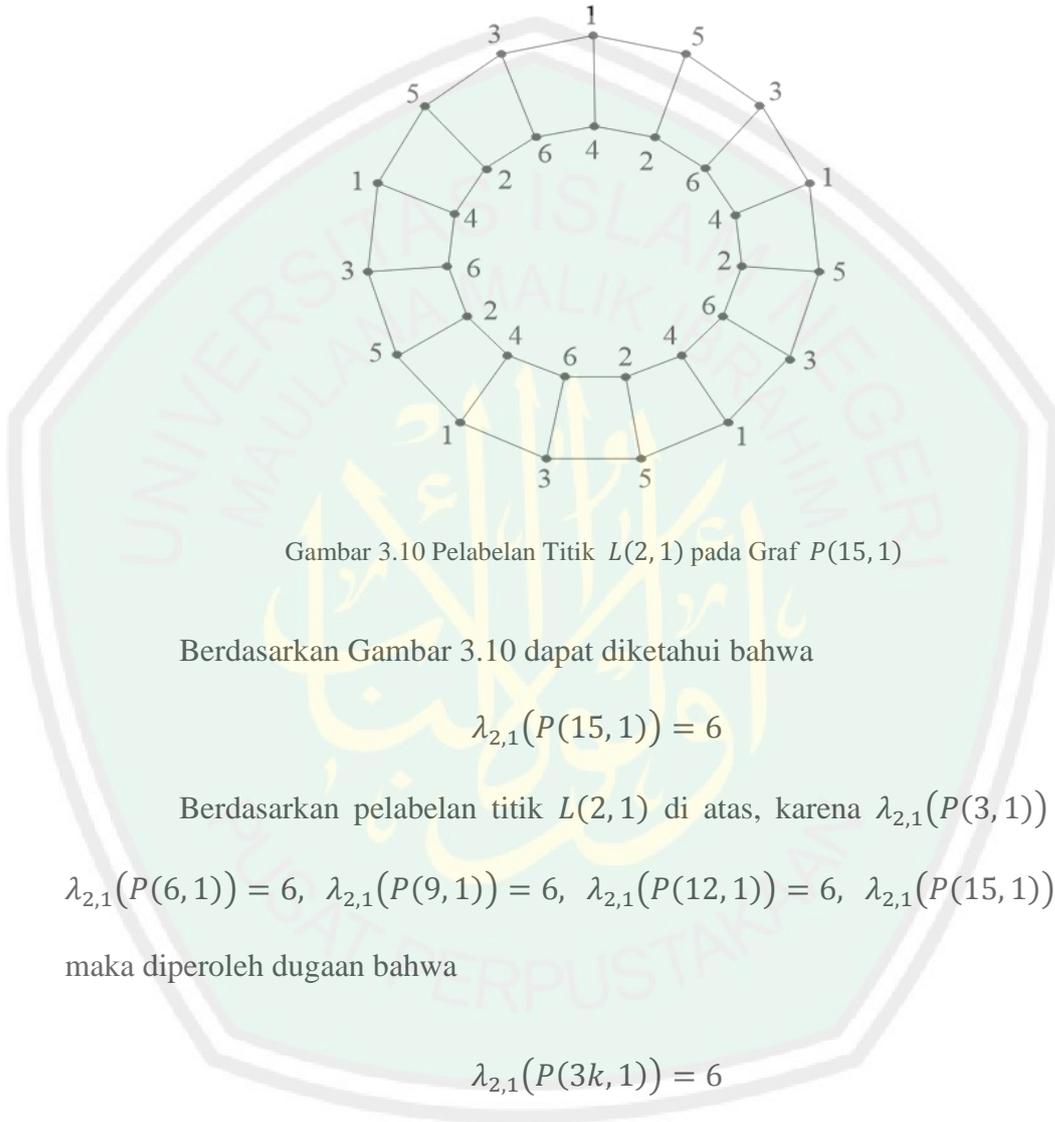
$$\lambda_{2,1}(P(12,1)) = 6$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2,1)$  pada graf  $P(15,1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.9** Graf  $P(15,1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(15, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.2 bagian (a). Kemudian, label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat memenuhi titik pada graf  $P(15, 1)$ . Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(15, 1)$  adalah sebagai berikut.



Gambar 3.10 Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(15, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.10 dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}(P(15, 1)) = 6$$

Berdasarkan pelabelan titik  $L(2, 1)$  di atas, karena  $\lambda_{2,1}(P(3, 1)) = 6$ ,  $\lambda_{2,1}(P(6, 1)) = 6$ ,  $\lambda_{2,1}(P(9, 1)) = 6$ ,  $\lambda_{2,1}(P(12, 1)) = 6$ ,  $\lambda_{2,1}(P(15, 1)) = 6$ , maka diperoleh dugaan bahwa

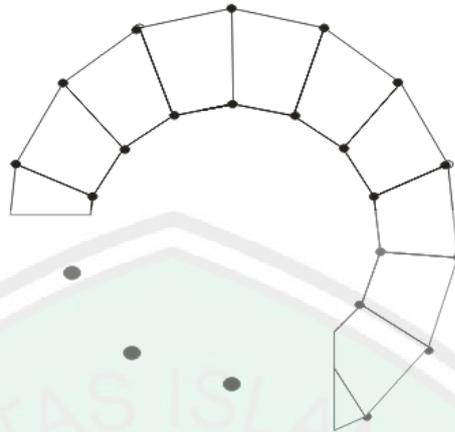
$$\lambda_{2,1}(P(3k, 1)) = 6$$

Sehingga, dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

**Teorema 3.1.1** Untuk sebarang graf  $P(3k, 1)$ ;  $k > 0, k \in \mathbb{Z}$ , maka minimal label

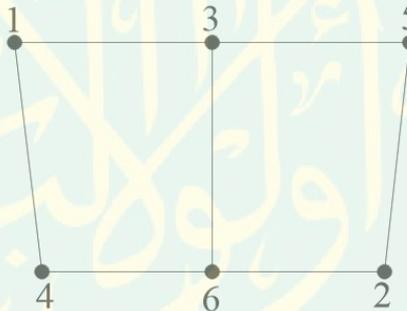
terbesar pada pelabelan titik  $L(2, 1)$  adalah  $\lambda_{2,1}(P(3k, 1)) = 6$ .

**Bukti:** Graf  $P(3k, 1)$ ;  $k > 0, k \in \mathbb{Z}$ , dapat digambarkan sebagai berikut.



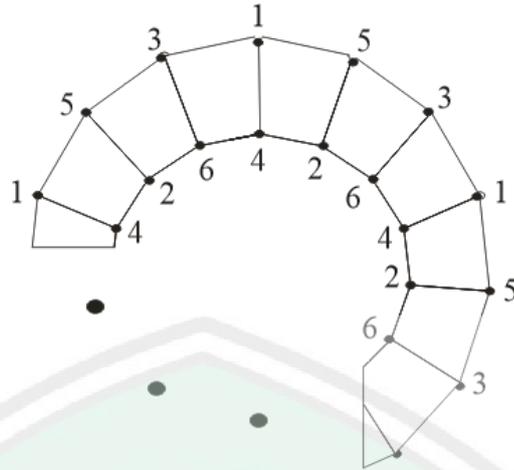
**Gambar 3.11** Graf  $P(3k, 1)$ ;  $k > 0, k \in \mathbb{Z}$

Dari Gambar 3.11 dapat diambil subgrafnya dan dilabeli dengan aturan pelabelan titik  $L(2, 1)$  sebagai berikut.



**Gambar 3.12** Subgraf  $P(3k, 1)$ ;  $k > 0, k \in \mathbb{Z}$ , dengan Aturan Pelabelan Titik  $L(2, 1)$

Pelabelan tersebut adalah pelabelan titik  $L(2, 1)$ . Sehingga, untuk melabeli graf  $P(3k, 1)$ ;  $k > 0, k \in \mathbb{Z}$ , hanya perlu melabeli subgrafnya dengan label 1, 5, 3 dan 4, 2, 6. Kemudian, dari label tersebut dapat melabeli semua titik, seiring bertambahnya  $n$  tanpa perlu menambahkan bilangan baru lagi, maka diperoleh pola sebagai berikut.

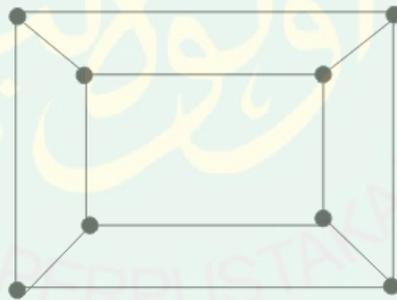


**Gambar 3.13** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(3k, 1)$ ;  $k > 0, k \in \mathbb{Z}$

Dengan demikian,  $\lambda_{2,1}(P(3k, 1)) = 6$

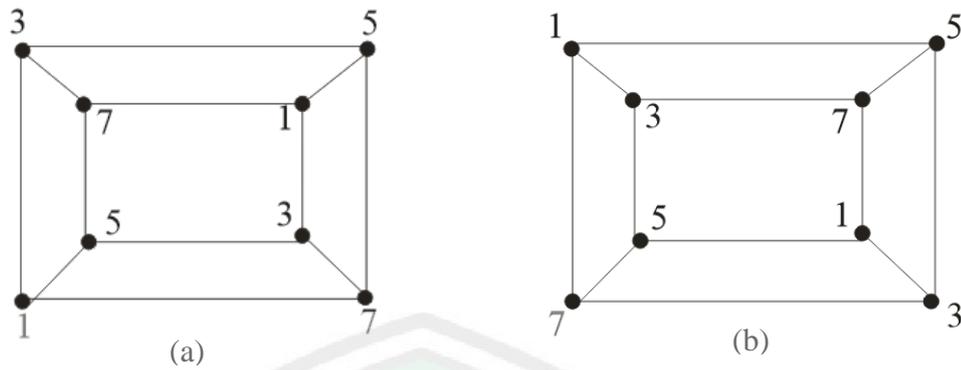
### 3.1.2 Pelabelan Titik $L(2, 1)$ untuk $P(l + 12k, 1)$ ; $l = 4, 8; k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$

Berikut ini akan dilakukan pelabelan  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(4, 1)$ , yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.14** Graf  $P(4, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(4, 1)$  adalah sebagai berikut.

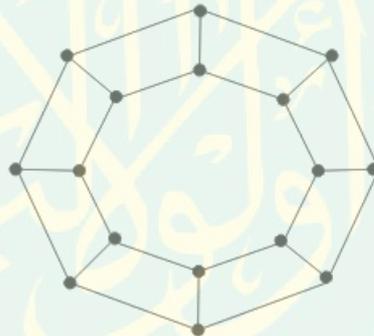


Gambar 3.15 Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada  $P(4, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.15 dapat diketahui bahwa

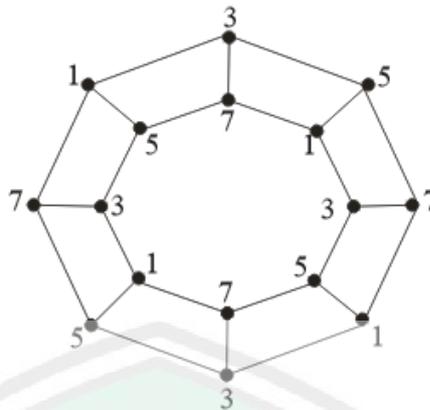
$$\lambda_{2,1}(P(4, 1)) = 7$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(8, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



Gambar 3.16 Graf  $P(8, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(8, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.15 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat memenuhi titik pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(8, 1)$  adalah sebagai berikut.

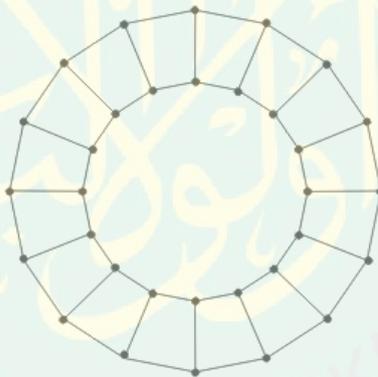


**Gambar 3.17** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(8, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.17 dapat diketahui bahwa

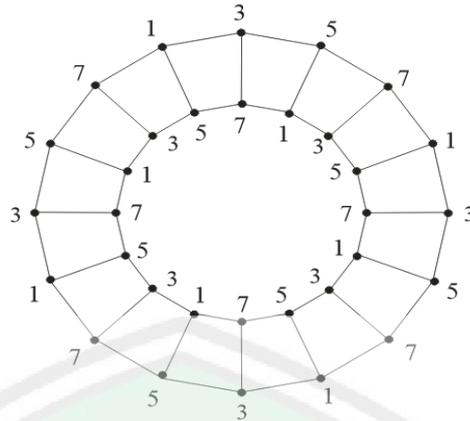
$$\lambda_{2,1}(P(8, 1)) = 7$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(16, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.18** Graf  $P(16, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(16, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.15 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat memenuhi titik pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(16, 1)$  adalah sebagai berikut.

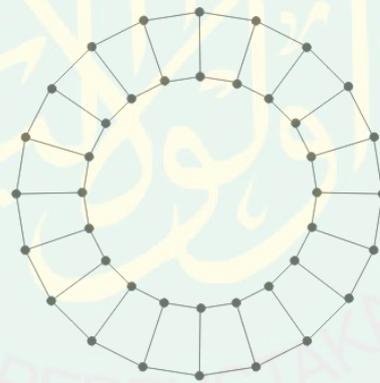


Gambar 3.19 Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(16, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.19 dapat diketahui bahwa

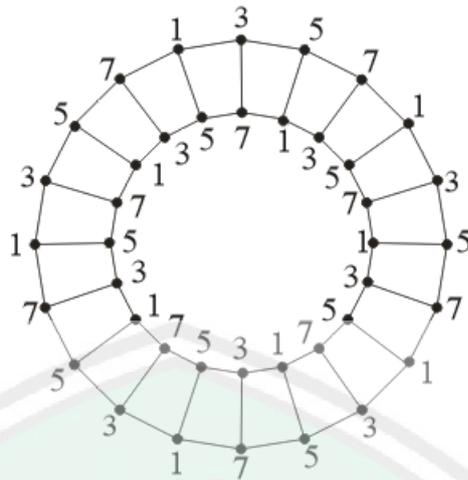
$$\lambda_{2,1}(P(16, 1)) = 7$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan  $L(2, 1)$  pada graf  $P(20, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



Gambar 3.20 Graf  $P(20, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(20, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.15 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat memenuhi titik pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(20, 1)$  adalah sebagai berikut.

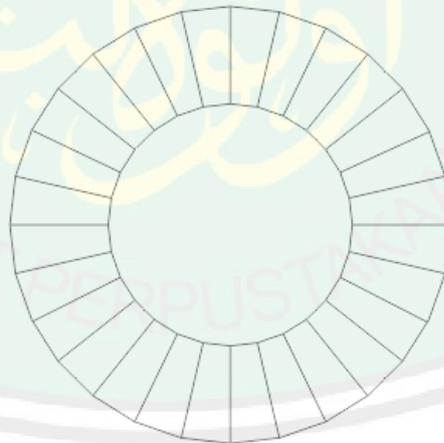


**Gambar 3.21** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(20, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.21 dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}(P(20, 1)) = 7$$

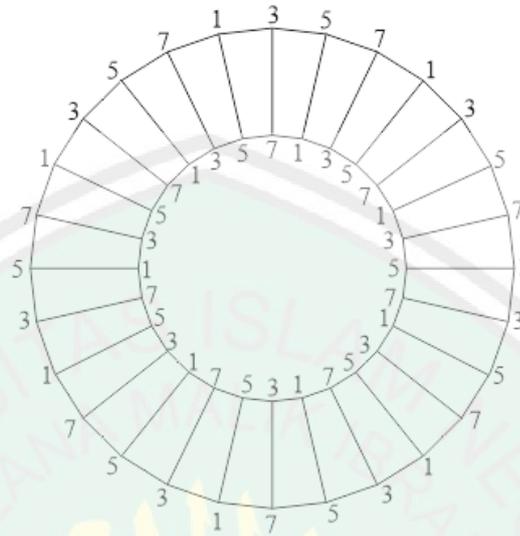
Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(28, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.22** Graf  $P(28, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(28, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.15 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat

memenuhi titik pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(28, 1)$  adalah sebagai berikut.

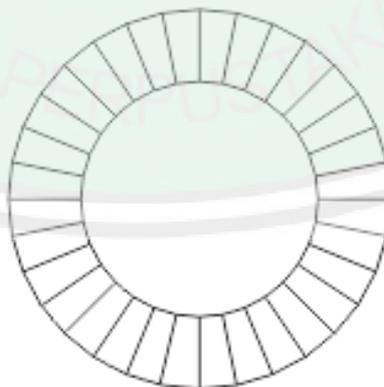


**Gambar 3.23** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(28, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.23 dapat diketahui bahwa

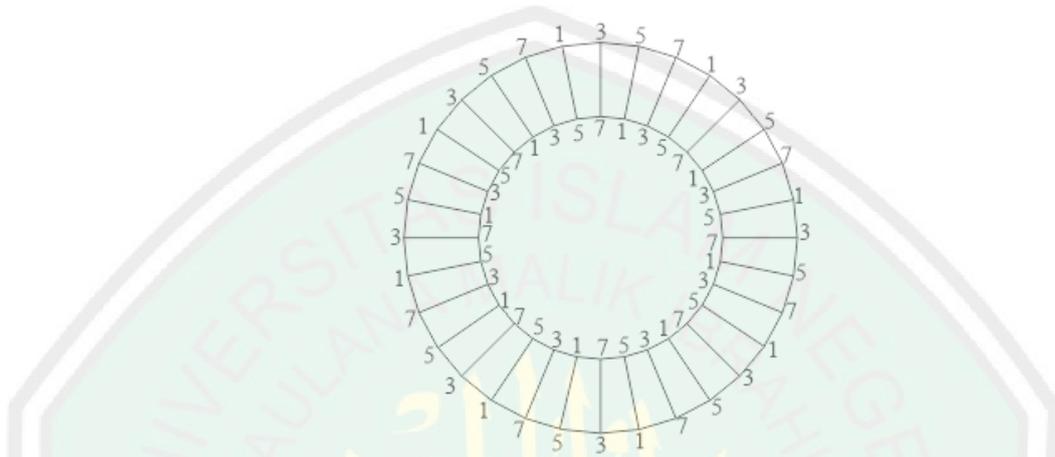
$$\lambda_{2,1}(P(28, 1)) = 7$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(32, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.24** Graf  $P(32, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(32, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.15 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat memenuhi titik pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(32, 1)$  adalah sebagai berikut.



