# SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINIER *FUZZY* DENGAN BILANGAN *FUZZY* TRAPESIUM MENGGUNAKAN METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN

**SKRIPSI**


**OLEH**
**MISBAHUL MUNIR SETIAWAN**
**NIM. 13610105**



**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2019**

# SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINIER *FUZZY* DENGAN BILANGAN *FUZZY* TRAPESIUM MENGGUNAKAN METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada**
**Fakultas Sains dan Teknologi**
**Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang**
**untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam**
**Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh**
**Misbahul Munir Setiawan**
**NIM. 13610105**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2019**

**SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINIER *FUZZY* DENGAN BILANGAN *FUZZY* TRAPESIUM MENGGUNAKAN METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN**

**SKRIPSI**

**Oleh**
**Misbahul Munir Setiawan**
**NIM. 13610105**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 8 April 2019

| Pembimbing I, | Pembimbing II, |
|---|---|
| Evawati Alisah, M.Pd | Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D |
| NIP. 19720604 199903 2 001 | NIP. 19571005 198203 1 006 |

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

**SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINIER *FUZZY* DENGAN BILANGAN *FUZZY* TRAPESIUM MENGGUNAKAN METODE ELIMINASI GAUSS-JORDAN**

**SKRIPSI**

**Oleh**
**Misbahul Munir Setiawan**
**NIM. 13610105**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi

dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan

untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 20 Mei 2019

| | | |
|---|---|---|
| Penguji Utama | : Dewi Ismiarti, M.Si | ................................ |
| Ketua Penguji | : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si | ................................ |
| Sekretaris Penguji | : Evawati Alisah, M.Pd | ................................ |
| Anggota Penguji | : Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D | ................................ |

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini

Nama : Misbahul Munir Setiawan

NIM : 13610105

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Solusi Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* dengan Bilangan *Fuzzy* Trapesium Menggunakan Metode Eliminasi Gauss-Jordan

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 8 April 2019
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
30E0BAFF587546284
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Misbahul Munir Setiawan
NIM. 13610105

**MOTO**

خَيْرُ النَّاس أَنْفَعُهُمْ لِلنَّاس

"Sebaik-baik manusia adalah manusia yang bermanfaat bagi manusia lainnya"

## PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk

Kedua orang tua yang penulis cintai, Bapak Imam Bakri dan Ibu Binti Afidah.

Adik-adikku tersayang, Moh. Febri Ihsani dan Muhammad Mario Al-Bukhori.

Keluarga besar mahasiswa Jurusan Matematika UIN Malang angkatan 2013

Keluarga besar KSR-PMI Unit UIN Malang angkatan 22

Keluarga besar Pondok Pesantren Anwarul Huda, Kamar B7

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

*Alhamdulillah*, puji syukur kehadirat Allah Swt yang telah melimpahkan rahmat, taufik serta hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul "Solusi Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* dengan Bilangan *Fuzzy* Trapesium Menggunakan Metode Eliminasi Gauss-Jordan" ini dengan baik, sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penulis banyak mendapatkan bimbingan serta arahan dari berbagai pihak selama proses penyusunan skripsi ini. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Abd. Haris, M.Ag, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang banyak memberikan nasihat, motivasi, dan berbagai pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis

6. Ach. Nasichuddin, M.A, selaku dosen wali yang selalu memberi motivasi dan arahan kepada penulis.
7. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
8. Semua pihak yang secara langsung maupun tidak langsung ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

*Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Malang, April 2019

Penulis

DAFTAR ISI

## DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna sebagai berikut:

$\widetilde{\boldsymbol{A}}$ : bilangan *fuzzy* $\boldsymbol{A}$

$\mu_{(\widetilde{\boldsymbol{A}})}(x)$ : derajat keanggotaan $x$ di $\widetilde{\boldsymbol{A}}$

$\boldsymbol{A}_\alpha$ : potongan-$\alpha$ dari himpunan *fuzzy* $\widetilde{\boldsymbol{A}}$

$\boldsymbol{A}_\alpha^-$ : potongan-$\alpha$ dari himpunan *fuzzy* $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ yang monoton naik

$\boldsymbol{A}_\alpha^+$ : potongan-$\alpha$ dari himpunan *fuzzy* $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ yang monoton turun

$[0,1]$ : interval tertutup antara 0 dan 1

$a_{ij}$ : elemen matriks pada baris ke-$i$ dan kolom ke-$j$

$k$ : banyaknya iterasi

## DAFTAR GAMBAR

## ABSTRAK

Setiawan, Misbahul Munir. 2019. **Solusi Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* dengan Bilangan *Fuzzy* Trapesium Menggunakan Metode Eliminasi Gauss-Jordan.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd (II) Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D

**Kata Kunci** : Sistem Persamaan Linier *Fuzzy*, Bilangan *Fuzzy* Trapesium, Potongan-$\alpha$, Operasi Baris Elementer, Eliminasi Gauss-Jordan.

Secara umum sistem persamaan linier *fuzzy* dapat dinyatakan dalam bentuk matriks $\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{X}} = \widetilde{\boldsymbol{B}}$ di mana $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ adalah matriks koefisien tegas, $\widetilde{\boldsymbol{X}} = [\tilde{x}_j]$ adalah matriks kolom dari variabel *fuzzy* dan $\widetilde{\boldsymbol{B}} = [\tilde{b}_i]$ adalah matriks kolom dari konstanta *fuzzy*. Permasalahan yang selalu berkaitan dengan sistem persamaan linier *fuzzy* adalah tentang bagaimana solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* tersebut. Salah satu caranya yakni dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan.

Penelitian ini bertujuan untuk mendeskripsikan langkah-langkah mencari solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* dengan bilangan *fuzzy* trapesium menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan. Metode eliminasi Gauss-Jordan ini dilakukan dengan cara merepresentasikan bilangan *fuzzy* trapesium pada sistem persamaan linier *fuzzy* dalam bentuk potongan-$\alpha$, lalu sistem persamaan linier *fuzzy* ditransformasi menjadi matriks ekstensi dan kemudian melakukan transformasi pada matriks ekstensi dengan bantuan operasi baris elementer (OBE) sampai menjadi berbentuk eselon baris tereduksi dan diperoleh solusi yang berbentuk potongan-$\alpha$. Kemudian solusi tersebut diubah menjadi bilangan *fuzzy* trapesium untuk memperoleh solusi akhir dari sistem persamaan linier *fuzzy*.

Untuk selanjutnya, penelitian ini dapat dikembangkan dengan menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy* menggunakan aplikasi Matlab atau yang lainnya untuk mempermudah perhitungan.

## ABSTRACT

Setiawan, Misbahul Munir. 2019. **Solution of Fuzzy Linear Equation System with Trapezoidal Fuzzy Number by Using Gauss-Jordan Elimination Method**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Sains and Technology, Maulana Malik Ibrahim Islamic State University of Malang. Advisor: (I) Evawati Alisah, M.Pd (II) Dr. H Turmudi, M.Si., Ph.D

**Keywords :** Fuzzy Linear Equation System, Trapezoidal Fuzzy Number, α-Cut, Elementary Row Operation, Gauss-Jordan Elimination.

Generally, fuzzy linear equation system can be donated by matrix form $\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{X}} = \widetilde{\boldsymbol{B}}$ where $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ is a matrix of crisp coefficient, $\widetilde{\boldsymbol{X}} = [\tilde{x}_j]$ is a column matrix of fuzzy variable and $\widetilde{\boldsymbol{B}} = [\tilde{b}_i]$ is a column matrix of fuzzy constant. The problem that always related to fuzzy linear equation system is about how is the solution of fuzzy linear equatuion system. One of the method is using Gauss-Jordan elimination method.

The goal of this research is describe the steps of finding the solution of fuzzy linear equation system with trapezoidal fuzzy number by using Gauss-Jordan elimination method. The procedure of this method is by representing the trapezoidal fuzzy number on fuzzy equation linear system in $\alpha$-cut, then the fuzzy linear equation system is transformed to be an extension matrix. After that, the extension matrix is transformed to be reduced row echelon form by elementary row operation and get the solution with $\alpha$-cut. Finally, that solution change into trapezoidal fuzzy number to get the last solution of fuzzy linear equation system.

For the next, this research can be expanded by using Matlab application or the other application to make the calculation easier than before.

## ملخص

ستياوان, مصباح المنير. ٢٠١٩. **حلول نظام المعادلات الخطية الغامض مع عدد شبه منحرف الغامض باستخدام طريقة القضاء Gauss-Jordan**. بحث جامعي. الشعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية مالانج . المشرف: (١) ايفاواتي أليسة الماجستير (٢) الدوكتور الحاج تورمودي الماجستير

كلمات البحث: نظام المعادلات الخطية غامض, عدد شبه منحرف الغامض, قطعة$-\alpha$ عملية الصف الابتدائية (OBE), الطريقة القضاء Gauss-Jordan.

يذكر نظام المعادلات الخطية غامض عموما في شكل مصفوفة $\boldsymbol{A\widetilde{X}} = \widetilde{\boldsymbol{B}}$ . $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ هي مصفوفة من المعامل الثابت. $\widetilde{\boldsymbol{X}} = [\tilde{x}_j]$ هي مصفوفة العمود من المتغير الغامض. $\widetilde{\boldsymbol{B}} = [\tilde{b}_i]$ هي مصفوفة العمود من الثوابت الغامض. المسائل التي ترتبط دائمًا مع نظام المعادلات الخطية الغامض هي كيف يحبث تلك حلول نظام المعادلات الخطية الغامض. واحد من تلك الطريقة هي باستخدام طريقة القضاء Gauss-Jordan.

الهدف هذه البحث هو لمعرفة حلول نظام المعادلات الخطية الغامض مع عدد شبه منحرف الغامض باستخدام طريقة القضاء Gauss-Jordan. كيفية العمل على هذه الطريقة القضاء Gauss-Jordan هي تمثل عدد شبه منحرف الغامض فى نظام المعادلات الخطية الغامض بالشكل القطعة$-\alpha$ , ثم يتحول نظام المعادلات الخطية الغامض إلى المصفوفة التمديد. بعده, يتحول مصفوفة التمديد حتى شكل الخط المخفض بمساعدة عملية الصف الابتدائية (OBE). يتم حلول نظام المعادلات الخطية الغامض فى الشكل القطعة$-\alpha$ . آخرا, تلك الحلول يتغير إلى عدد شبه منحرف الغامض ليتم الحلول الآخر من نظام المعادلات الخطية الغامض.

في المستقبل, يمكن هذا البحث يتطور باستخدام التطبيق Matlab او غير ذلك لجعل الحسابيات أسهل من قبله.