Gambar 3.25 Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(32, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.25 dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}(P(32, 1)) = 7$$

Berdasarkan pelabelan titik  $L(2, 1)$  di atas, karena  $\lambda_{2,1}(P(4, 1)) = 7$ ,  $\lambda_{2,1}(P(8, 1)) = 7$ ,  $\lambda_{2,1}(P(16, 1)) = 7$ ,  $\lambda_{2,1}(P(20, 1)) = 7$ ,  $\lambda_{2,1}(P(28, 1)) = 7$ ,  $\lambda_{2,1}(P(32, 1)) = 7$  maka diperoleh dugaan bahwa

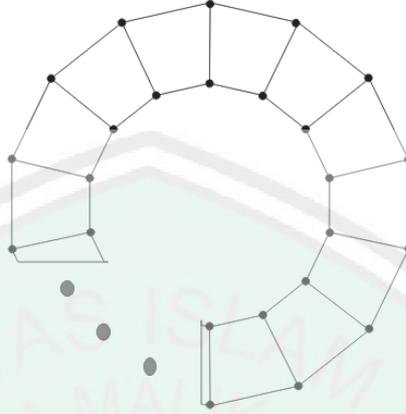
$$\lambda_{2,1}(P(l + 12k, 1)) = 7$$

Sehingga, dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

**Teorema 3.1.2** Untuk sebarang graf  $P(l + 12k, 1); l = 4, 8; k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , maka minimal label terbesar pada pelabelan titik  $L(2, 1)$  adalah

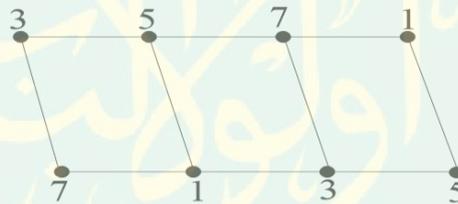
$$\lambda_{2,1}(P(l + 12k, 1)) = 7$$

**Bukti:** Graf  $P(l + 12k, 1); l = 4, 8; k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , dapat digambarkan sebagai berikut.



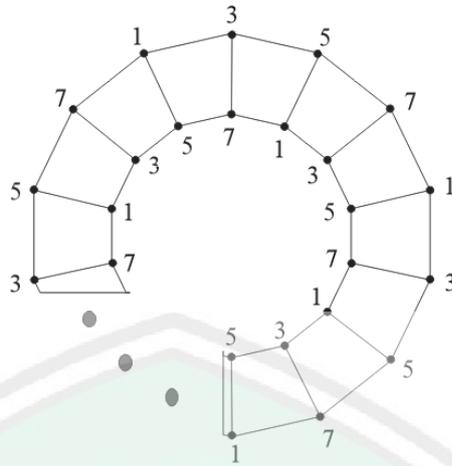
**Gambar 3.26** Graf  $P(l + 12k, 1); l = 4, 8; k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$

Dari Gambar 3.26 dapat diambil subgrafnya dan dilabeli dengan aturan pelabelan titik  $L(2, 1)$  sebagai berikut.



**Gambar 3.27** Subgraf  $P(l + 12k, 1); l = 4, 8; k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , dengan Aturan Pelabelan Titik  $L(2, 1)$

Pelabelan tersebut adalah pelabelan titik  $L(2, 1)$ . Sehingga, untuk melabeli  $P(l + 12k, 1); l = 4, 8; k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$  hanya perlu melabeli subgrafnya dengan label 3, 5, 7, 1 dan 7, 1, 3, 5. Kemudian, label tersebut dikopi searah jarum jam, seiring bertambahnya  $n$  tanpa perlu menambahkan bilangan baru lagi, sehingga diperoleh pola sebagai berikut.

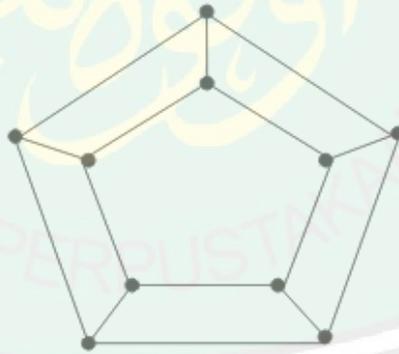


**Gambar 3.28**  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(l + 12k, 1)$ ;  $l = 4, 8$ ;  $k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$

Dengan demikian,  $\lambda_{2,1}(P(l + 12k, 1)) = 7$

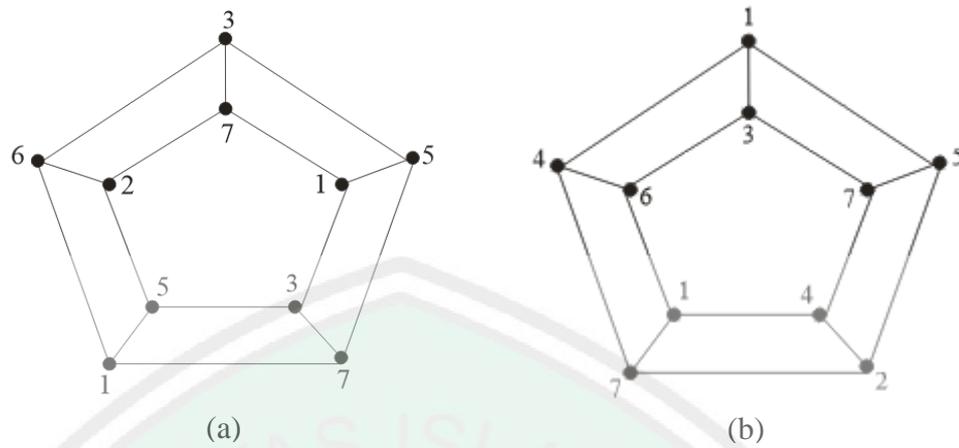
**3.1.3 Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  untuk  $P(l + 12k, 1)$ ;  $l = 5, 13, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$**

Berikut ini akan dilakukan pelabelan  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(5, 1)$ , yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.29** Graf  $P(5, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada  $(5, 1)$  adalah sebagai berikut.

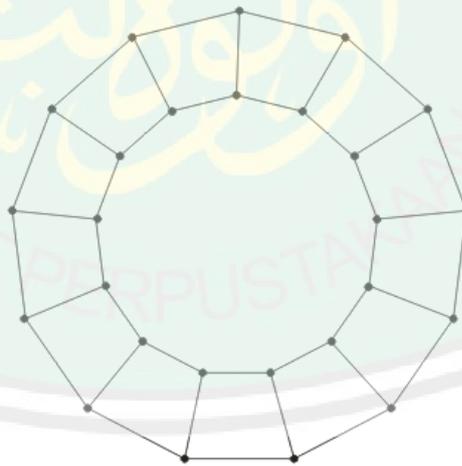


**Gambar 3.30** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada  $P(5, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.30 dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}(P(5, 1)) = 7$$

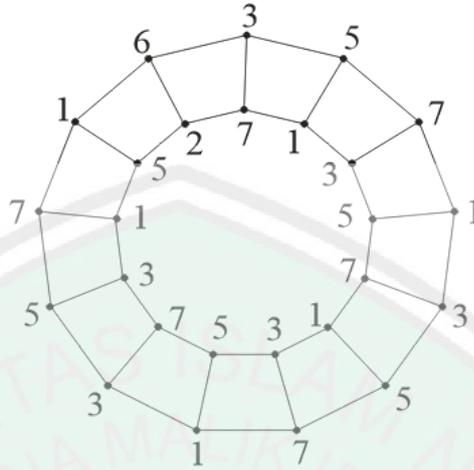
Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(13, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.31** Graf  $P(13, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(13, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.30 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat

memenuhi titik pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(13, 1)$  adalah sebagai berikut.

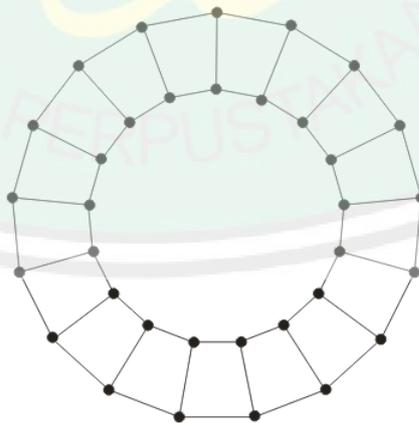


**Gambar 3.32** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(13, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.32 dapat diketahui bahwa

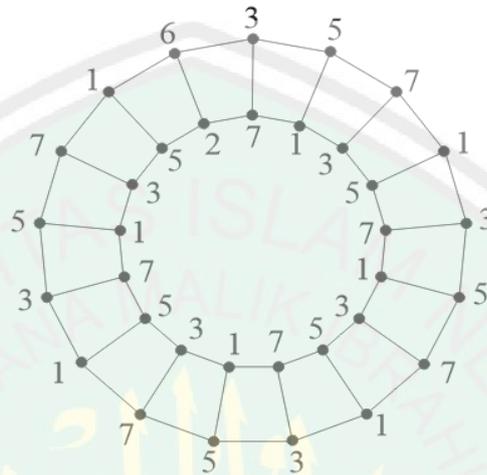
$$\lambda_{2,1}(P(13, 1)) = 7$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(17, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.33** Graf  $P(17, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(17, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.30 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat memenuhi titik pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(17, 1)$  adalah sebagai berikut.

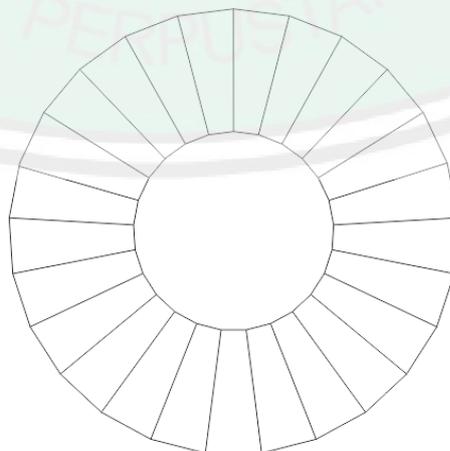


**Gambar 3.34** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(17, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.34 dapat diketahui

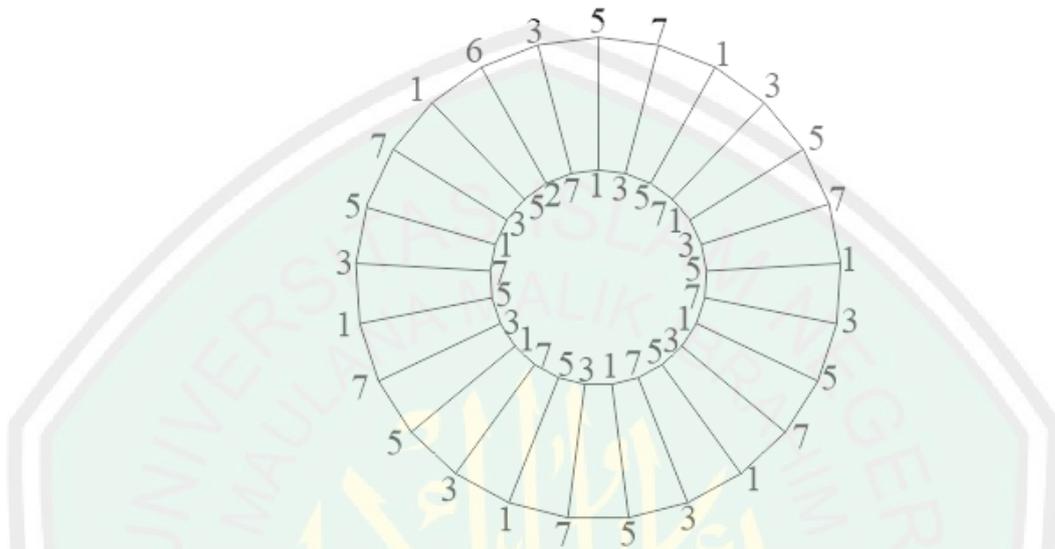
$$\lambda_{2,1}(P(17, 1)) = 7$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(25, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.35** Graf  $P(25, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(25, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.30 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat memenuhi titik pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(25, 1)$  adalah sebagai berikut.

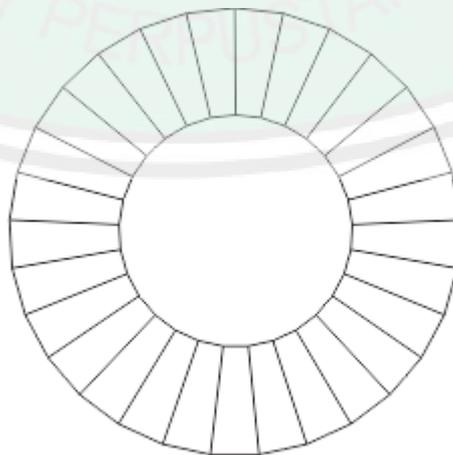


**Gambar 3.36** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(25, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.36 dapat diketahui bahwa

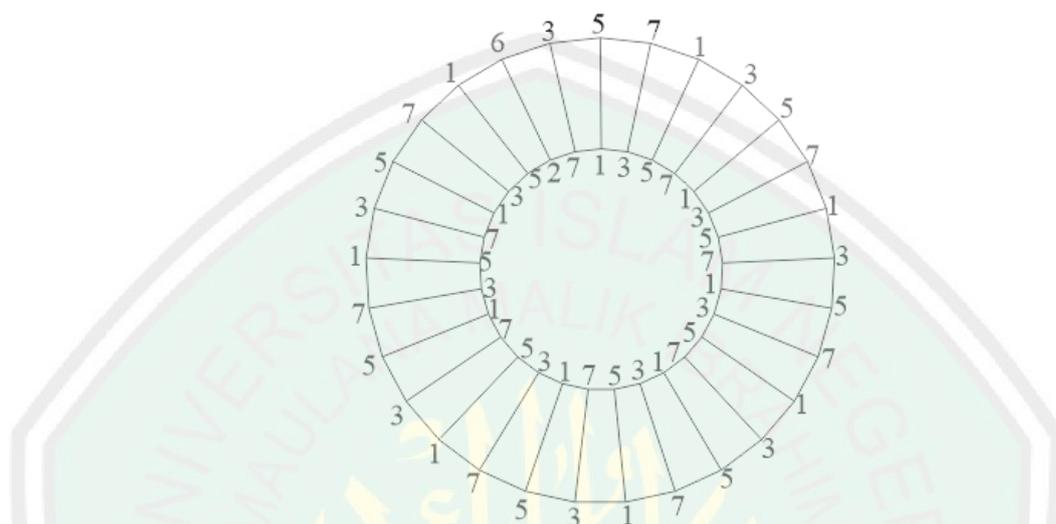
$$\lambda_{2,1}(P(25, 1)) = 7$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(29, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.37** Graf  $P(29, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(29, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.30 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat memenuhi titik pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(29, 1)$  adalah sebagai berikut.



**Gambar 3.38** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(29, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.38 dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}(P(29, 1)) = 7$$

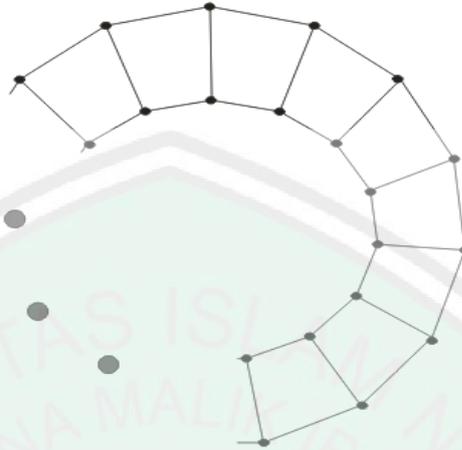
Berdasarkan pelabelan titik  $L(2, 1)$  di atas, karena  $\lambda_{2,1}(P(5, 1)) = 7$ ,  $\lambda_{2,1}(P(13, 1)) = 7$ ,  $\lambda_{2,1}(P(17, 1)) = 7$ ,  $\lambda_{2,1}(P(25, 1)) = 7$ ,  $\lambda_{2,1}(P(29, 1)) = 7$ , maka diperoleh dugaan bahwa

$$\lambda_{2,1}(P(l + 12k, 1)) = 7$$

Sehingga, dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

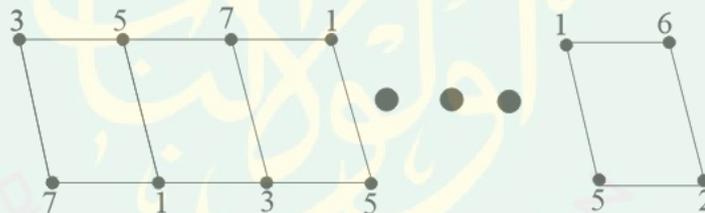
**Teorema 3.1.3** Untuk sebarang graf  $P(l + 12k, 1)$ ;  $l = 5, 13, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , maka minimal label terbesar pada pelabelan titik  $L(2, 1)$  adalah  $\lambda_{2,1}(P(l + 12k, 1)) = 7$ .

**Bukti:** Graf  $P(l + 12k, 1); l = 5, 13, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$  dapat digambarkan sebagai berikut.



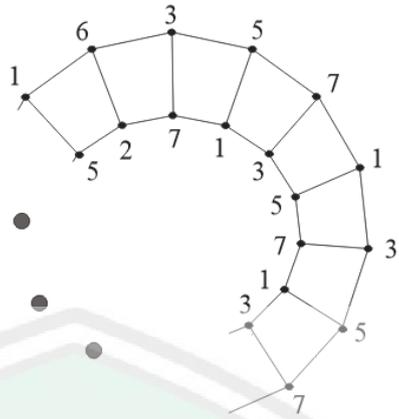
**Gambar 3.39** Graf  $P(l + 12k, 1); l = 5, 13, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$

Dari Gambar 3.39 dapat diambil subgrafnya dan dilabeli dengan aturan pelabelan titik  $L(2, 1)$  sebagai berikut.



**Gambar 3.40** Subgraf  $P(l + 12k, 1); l = 5, 13, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , dengan Aturan Pelabelan Titik  $L(2, 1)$

Pelabelan tersebut adalah pelabelan titik  $L(2, 1)$ . Sehingga, untuk melabeli  $P(l + 12k, 1); l = 5, 13, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$  hanya perlu melabeli subgrafnya dengan label  $(3, 5, 7, 1, \dots, 3, 5, 7, 1, \dots, 1, 6$  dan  $7, 1, 3, 5, \dots, 7, 1, 3, 5, \dots, 5, 2)$ . Kemudian, label tersebut dikopi searah jarum jam, seiring bertambahnya  $n$  tanpa perlu menambahkan bilangan baru lagi, sehingga diperoleh pola sebagai berikut.

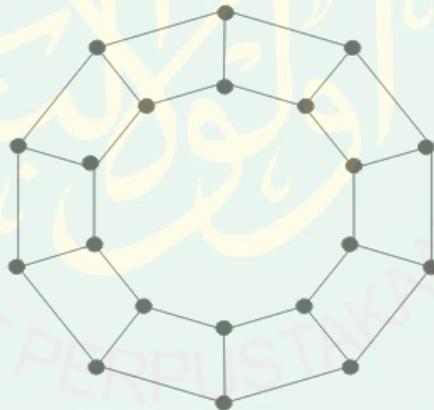


Gambar 3.41 Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(l + 12k, 1)$ ;  $l = 5, 13, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$

Dengan demikian,  $\lambda_{2,1}(P(l + 12k, 1)) = 7$

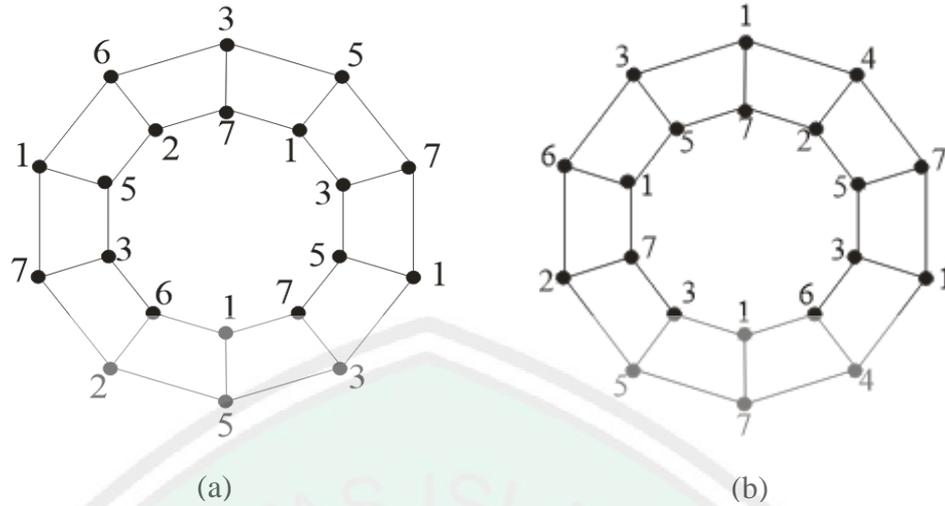
**3.1.4 Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  untuk  $P(l + 12k, 1)$ ;  $l = 10, 14, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$**

Berikut ini akan dilakukan pelabelan  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(10, 1)$ , yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



Gambar 3.42 Graf  $P(10, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(10, 1)$  adalah sebagai berikut.

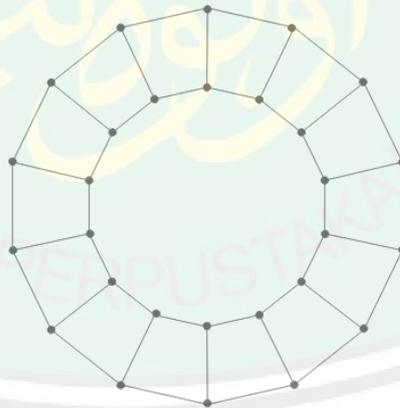


**Gambar 3.43** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada  $P(10, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.43 dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}(P(10, 1)) = 7$$

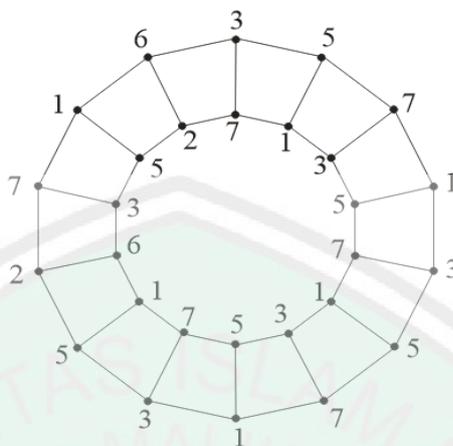
Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(14, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.44** Graf  $P(14, 1)$

Pelabelan  $L(2, 1)$  pada graf  $P(14, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.43 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat

memenuhi titik pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(14, 1)$  adalah sebagai berikut.

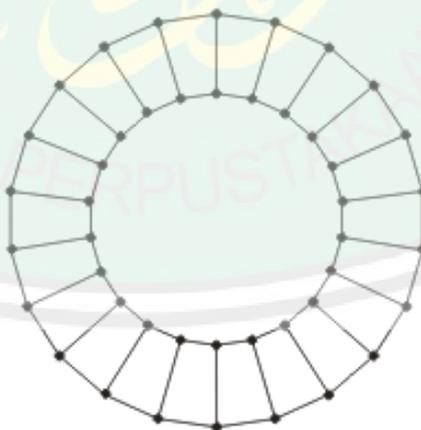


**Gambar 3.45** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(14, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.45 dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}(P(14, 1)) = 7$$

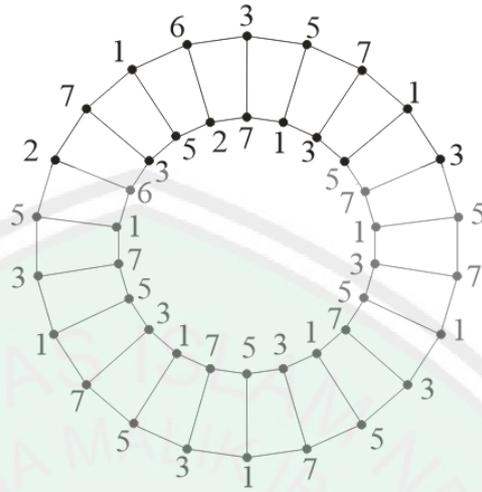
Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(22, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.46** Graf  $P(22, 1)$

Pelabelan  $L(2, 1)$  pada graf  $P(22, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.43 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat

memenuhi titik pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(22, 1)$  adalah sebagai berikut.

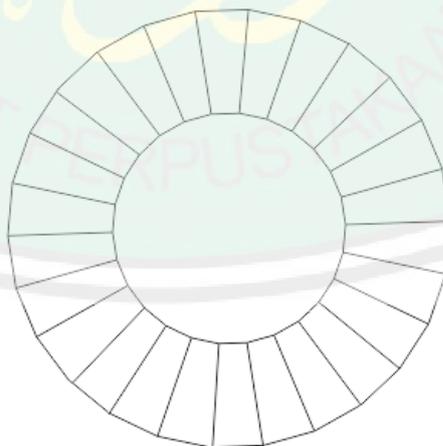


**Gambar 3.47** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(22, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.47 dapat diketahui bahwa :

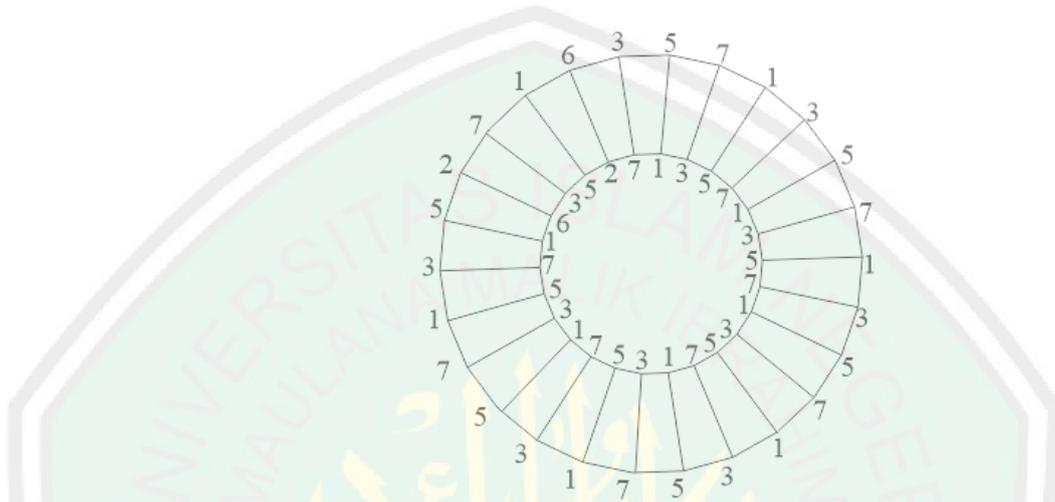
$$\lambda_{2,1}(P(22, 1)) = 7$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(26, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.48** Graf  $P(26, 1)$

Pelabelan  $L(2, 1)$  pada graf  $P(26, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.43 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat memenuhi titik pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(26, 1)$  adalah sebagai berikut.

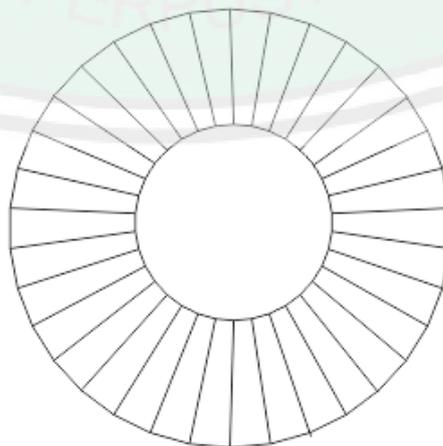


**Gambar 3.49** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(26, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.49 dapat diketahui bahwa :

$$\lambda_{2,1}(P(26, 1)) = 7$$

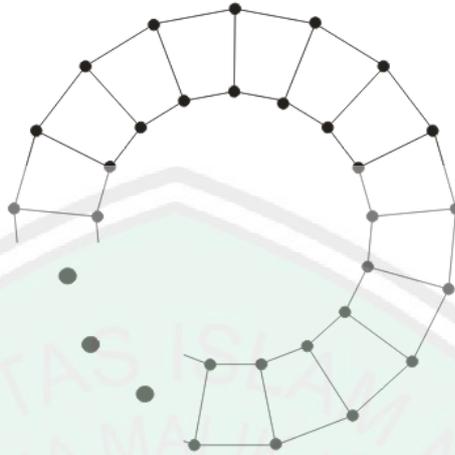
Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(34, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.50** Graf  $P(34, 1)$

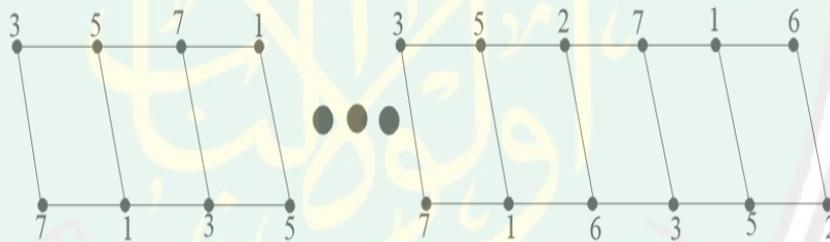


**Bukti:** Graf  $P(l + 12k, 1); l = 10, 14, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , dapat digambarkan sebagai berikut.



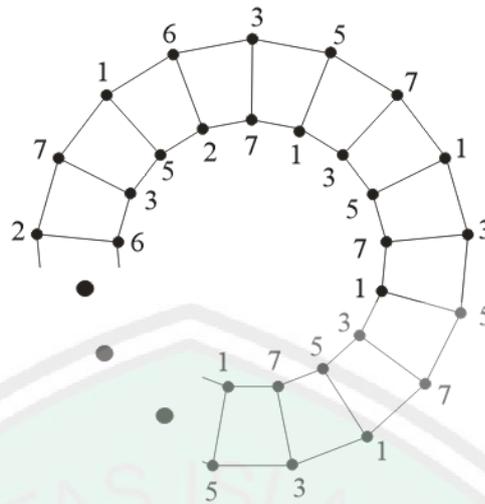
**Gambar 3.52** Graf  $P(l + 12k, 1); l = 10, 14, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$

Dari Gambar 3.52 dapat diambil subgrafnya dan dilabeli dengan aturan pelabelan titik  $L(2, 1)$  sebagai berikut.



**Gambar 3.53** Subgraf  $P(l + 12k, 1); l = 10, 14, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , dengan Aturan Pelabelan Titik  $L(2, 1)$

Pelabelan tersebut adalah pelabelan  $L(2, 1)$ . Sehingga, untuk melabeli  $P(l + 12k, 1); l = 10, 14, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , hanya perlu melabeli subgrafnya dengan label  $(3, 5, 7, 1, \dots, 3, 5, 7, 1, \dots, 3, 5, 2, 7, 1, 6$  dan  $7, 1, 3, 5, \dots, 7, 1, 3, 5, \dots, 7, 1, 6, 3, 5, 2)$ . Kemudian label tersebut dikopi searah jarum jam, seiring bertambahnya  $n$  tanpa perlu menambahkan bilangan baru lagi, sehingga diperoleh pola sebagai berikut.

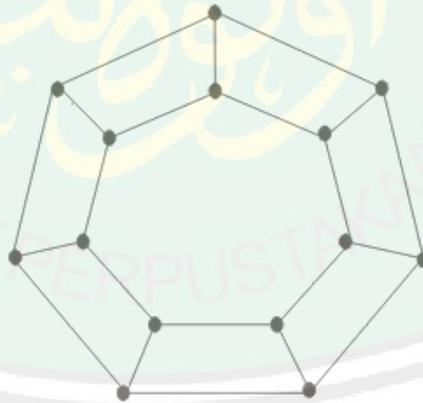


**Gambar 3.54** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(l + 12k, 1)$ ;  $l = 10, 14, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$

Dengan demikian,  $\lambda_{2,1}(P(l + 12k, 1)) = 7$

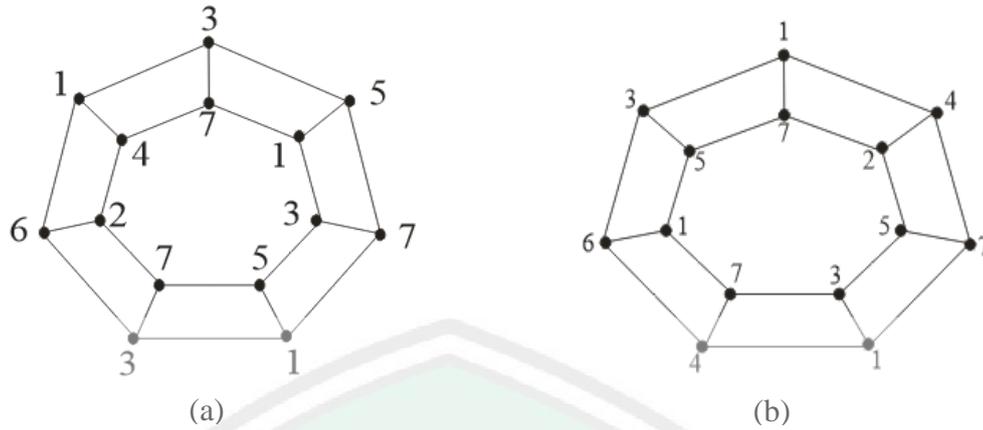
### 3.1.5 Pelabelan Titik $L(2, 1)$ untuk $P(l + 12k, 1)$ ; $l = 7, 11, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$

Berikut ini akan dilakukan pelabelan  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(7, 1)$ , yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.55** Graf  $P(7, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(7, 1)$  adalah sebagai berikut.

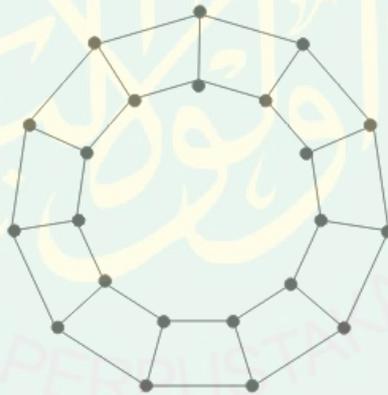


Gambar 3.56 Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada  $P(7, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.56 dapat diketahui

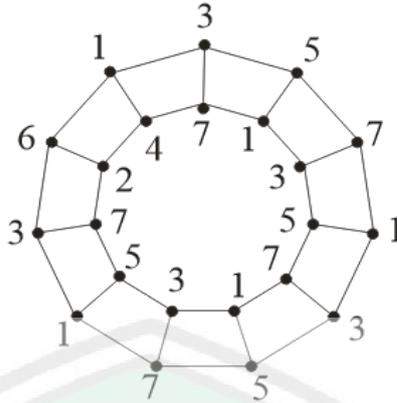
$$\lambda_{2,1}(P(7, 1)) = 7$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(11, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



Gambar 3.57 Graf  $P(11, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(11, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.56 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat memenuhi titik pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(11, 1)$  adalah sebagai berikut.

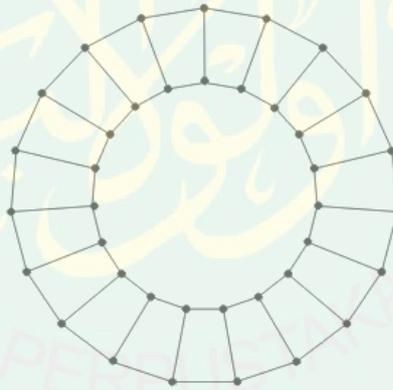


Gambar 3.58 Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(11, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.58 dapat diketahui bahwa

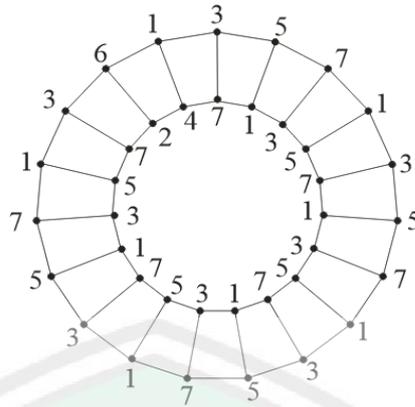
$$\lambda_{2,1}(P(11, 1)) = 7$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(19, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



Gambar 3.59 Graf  $P(19, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(19, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.56 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat memenuhi titik pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(19, 1)$  adalah sebagai berikut.