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Manusia merupakan salah satu bentuk ciptaan Allah Swt yang paling sempurna di antara makhluk-makhluk lainnya. Akal merupakan salah satu tanda kesempurnaan yang diberikan Allah Swt kepada manusia. Allah Swt memiliki maksud tersendiri ketika menciptakan akal untuk manusia, yaitu untuk membantu manusia melihat dan men-*taddabur*i tanda-tanda kekuasaan-Nya sebagai bentuk ibadah. Sebagaimana firman Allah Swt dalam QS. Adz-Dzāriyāt/51 ayat 56 yang berbunyi:

وَمَا خَلَقْتُ ٱلْجِنَّ وَٱلْإِنسَ إِلَّا لِيَعْبُدُونِ ٥٦

*"Dan Aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka mengabdi (beribadah) kepada-Ku." (QS. Adz-Dzāriyāt/51: 56)*

Aktifitas beribadah dalam agama Islam bermacam-macam, mulai dari melaksanakan salat, puasa, zakat, sedekah, bekerja sampai menuntut ilmu. Secara bahasa, ibadah memiliki arti sebagai bentuk rasa syukur atas nikmat-nikmat yang diberikan oleh Allah Swt kepada manusia. Namun dalam pelaksanaannya, banyak manusia yang kurang bisa merasakan nikmatnya suatu ibadah apabila dilakukan dengan hati yang ikhlas. Mereka banyak mengeluhkan tentang sulitnya melakukan suatu ibadah. Padahal sebenarnya di dalam pelaksanaan ibadah yang sulit dan banyak godaan tersebut, Allah Swt ingin menguji keimanan manusia sekaligus memberikan solusi yang terbaik untuk masalah-masalah yang manusia alami. Allah Swt telah berfirman dalam QS. Al-Insyirah/94 ayat 5-6 yang berbunyi:

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۞ إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۞

*"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan." (QS. Al-Insyirah/94: 5-6)*

Dalam matematika terdapat berbagai macam permasalahan matematik yang membutuhkan solusi penyelesaian. Salah satunya yakni solusi dari sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier sendiri memiliki pengertian sebagai kumpulan dari satu atau lebih persamaan linier yang membentuk suatu sistem untuk dicari hasil penyelesaiannya.

Penyelesaian sistem persamaan linier dapat dilakukan dengan menggunakan beberapa metode yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan, salah satunya adalah metode eliminasi Gauss-Jordan. Eliminasi Gauss-Jordan merupakan pengembangan dari eliminasi Gauss di mana hasil yang diperoleh lebih sederhana. Metode ini merupakan metode penyelesaian persamaan linier dengan menggunakan matriks. Tujuan utama dari metode eliminasi Gauss-Jordan adalah mengubah matriks koefisien menjadi matriks diagonal dan mengeliminasi atau mereduksi elemen-elemen di atas dan di bawah matriks diagonal sehingga menjadi matriks eselon baris yang tereduksi (Adenegan dan Aluko, 2012).

Sistem persamaan linier tidak dapat terlepas dari ilmu logika yang merupakan dasar dari persamaan linier tersebut. Logika memiliki definisi yang luas sebagai ilmu yang mempelajari prinsip-prinsip penalaran yang dapat memisahkan secara tegas dan sistematis antara penalaran yang benar dan penalaran yang salah. Dalam melakukan kegiatan berpikir yang benar, diperlukan kaidah-kaidah tertentu dengan cara berpikir tepat, rasional dan kritis. Proses berpikir semacam inilah yang terdapat dalam logika. Pada dasarnya, fungsi dari adanya logika yaitu untuk meningkatkan kemampuan berpikir seseorang secara rasional, kritis, metodis, cermat dan objektif serta dapat menganalisis suatu kejadian secara mandiri dengan menggunakan asas-asas sistematis (Fathani, 2009:160-168).

Pada masa awal perkembangannya, logika hanya dapat diekspresikan dalam istilah biner (hanya memiliki dua nilai kebenaran, seperti ya atau tidak, benar atau salah, 0 atau 1). Logika seperti ini disebut logika klasik. Seiring dengan banyaknya penelitian-penelitian tentang logika, maka semakin berkembang pula ilmu-ilmu tentang logika. Pada saat logika klasik menyatakan bahwa segala sesuatu hanya diekspresikan dengan menggunakan dua nilai kebenaran, maka muncullah suatu logika yang menggantikan nilai kebenaran logika klasik dengan tingkat kebenaran. Logika yang memungkinkan adanya nilai keanggotaan antara 0 dan 1 serta konsep yang kabur atau tidak pasti dalam bentuk linguistik seperti "sedikit", "lumayan", dan "sangat". Logika ini dikenal sebagai logika *fuzzy* (logika kabur). Dasar dari logika *fuzzy* adalah teori himpunan *fuzzy* yang menjadikan derajat keanggotaan sebagai penentu keberadaan elemen dalam suatu himpunan (Kusumadewi, 2003).

Menurut pandangan agama Islam, logika *fuzzy* bukan merupakan ilmu yang baru karena sejatinya logika *fuzzy* sudah diterapkan pada zaman Nabi Muhammad Saw berupa ayat-ayat al-Quran yang diturunkan oleh Allah Swt kepada Rasul-Nya yang berkaitan dengan logika *fuzzy*, misalnya tentang tingkat keyakinan seorang manusia terhadap hal-hal di sekitarnya. Allah Swt telah berfirman dalam QS. At-Takātsur/102 ayat 5-8 yang berbunyi:

كَلَّا لَوۡ تَعۡلَمُونَ عِلۡمَ ٱلۡيَقِينِ ٥ لَتَرَوُنَّ ٱلۡجَحِيمَ ٦ ثُمَّ لَتَرَوُنَّهَا عَيۡنَ ٱلۡيَقِينِ ٧ ثُمَّ
لَتُسۡـَٔلُنَّ يَوۡمَئِذٍ عَنِ ٱلنَّعِيمِ ٨

*"Janganlah begitu, jika kamu mengetahui dengan 'Ilmul Yaqin, niscaya kamu benar-benar akan melihat neraka Jahiim, dan sesungguhnya kamu benar-benar akan melihatnya dengan 'Ainul yaqin." (QS. At-Takātsur/102: 5-7)*

dan firman Allah Swt dalam QS. Al-Wāqi'ah/56 ayat 91-95 yang berbunyi:

فَسَلَٰمٌ لَّكَ مِنْ أَصْحَٰبِ ٱلْيَمِينِ ﴿٩١﴾ وَأَمَّآ إِن كَانَ مِنَ ٱلْمُكَذِّبِينَ ٱلضَّآلِّينَ ﴿٩٢﴾ فَنُزُلٌ مِّنْ حَمِيمٍ ﴿٩٣﴾ وَتَصْلِيَةُ جَحِيمٍ ﴿٩٤﴾ إِنَّ هَٰذَا لَهُوَ حَقُّ ٱلْيَقِينِ ﴿٩٥﴾

*"Dan adapun jika dia termasuk golongan yang mendustakan lagi sesat, maka dia mendapat hidangan berupa air yang mendidih, dan dibakar di dalam neraka Jahiim. Sesungguhnya (yang disebutkan ini) adalah Haqqul Yaqin." (QS. Al-Wāqi'ah/56: 92-95)*

Pada kedua potongan ayat al-Quran tersebut, Allah Swt menjelaskan tentang tiga tingkatan manusia berdasarkan keyakinannya terhadap hal-hal di sekitarnya. Tingkatan keyakinan manusia yang paling rendah disebut *'ilmul yaqin.* Lalu, tingkatan keyakinan manusia selanjutnya adalah *'ainul yaqin*. Dan tingkatan keyakinan manusia yang paling tinggi yakni *haqqul yaqin*. Apabila pemaparan di atas dikaitkan dengan penelitian ini, maka dapat diketahui bahwasanya keyakinan manusia terhadap suatu hal, bukan hanya sebatas pada yakin dan tidak yakinnya seseorang. Akan tetapi lebih kepada seberapa besar tingkat keyakinan yang dimiliki oleh manusia tersebut. Sehingga nilai-nilai keyakinan manusia berada dalam interval 0 dan 1 di mana 0 adalah tingkatan keyakinan manusia yang paling rendah dan 1 adalah tingkatan keyakinan manusia yang paling tinggi. Dalam logika *fuzzy*, suatu elemen juga memiliki derajat keanggotaan masing-masing yang terletak pada interval 0 dan 1.

Dalam perkembangan sistem persamaan linier, terdapatlah suatu kemajuan ilmu pengetahuan di mana sistem persamaan linier yang umumnya berupa bilangan tegas dikombinasikan dengan logika yang bersifat kabur (*fuzzy*) sehingga diperoleh sistem persamaan baru yang dikenal dengan istilah sistem persamaan linier *fuzzy*. Pada sistem persamaan linier *fuzzy*, variabel dan konstanta yang digunakan berupa bilangan *fuzzy*. Bilangan *fuzzy* yang biasa digunakan dalam sebuah penelitian salah satunya adalah bilangan *fuzzy* trapesium. Menurut Susanti, Mashadi dan Sukamto (2013:2), bilangan *fuzzy* $\tilde{\boldsymbol{A}} = (x; b, c, \Delta L, \Delta R)$ dikatakan bilangan *fuzzy* trapesium dengan interval toleransi $[b, c]$ apabila memiliki fungsi keanggotaan

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{b - x}{\Delta L}, & \text{untuk } b - \Delta L \leq x \leq b, \Delta L > 0 \\ 1, & \text{untuk } b \leq x \leq c \\ 1 - \dfrac{x - c}{\Delta R}, & \text{untuk } c \leq x \leq c + \Delta R, \Delta R > 0 \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis menyusun penelitian ini dengan judul "Solusi Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* dengan Bilangan *Fuzzy* Trapesium Menggunakan Metode Gauss-Jordan".

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan digunakan pada penelitian ini berdasarkan latar belakang di atas adalah bagaimana solusi sistem persamaan linier *fuzzy* dengan bilangan *fuzzy* trapesium menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan yang akan dicapai pada penelitian ini berdasarkan rumusan masalah di atas adalah mengetahui solusi sistem persamaan linier *fuzzy* dengan bilangan *fuzzy* trapesium menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat pada penelitian ini yakni diharapkan mampu menambah ilmu dan wawasan pengetahuan yang lebih luas bagi para pembaca tentang solusi sistem persamaan linier *fuzzy* dengan bilangan *fuzzy* trapesium menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan.

### 1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian adalah metode studi kepustakaan (*Library Research*). Literatur utama yang digunakan adalah jurnal yang berjudul "*Gauss and Gauss-Jordan Elimination Methods for Solving Sistem of Linear Equations: Comparisons and Applications*" yang ditulis oleh Adenegan, K. E. dan Aluko, T. M. (2012). Sedangkan sebagai literatur pendamping adalah jurnal yang berjudul "*Penyelesaian Sitem Persamaan Linear Fully Fuzzy Menggunakan Metode Iterasi Jacobi*" yang ditulis oleh Marzuki, C. C. dan Herawati. (2015) dan literatur lain yang berkaitan dengan sistem persamaan linier *fuzzy*.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam melakukan penelitian ini, yaitu sebagai berikut:

1. Memberikan sebuah permasalahan sistem persamaan linier *fuzzy* dengan variabel dan konstanta yang berupa bilangan *fuzzy* trapesium.
2. Mengubah variabel dan konstanta *fuzzy* ke dalam bentuk potongan-$\alpha$-nya.
3. Menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy* dengan metode eliminasi Gauss-Jordan sampai diperoleh solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* dalam bentuk potongan-$\alpha$-nya.
4. Mengubah solusi sistem persamaan linier *fuzzy* yang berupa potongan-potongan-$\alpha$ ke dalam bentuk fungsi keanggotaan trapesium.
5. Memperoleh solusi sistem persamaan linier *fuzzy* $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ dalam bentuk bilangan *fuzzy* trapesium.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Dalam penelitian ini penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, adapun subbab dari bab tersebut dipaparkan pada penjelasan di bawah ini:

Bab I Pendahuluan

Berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Berisi teori-teori yang berhubungan dengan pembahasan antara lain konsep dasar himpunan *fuzzy*, fungsi keanggotaan dari himpunan *fuzzy*, potongan-$\alpha$, bilangan *fuzzy* trapesium, operasi aritmetika pada bilangan *fuzzy*, matriks, sistem persamaan linier, sistem persamaan linier *fuzzy*, operasi baris elementer, metode eliminasi Gauss-Jordan dan kajian keagamaan mengenai konsep logika *fuzzy* dan penyelesaian masalah dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Berisi pembahasan mengenai langkah-langkah dan solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* dengan bilangan *fuzzy* trapesium menggunakan metode Gauss-Jordan serta kajian keagamaan mengenai konsep logika *fuzzy* dan penyelesaian masalah dalam al-Quran.