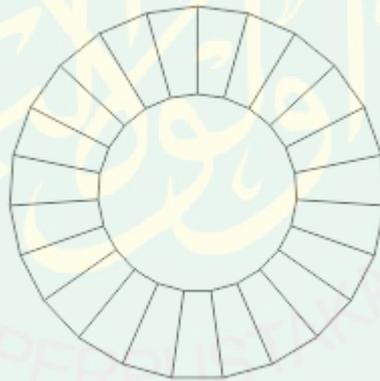


**Gambar 3.60** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(19, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.60 dapat diketahui bahwa

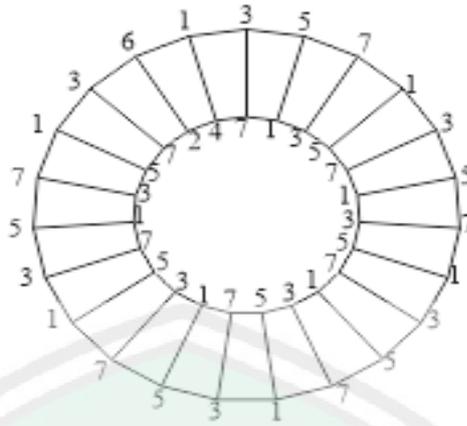
$$\lambda_{2,1}(P(19, 1)) = 7$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(23, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.61** Graf  $P(23, 1)$

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(23, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.56 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat memenuhi titik pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(23, 1)$  adalah sebagai berikut.

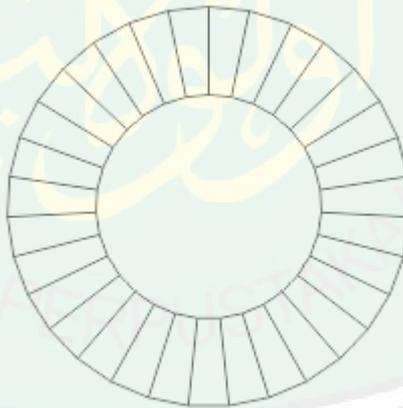


**Gambar 3.62** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(23, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.62 dapat diketahui bahwa

$$\lambda_{2,1}(P(23, 1)) = 7$$

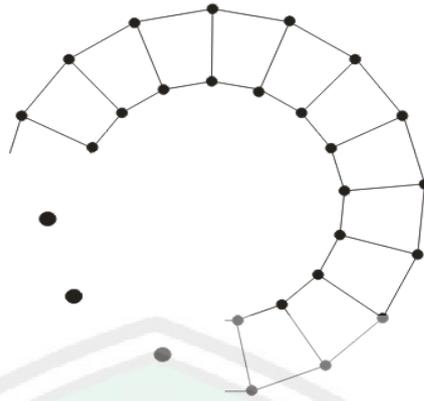
Selanjutnya, dilakukan pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(23, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.63** Graf  $P(31, 1)$

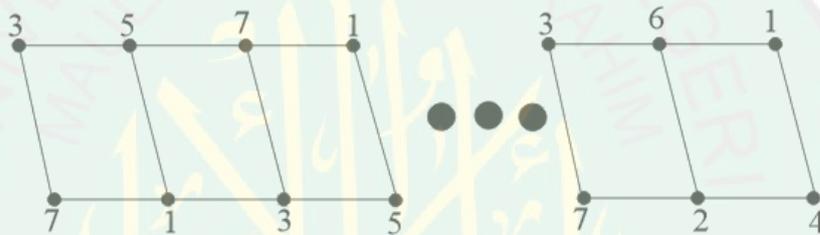
Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(31, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.56 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat memenuhi titik pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf  $P(31, 1)$  adalah sebagai berikut.





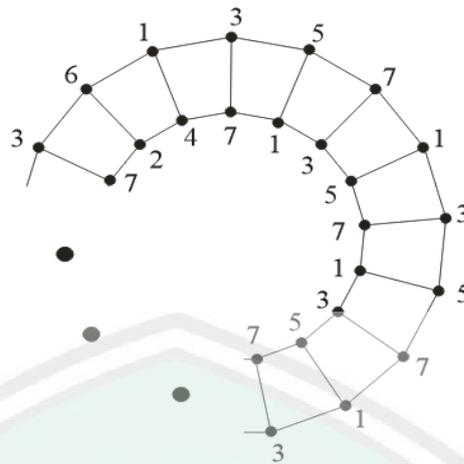
Gambar 3.65 Graf  $P(l + 12k, 1); l = 7, 11, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$

Dari Gambar 3.65 dapat diambil subgrafnya dan dilabeli dengan aturan pelabelan titik  $L(2, 1)$  sebagai berikut.



Gambar 3.66 Subgraf  $P(l + 12k, 1); l = 7, 11, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , dengan Aturan Pelabelan Titik  $L(2, 1)$

Pelabelan tersebut adalah pelabelan titik  $L(2, 1)$ . Sehingga, untuk melabeli  $P(l + 12k, 1); l = 7, 11, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , hanya perlu melabeli subgrafnya dengan label  $(3, 5, 7, 1, \dots, 3, 5, 7, 1, \dots, 3, 6, 1$  dan  $7, 1, 3, 5, \dots, 7, 1, 3, 5, \dots, 7, 2, 4)$ . Kemudian label tersebut dikopi searah jarum jam, seiring bertambahnya  $n$  tanpa perlu menambahkan bilangan baru lagi, sehingga diperoleh pola sebagai berikut.



**Gambar 3.67** Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(l + 12k, 1)$ ;  $l = 7, 11, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$

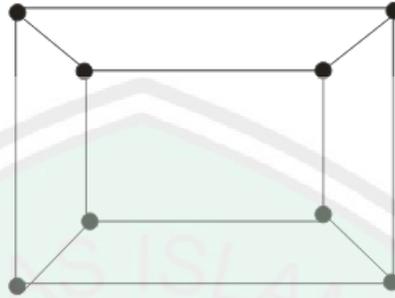
Dengan demikian,  $\lambda_{2,1}(P(l + 12k, 1)) = 7$

### 3.2 Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ pada Graf Petersen

Pada bab ini, akan dijelaskan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf Petersen, sebagaimana dalam menentukannya akan dibagi beberapa pembahasan. Pertama, jika  $(n = P(4k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z})$ , kedua adalah jika  $(n = P(5k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z})$ , ketiga adalah jika  $(n = P(5k + 3, 1); k \geq 2, k \in \mathbb{Z})$ , keempat adalah jika  $(n = P(5k + 4, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z})$ , kelima adalah jika  $(n = 5 + 4k; k \in \mathbb{N})$ , keenam adalah jika  $(n = P(3, 1) \& P(l + 20k, 1); l = 6, 11, k \geq 0, k \in \mathbb{Z})$ , ketujuh adalah jika  $(n = P(l + 20k, 1); l = 7, 22, k \geq 0, k \in \mathbb{Z})$ . Untuk yang keenam dan ketujuh, pengerjaanya tidak sama dengan yang sebelum-sebelumnya dikarenakan dalam pelabelan sisi  $L(2, 1)$  label yang diberikan tidak dapat dibuat suatu pola, maka dalam pembahasan ini hanya mencari pola untuk minimal label terbesar yang dapat melabeli sisinya. Dari beberapa pembahasan tersebut digunakan untuk sebarang nilai  $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$

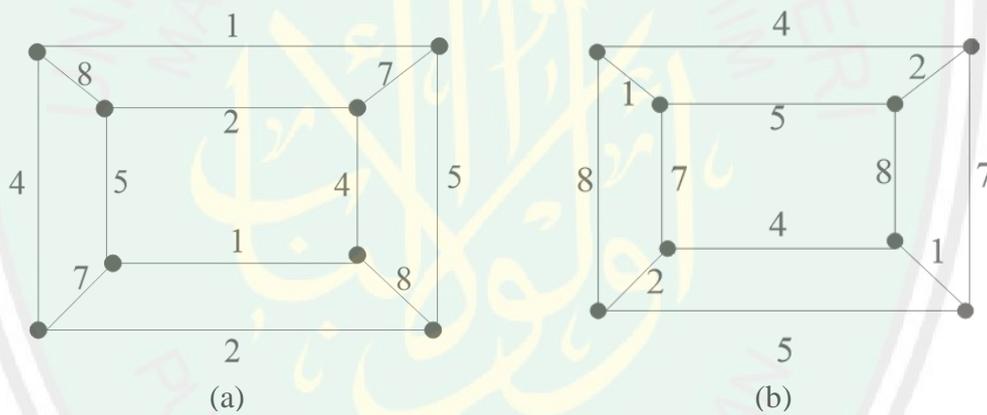
### 3.2.1 Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ untuk $P(4k, 1)$ ; $k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$

Berikut ini akan dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(4, 1)$ , yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



Gambar 3.68 Graf  $P(4, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(4, 1)$  adalah sebagai berikut.

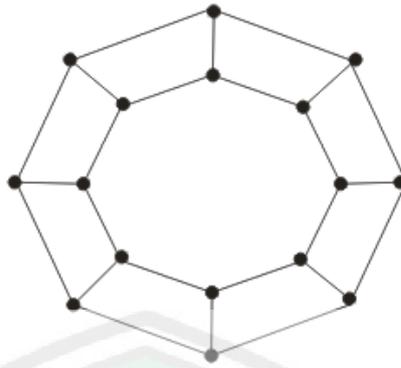


Gambar 3.69 Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada  $P(4, 1)$

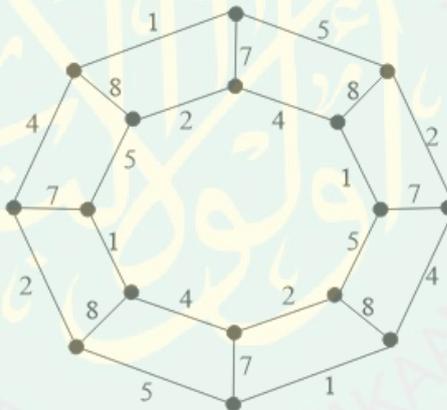
Berdasarkan Gambar 3.69 dapat diketahui bahwa

$$\lambda'_{2,1}(P(4, 1)) = 8$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(8, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.

Gambar 3.70 Graf  $P(8, 1)$ 

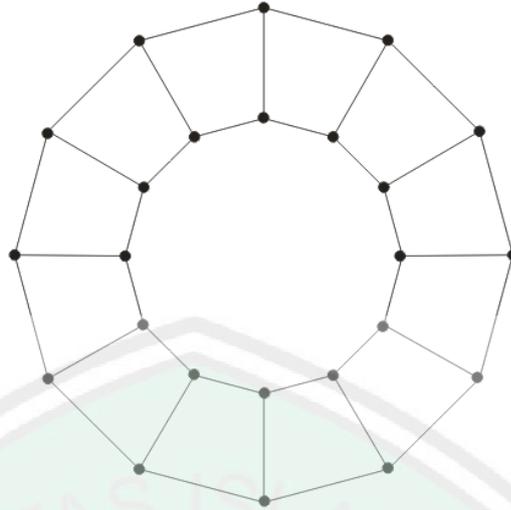
Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(8, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.69 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat memenuhi sisi pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(8, 1)$  adalah sebagai berikut.

Gambar 3.71 Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(8, 1)$ 

Berdasarkan Gambar 3.71 dapat diketahui

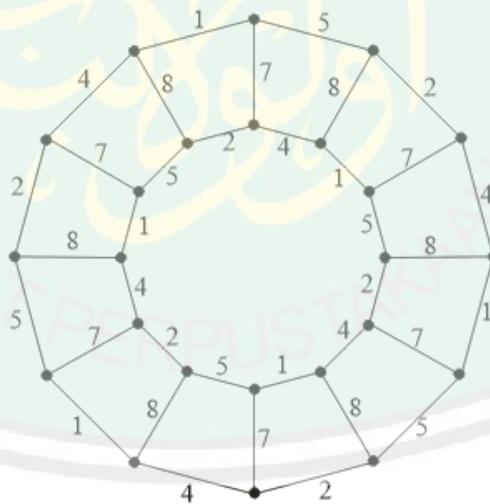
$$\lambda'_{2,1}(P(8, 1)) = 8$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(12, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



Gambar 3.72 Graf  $P(12, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(12, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.69 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat memenuhi sisi pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(12, 1)$  adalah sebagai berikut.

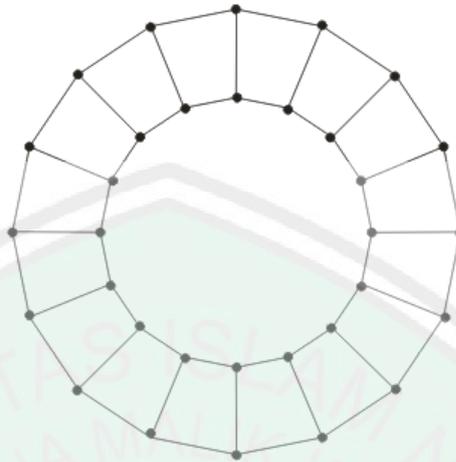


Gambar 3.73 Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(12, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.73 dapat diketahui bahwa

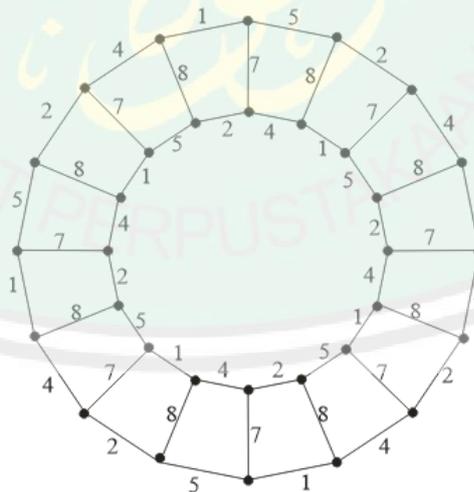
$$\lambda'_{2,1}(P(12, 1)) = 8$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(16, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.74** Graf  $P(16, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(16, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.69 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat memenuhi sisi pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(16, 1)$  adalah sebagai berikut.



**Gambar 3.75** Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(16, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.75 dapat diketahui bahwa

$$\lambda'_{2,1}(P(16, 1)) = 8$$

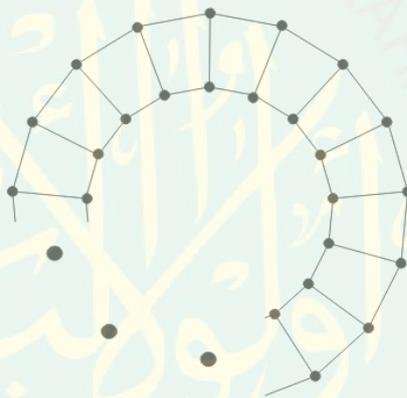
Berdasarkan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  di atas, karena  $\lambda'_{2,1}(P(4, 1)) = 8$ ,  $\lambda'_{2,1}(P(8, 1)) = 8$ ,  $\lambda'_{2,1}(P(12, 1)) = 8$ ,  $\lambda'_{2,1}(P(16, 1)) = 8$ , maka diperoleh dugaan bahwa

$$\lambda'_{2,1}(P(4k, 1)) = 8$$

Sehingga, dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

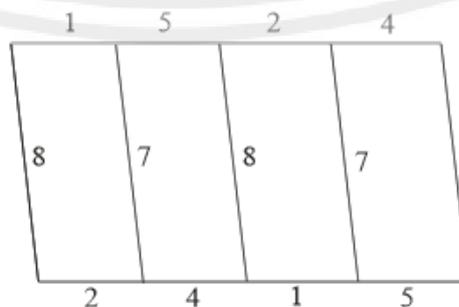
**Teorema 3.2.1** Untuk sebarang graf  $P(4k, 1)$ ;  $k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ , maka minimal label terbesar pada pelabelan sisi  $L(2, 1)$  adalah  $\lambda'_{2,1}(P(4k, 1)) = 8$ .

**Bukti:** Graf  $P(4k, 1)$ ;  $k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ , dapat digambarkan sebagai berikut.



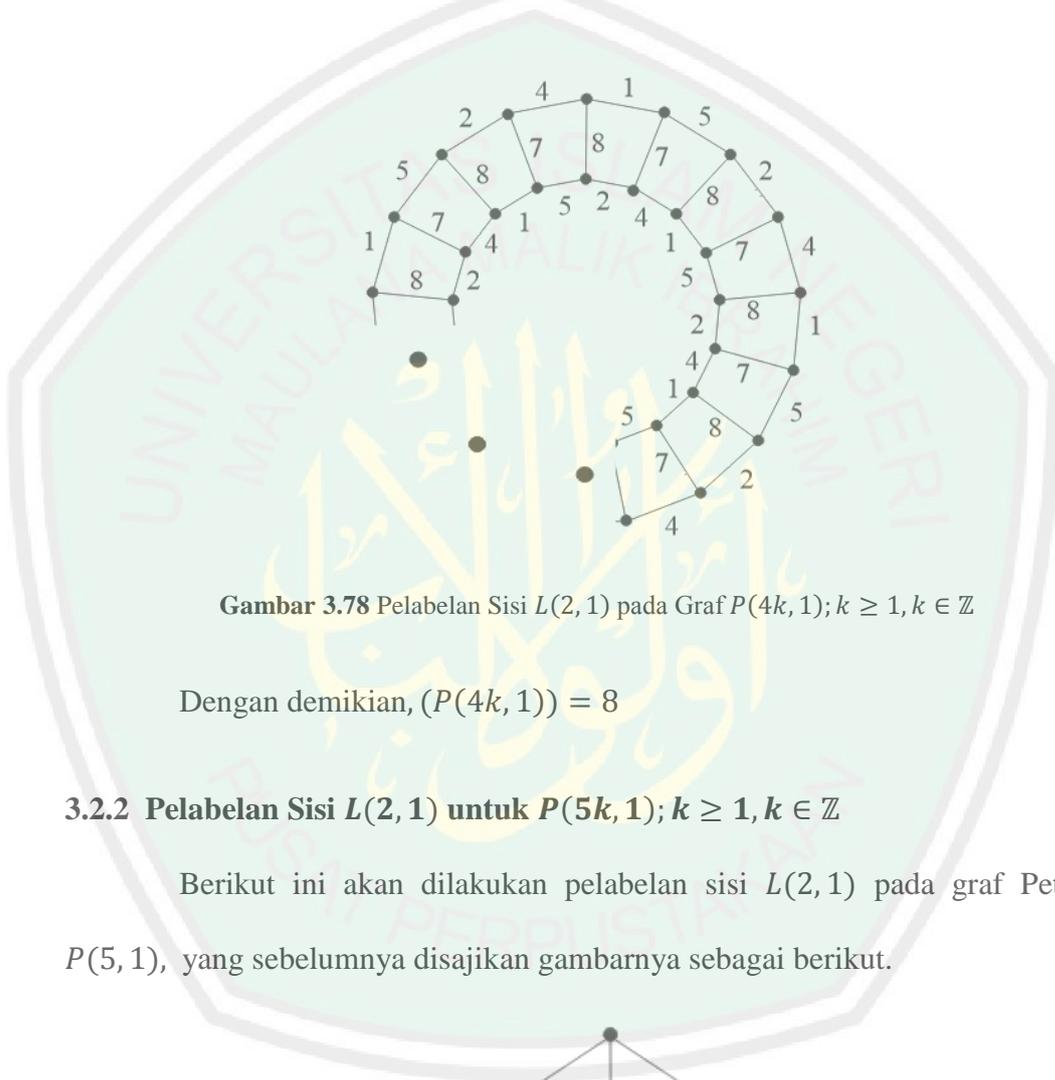
**Gambar 3.76** Graf  $P(4k, 1)$ ;  $k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$

Dari Gambar 3.76 dapat diambil subgrafnya dan dilabeli dengan aturan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  sebagai berikut.