Bab IV Penutup

Berisi kesimpulan yang diperoleh dari seluruh pembahasan dan beberapa saran yang dapat dijadikan rujukan untuk penelitian selanjutnya.

# BAB II

# KAJIAN PUSTAKA

## 2.1 Konsep Dasar Himpunan *Fuzzy*

Dalam kehidupan sehari-hari, sering dijumpai hal-hal yang berkaitan dengan konsep matematika. Salah satu dari konsep matematika yang sering digunakan adalah konsep himpunan. Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, konsep himpunan tidak hanya digunakan dalam kehidupan sehari-hari saja. Bahkan, konsep himpunan ini telah dikembangkan oleh para ilmuan menjadi konsep formal yang dewasa ini menjadi konsep yang mendasar dalam matematika.

Himpunan dapat dipahami sebagai suatu kumpulan atau koleksi unsur-unsur (nyata maupun abstrak) yang terdefinisi dengan tegas, dalam arti bahwa untuk setiap unsur selalu ditentukan secara tegas apakah unsur tersebut merupakan anggota dari himpunan tersebut atau bukan. Oleh sebab itu, himpunan semacam itu seringkali disebut sebagai himpunan tegas. (Susilo, 2006:36).

Suatu himpunan semesta $\boldsymbol{X}$ didefinisikan sebagai himpunan yang memuat elemen-elemen yang berhubungan dengan masalah yang diberikan. Jika didefinisikan suatu himpunan $\boldsymbol{A}$ berada pada himpunan semesta $\boldsymbol{X}$, maka diperoleh relasi sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{X} \tag{2.1}$$

Menurut Klir dan Yuan (1995:5) untuk menunjukkan bahwa suatu unsur $x$ merupakan anggota atau unsur dari himpunan $\boldsymbol{A}$, dapat ditulis sebagai $x \in \boldsymbol{A}$. Sedangkan suatu suatu unsur $x$ bukan merupakan unsur dari himpunan $\boldsymbol{A}$, dapat ditulis sebagai $x \notin \boldsymbol{A}$.

Terdapat 3 metode dasar untuk mendefinisikan suatu himpunan $\boldsymbol{A}$, yaitu:

1) Suatu himpunan didefinisikan dengan cara mendaftarkan semua anggota secara rinci. Metode ini dapat digunakan hanya untuk himpunan yang terbatas. Himpunan $\boldsymbol{A}$ yang anggota-anggotanya $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, biasanya ditulis sebagai:

$$\boldsymbol{A} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} \tag{2.2}$$

2) Suatu himpunan didefinisikan oleh suatu aturan yang dipenuhi untuk menjadi anggota himpunan (metode aturan). Notasi yang umum untuk menyatakan metode ini adalah:

$$\boldsymbol{A} = \{x | P(x)\} \tag{2.3}$$

di mana simbol "|" menunjukkan pernyataan "sedemikian sehingga", dan $P(x)$ menunjukkan pernyataan "$x$ yang memiliki properti $P$". Dengan kata lain, $\boldsymbol{A}$ didefinisikan sebagai himpunan semua elemen dari $X$ di mana $P(x)$ benar.

3) Suatu himpunan didefinisikan dengan fungsi, biasanya disebut fungsi karakteristik, yang menyatakan bahwa elemen-elemen dari $X$ merupakan anggota dari himpunan atau bukan. Himpunan $\boldsymbol{A}$ didefinisikan dengan fungsi karakteristik ($X_{\boldsymbol{A}}$) sebagai berikut:

$$X_{\boldsymbol{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } x \in \boldsymbol{A} \\ 0 & \text{untuk } x \notin \boldsymbol{A} \end{cases} \tag{2.4}$$

Dengan kata lain, pemetaan fungsi karakteristik elemen-elemen $X$ menuju elemen-elemen himpunan $\{0,1\}$ dinyatakan dengan:

$$X_{\boldsymbol{A}}: X \to \{0,1\}$$

(Klir dan Yuan, 1995:5-6).

Dari paparan di atas, dapat diketahui bahwa himpunan yang telah dijelaskan hanya terbatas pada himpunan yang terdefinisi secara tegas, dalam arti bahwa terdapat batas yang tegas antara elemen-elemen yang merupakan anggota dan elemen-elemen yang bukan merupakan anggota. Namun, dalam kenyataannya tidak semua himpunan yang ditemui dalam kehidupan sehari-hari bersifat tegas, misalnya himpunan orang yang gemuk, himpunan mahasiswa yang pintar, dan lain sebagainya (Susilo, 2006:49).

Pada dasarnya, teori himpunan *fuzzy* merupakan perluasan dari teori himpunan klasik. Pada teori himpunan klasik (*crisp*), keberadaan suatu elemen pada suatu himpunan $\boldsymbol{A}$ hanya memiliki 2 kemungkinan keanggotaan, yaitu menjadi anggota $\boldsymbol{A}$ atau tidak menjadi anggota $\boldsymbol{A}$ atau dengan kata lain bahwa pada himpunan klasik hanya terdapat 2 nilai keanggotaan, yaitu nilai 1 untuk menyatakan bahwa suatu elemen termasuk anggota himpunan $A$ dan nilai 0 untuk menyatakan bahwa suatu elemen tidak termasuk anggota himpunan $\boldsymbol{A}$ (Kusumadewi dkk, 2006:3).

Fungsi karakteristik dari himpunan tegas yang menyatakan bahwa nilai 1 atau 0 dalam suatu himpunan yang digunakan untuk membedakan antara anggota atau bukan anggota dari suatu himpunan masih dipertimbangkan kembali. Untuk mengatasi permasalahan himpunan dengan batas yang tidak tegas itu, Zadeh memperluas konsep dari fungsi karakteristik sedemikian rupa sehingga nilai yang ditetapkan pada elemen-elemen suatu himpunan berada dalam derajat keanggotaan yang dinyatakan dengan suatu bilangan riil dalam interval tertutup [0,1]. Fungsi tersebut dinamakan fungsi keanggotaan, dan himpunan yang didefinisikan tersebut dinamakan himpunan *fuzzy* (Susilo, 2006:50-51).

**Definisi 2.1.** Jika $X$ adalah kumpulan dari elemen-elemen yang dinotasikan dengan $x$, maka himpunan *fuzzy* $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ di $X$ adalah himpunan pasangan terurut

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \{(x, \mu_{\widetilde{\boldsymbol{A}}}(x)) | x \in X\} \tag{2.5}$$

di mana $\mu_{\widetilde{\boldsymbol{A}}}(x)$ disebut fungsi keanggotaan atau derajat keanggotaan dari $x$ di himpunan *fuzzy* $\widetilde{\boldsymbol{A}}$, yang merupakan pemetaan dari himpunan semesta $X$ ke interval tertutup [0,1] (Zimmermann, 2001:11).

Dengan demikian, dapat diketahui bahwasanya himpunan *fuzzy* merupakan himpunan pasangan terurut dengan elemen pertama adalah elemen himpunan dan elemen kedua adalah derajat keanggotaan dari elemen himpunan tersebut.

## 2.2 Fungsi Keanggotaan dari Himpunan *Fuzzy*

Setiap himpunan *fuzzy* dapat dinyatakan dengan suatu fungsi keanggotaan. Kusumadewi dkk (2006:9) mendefinisikan fungsi keanggotaan sebagai suatu kurva yang menunjukkan pemetaan dari elemen-elemen dalam suatu himpunan ke derajat keanggotaan elemen-elemen tersebut yang mempunyai interval antara 0 sampai 1. Terdapat beberapa cara untuk menyatakan himpunan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaannya. Salah satu cara yang dapat digunakan untuk mendapatkan derajat keanggotaan adalah melalui pendekatan fungsi. Beberapa fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy* yang sering digunakan menurut Susilo (2006:11-13) yakni:

1) Representasi Kurva Segitiga

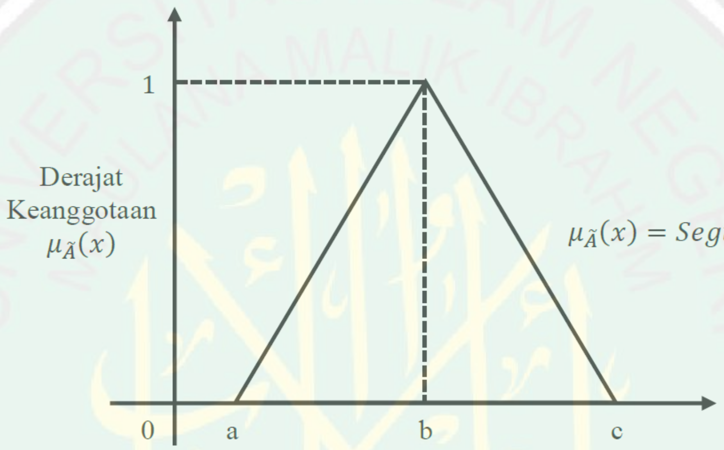
Kurva segitiga pada dasarnya merupakan gabungan antara 2 garis (linier). Suatu fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy* $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ dapat disebut sebagai fungsi keanggotaan segitiga apabila memiliki tiga buah parameter, yaitu $a, b, c \in \mathbb{R}$ dengan $a < b < c$, dan dinyatakan dengan:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \text{Segitiga}(x; a, b, c) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{untuk } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{untuk } b \leq x \leq c \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases} \quad (2.6)$$

Fungsi keanggotaan tersebut dapat dinyatakan pula dengan rumus sebagai berikut:

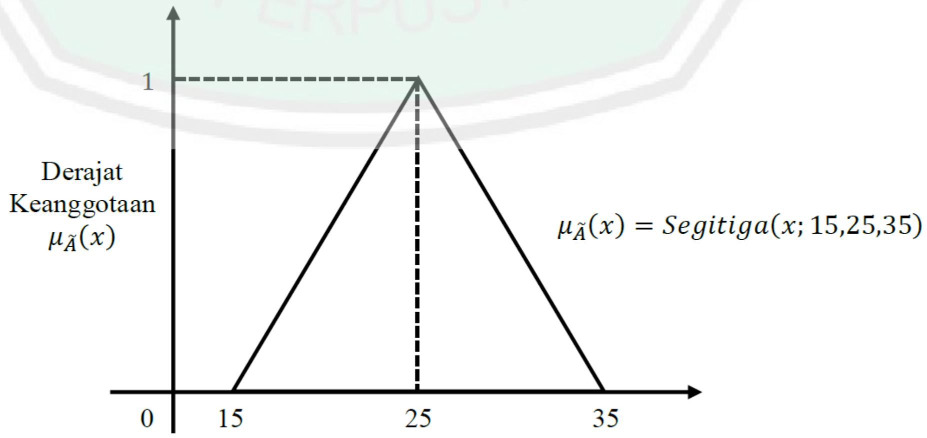
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \text{Segitiga}(x; a, b, c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right) \quad (2.7)$$

Penyajian suatu fungsi keanggotaan Segitiga$(x; a, b, c)$ dalam bentuk grafik adalah sebagai berikut:




Gambar 2. 1. Grafik Fungsi Keanggotaan Segitiga$(x; a, b, c)$

Berikut ini adalah contoh grafik yang menyatakan fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy* Segitiga$(x; 15,25,35)$




Gambar 2. 2. Grafik Fungsi Keanggotaan Segitiga$(x; 15,25,35)$

2) Representasi Kurva Trapesium

Kurva trapesium pada dasarnya mirip seperti kurva segitiga, namun ada beberapa titik yang memiliki nilai keanggotaan 1. Suatu fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy* $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ dapat disebut sebagai fungsi keanggotaan trapesium apabila memiliki empat buah parameter, yaitu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dengan $a < b < c < d$, dan $\Delta L = b - a, \Delta R = d - c$ dapat dinyatakan dengan:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \text{Trapesium}(x; a, b, c, d) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{untuk } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{untuk } b \leq x \leq c \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & \text{untuk } c \leq x \leq d \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases} \tag{2.8}$$

atau

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \text{Trapesium}(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 1 - \dfrac{b-x}{\Delta L}, & \text{untuk } b - \Delta L \leq x \leq b, \Delta L > 0 \\ 1, & \text{untuk } b \leq x \leq c \\ 1 - \dfrac{x-c}{\Delta R}, & \text{untuk } c \leq x \leq c + \Delta R, \Delta R > 0 \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases} \tag{2.9}$$

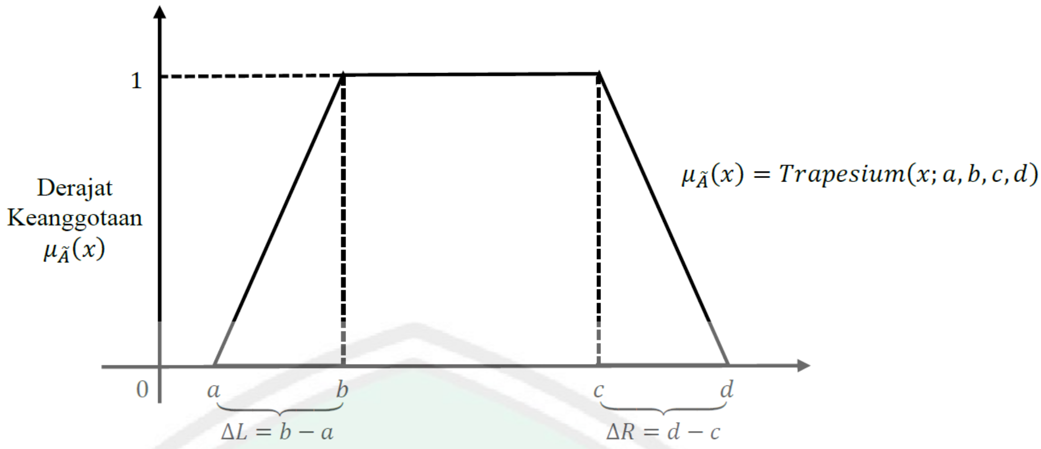
Fungsi keanggotaan tersebut dapat dinyatakan pula dengan rumus sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \text{Trapesium}(x; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right) \tag{2.10}$$

atau

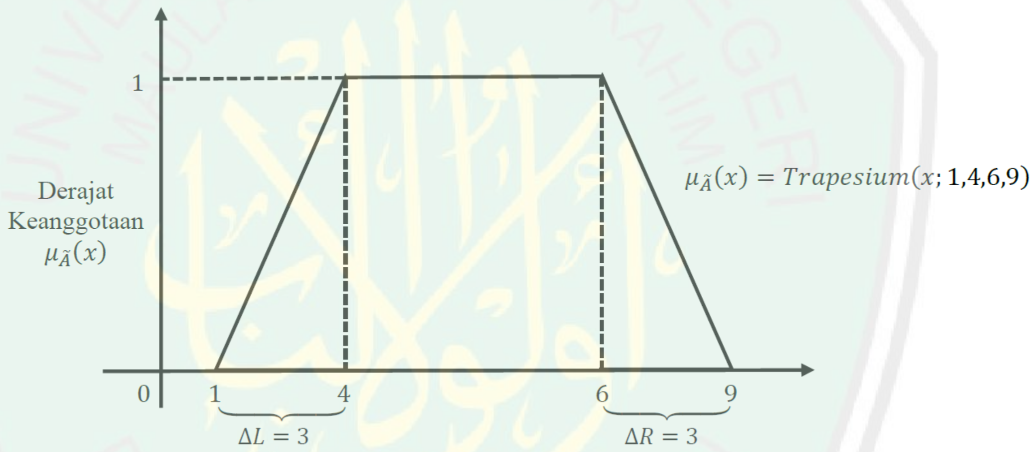
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \text{Trapesium}(x; a, b, c, d) = \max\left(\min\left(1 - \frac{b-x}{\Delta L}, 1, 1 - \frac{x-c}{\Delta R}\right), 0\right) \tag{2.11}$$

Penyajian suatu fungsi keanggotaan $\text{Trapesium}(x; a, b, c, d)$ dalam bentuk grafik adalah sebagai berikut:




Gambar 2. 3. Grafik Fungsi Keanggotaan Trapesium$(x; a, b, c, d)$

Berikut ini adalah contoh grafik yang menyatakan fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy* Trapesium$(x; 1,4,6,9)$




Gambar 2. 4. Grafik Fungsi Keanggotaan Trapesium$(x; 1,4,6,9)$

### 2.3 Potongan-$\alpha$

Salah satu bagian terpenting dari konsep himpunan *fuzzy* adalah tentang potongan-$\alpha$. Suatu himpunan kabur $\tilde{A}$ dapat dinyatakan dengan menggunakan potongan-$\alpha$-nya. Potongan-$\alpha$ merupakan suatu himpunan bagian tegas dalam himpunan semesta $X$ dengan $\alpha$ adalah suatu bilangan dalam interval tertutup $[0,1]$.

**Definisi 2.2.** Potongan-$\alpha$ dari himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ yang dinotasikan dengan $A_\alpha$ dengan $\alpha \in [0,1]$ merupakan himpunan tegas yang memuat semua elemen dari himpunan semesta $X$ dengan derajat keanggotaan yang lebih besar atau sama dengan nilai $\alpha$ yang telah ditentukan, dinyatakan dengan

$$\boldsymbol{A}_\alpha = \{x \in X | \mu_{\widetilde{\boldsymbol{A}}}(x) \geq \alpha\}. \tag{2.12}$$

**Definisi 2.3.** Potongan-$\alpha$ kuat dari himpunan *fuzzy* $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ yang dinotasikan dengan $\boldsymbol{A}'_\alpha$ merupakan himpunan tegas yang memuat semua elemen dari himpunan semesta $X$ dengan derajat keanggotaan yang lebih besar dibandingkan dengan nilai $\alpha$ yang telah ditentukan, dinyatakan dengan

$$\boldsymbol{A}'_\alpha = \{x \in X | \mu_{\widetilde{\boldsymbol{A}}}(x) > \alpha\} \tag{2.13}$$

(Klir & Yuan, 1995:19).

Contoh:

Diketahui himpunan semesta $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ dan himpunan *fuzzy* $\widetilde{\boldsymbol{A}} = \{(1,0),(2,0.2),(3,0.4),(4,0.6),(5,0.8),(6,1)\}$. Untuk $\alpha = 0.4$, maka potongan-$\alpha$-nya adalah

$$\boldsymbol{A}_{0.4} = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0.4\} = \{3,4,5,6\}$$

dan potongan-$\alpha$ kuatnya adalah

$$\boldsymbol{A}'_{0.4} = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0.4\} = \{4,5,6\}.$$

## 2.4 Bilangan *Fuzzy* Trapesium

Secara umum, pengertian bilangan *fuzzy* menurut Susilo (2006:111-112) merupakan himpunan *fuzzy* dalam semesta himpunan semua bilangan riil $\mathbb{R}$ yang memenuhi empat sifat, yaitu normal, mempunyai pendukung yang terbatas, semua potongan-$\alpha$-nya adalah interval tertutup pada $\mathbb{R}$, dan konveks.

1) Normal

**Definisi 2.4.** Himpunan *fuzzy* $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ dikatakan **normal** jika terdapat paling sedikit satu elemen $x \in X$ dengan $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ (Nasseri, 2008:1778).

2) Mempunyai pendukung yang terbatas

**Definisi 2.5.** Pendukung (*support*) dari suatu himpunan *fuzzy* $\tilde{\boldsymbol{A}}$, dinotasikan dengan $S(\tilde{\boldsymbol{A}})$ merupakan himpunan tegas dari semua elemen $x \in X$ sedemikian sehingga $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$ (Zimmermann, 2001:14).

Dengan kata lain, pendukung himpunan *fuzzy* $\tilde{\boldsymbol{A}}$ dapat disebut sebagai himpunan tegas yang elemen-elemennya terdapat pada himpunan *fuzzy* $\tilde{\boldsymbol{A}}$ yang memiliki derajat keanggotaan tak nol. Himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ dikatakan mempunyai **pendukung yang terbatas** jika elemen-elemen tak nol pada himpunan *fuzzy* $\tilde{\boldsymbol{A}}$ jumlahnya berbatas.

3) Semua $\alpha$-nya adalah interval tertutup dalam $\mathbb{R}$

Semua $\alpha$ pada himpunan *fuzzy* $\tilde{\boldsymbol{A}}$ **berada pada interval tertutup dalam** $\mathbb{R}$ jika $\alpha$-nya berada pada interval tertutup antara 0 dan 1 ($\alpha \in [0,1]$).

4) Konveks

**Definisi 2.6.** Himpunan *fuzzy* $\tilde{\boldsymbol{A}}$ di $X$ disebut **konveks** jika untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in [0,1]$, maka

$$\mu_{\tilde{A}}(\alpha x + (1-\alpha)\, y) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\} \qquad (2.14)$$

(Nasseri, 2008:1778).

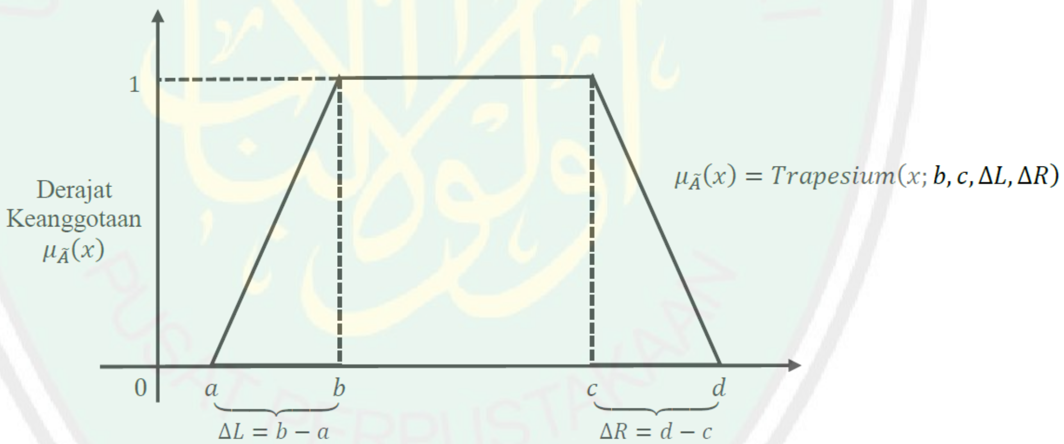
Sivanandam, Sumanthi & Deepa (2007:75) memiliki penjelasan yang berbeda tentang himpunan *fuzzy* konveks. Himpunan *fuzzy* $\tilde{\boldsymbol{A}}$ disebut **konveks** jika fungsi keanggotaannya monoton naik, atau monoton turun, atau monoton naik dan turun dengan nilai pada himpunan semesta $X$ yang semakin naik.