**Gambar 3.77** Subgraf  $P(4k, 1)$ ;  $k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$  dengan Aturan Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$

Pelabelan tersebut adalah pelabelan sisi  $L(2,1)$ . Sehingga, untuk melabeli  $P(4k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ , hanya perlu melabeli subgrafnya dengan label  $(1, 5, 2, 4)$ ,  $(8, 7, 8, 7)$ , dan  $(2, 4, 1, 5)$ . Kemudian label tersebut dapat melabeli semua sisi, seiring bertambahnya  $n$  tanpa perlu menambahkan bilangan baru lagi, sehingga diperoleh pola sebagai berikut.

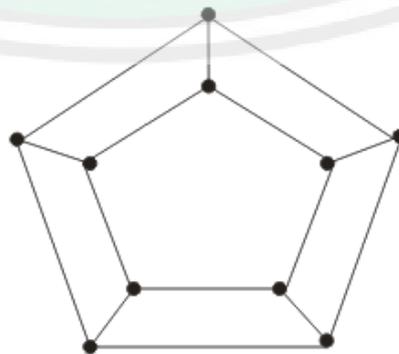


Gambar 3.78 Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(4k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$

Dengan demikian,  $(P(4k, 1)) = 8$

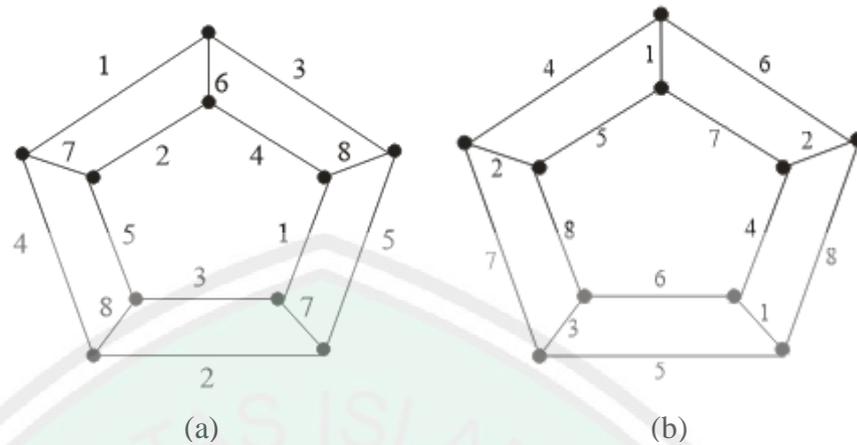
### 3.2.2 Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ untuk $P(5k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$

Berikut ini akan dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(5, 1)$ , yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



Gambar 3.79 Graf  $P(5, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(5, 1)$  adalah sebagai berikut.

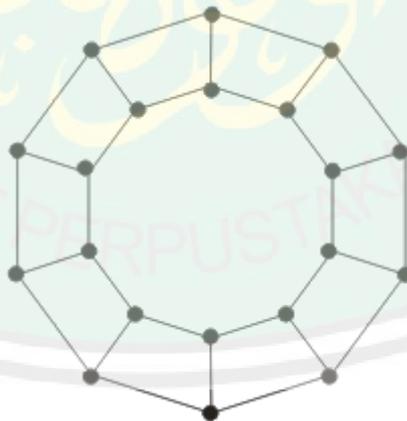


**Gambar 3.80** Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada  $P(5, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.80 dapat diketahui bahwa

$$\lambda'_{2,1}(P(5, 1)) = 8$$

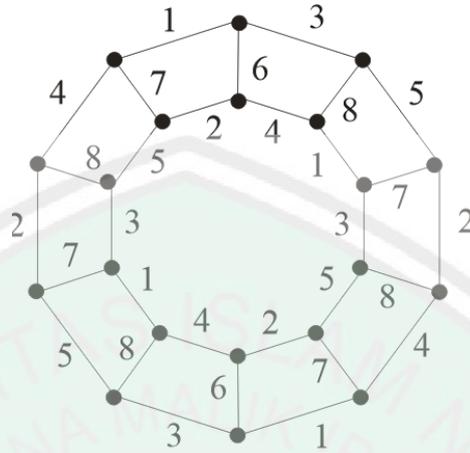
Selanjutnya, dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(10, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.81** Graf  $P(10, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(10, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.80 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat

memenuhi sisi pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(10, 1)$  adalah sebagai berikut.

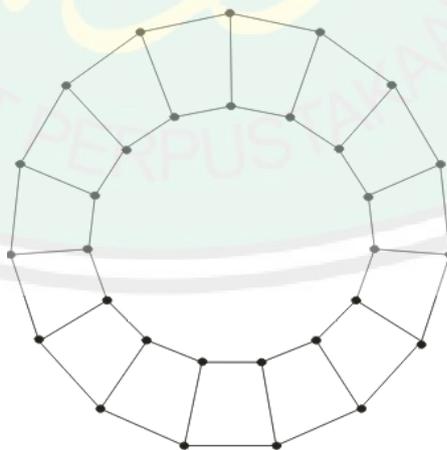


**Gambar 3.82** Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(10, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.82 dapat diketahui bahwa

$$\lambda'_{2,1}(P(10, 1)) = 8$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(15, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.83** Graf  $P(15, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(15, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.80 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat memenuhi sisi pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(15, 1)$  adalah sebagai berikut.



Gambar 3.84 Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(15, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.84 dapat diketahui

$$\lambda'_{2,1}(P(15, 1)) = 8$$

Berdasarkan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  di atas, karena  $\lambda'_{2,1}(P(5, 1)) = 8$ ,  $\lambda'_{2,1}(P(10, 1)) = 8$ ,  $\lambda'_{2,1}(P(15, 1)) = 8$ , maka diperoleh dugaan bahwa

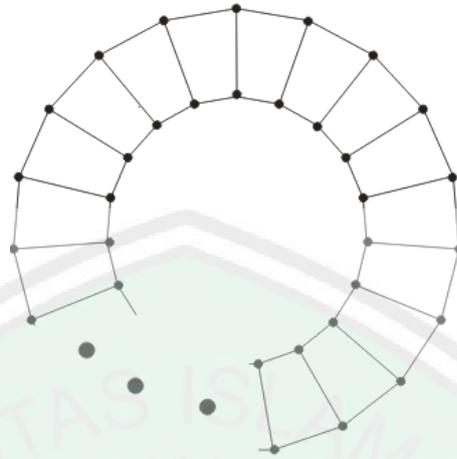
$$\lambda'_{2,1}(P(5k, 1)) = 8$$

Sehingga, dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

**Teorema 3.2.2** Untuk sebarang graf  $P(5k, 1)$ ;  $k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ , maka minimal label

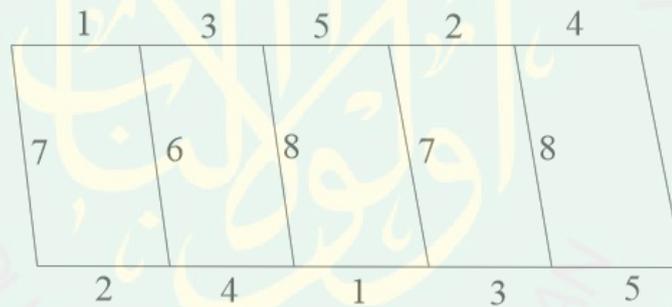
terbesar pada pelabelan sisi  $L(2, 1)$  adalah  $\lambda'_{2,1}(P(5k, 1)) = 8$ .

**Bukti:** Graf  $P(5k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ , dapat digambarkan sebagai berikut.



**Gambar 3.85** Graf  $P(5k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$

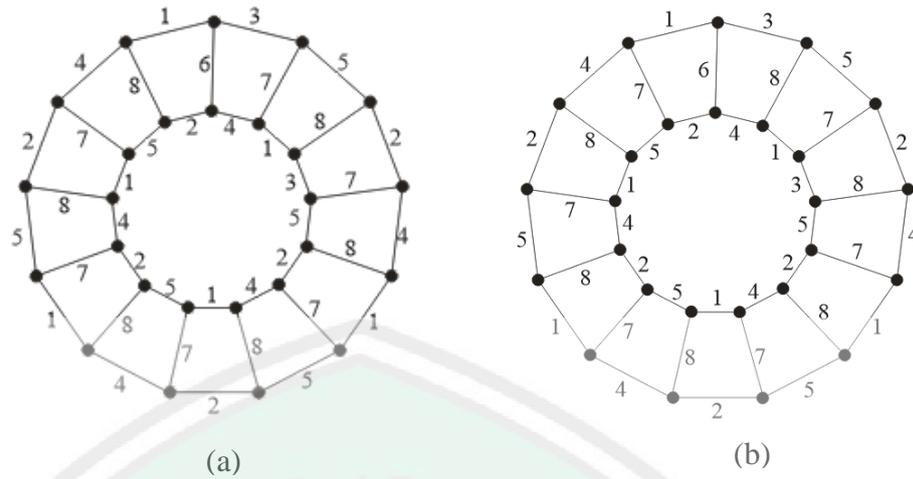
Dari Gambar 3.85 dapat diambil subgrafnya dan dilabeli dengan aturan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  sebagai berikut.



**Gambar 3.86** Subgraf  $P(5k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ , dengan Aturan Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$

Pelabelan tersebut adalah pelabelan sisi  $L(2, 1)$ . Sehingga, untuk melabeli  $P(5k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ , hanya perlu melabeli subgrafnya dengan label  $(1, 3, 5, 2, 4)$ ,  $(7, 6, 8, 7, 8)$ , dan  $(2, 4, 1, 3, 5)$ . Kemudian dari label tersebut dapat melabeli semua titik, seiring bertambahnya  $n$  tanpa perlu menambahkan bilangan baru lagi, maka diperoleh pola sebagai berikut



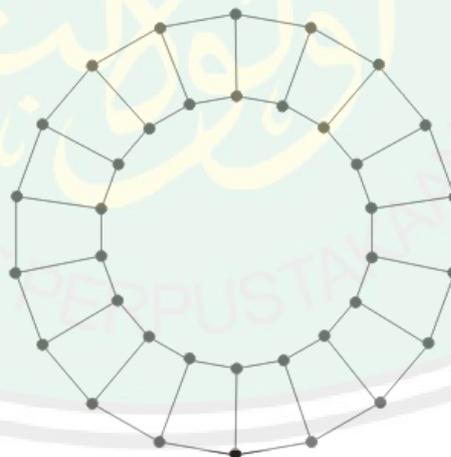


Gambar 3.89 Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  Pada  $P(13, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.89 dapat diketahui bahwa

$$\lambda'_{2,1}(P(13, 1)) = 8$$

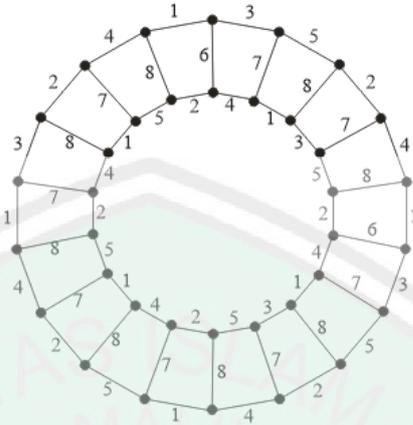
Selanjutnya, dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(18, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



Gambar 3.90 Graf  $P(18, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(18, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.89 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat

memenuhi sisi pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(18, 1)$  adalah sebagai berikut.

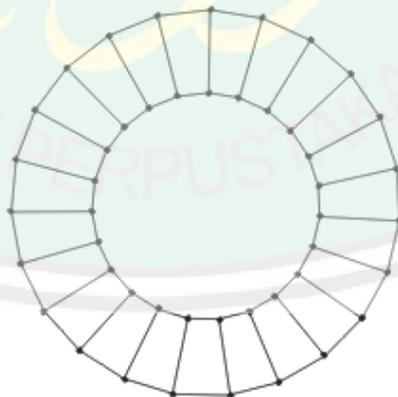


**Gambar 3.91** Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(18, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.91 dapat diketahui bahwa

$$\lambda'_{2,1}(P(18, 1)) = 8$$

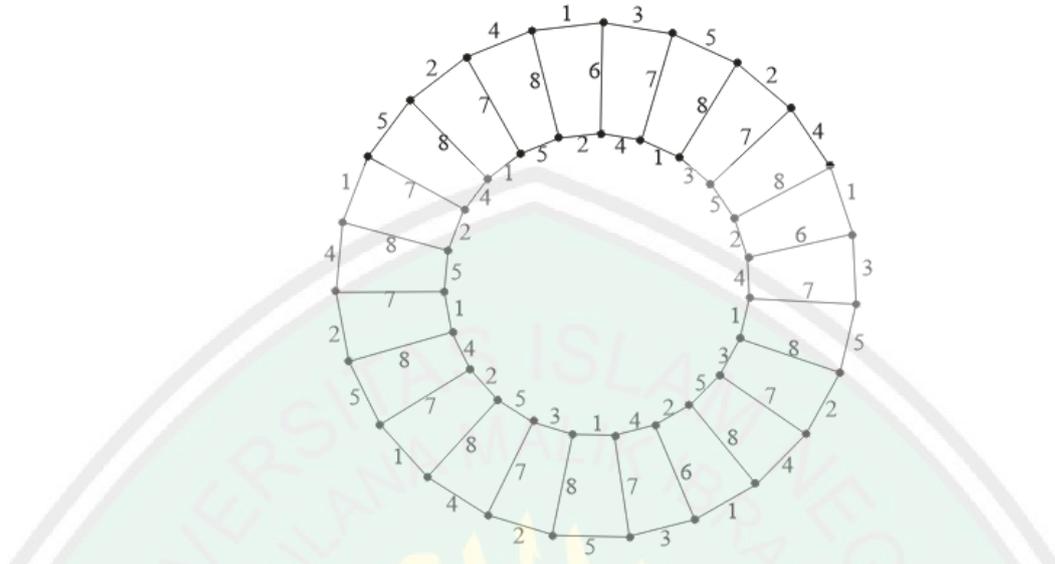
Selanjutnya, dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(23, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.92** Graf  $P(23, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(23, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.89 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat

memenuhi sisi pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(23, 1)$  adalah sebagai berikut.



**Gambar 3.93** Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(23, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.93 dapat diketahui bahwa

$$\lambda'_{2,1}(P(23, 1)) = 8$$

Berdasarkan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  di atas, karena  $\lambda'_{2,1}(P(13, 1)) = 8$ ,  $\lambda'_{2,1}(P(18, 1)) = 8$ ,  $\lambda'_{2,1}(P(23, 1)) = 8$ , maka diperoleh dugaan bahwa

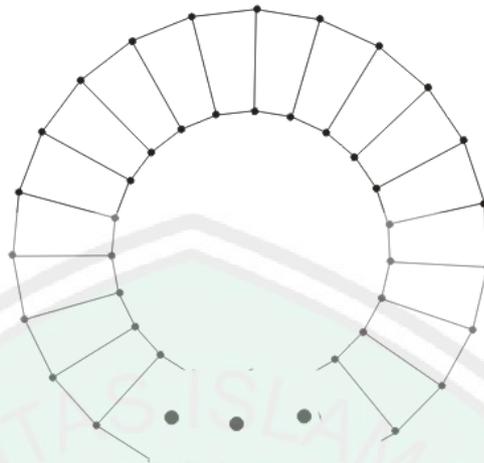
$$\lambda'_{2,1}(P(5k + 3, 1)) = 8$$

Sehingga, dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

**Teorema 3.2.3** Untuk sebarang graf  $P(5k + 3, 1)$ ;  $k \geq 2$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ , maka minimal

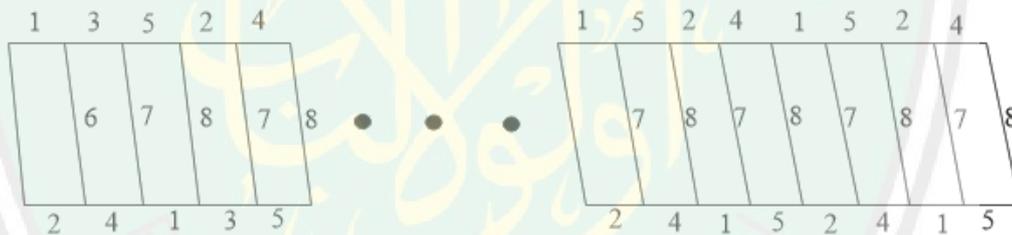
label terbesar pada pelabelan sisi  $L(2, 1)$  adalah  $\lambda'_{2,1}(P(5k + 3, 1)) = 8$ .

**Bukti:** Graf  $P(5k + 3, 1); k \geq 2; k \in \mathbb{Z}$ , dapat digambarkan sebagai berikut.



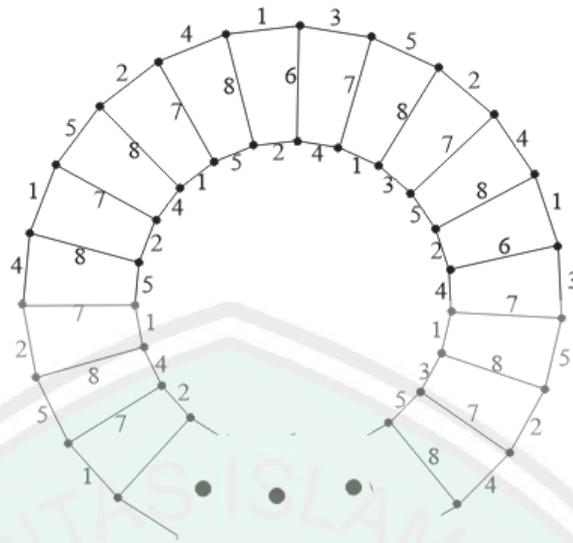
**Gambar 3.94** Graf  $P(5k + 3, 1); k \geq 2; k \in \mathbb{Z}$

Dari Gambar 3.94 dapat diambil subgrafnya dan dilabeli dengan aturan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  sebagai berikut.



**Gambar 3.95** Subgraf  $P(5k + 3, 1); k \geq 2; k \in \mathbb{Z}$  dengan aturan Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$

Pelabelan tersebut adalah pelabelan sisi  $L(2, 1)$ . Sehingga, untuk melabeli  $P(5k + 3, 1); k \geq 2; k \in \mathbb{Z}$ , hanya perlu melabeli subgrafnya dengan label  $(1, 3, 5, 2, 4, \dots, 1, 5, 2, 4, 1, 5, 2, 4)$ ,  $(6, 7, 8, 7, 8, \dots, 7, 8, 7, 8, 7, 8, 7, 8)$ , dan  $(2, 4, 1, 3, 5, \dots, 2, 4, 1, 5, 2, 4, 1, 5)$ . Kemudian, dari label tersebut dapat melabeli semua titik, seiring bertambahnya  $n$  tanpa perlu menambahkan bilangan baru lagi, maka diperoleh pelabelan sebagai berikut.

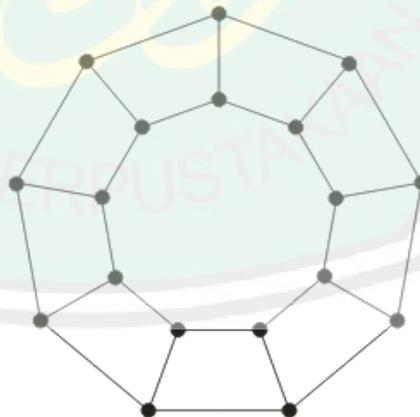


**Gambar 3.96** Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(5k + 3, 1)$ ;  $k \geq 2$ ;  $k \in \mathbb{Z}$

Dengan demikian,  $\lambda'_{2,1}(P(5k + 3, 1)) = 8$

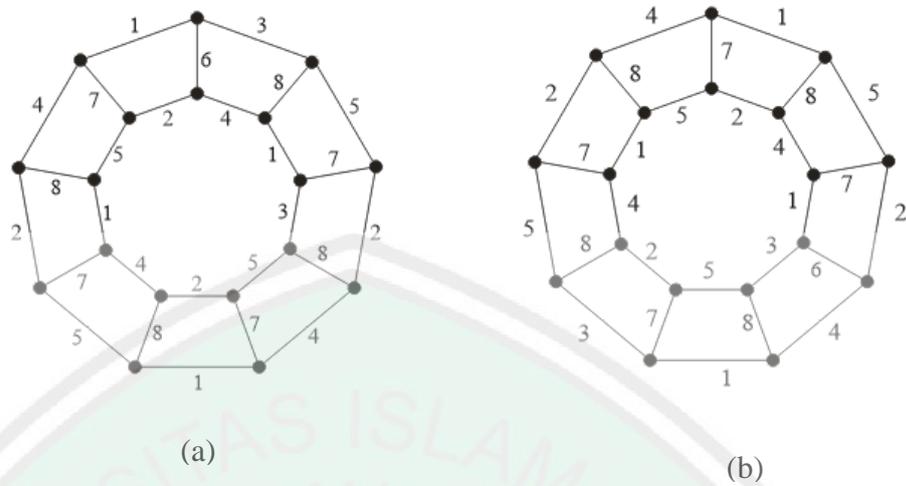
### 3.2.4 Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ untuk $P(5k + 4, 1)$ ; $k \geq 1$ , $k \in \mathbb{Z}$

Berikut ini akan dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(9, 1)$ , yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.97** Graf  $P(9, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(9, 1)$  adalah sebagai berikut.

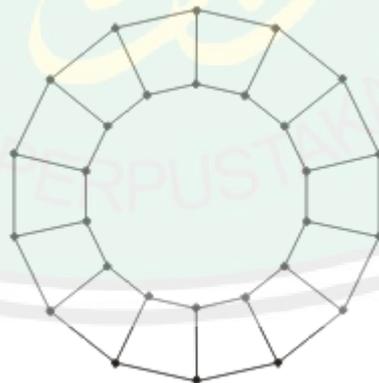


**Gambar 3.98** Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(9, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.98 dapat diketahui bahwa

$$\lambda'_{2,1}(P(9, 1)) = 8$$

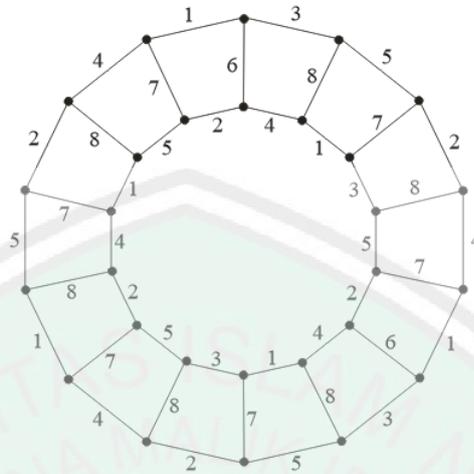
Selanjutnya, dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(14, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.99** Graf  $P(14, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(14, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.98 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat

memenuhi sisi pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(14, 1)$  adalah sebagai berikut.

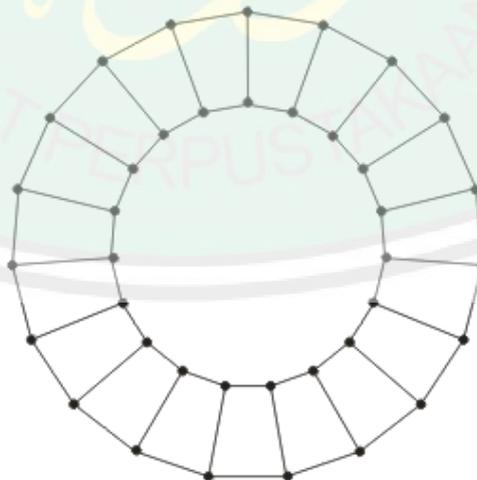


**Gambar 3.100** Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(14, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.100 dapat diketahui bahwa

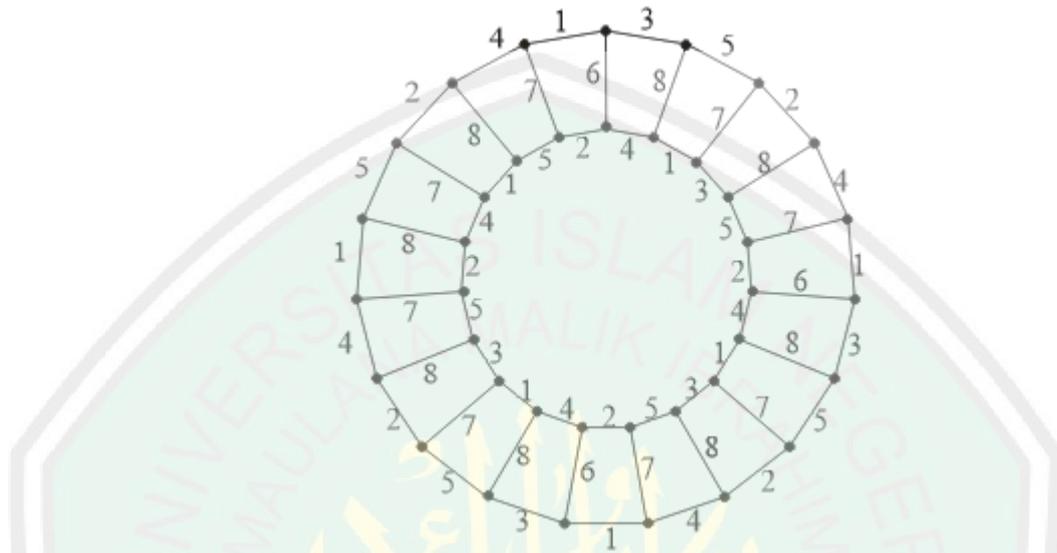
$$\lambda'_{2,1}(P(14, 1)) = 8$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(19, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.101** Graf  $P(19, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(19, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.98 bagian (a) kemudian pola tersebut dicopy searah jarum jam. Berikut pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(19, 1)$  adalah sebagai berikut.



**Gambar 3.102** Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(19, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.102 dapat diketahui bahwa

$$\lambda'_{2,1}(P(19, 1)) = 8$$

Berdasarkan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  di atas, karena  $\lambda'_{2,1}(P(9, 1)) = 8$ ,

$\lambda'_{2,1}(P(14, 1)) = 8$ ,  $\lambda'_{2,1}(P(19, 1)) = 8$ , maka diperoleh dugaan bahwa

$$\lambda'_{2,1}(P(5k + 4, 1)) = 8$$

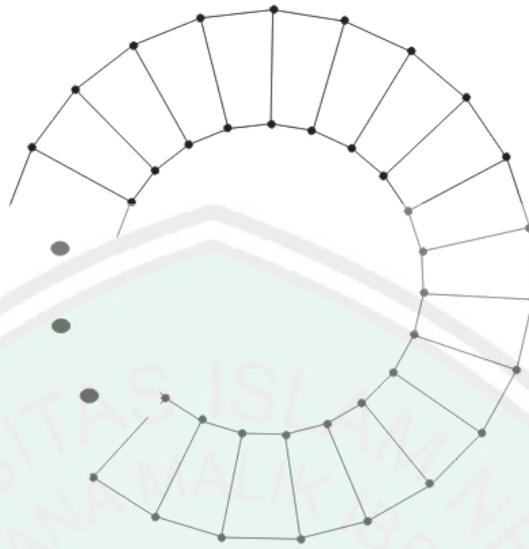
Sehingga, dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

**Teorema 3.2.4** Untuk sebarang graf  $P(5k + 4, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ , maka minimal

label terbesar pada pelabelan sisi  $L(2, 1)$  adalah  $\lambda'_{2,1}(P(5k +$

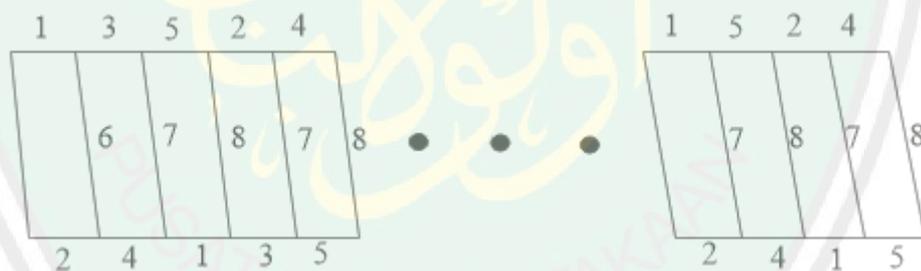
$4, 1)) = 8$ .

**Bukti:** Graf  $P(5k + 4, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ , dapat digambarkan sebagai berikut.



**Gambar 3.103** Graf  $P(5k + 4, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$

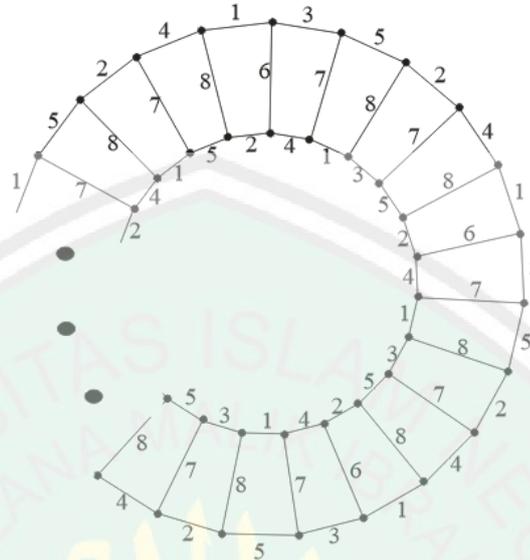
Dari Gambar 3.103 dapat diambil subgrafnya dan dilabeli dengan aturan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  sebagai berikut.



**Gambar 3.104** Subgraf  $P(5k + 4, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$  dengan Aturan Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$

Pelabelan tersebut adalah pelabelan sisi  $L(2, 1)$ . Sehingga, untuk melabeli  $P(5k + 4, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ , hanya perlu melabeli subgrafnya dengan label  $(1, 3, 5, 2, 4, \dots, 1, 5, 2, 4)$ ,  $(6, 7, 8, 7, 8, \dots, 7, 8, 7, 8)$ , dan  $(2, 4, 1, 3, 5, \dots, 2, 4, 1, 5)$ . Kemudian label tersebut dapat melabeli semua sisi, seiring bertambahnya

$n$  tanpa perlu menambahkan bilangan baru lagi, sehingga diperoleh pelabelan sebagai berikut.

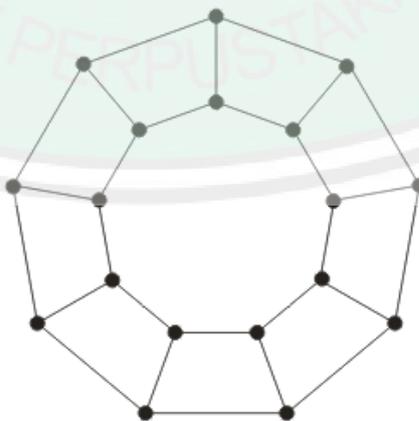


Gambar 3.105 Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(5k + 4, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$

Dengan demikian,  $\lambda'_{2,1} P(5k + 4, 1) = 8$

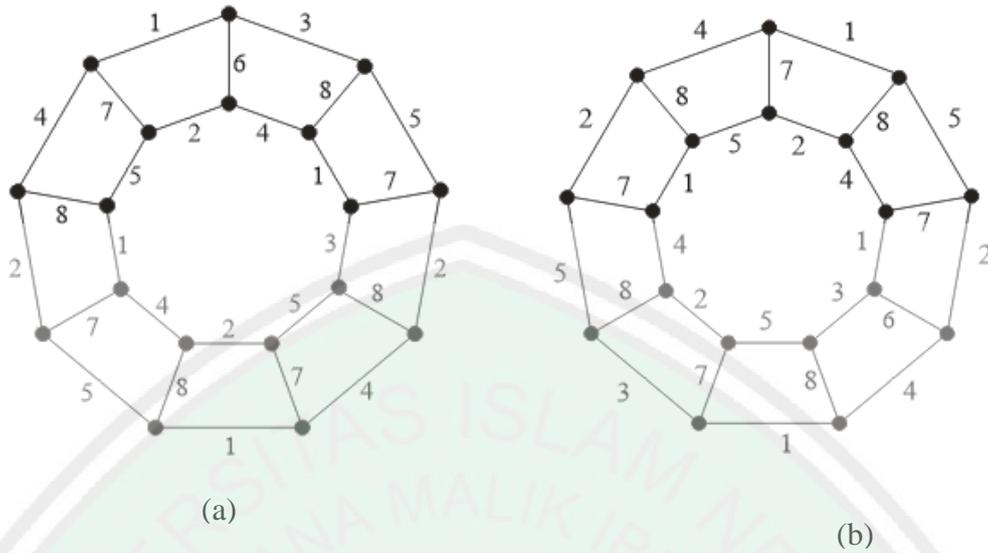
**3.2.5 Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  untuk  $P(5 + 4k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$**

Berikut ini akan dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(9, 1)$ , yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



Gambar 3.106 Graf  $P(9, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(9, 1)$  adalah sebagai berikut.

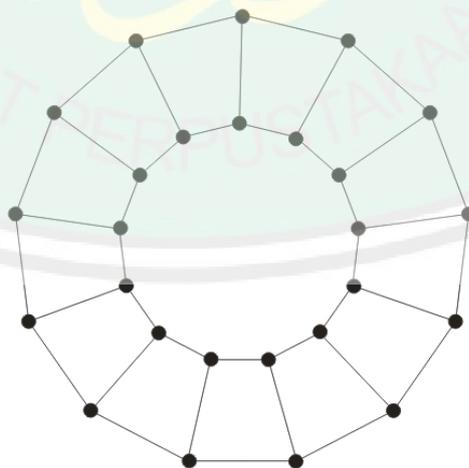


**Gambar 3.107** Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(9, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.107 dapat diketahui bahwa

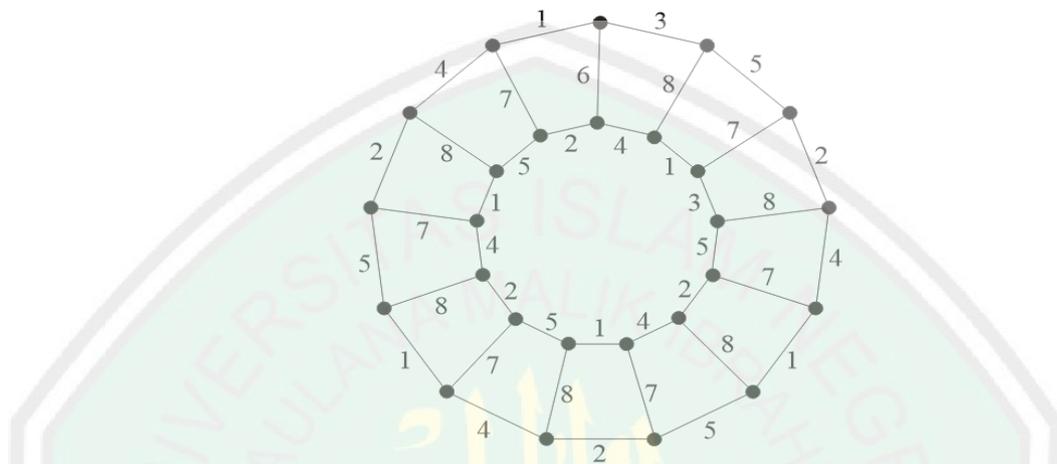
$$\lambda'_{2,1}(P(9, 1)) = 8$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(13, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.108** Graf  $P(13, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2,1)$  pada graf  $P(13,1)$  mengikuti pelabelan seperti Gambar 3.107 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy searah jarum jam sehingga dapat memenuhi sisi pada graf yang ditentukan. Berikut pelabelan sisi  $L(2,1)$  pada graf  $P(13,1)$  adalah sebagai berikut.