Salah satu bilangan *fuzzy* yang biasa digunakan dalam logika *fuzzy* adalah bilangan *fuzzy* trapesium. Bilangan *fuzzy* trapesium merupakan bilangan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan trapesium. Definisi bilangan *fuzzy* trapesium menurut Susanti, Mashadi dan Sukamto (2013:2-3) yakni

**Definisi 2.7.** Bilangan *fuzzy* $\widetilde{\boldsymbol{A}} = \text{Trapesium}(x; b, c, \Delta L, \Delta R)$ dikatakan bilangan *fuzzy* trapesium dengan interval toleransi $[b, c]$ apabila memiliki fungsi keanggotaan

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{b-x}{\Delta L}, & \text{untuk } b - \Delta L \leq x \leq b, \Delta L > 0 \\ 1, & \text{untuk } b \leq x \leq c \\ 1 - \dfrac{x-c}{\Delta R}, & \text{untuk } c \leq x \leq c + \Delta R, \Delta R > 0 \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases} \tag{2.15}$$

Bilangan *fuzzy* trapesium yang telah dijelaskan pada Definisi 2.7. dapat dikatakan sebagai suatu bilangan *fuzzy* karena telah memenuhi keempat sifat dari bilangan *fuzzy* yang telah dijelaskan. Perhatikan gambar berikut ini.




Gambar 2. 5. Grafik Fungsi Keanggotaan Trapesium$(x; b, c, \Delta L, \Delta R)$

Dari Gambar 2.5. terlihat bahwa himpunan *fuzzy* $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ bersifat normal karena terdapat paling sedikit satu elemen $x \in X$ dengan $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$, yakni $b \leq x \leq c$. Bilangan *fuzzy* trapesium juga memiliki pendukung yang terbatas karena elemen-elemen $S(\widetilde{\boldsymbol{A}})$ jumlahnya berbatas. Sifat selanjutnya yakni semua $\alpha$-nya berada pada interval tertutup $[0,1]$. Dan yang terakhir adalah bersifat konveks karena fungsi keanggotaannya monoton naik dan turun dengan nilai pada himpunan semesta $X$ yang semakin naik.

## 2.5 Operasi Aritmetika pada Bilangan *Fuzzy*

Operasi aritmetika pada bilangan *fuzzy* dapat dinyatakan dalam bentuk interval tertutup dalam $\mathbb{R}$. Misalkan $\forall e, f, g, h \in \mathbb{R}$, $[e, f]$ dan $[g, h]$ adalah dua buah interval tertutup dalam $\mathbb{R}$. Maka operasi aritmetika dari dua buah interval tertutup tersebut dapat didefinisikan sebagai:

1. Penjumlahan

   $[e, f] + [g, h] = [e + g, f + h]$

2. Pengurangan

   $[e, f] - [g, h] = [e - g, f - h]$

3. Perkalian

   $[e, f] \cdot [g, h] = [\min\{e.g, e.h, f.g, f.h\}, \max\{e.g, e.h, f.g, f.h\}]$

4. Pembagian

   $[e, f]/[g, h] = [\min\{e/g, e/h, f/g, f/h\}, \max\{e/g, e/h, f/g, f/h\}]$

   Pembagian pada interval $[e, f]/[g, h]$ tidak terdefinisi pada kasus $g = 0$ atau $h = 0$.

5. Perkalian skalar

   $g.[e, f] = [\min\{g.e, g.f\}, \max\{g.e, g.f\}]$

Berdasarkan definisi operasi aritmetika pada interval tersebut, maka operasi aritmetika dapat didefinisikan pula pada bilangan *fuzzy*. Misalkan $\tilde{e}$ dan $\tilde{f}$ adalah bilangan *fuzzy* yang dinyatakan dengan menggunakan potongan-$\alpha$-nya secara berturut-turut, yaitu $e_\alpha = [e_\alpha^-, e_\alpha^+]$ dan $f_\alpha = [f_\alpha^-, f_\alpha^+]$. Penjumlahan bilangan *fuzzy* $\tilde{e}$ dan $\tilde{f}$ yaitu $\tilde{e} + \tilde{f}$ dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}(\tilde{e} + \tilde{f})_\alpha &= [e_\alpha^-, e_\alpha^+] + [f_\alpha^-, f_\alpha^+]\\ &= [e_\alpha^- + f_\alpha^-, e_\alpha^+ + f_\alpha^+]\end{aligned}$$

untuk setiap $\alpha \in [0,1]$. Sedangkan perkalian bilangan *fuzzy* $\tilde{e}$ dan $\tilde{f}$ yaitu $\tilde{e}.\tilde{f}$ dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}(\tilde{e}.\tilde{f})_\alpha &= [e_\alpha^-, e_\alpha^+].[f_\alpha^-, f_\alpha^+]\\ &= [min\{e_\alpha^-.f_\alpha^-, e_\alpha^-.f_\alpha^+, e_\alpha^+.f_\alpha^-, e_\alpha^+.f_\alpha^+\}, max\{e_\alpha^-.f_\alpha^-, e_\alpha^-.f_\alpha^+, e_\alpha^+.f_\alpha^-, e_\alpha^+.f_\alpha^+\}]\end{aligned}$$

untuk setiap $\alpha \in [0,1]$.

## 2.6 Matriks

Imrona (2013:1) mendefinisikan matriks sebagai susunan bilangan atau fungsi yang tersusun dalam baris dan kolom serta diapit oleh dua kurung siku. Bentuk yang paling umum dari suatu matriks menurut Gere dan Weaver (1987:13) adalah susunan bilangan-bilangan yang berbentuk persegi panjang yang dapat digambarkan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (2.16)$$

Tanda kurung siku yang terlihat pada persamaan (2.16) digunakan untuk menunjukkan matriks beserta elemen-elemennya. Kemudian untuk menyatakan suatu matriks, dapat dinotasikan dengan suatu huruf kapital. Misalnya pada matriks di atas dapat dinotasikan dengan huruf kapital $\boldsymbol{A}$ untuk menyatakan matriks $\boldsymbol{A}$. Elemen-elemen pada matriks $\boldsymbol{A}$ dapat ditulis dengan $a_{ij}$ di mana $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,\dots,n$. Indeks pertama $(i)$ menyatakan baris ke-$i$ dan indeks kedua $(j)$ menyatakan kolom ke-$j$.

Ordo (ukuran) suatu matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom pada matriks tersebut. Matriks $\boldsymbol{A}$ pada persamaan (2.16) mempunyai ordo $m$ dan $n$ yang biasanya ditulis $m \times n$. Dua matriks disebut sama apabila ordonya sama dan elemen yang seletak bernilai sama, sehingga jika matriks $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ sama maka dapat ditulis $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$. Sebagai contoh, apabila matriks $\boldsymbol{A}$ seperti bentuk umum pada persamaan (2.16) dan $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$ dengan $i = 1,2,\dots,m$ dan $j = 1,2,\dots,n$, dan $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, maka berlaku $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap $i$ dan $j$ (Imrona, 2013:2). Berikut ini adalah beberapa jenis matriks berdasarkan susunan elemen matriks menurut Ruminta (2014:5-6), yaitu:

1. Matriks persegi merupakan matriks yang jumlah baris $(n)$ dan kolomnya $(n)$ sama sehingga ordonya adalah $n \times n$. Contoh:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

   Matriks $\boldsymbol{A}$ di atas berordo $4 \times 4$ dan ditulis $\boldsymbol{A}_{4\times 4}$, dan elemen yang terletak pada diagonal utamanya adalah $a_{11}, a_{22}, a_{33}$ dan $a_{44}$.

2. Matriks diagonal (*diagonal matrix*) merupakan matriks persegi yang semua elemen selain diagonal utamanya bernilai nol. Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3. Matriks identitas (*identity matrix*) merupakan matriks yang semua elemen pada diagonal utamanya bernilai satu (1) dan elemen di luar diagonal utama bernilai nol. Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Matriks segitiga atas (*upper triangular matrix*) merupakan matriks yang elemen di atas (kanan) diagonal utama ada yang bernilai tidak sama dengan nol. Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Matriks segitiga bawah merupakan matriks yang elemen di bawah (kiri) diagonal utama ada yang bernilai tidak sama dengan nol. Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.7 Sistem Persamaan Linier (SPL)

Sebelum mengenal istilah sistem persamaan linier, perlulah untuk mengetahui tentang persamaan linier yang merupakan dasar dari sistem persamaan linier. Sebuah garis dalam bidang $xy$ dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan:

$$a_1x + a_2y = b \tag{2.17}$$

Persamaan (2.17) disebut persamaan linier dalam variabel $x$ dan variabel $y$. Secara umum, persamaan linier dalam $n$ variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dapat didefinisikan sebagai persamaan yang dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{2.18}$$

di mana $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan $b$ adalah konstanta-konstanta riil (Anton, 1997:1).

Apabila persamaan linier yang diketahui lebih dari satu persamaan, maka dikumpulkan menjadi satu dalam sebuah sistem yang disebut dengan sistem persamaan linier yang akan dicari solusinya. Bentuk umum sistem persamaan linier menurut Marzuki dan Hasmita (2014:167) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B} \tag{2.19}$$

dengan $\boldsymbol{A} = [a_{mn}]$ adalah matriks koefisien, $\boldsymbol{X} = [x_n]$ adalah matriks kolom dari variabel-variabel yang tidak diketahui dan $\boldsymbol{B} = [b_m]$ adalah matriks kolom dari konstanta.

Secara khusus, Lipschutz dan Lipson (2006:58) menyebutkan bahwa sistem persamaan linier yang terdiri dari $m$ persamaan $(L_1, L_2, \dots, L_m)$ dengan $n$ variabel yang tidak diketahui $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 & + & \dots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{2.20}$$

Solusi dari sistem persamaan linier adalah berupa barisan bilangan $s_1, s_2, \dots, s_n$ yang merupakan solusi dari masing-masing pesamaan linier dalam suatu sistem. Misalnya terdapat sistem persamaan linier

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 &= 3 \\
-x_1 + x_2 &= 4
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

memiliki nilai $x_1 = -1$ dan $x_2 = 3$ sebagai solusi sistem persamaan linier (2.21) karena $x_1 = -1$ dan $x_2 = 3$ memenuhi kedua persamaan. Di sisi lain, $x_1 = 1$ dan $x_2 = 0$ bukan merupakan solusi dari sistem persamaan linier (2.21) karena hanya memenuhi persamaan yang pertama saja (Larson, 2013:4).

Jika ditelusuri lebih lanjut letak dari $+$, $x$, dan $=$ dari persamaan (2.20), maka sistem yang terdiri dari $m$ persamaan linier dan $n$ variabel tak diketahui dapat disingkat dengan hanya menuliskannya dalam bentuk matriks persegi panjang sebagai berikut:

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right]
$$

Matriks tersebut dinamakan matriks ekstensi (matriks yang diperbesar) untuk sistem persamaan linier pada persamaan (2.20). apabila membentuk sebuah matriks ekstensi, maka variabel-variabel tak diketahui harus dituliskan dalam urutan (ordo) yang sama dalam masing-masing persamaan (Anton, 1997:4).

Sistem persamaan linier yang mempunyai solusi, baik solusi tunggal maupun solusi tak terhingga banyaknya disebut sistem persamaan linier yang konsisten. Sedangkan sistem persamaan linier yang tidak mempunyai solusi disebut sistem persamaan linier yang tidak konsisten.

Dua sistem persamaan linier dapat dikatakan ekuivalen ketika keduanya memiliki solusi yang sama. Untuk menyelesaikan sistem persamaan linier ini harus mengacu pada 3 operasi yang dapat menghasilkan sistem persamaan linier yang ekuivalen, yaitu:

1. Menukar tempat dua persamaan.
2. Mengalikan suatu persamaan dengan suatu konstanta tak nol.
3. Menambahkan suatu persamaan dengan kelipatan persamaan lainnya.

(Larson, 2013:6-7)

## 2.8 Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* (SPLF)

Model sistem persamaan linier *fuzzy* menurut Marzuki dan Hasmita (2014:167) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}(\tilde{x}_1)+ & a_{12}(\tilde{x}_2)+ & \dots & a_{1n}(\tilde{x}_n) & = \tilde{b}_1 \\ a_{21}(\tilde{x}_1)+ & a_{22}(\tilde{x}_2)+ & \dots & a_{2n}(\tilde{x}_n) & = \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}(\tilde{x}_1)+ & a_{m2}(\tilde{x}_2)+ & \dots & a_{mn}(\tilde{x}_n) & = \tilde{b}_m \end{array} \qquad (2.22)$$

dengan $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ merupakan variabel bilangan *fuzzy* trapesium, $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m$ merupakan konstanta bilangan *fuzzy* trapesium dan $a_{ij} \in \mathbb{R}$ untuk $i = 1,2, \dots, m$ dan $j = 1,2, \dots, n$ merupakan koefisien bilangan tegas.

## 2.9 Operasi Baris Elementer (OBE)

Operasi baris elementer merupakan salah satu metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linier yang melibatkan elemen bilangan pada baris suatu matiks. Dalam istilah matriks, ketiga operasi yang terdapat pada penyelesaian sistem persamaan linier sesuai dengan operasi baris elementer. Persamaan baris elementer pada matriks ekstensi menghasilkan suatu matriks ekstensi yang baru yang sesuai dengan sistem persaman linier yang baru (tapi ekuivalen). Dua buah matriks disebut ekuivalen baris ketika suatu baris dapat diperoleh dari baris lainnya dengan barisan terhingga dari operasi baris elementer. Sehingga diperoleh 3 tipe operasi baris elementer sebagai berikut:

**Tipe 1.** Menukar tempat dua baris, dinotasikan dengan $B_i \leftrightarrow B_j$ di mana $i, j \in \mathbb{N}$. Notasi yang lebih sederhana yakni $B_i \rightarrow B_{ij}$.

**Tipe 2.** Mengalikan suatu baris dengan suatu konstanta tak nol, dinotasikan dengan $sB_i$ di mana $s \neq 0$. Notasi yang lebih sederhana yakni $B_i \rightarrow B_i(s)$.

**Tipe 3.** Menambahkan suatu baris dengan kelipatan baris lainnya, dinotasikan dengan $B_i + B_j.s$. Notasi yang lebih sederhana yakni $B_i \rightarrow B_{ij}(s)$.

Operasi baris elementer ini akan digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan linier yang menggunakan metode eliminasi Gauss atau eliminasi Gauss-Jordan. Meskipun operasi baris elementer ini mudah dilakukan, tapi terdapat banyak keterlibatan dengan aritmetika sehingga mudah melakukan kesalahan perhitungan. Oleh karena itu, langkah-langkah dalam operasi baris elementer harus dicatat sehingga dapat mengetahui kesalahan ketika melakukan perhitungan. Karena dalam menyelesaikan sistem persamaan menggunakan operasi baris elementer melibatkan beberapa langkah, maka lebih baik apabila menggunakan notasi-notasi singkat guna melacak setiap operasi yang dilakukan (Larson, 2013:14).

## 2.10 Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Terdapat beberapa metode untuk mencari solusi sistem persamaan linier *fuzzy*, salah satunya adalah metode eliminasi Gauss-Jordan. Sebelum mengetahui lebih banyak tentang metode eliminasi Gauss-Jordan, alangkah baiknya mengerti terlebih dahulu tentang metode eliminasi Gaussian. Metode eliminasi Gaussian menurut Adenegan dan Aluko (2012:100) merupakan pengaplikasian sistem persamaan linier *fuzzy* untuk mengubah matriks koefisien menjadi suatu matriks segitiga atas dengan operasi baris elementer. Setelah diperoleh matriks segitiga atas, maka selanjutnya dilakukan subtitusi balik untuk memperoleh solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy*.

Adenegan dan Aluko (2012:101) menjelaskan bahwa metode eliminasi Gauss-Jordan merupakan modifikasi atau perluasan dari metode eliminasi Gaussian. Dalam metode ini, matriks koefisien dari sistem persamaan linier *fuzzy* ditransformasi menjadi bentuk matriks yang lain yang lebih mudah untuk dicari solusinya dan sistem persamaan linier *fuzzy*-nya dinyatakan dengan sebuah matriks ekstensi yang memiliki solusi yang sama seperti sistem persamaan linier *fuzzy* yang asli. Tujuan dari metode eliminasi Gauss-Jordan ini adalah untuk mentransformasikan matriks koefisien menjadi matriks eselon baris tereduksi.

**Definisi 2.8. Bentuk Eselon Baris.** Sebuah matriks dapat dinyatakan dalam bentuk eselon baris apabila:

i. baris nol, jika ada, terletak di bawah baris-baris tak nol dan
ii. elemen tak nol utama di setiap baris berada di sebelah kanan elemen tak nol pertama dari baris sebelumnya.

**Definisi 2.9. Bentuk Eselon Baris Tereduksi.** Sebuah matriks dapat dinyatakan dalam bentuk eselon baris tereduksi apabila:

i. matriksnya berbentuk matriks eselon baris dengan 1 sebagai elemen tak nol utama di setiap baris tak nol dan
ii. elemen tak nol utama di setiap baris adalah hanya elemen tak nol dari kolomnya.

Cara untuk mentransformasikan matriks koefisien ini adalah dengan cara mengeliminasi kedua bagian elemen yang terdapat di atas (kanan) dan di bawah (kiri) elemen diagonal utama. Langkah-langkah menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy* dengan metode eliminasi Gauss-Jordan secara umum adalah:

1. Menuliskan sistem persamaan linier *fuzzy* $\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{X}} = \widetilde{\boldsymbol{B}}$ seperti pada persamaan (2.22) ke dalam bentuk matriks ekstensi. Maksud dari matriks ekstensi tersebut menurut Imrona (2013:31) adalah memperluas matriks koefisien $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ dengan cara menambahkan satu kolom yang berisikan matriks konstanta $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ sehingga berubah menjadi matriks ekstensi $\boldsymbol{A}_{m\times(n+1)}$. Bentuk dari matriks ekstensi $\boldsymbol{A}_{m\times(n+1)}$ yakni:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & \tilde{b}_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} & \tilde{b}_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}^{(0)} & a_{m2}^{(0)} & \dots & a_{mn}^{(0)} & \tilde{b}_m^{(0)} \end{array}\right] \tag{2.23}$$

   Indeks yang terdapat di atas elemen bukan menunjukkan pangkat. Namun indeks tersebut menunjukkan iterasi ke-$(k)$ dari hasil perhitungan dengan menggunakan operasi baris elementer, di mana $(k) = (0), (1), (2), \dots, (n)$.

2. Memilih satu baris yang elemen pertamanya tak nol. Jika baris yang elemen pertamanya tak nol tersebut terdapat pada baris pertama, maka tidak ada yang perlu dilakukan. Jika tidak, maka memilih sebuah baris yang elemen pertamanya tak nol dan ditukar dengan baris pertama yang elemen pertamanya tak nol.

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & \tilde{b}_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} & \tilde{b}_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}^{(0)} & a_{m2}^{(0)} & \dots & a_{mn}^{(0)} & \tilde{b}_m^{(0)} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

3. Jika elemen pertama pada baris pertama adalah $a_{11}^{(0)}$ (bukan 1), maka baris pertama pada Langkah 2 dikalikan dengan $1/a_{11}^{(0)}$ untuk memperoleh 1 utama.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & \tilde{b}_1^{(1)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} & \tilde{b}_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}^{(0)} & a_{m2}^{(0)} & \dots & a_{mn}^{(0)} & \tilde{b}_m^{(0)} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

4. Menambahkan kelipatan yang sesuai dari baris atas pada baris-baris yang ada di bawah sehingga semua elemen di bawah 1 utama bernilai nol.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & \tilde{b}_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & \tilde{b}_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)} & \tilde{b}_m^{(1)} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

5. Mulai sekali lagi dari Langkah 2 sampai Langkah 4 pada submatriks yang tersisa. Langkah ini dilakukan sampai elemen matriks ekstensi $\boldsymbol{A}_{m\times(n+1)}$ berbentuk eselon baris.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & \tilde{b}_1^{(1)} \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n}^{(2)} & \tilde{b}_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{b}_m^{(k)} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

6. Dengan memulai dari baris tak nol terakhir dan bekerja ke atas, maka ditambahkan dengan kelipatan yang sesuai dari setiap baris pada baris-baris yang ada di atas untuk mendapatkan nol di atas 1 utama.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_1^{(k)} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{b}_2^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{b}_m^{(k)} \end{array}\right] \tag{2.28}$$

7. Mengubah matriks ekstensi $\boldsymbol{A}_{m\times(n+1)}$ pada persamaan (2.28) menjadi sistem persamaan linier *fuzzy* $\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{X}} = \widetilde{\boldsymbol{B}}$ seperti pada persamaan (2.22) dan diperoleh

$$\begin{array}{cccccc} \tilde{x}_1^{(k)} & & & & = & \tilde{b}_1^{(k)} \\ & \tilde{x}_2^{(k)} & & & = & \tilde{b}_2^{(k)} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & \tilde{x}_n^{(k)} & = & \tilde{b}_m^{(k)} \end{array} \tag{2.29}$$

(Anton, 1997:10-12)

## 2.11 Kajian Keagamaan

### 2.11.1 Konsep Logika *Fuzzy* dalam al-Quran

Logika *fuzzy* merupakan perkembangan dari logika tegas. Dalam logika tegas, nilai keanggotaan suatu elemen dalam suatu himpunan ada dua kemungkinan yakni elemen tersebut merupakan anggota dari himpunan atau bukan merupakan anggota dari himpunan. Tetapi dalam logika *fuzzy* nilai keanggotaannya diperluas menjadi sebuah derajat keanggotaan yang dinyatakan sebagai bilangan riil dalam interval tertutup [0,1]. Salah satu contoh konsep logika *fuzzy* terdapat pada QS. At-Takātsur/102 ayat 5-7 yang berbunyi:

كَلَّا لَوْ تَعْلَمُونَ عِلْمَ ٱلْيَقِينِ ۝٥ لَتَرَوُنَّ ٱلْجَحِيمَ ۝٦ ثُمَّ لَتَرَوُنَّهَا عَيْنَ ٱلْيَقِينِ ۝٧

*"Janganlah begitu, jika kamu mengetahui dengan 'Ilmul Yaqin, niscaya kamu benar-benar akan melihat neraka Jahiim, dan sesungguhnya kamu benar-benar akan melihatnya dengan 'Ainul Yaqin." (QS. At-Takātsur/102: 5-7)*

dan dalam dan QS. Al-Wāqi'ah/56 ayat 92-95 yang berbunyi:

وَأَمَّآ إِن كَانَ مِنَ ٱلْمُكَذِّبِينَ ٱلضَّآلِّينَ ﴿٩٢﴾ فَنُزُلٌ مِّنْ حَمِيمٍ ﴿٩٣﴾ وَتَصْلِيَةُ جَحِيمٍ ﴿٩٤﴾ إِنَّ
هَٰذَا لَهُوَ حَقُّ ٱلْيَقِينِ ﴿٩٥﴾

*"Dan adapun jika dia termasuk golongan yang mendustakan lagi sesat, maka dia mendapat hidangan air yang mendidih, dan dibakar di dalam Jahannam. Sesungguhnya (yang disebutkan itu) adalah Haqqul Yaqin." (QS. Al-Wāqi'ah/56: 92-95)*

Firman-Nya ,*"Janganlah begitu, jika kamu mengetahui dengan 'ilmul yaqin."* yaitu sungguh benar apabila manusia mengetahui apa yang akan mereka dapatkan di alam kubur, hari kebangkitan dan hari pembalasan karena telah menyibukkan diri dan saling membanggakan dengan banyaknya harta.