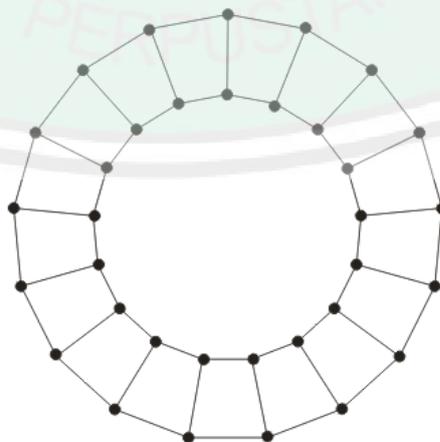


**Gambar 3.109** Pelabelan Sisi  $L(2,1)$  pada Graf  $P(13,1)$

Berdasarkan Gambar 3.109 dapat diketahui bahwa nilai yang dapat melabeli sisi pada  $P(13,1)$  yaitu 8. maka

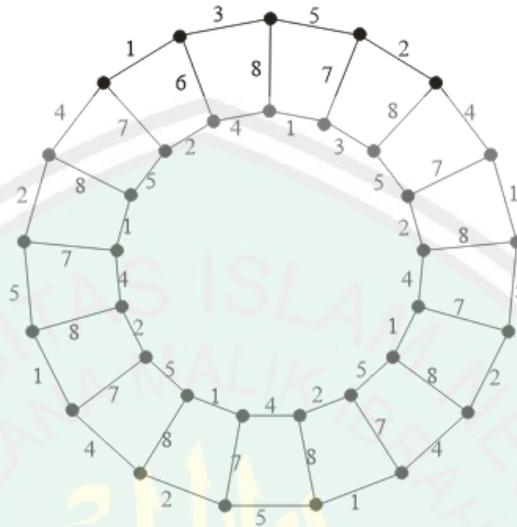
$$\lambda_{2,1}(P(13,1)) = 8$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan sisi  $L(2,1)$  pada graf  $P(17,1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.110** Graf  $P(17,1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(17, 1)$  mengikuti pola seperti Gambar 3.107 bagian (a) kemudian label tersebut dicopy memenuhi graf yang ditentukan. Berikut pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(17, 1)$  adalah sebagai berikut.



**Gambar 3.111** Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(17, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.111 dapat diketahui bahwa

$$\lambda'_{2,1}(P(17, 1)) = 8$$

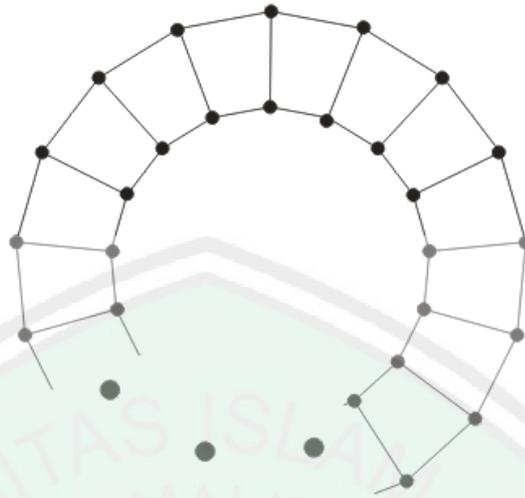
Berdasarkan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  di atas, karena  $\lambda'_{2,1}(P(9, 1)) = 8$ ,  $\lambda'_{2,1}(P(13, 1)) = 8$ ,  $\lambda'_{2,1}(P(17, 1)) = 8$ , maka diperoleh dugaan bahwa

$$\lambda'_{2,1}(P(5 + 4k, 1)) = 8$$

Sehingga, dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

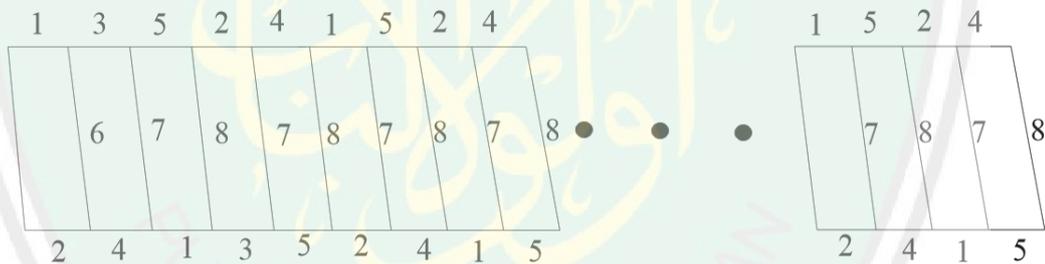
**Teorema 3.2.5** Untuk sebarang graf  $P(5 + 4k, 1)$ ;  $k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ , maka minimal label terbesar pada pelabelan sisi  $L(2, 1)$  adalah  $\lambda'_{2,1}(P(5 + 4k, 1)) = 8$ .

**Bukti:** Graf  $(P(5 + 4k, 1); k \in \mathbb{N})$ , dapat digambarkan sebagai berikut.



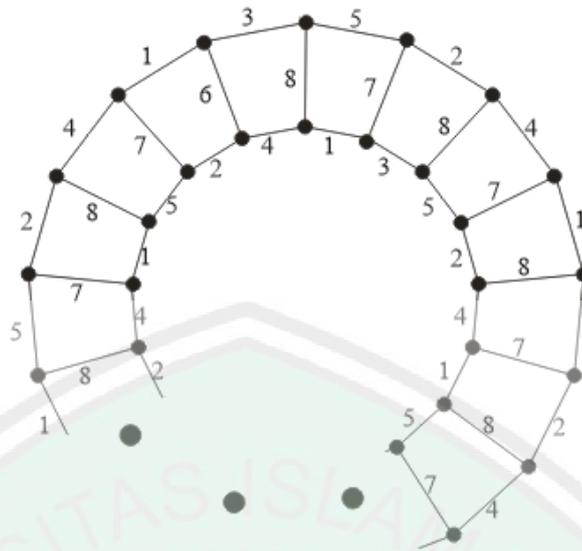
**Gambar 3.112** Graf  $P(5 + 4k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$

Dari Gambar 3.112 dapat diambil subgrafnya dan dilabeli dengan aturan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  sebagai berikut.



**Gambar 3.113** Subgraf  $P(5 + 4k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$  dengan Aturan Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$

Pelabelan tersebut adalah pelabelan sisi  $L(2, 1)$ . Sehingga, untuk melabeli  $P(5 + 4k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$ , hanya perlu melabeli subgrafnya dengan label  $(1, 3, 5, 2, 4, 1, 5, 2, 4, \dots, 1, 5, 2, 4)$ ,  $(6, 7, 8, 7, 8, 7, 8, 7, 8, \dots, 7, 8, 7, 8)$  dan  $(2, 4, 1, 3, 5, 2, 4, 1, 5, \dots, 2, 4, 1, 5)$ . Kemudian, dari label tersebut dapat melabeli semua titik, seiring bertambahnya  $n$  tanpa perlu menambahkan bilangan baru lagi, maka diperoleh pelabelan sebagai berikut.

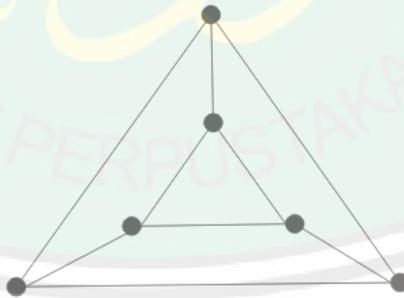


**Gambar 3.114** Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(5 + 4k, 1); k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$

Dengan demikian,  $\lambda'_{2,1}(P(5 + 4k, 1)) = 8$

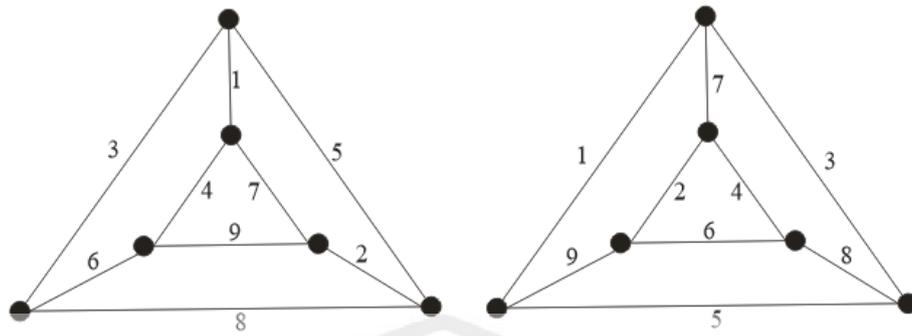
### 3.2.6 Pelabelan Sisi $L(2, 1)$ untuk $P(3, 1)$ & $P(l + 20k, 1); l = 6, 11, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$

Berikut ini akan dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(3, 1)$ , yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



**Gambar 3.115** Graf  $P(4, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(3, 1)$  adalah sebagai berikut.

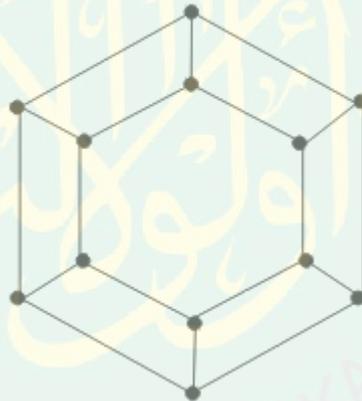


Gambar 3.116 Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada  $P(3, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.116 dapat diketahui bahwa

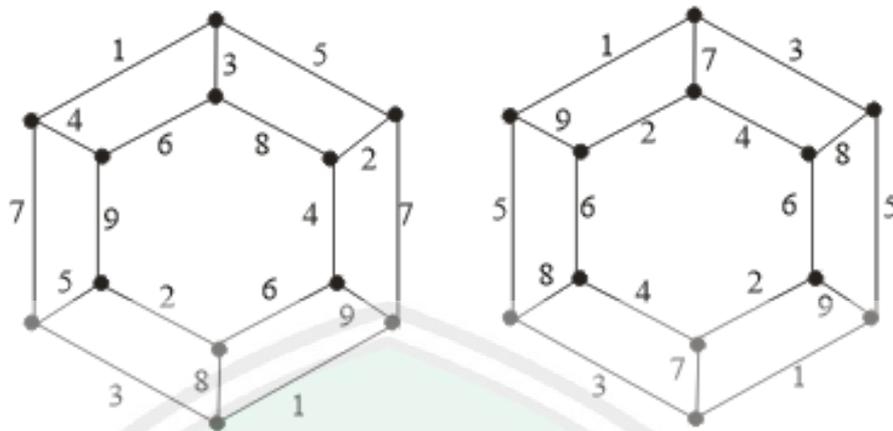
$$\lambda'_{2,1}(P(3, 1)) = 9$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(6, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



Gambar 3.117 Graf  $P(6, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(6, 1)$  adalah sebagai berikut.

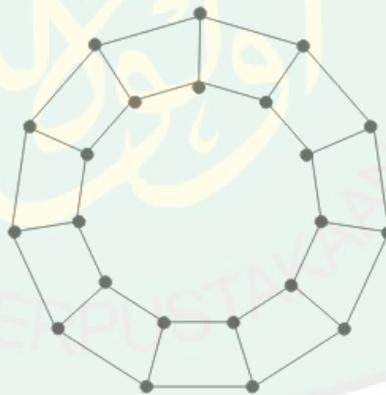


Gambar 3.118 Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(6, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.118 dapat diketahui bahwa

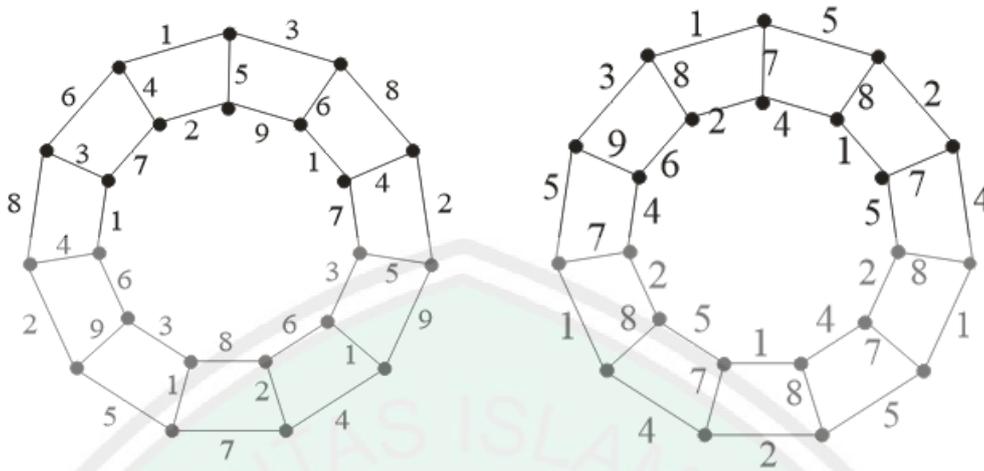
$$\lambda'_{2,1}(P(6, 1)) = 9$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(11, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



Gambar 3.119 Graf  $P(11, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(6, 1)$  adalah sebagai berikut.

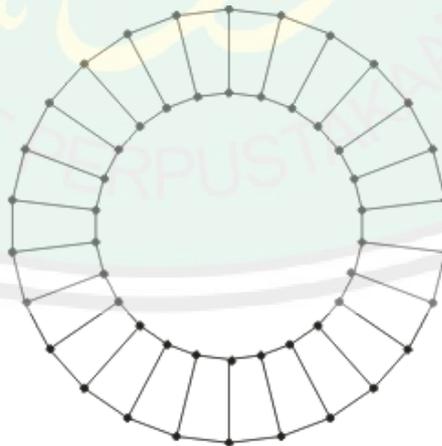


Gambar 3.120 Pelabelan Sisi  $L(2,1)$  pada Graf  $P(11, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.104 dapat diketahui bahwa

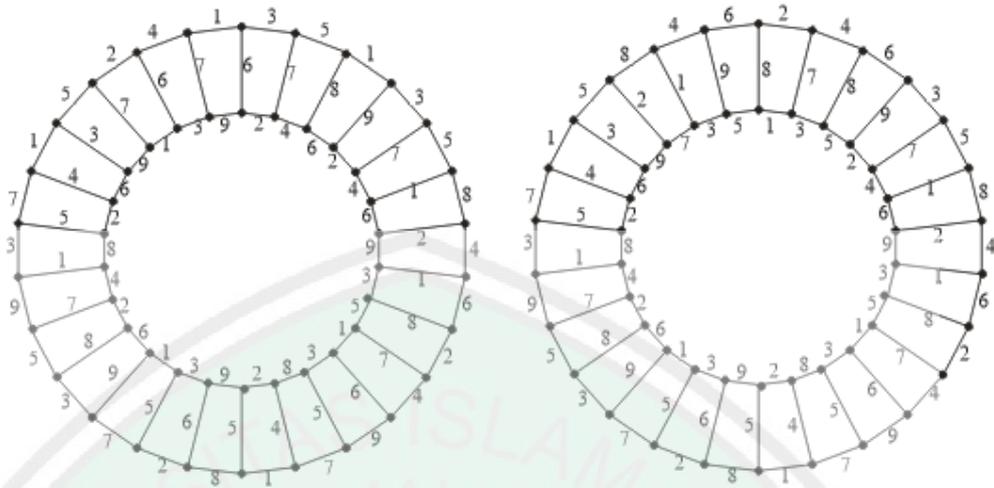
$$\lambda'_{2,1}(P(11, 1)) = 9$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(26, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



Gambar 3.121 Graf  $P(26, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(26, 1)$  adalah sebagai berikut.



Gambar 3.122 Graf  $P(26, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.122 dapat diketahui bahwa

$$\lambda'_{2,1}(P(26, 1)) = 9$$

Berdasarkan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  di atas, karena  $\lambda'_{2,1}(P(3, 1)) = 9$ ,  $\lambda'_{2,1}(P(6, 1)) = 9$ ,  $\lambda_{2,1}(P(11, 1)) = 9$ , maka untuk  $P(3, 1) \& P(l + 20k, 1); l = 6, 11, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$  diperoleh minimal label terbesar pada pelabelan sisi  $L(2, 1)$  adalah

$$\lambda'_{2,1}(P(3, 1)) = \lambda'_{2,1}(P(l + 20k, 1)) = 9$$

**Teorema 3.2.6** Untuk sebarang graf  $P(3, 1) \& P(l + 20k, 1); l = 6, 11, k \geq$

$0, k \in \mathbb{Z}$  maka minimal label terbesar pada pelabelan sisi  $L(2, 1)$

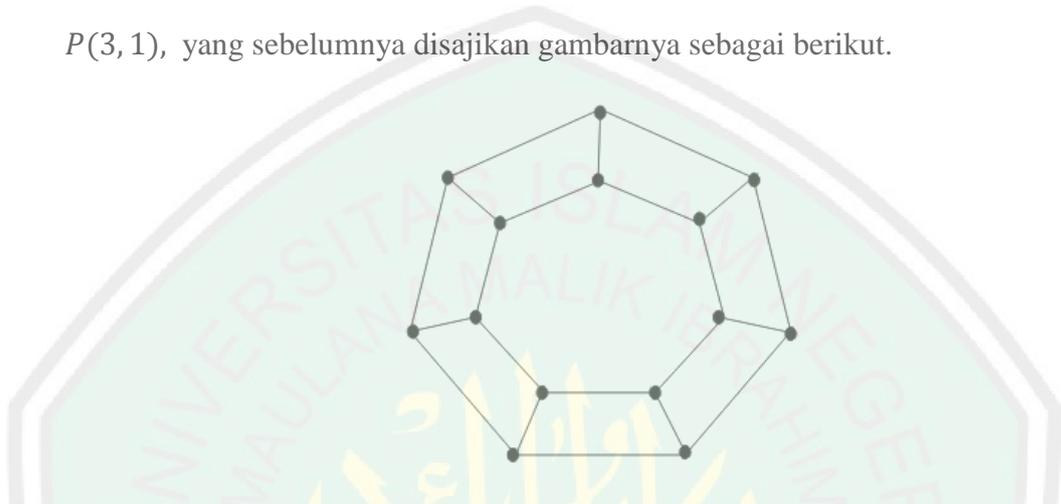
$$\text{adalah } \lambda'_{2,1}(P(3, 1)) = \lambda_{2,1}(P(l + 20k, 1)) = 9.$$

**Bukti:** Terlebih dahulu ditunjukkan bahwa  $\lambda'_{2,1}(P(3, 1)) = 9$ , minimal label terbesar yang dapat melabeli sisinya adalah 9, selanjutnya  $\lambda_{2,1}(P(6, 1)) = 9$ ,  $\lambda'_{2,1}(P(11, 1)) = 9$ ,  $\lambda'_{2,1}(P(26, 1)) = 9$ . Dari percobaan yang telah dilakukan tanpa melanggar aturan pelabelan  $L(2, 1)$  maka  $P(3, 1) \& P(l + 20k, 1); l =$

$6, 11, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , diperoleh minimal label terbesar pada pelabelan sisi  $L(2, 1)$  adalah  $\lambda'_{2,1}(P(3, 1)) = \lambda'_{2,1}(P(l + 20k, 1)) = 9$ .