Firman-Nya ,*"Niscaya kamu benar-benar akan melihat neraka Jahiim, dan sesungguhnya kamu benar-benar akan melihatnya dengan 'ainul yaqin."* Ayat ini merupakan jawaban untuk sumpah Allah ,*"dan demi kemuliaan Kami, sungguh kamu akan melihat neraka Jahiim."* Yaitu di hari kiamat kelak, orang-orang musyrik akan melihatnya dan kemudian akan terjerumus ke dalamnya. Demikian juga orang-orang yang beriman akan melihatnya, tetapi mereka akan diselamatkan oleh Allah. Ayat yang berbunyi *"tsumma latarowunnahaa 'ainal yaqiinu"*. Artinya tidak ada keraguan lagi bahwa neraka Jahiim akan didatangkan dan semua penduduk Mahsyar akan melihatnya (Al-Jazairi, 2009:1022-1023).

Pada QS. At-Takātsur/102 ayat 5 dijelaskan bahwa seandainya seseorang mengetahui dengan pengetahuan yang sebenarnya, makai a tidak akan terlena dengan memperbanyak harta hingga lupa dari mencari pahala akhirat, sampai kalian masuk ke dalam kubur. Kemudian Allah Swt menjelaskan lebih lanjut dalam firman selanjutnya QS. At-Takātsur/102 ayat 6-7 yang menjelaskan tentang ancaman Allah Swt yang disebutkan dalam firman-Nya QS. At-Takātsur/102 ayat 3-4 yang artinya

"*Janganlah begitu, kelak kalian akan mengetahui (akibat perbuatan kalian itu). Dan janganlah begitu, kelak kalian akan mengetahui*."

Allah Swt mengancam mereka dengan keadaan tersebut, yaitu saat ahli neraka melihat neraka manakala neraka bergolak dengan sekali golak. Maka menyungkurlah semua malaikat terdekat dan nabi yang diutus dengan bersideku di atas kedua lututnya masing-masing karena takut menyaksikan peristiwa-peristiwa yang sangat mengerikan tersebut.

Pada QS. Al-Wāqi'ah/56 ayat 92-94, Allah Swt menjelaskan bahwasanya apabila seseorang yang sedang menjelang kematiannya itu termasuk orang yang mendustakan kebenaran dan tersesat dari petunjuk Allah Swt maka ia akan mendapat siksaan dari-Nya berupa hidangan air yang mendidih yang dapat menghancurkan semua isi perut dan kulitnya serta dibakar di dalam neraka sehingga ia terkepung dari segala penjuru.

Selanjutnya pada QS. Al-Wāqi'ah/56 ayat 95, diterangkan bahwa semua penjelasan pada ayat-ayat sebelumnya merupakan berita tentang peristiwa yang benar dan pasti akan terjadi. Sehingga tidak ada keraguan dan tidak ada kebimbangan pada berita tersebut, serta tidak ada jalan lari bagi seorang pun dari peristiwa tersebut. Oleh sebab itu, perlu adanya kemantapan hati yang kuat dari seorang hamba untuk meyakini segala sesuatu yang diciptakan Allah Swt baik yang bersifat pasti atau pun yang belum pasti.

Dewasa ini rasanya sudah menjadi hal yang wajar ketika ada yang mengatakan orang lain salah, orang lain sesat, orang lain kafir, atau siapa pun dianggap salah, entah berdasarkan kebenaran objektif atau asumsi pribadi yang diskriminatif. Mestinya sebagai manusia yang diberikan anugerah istimewa oleh

Allah Swt berupa akal, seharusnya tidak terjerumus ke dalam jurang keragu-raguan yang dapat menenggelamkan derajat kemanusiaannya. Manusia diberi akal oleh Allah Swt supaya manusia itu dapat menilai suatu kebenaran berdasarkan realita keyakinan yang telah diajarkan oleh Allah Swt.

### 2.11.2 Penyelesaian Masalah dalam al-Quran

Masalah merupakan sesuatu yang pasti dialami oleh setiap manusia di muka bumi ini. Tidak ada seorang pun yang luput dari suatu masalah. Dalam kehidupan sehari-hari, banyaknya masalah yang dihadapi oleh seorang muslim terkadang membuat dirinya menjadi hilang semangat dan pupus harapan. Menurut At-Tubany (2009) menghadapi dan mencari solusi dari suatu permasalahan memang tidak mudah. Namun dalam setiap kesulitan yang mengiringi kehidupan, Allah Swt pasti memberikan kemudahan. Ketika menemui kesulitan hendaknya seseorang harus sepenuhnya percaya kepada Allah Swt dan menunggu kemudahan yang pasti akan datang pada waktunya. Oleh karena itu, apabila dengan janji Allah Swt ini seseorang masih merasa putus harapan atau menjadi panik saat mengalami kesulitan, hal itu merupakan sebuah tanda dari lemahnya iman seseorang. Allah Swt berfirman dalam QS. Al-Insyirah/94 ayat 5-6 yang berbunyi yang berbunyi:

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٥ إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٦ فَإِذَا فَرَغۡتَ فَٱنصَبۡ ۝٧

*"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan." (QS. Al-Insyirah/94: 5-6)*

Pada ayat 5 yakni *"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"*, maksudnya keleluasaan dan kecukupan. Kemudian Allah Swt mengulangi ayat tersebut pada ayat 6 yakni *"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"*. Sekelompok ulama mengatakan bahwa pengulangan ini merupakan penguat dari perkataan sebelumnya. Sekelompok ulama mengatakan bahwa kebiasaan bangsa Arab jika mereka menyebutkan nama atau *mu'arraf* (yang dikenal) dan mereka mengulang-ngulangnya, maka berarti itulah dia, dia (nama yang dimaksud) dan apabila menjadikan nama mereka *nakirah* dan kemudian mereka mengulang-ngulangnya, maka berarti nama tersebut adalah nama selain nama tersebut, keduanya berjumlah dua agar menjadikan cita-cita lebih kuat dan membangkitkan kesabaran menurut Tsa'lab (Al-Qurthubi, 2009:515-516).

Ibnu Abbas berkata ,"Allah Swt berkata, Aku menciptakan satu kesulitan dan Aku menciptakan dua kemudahan, dan tidaklah satu kesulitan dapat mengalahkan dua kemudahan," disebutkan dalam hadis yang diriwayatkan dari Nabi Muhammad Saw mengenai surat ini bahwasanya beliau bersabda,

لَنْ يَغْلِبَ عُسْرٌ يُسْرَيْنِ

*"Sekali-kali tidaklah satu kesulitan dapat mengalahkan dua kemudahan."*

Al-Qarni (2008:627) berpendapat bahwa sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, sesudah kesempitan ada kelonggaran, sesudah kesedihan ada kegembiraan, dan sesudah malam yang gelap gulita akan datang pagi yang cerah. Yang demikian itu karena setelah kesusahan, kesempitan, dan bencana itu pasti akan berakhir dan tidak akan berlangsung selamanya. Kesulitan itu satu, dan kemudahan itu dua. Maka satu kesulitan yang satu tidak akan bisa mengalahkan kemudahan yang dua. Maka bergembiralah dengan datangnya kemudahan setelah kesusahan, dan terbitnya kelonggaran setelah kesulitan.

# BAB III

# PEMBAHASAN

## 3.1. Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* dengan Bilangan *Fuzzy* Trapesium

Sistem persamaan linier *fuzzy* merupakan kumpulan dari beberapa persamaan linier *fuzzy* yang saling berkaitan antara persamaan satu dengan persamaan yang lainnya. Secara khusus, sistem persamaan linier *fuzzy* yang terdiri dari $m$ persamaan $(L_1, L_2, \dots, L_m)$ dengan $n$ variabel *fuzzy* yang tidak diketahui $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$\begin{matrix} a_{11}\tilde{x}_1 & + & a_{12}\tilde{x}_2 & + & \dots & + & a_{1n}\tilde{x}_n & = & \tilde{b}_1 \\ a_{21}\tilde{x}_1 & + & a_{22}\tilde{x}_2 & + & \dots & + & a_{2n}\tilde{x}_n & = & \tilde{b}_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\tilde{x}_1 & + & a_{m2}\tilde{x}_2 & + & \dots & + & a_{mn}\tilde{x}_n & = & \tilde{b}_m \end{matrix} \tag{3.1}$$

dengan $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ adalah variabel *fuzzy* tidak diketahui, dan $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m$ adalah konstanta *fuzzy* dan $a_{ij}$ adalah koefisien tegas dari variabel yang berupa bilangan riil untuk $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$.