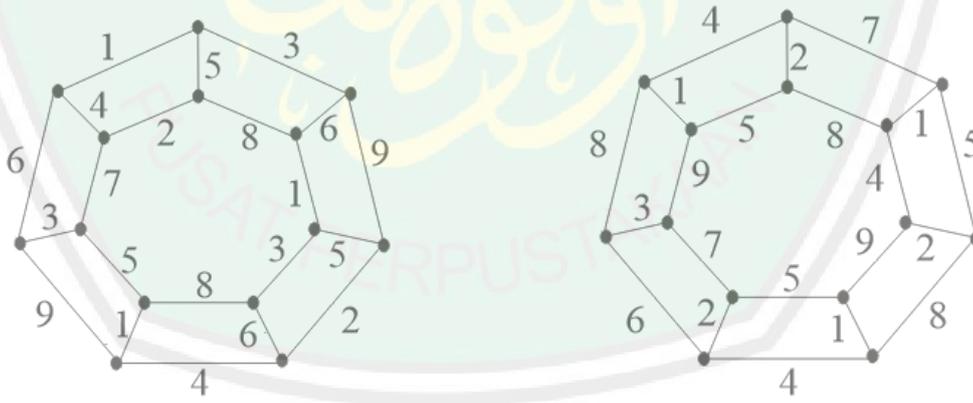
**3.2.7 Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  untuk  $P(l + 20k, 1)$ ;  $l = 7, 22, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$**

Berikut ini akan dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf Petersen  $P(3, 1)$ , yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



Gambar 3.123 Graf  $P(7, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(7, 1)$  adalah sebagai berikut.

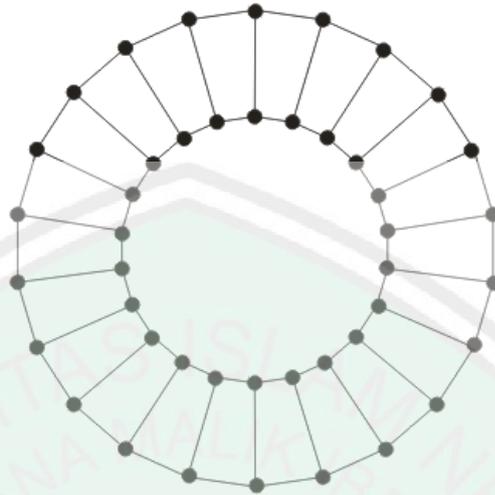


Gambar 3.124 Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada  $P(7, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.124 dapat diketahui bahwa

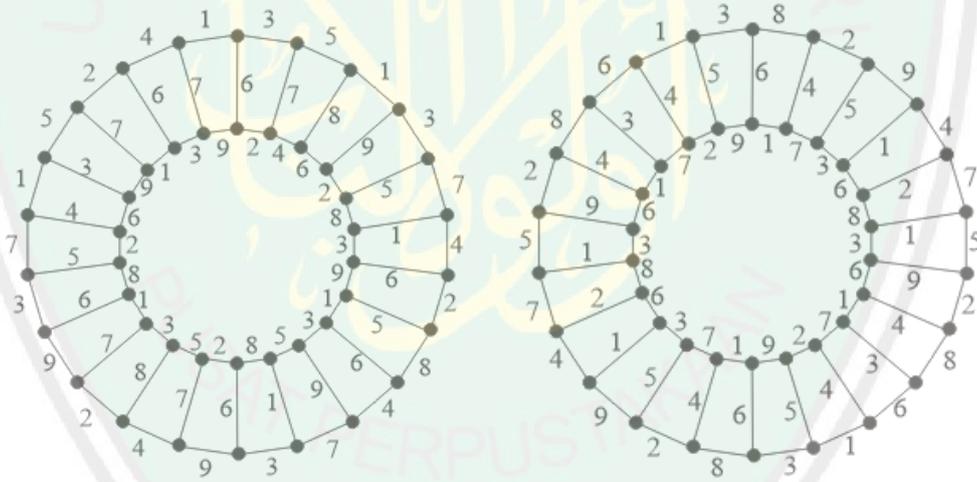
$$\lambda'_{2,1}(P(7, 1)) = 9$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(22, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



Gambar 3.125 Graf  $P(22, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(22, 1)$  adalah sebagai berikut.

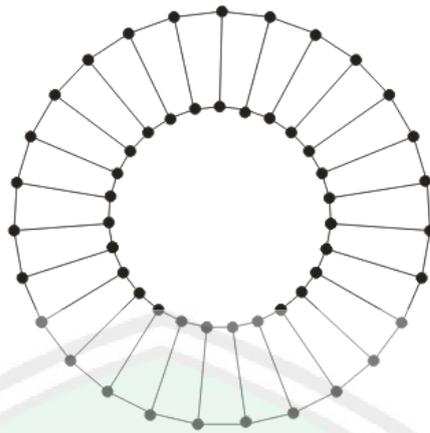


Gambar 3.126 Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(22, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.126 dapat diketahui bahwa

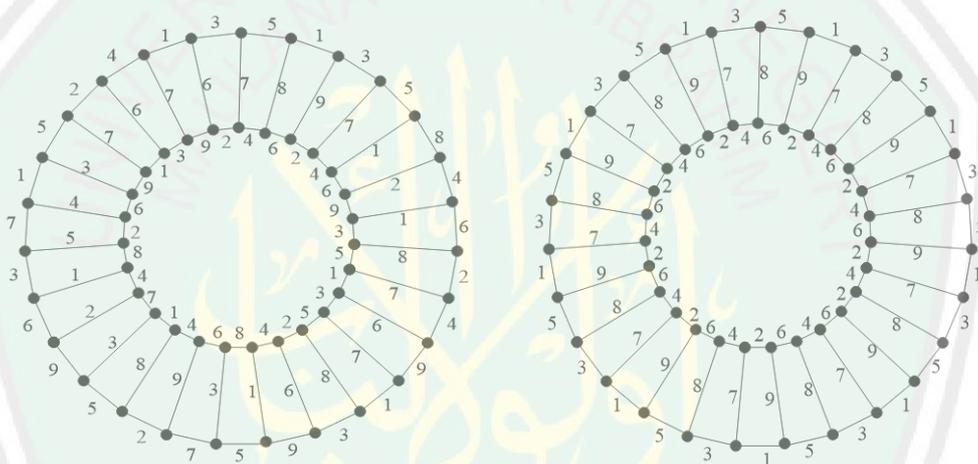
$$\lambda'_{2,1}(P(6, 1)) = 9$$

Selanjutnya, dilakukan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(27, 1)$  yang sebelumnya disajikan gambarnya sebagai berikut.



Gambar 3.127 Graf  $P(27, 1)$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf  $P(27, 1)$  adalah sebagai berikut.



Gambar 3.128 Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf  $P(27, 1)$

Berdasarkan Gambar 3.128 dapat diketahui bahwa

$$\lambda'_{2,1}(P(27, 1)) = 9$$

Berdasarkan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  di atas, karena  $\lambda'_{2,1}(P(7, 1)) = 9$ ,

$\lambda'_{2,1}(P(22, 1)) = 9, \lambda'_{2,1}(P(27, 1)) = 9$ , maka untuk  $P(l + 20k, 1); l = 7, 22,$

$k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$  diperoleh pola minimal label terbesar yang dapat melabeli sisi dengan aturan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  adalah

$$\lambda'_{2,1}(P(l + 20k, 1)) = 9$$

Sehingga, dari dugaan tersebut diperoleh suatu teorema sebagai berikut.

**Teorema 3.2.7** Untuk sebarang graf  $P(l + 20k, 1)$ ;  $l = 7, 22, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ , maka minimal label terbesar yang dapat melabeli sisi dengan aturan pelabelan sisi  $L(2, 1)$  adalah  $\lambda'_{2,1}(P(l + 20k, 1)) = 9$

**Bukti:** Terlebih dahulu ditunjukkan bahwa  $\lambda_{2,1}(P(7, 1)) = 9$ , minimal label terbesar yang dapat melabeli sisinya adalah 9. Selanjutnya,  $\lambda'_{2,1}(P(22, 1)) = 9$  dan  $\lambda'_{2,1}(P(27, 1)) = 9$ . Dari percobaan yang telah dilakukan tanpa melanggar aturan pelabelan  $L(2, 1)$  maka untuk  $P(l + 20k, 1)$ ;  $l = 7, 22, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$  diperoleh minimal label terbesar pada pelabelan sisi  $L(2, 1)$  adalah  $\lambda_{2,1}(P(l + 20k, 1)) = 9$ .



## BAB IV PENUTUP

### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dijelaskan, dapat disimpulkan bahwa nilai minimal label terbesar dari pelabelan titik dan sisi  $L(2, 1)$  pada graf Petersen sebagai berikut.

Pelabelan titik  $L(2, 1)$  pada graf Petersen

$$\lambda_{2,1}(P(n, 1)) = \begin{cases} 6 & \text{jika } n = P(3k, 1) \\ 7 & \text{jika } n = P(l + 12k, 1) \end{cases}$$

Pelabelan sisi  $L(2, 1)$  pada graf Petersen

$$\lambda'_{2,1}(P(n, 1)) = \begin{cases} 8, & \text{jika } n = P(4k, 1) \\ 8, & \text{jika } n = P(5k, 1) \\ 8, & \text{jika } n = P(5k + 3, 1) \\ 8, & \text{jika } n = P(5k + 4, 1) \\ 8, & \text{jika } n = P(5 + 4k, 1) \\ 9, & \text{jika } n = P(3, 1) \text{ \& } P(l + 20k, 1) \\ 9, & \text{jika } n = P(l + 20k, 1) \end{cases}$$

### 4.2 Saran

Berdasarkan penelitian ini, maka bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat mengembangkan penelitian ini dengan mengunakan minimal label terbesar dari pelabelan  $L(3, 2, 1)$  atau varian lain dari minimal label terbesar dari pelabelan  $L(2, 1)$ .

## DAFTAR RUJUKAN

- Abdussakir, Azizah, Nilna N. dan Nofandika, Fifi Framelia. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press.
- Agnarsson, G. dan Halldorsson, M. M. 2003. Coloring Power of Planar Graphs. *SIAM J. Discrete Math*, 16(4):651-662.
- Anggraeni, M.D. 2013. *Pelabelan  $L(3, 2, 1)$  dan Pembentukan Graf Middle pada Beberapa Graf Khusus*. Skripsi. Semarang: FMIPA Universitas Negeri Semarang.
- Asmiati. 2016. *Graf dan Aplikasinya pada Jarak Terpendek*. Yogyakarta: Matematika.
- Budiasti, H. 2010. *Pelabelan Total Titik Tak Beraturan pada Graf Bipartisi Lengkap*. Skripsi. Semarang: FMIPA Universitas Negeri Semarang.
- Fatimah, S., Sudarsana, W., dan Musdalifah. 2016. Pelabelan  $L(2, 1)$  pada Operasi Beberapa Kelas Graf. *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, (hal 73-84).
- Hale, W. 1980. *Frequency Assigment: Theory and Applications*. Proceedings of the *IEEE*, 68(12):1497-1514.
- Hinz, A.M., Klavzar, S., and Zemljic, S.S. 2016. A Surver and Classification of Sierpinski-Type. Hal 1-69.
- Holton, D.A. dan Sheehan, J. 1998. *The Petersen Graph*. Cambrigde: Cambrigde University Press.
- Jauhari, M.N. 2013. *Fungsi Iterasi dari Subdivisi dan Operasi Graf Garis pada Graf*. Tesis tidak dipublikasikan. Bandung: ITB.
- Katsir, I. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Imam Asy. Syafi'i.
- Lum, Andrew. 2007. *Upper Bounds On the  $L(2, 1)$  Labeling Number of Graphs With maximum Degree  $\Delta$* .
- Karimah, Lina Nikmatul. 2016. *Pelabelan  $L(2, 1)$  pada Graf Super Cycle*. Skripsi. Malang: Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Munir, Rinaldi. 2005. *Diktat Kuliah Strategi Algoritmik*. Departemen Teknik Informatika ITB.

Shao, Z., Yah, R.K., dan Zhang, D. 2008. The  $L(2,1)$ -Labeling on Graphs and Frequency Assignment Problem. *Applied Mathematics Letters*, 21: 37-41.

Widad, Sovil. 2017. *Pelabelan Sisi  $L(1,2)$  Graf dan Dual<sup>-</sup> Graf Segitiga Sierpinski*. Skripsi. Malang: MATEMATIKA Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.



## LAMPIRAN

### Lampiran 1: Skrip Matlab Pelabelan Titik dan Sisi $L(2, 1)$

```
function A=L21(g, batas_label, mode)
clc;
tic;

if class(g)~="graf"
    A=g;
    g=graf;
    set_matrik(g, A);
end
h=graf;

if nargin < 2
    disp('Terjadi kesalahan, minimal parameter adalah 2. ');
    disp('L21(graf, batas label, [mode: 1 atau 2])');
    return;
end
if nargin == 2
    mode = 1;
end

copy(h, g);
enumerate(h);
n=nv(h);
labelGraf = ones(1, n);

if(mode==2)
    labelGraf(:)=inf;
    j=0;
    waktu_mulai_simulasi = tic;
    waktu_akhir_simulasi = toc;

    save('label_graf', 'labelGraf');
    save('simulasi_ke', 'j')
    save('waktu_mulai_simulasi', 'waktu_mulai_simulasi');
    save('waktu_akhir_simulasi', 'waktu_akhir_simulasi')
end
load('label_graf');
load('simulasi_ke');
load('waktu_akhir_simulasi');
waktu_mulai_simulasi = waktu_akhir_simulasi+tic;
label_lama = -1;
i=1;

while i>0 && i<=n
    waktu_awal = tic;
    waktu_akhir = toc;
    if(waktu_akhir > 2)
        waktu_akhir_simulasi=waktu_akhir_simulasi+toc;
        tic
        save('label_graf', 'labelGraf');
        save('simulasi_ke', 'j')
        save('waktu_akhir_simulasi', 'waktu_akhir_simulasi')
```

```

end
j=j+1;
t1 = tetangga(h, i);
t2 = setdiff(tetangga(h, t1), [t1 i]);

semua_label = 1:batas_label;
label_tersedia = semua_label;
label_tersedia = setdiff(label_tersedia, labelGraf(t2)); %dari
t2
label_tersedia = setdiff(label_tersedia, [labelGraf(t1)-1
labelGraf(t1) labelGraf(t1)+1]); %dari t1
label_tersedia = label_tersedia(label_tersedia>label_lama);

if isempty(label_tersedia)
    labelGraf(i)=inf;
    i=i-1;
    if (i>0)
        label_lama=labelGraf(i);
    end
else
    labelGraf(i) = min(label_tersedia);
    label_lama=-1;
    i=i+1;
end
disp(['percobaan ke-', num2str(j)]);
disp(labelGraf);
end
disp(labelGraf);
labelCell = cell(n);
for i=1:n
    labelCell{i}=num2str(labelGraf(i));
end
disp(['simulasi berakhir dalam waktu ',
num2str(waktu_akhir_simulasi), ' detik.']);
label(h, labelCell);
gambar1(h);
copy(g, h);
end

```

**Lampiran 2: Langkah-langkah untuk Pelabelan Titik  $L(2, 1)$  pada Graf Petersen dalam Matlab**

```
>> g=graf  
Graf dengan 0 titik dan 0 sisi (full)  
>> petersen2(g,3)  
>> gambarn(g)  
>> L21(g,6,2)|
```



**Lampiran 3: Langkah-langkah untuk Pelabelan Sisi  $L(2, 1)$  pada Graf Petersen dalam Matlab**

```
>> g=graf
Graf dengan 0 titik dan 0 sisi (full)
>> h=graf
Graf dengan 0 titik dan 0 sisi (full)
>> petersen2(g,3)
>> line_graf(h,g)
>> gambar1(h)
>> L21(h,9,2)
```



## RIWAYAT HIDUP



Moch. Ryan Afif Aminulloh dilahirkan di Kediri pada tanggal 11 Juni 1996, anak kelima dari lima bersaudara, pasangan Bapak Sutikno dan Ibu Mujiah. Pendidikan dasarnya ditempuh di SD Negeri 1 Mojo yang ditamatkan pada tahun 2008. Pada tahun yang sama melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMP Negeri 1 Mojo. Pada tahun 2011 dia menamatkan pendidikannya, kemudian melanjutkan pendidikan menengah atas di SMA Negeri 1 Mojo dan menamatkan pendidikan tersebut pada tahun 2014. Pendidikan berikutnya dia tempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.



KEMENTERIAN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

**BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

Nama : Moch. Ryan Afif Aminulloh  
NIM : 14610001  
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika  
Judul Skripsi : Minimal Label Terbesar dari Pelabelan Titik dan Sisi  $L(2,1)$   
pada Graf Petersen  $P(n, 1)$   
Pembimbing I : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd  
Pembimbing II : Juhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	7 Mei 2018	Revisi Judul	1.
2.	24 Mei 2018	Revisi BAB I & II	2.
3.	29 Mei 2018	ACC BAB I, II & III	3.
4.	5 Juni 2018	Revisi Ayat	4.
5.	9 Juni 2018	Revisi Ayat dan Konsultasi Keagamaan	5.
6.	18 Juni 2018	ACC keagamaan	6.
7.	3 Oktober 2018	Konsultasi BAB I, II, & III	7.
8.	9 Oktober 2018	Revisi Keagamaan BAB I	8.
9.	15 Oktober 2018	Konsultasi Keagamaan BAB II	9.
10.	18 Oktober 2018	Konsultasi BAB II	10.
11.	5 November 2018	Konsultasi BAB III & IV	11.
12.	26 November 2018	ACC Keagamaan	12.
13.	4 Desember 2018	ACC Keseluruhan	13.

Malang, 05 Desember 2018

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika



Dr. Usman Pagalay, M.Si

NIP. 19650414 200312 1 001