Variabel *fuzzy* dan konstanta *fuzzy* pada persamaan di atas menggunakan bilangan *fuzzy* trapesium. Bilangan *fuzzy* trapesium merupakan bilangan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan trapesium. Misalkan diambil sebuah bilangan *fuzzy* $\tilde{x}_1 = \text{Trapesium}(x; x_{1A}, x_{1B}, \Delta L_{1A}, \Delta R_{1B})$ dari persamaan (3.1). Maka bilangan *fuzzy* $\tilde{x}_1$ mempunyai fungsi keanggotaan trapesium sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{x}_1}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x_{1A} - x}{\Delta L_{1A}}, & \text{untuk } x_{1A} - \Delta L_{1A} \leq x \leq x_{1A}, \Delta L_{1A} > 0 \\ 1, & \text{untuk } x_{1A} \leq x \leq x_{1B} \\ 1 - \dfrac{x - x_{1B}}{\Delta R_{1B}}, & \text{untuk } x_{1B} \leq x \leq x_{1B} + \Delta R_{1B}, \Delta R_{1B} > 0 \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases} \tag{3.2}$$

Sistem persamaan linier *fuzzy* (3.1) dapat diubah ke dalam bentuk matriks menjadi

$$\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{X}} = \widetilde{\boldsymbol{B}} \tag{3.3}$$

dengan $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ adalah matriks koefisien tegas dari variabel yang berupa bilangan riil, $\widetilde{\boldsymbol{X}} = [\tilde{x}_j]$ adalah matriks kolom dari variabel-variabel *fuzzy* yang tidak diketahui dan $\widetilde{\boldsymbol{B}} = [\tilde{b}_i]$ adalah matriks kolom dari konstanta *fuzzy*. Masing-masing matriks tersebut dapat ditulis sebagai:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \widetilde{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}, \widetilde{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{bmatrix}$$

Matriks-matriks di atas disubstitusikan ke dalam persamaan (3.3) sehingga diperoleh bentuk umum sistem persamaan linier *fuzzy* dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

### 3.2. Penulisan Bilangan *Fuzzy* Trapesium dalam Bentuk Potongan-$\alpha$

Bilangan *fuzzy* $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ dan $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ merupakan bilangan *fuzzy* trapesium dalam bentuk potongan-$\alpha$ yang dinyatakan sebagai pasangan terurut $[x_\alpha^-, x_\alpha^+]$ dan $[b_\alpha^-, b_\alpha^+]$ di mana $x_\alpha^-$ dan $b_\alpha^-$ adalah fungsi yang kontinu, terbatas di kiri dan monoton naik pada interval tertutup $[0,1]$, sedangkan $x_\alpha^+$ dan $b_\alpha^+$ adalah fungsi yang kontinu, terbatas di kanan dan monoton turun pada interval tertutup $[0,1]$. Sehingga diperoleh

$$\widetilde{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} (x_1)_\alpha \\ (x_2)_\alpha \\ \vdots \\ (x_n)_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [(x_1)_\alpha^-, (x_1)_\alpha^+] \\ [(x_2)_\alpha^-, (x_2)_\alpha^+] \\ \vdots \\ [(x_n)_\alpha^-, (x_n)_\alpha^+] \end{bmatrix}, \widetilde{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} (b_1)_\alpha \\ (b_2)_\alpha \\ \vdots \\ (b_m)_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [(b_1)_\alpha^-, (b_1)_\alpha^+] \\ [(b_2)_\alpha^-, (b_2)_\alpha^+] \\ \vdots \\ [(b_m)_\alpha^-, (b_m)_\alpha^+] \end{bmatrix}$$

Bilangan *fuzzy* trapesium $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ dan $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ yang telah dinyatakan menggunakan potongan-$\alpha$-nya disubstitusikan ke dalam persamaan (3.3) menjadi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [(x_1)_\alpha^-, (x_1)_\alpha^+] \\ [(x_2)_\alpha^-, (x_2)_\alpha^+] \\ \vdots \\ [(x_n)_\alpha^-, (x_n)_\alpha^+] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [(b_1)_\alpha^-, (b_1)_\alpha^+] \\ [(b_2)_\alpha^-, (b_2)_\alpha^+] \\ \vdots \\ [(b_m)_\alpha^-, (b_m)_\alpha^+] \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Potongan-$\alpha$ dari bilangan *fuzzy* trapesium di atas diperoleh dari fungsi keanggotaan trapesium dari bilangan *fuzzy* tersebut. Misal diambil sebuah bilangan *fuzzy* $\tilde{x}_1 = \text{Trapesium}(x; x_{1A}, x_{1B}, \Delta L_{1A}, \Delta R_{1B})$ dari persamaan (3.4) yang mempunyai fungsi keanggotaan trapesium sebagaimana persamaan (3.2).

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\tilde{x}_1}((x_1)_\alpha^-) = \mu_{\tilde{x}_1}((x_1)_\alpha^+)$ yaitu

$$\alpha = 1 - \frac{x_{1A} - (x_1)_\alpha^-}{\Delta L_{1A}} = 1 - \frac{(x_1)_\alpha^+ - x_{1B}}{\Delta R_{1B}}$$

maka $(x_1)_\alpha^- = \Delta L_{1A}.\alpha - (\Delta L_{1A} - x_{1A})$ dan $(x_1)_\alpha^+ = (\Delta R_{1B} + x_{1B}) - \Delta R_{\mathbf{1B}}.\boldsymbol{\alpha}$. Jadi, potongan-$\alpha$ dari bilangan *fuzzy* $\tilde{x}_1$ adalah $r_\alpha = [\Delta L_{1A}.\alpha - (\Delta L_{\mathbf{1A}} - x_{1A})\,, (\Delta R_{1B} + x_{1B}) - \Delta R_{1B}.\alpha]$.

### 3.3. Proses Pencarian Solusi Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* Menggunakan Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss-Jordan merupakan salah satu dari beberapa metode yang dapat digunakan untuk mencari solusi sebuah sistem persamaan linier *fuzzy*. Metode ini secara umum dilakukan dengan cara mentransformasikan matriks koefisien dari sebuah sistem persamaan menjadi bentuk eselon baris.

Pada persamaan (3.5) telah diketahui sistem persamaan linier *fuzzy* dengan bilangan *fuzzy* trapesium $\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{X}} = \widetilde{\boldsymbol{B}}$ yang telah dinyatakan dalam potongan-$\alpha$-nya sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^{(0)} & a_{m2}^{(0)} & \dots & a_{mn}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[\left(x_1^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(x_1^{(0)}\right)_\alpha^+\right] \\ \left[\left(x_2^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(x_2^{(0)}\right)_\alpha^+\right] \\ \vdots \\ \left[\left(x_n^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(x_n^{(0)}\right)_\alpha^+\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\left(b_1^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(b_1^{(0)}\right)_\alpha^+\right] \\ \left[\left(b_2^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(b_2^{(0)}\right)_\alpha^+\right] \\ \vdots \\ \left[\left(b_m^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(b_m^{(0)}\right)_\alpha^+\right] \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Langkah pertama yang dilakukan dalam metode eliminasi Gauss-Jordan adalah menuliskan sistem persamaan linier *fuzzy* (3.6) menjadi matriks ekstensi $\boldsymbol{A}_{m\times(n+1)}$ dengan menambahkan satu kolom yang berupa matriks konstanta $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ pada matriks koefisien $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & \left[\left(b_1^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(b_1^{(0)}\right)_\alpha^+\right] \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} & \left[\left(b_2^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(b_2^{(0)}\right)_\alpha^+\right] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}^{(0)} & a_{m2}^{(0)} & \dots & a_{mn}^{(0)} & \left[\left(b_m^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(b_m^{(0)}\right)_\alpha^+\right] \end{array}\right] \tag{3.7}$$

Selanjutnya pada langkah kedua, menukarkan baris pertama pada persamaan (3.7) dengan baris lain, jika perlu, untuk menjadikan elemen pertama pada baris pertama bernilai tak nol.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & \left[\left(b_1^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(b_1^{(0)}\right)_\alpha^+\right] \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} & \left[\left(b_2^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(b_2^{(0)}\right)_\alpha^+\right] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}^{(0)} & a_{m2}^{(0)} & \dots & a_{mn}^{(0)} & \left[\left(b_m^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(b_m^{(0)}\right)_\alpha^+\right] \end{array}\right] \tag{3.8}$$

Setelah diperoleh elemen pertama pada baris pertama persamaan (3.8) bernilai tak nol, maka dilanjutkan ke langkah ketiga. Pada langkah ketiga, jika elemen pertama pada baris pertama adalah $a_{11}^{(0)}$ (bukan 1), maka baris pertama pada persamaan (3.8) dikalikan dengan $1/a_{11}^{(0)}$ untuk memperoleh 1 utama.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)}.\,1/a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)}.\,1/a_{11}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)}.\,1/a_{11}^{(0)} & \left[\left(b_1^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(b_1^{(0)}\right)_\alpha^+\right].\,1/a_{11}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} & \left[\left(b_2^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(b_2^{(0)}\right)_\alpha^+\right] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}^{(0)} & a_{m2}^{(0)} & \dots & a_{mn}^{(0)} & \left[\left(b_m^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(b_m^{(0)}\right)_\alpha^+\right] \end{array}\right]$$

Sehingga diperoleh

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & \left[\left(b_1^{(1)}\right)_\alpha^-, \left(b_1^{(1)}\right)_\alpha^+\right] \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} & \left[\left(b_2^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(b_2^{(0)}\right)_\alpha^+\right] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}^{(0)} & a_{m2}^{(0)} & \dots & a_{mn}^{(0)} & \left[\left(b_m^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(b_m^{(0)}\right)_\alpha^+\right] \end{array}\right] \tag{3.9}$$

Setelah mendapatkan 1 utama, langkah keempat yaitu menambahkan kelipatan yang sesuai dari baris pertama pada persamaan (3.9) dengan baris-baris yang ada di bawah sehingga semua elemen di bawah 1 utama bernilai nol.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & \left[\left(b_1^{(1)}\right)_\alpha^-, \left(b_1^{(1)}\right)_\alpha^+\right] \\ a_{21}^{(0)} + \left(-\frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(1)}}\right).1 & a_{22}^{(0)} + \left(-\frac{a_{22}^{(0)}}{a_{11}^{(1)}}\right).a_{12}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(0)} + \left(-\frac{a_{2n}^{(0)}}{a_{11}^{(1)}}\right).a_{1n}^{(1)} & \left[\left(b_2^{(0)} + \left(-\frac{b_2^{(0)}}{a_{11}^{(1)}}\right).b_1^{(1)}\right)_\alpha^-, \left(b_2^{(0)} + \left(-\frac{b_2^{(0)}}{a_{11}^{(1)}}\right).b_1^{(1)}\right)_\alpha^+\right] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}^{(0)} + \left(-\frac{a_{m1}^{(0)}}{a_{11}^{(1)}}\right).1 & a_{m2}^{(0)} + \left(-\frac{a_{m2}^{(0)}}{a_{11}^{(1)}}\right).a_{12}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(0)} + \left(-\frac{a_{mn}^{(0)}}{a_{11}^{(1)}}\right).a_{1n}^{(1)} & \left[\left(b_m^{(0)} + \left(-\frac{b_m^{(0)}}{a_{11}^{(1)}}\right).b_1^{(1)}\right)_\alpha^-, \left(b_m^{(0)} + \left(-\frac{b_m^{(0)}}{a_{11}^{(1)}}\right).b_1^{(1)}\right)_\alpha^+\right] \end{array}\right]$$

Sehingga didapat

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & \left[\left(b_1^{(1)}\right)_\alpha^-, \left(b_1^{(1)}\right)_\alpha^+\right] \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & \left[\left(b_2^{(1)}\right)_\alpha^-, \left(b_2^{(1)}\right)_\alpha^+\right] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)} & \left[\left(b_m^{(1)}\right)_\alpha^-, \left(b_m^{(1)}\right)_\alpha^+\right] \end{array}\right] \tag{3.10}$$

Langkah kelima yakni dengan melakukan sekali lagi mulai dari langkah kedua sampai langkah keempat pada submatriks yang tersisa. Langkah ini dilakukan sampai elemen matriks ekstensi $\boldsymbol{A}_{m\times(n+1)}$ pada persamaan (3.10) berbentuk eselon baris. Sehingga diperoleh

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & \left[\left(b_1^{(1)}\right)_\alpha^-, \left(b_1^{(1)}\right)_\alpha^+\right] \\ 0 & 1 & \dots & a_{2n}^{(2)} & \left[\left(b_2^{(2)}\right)_\alpha^-, \left(b_2^{(2)}\right)_\alpha^+\right] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \left[\left(b_m^{(k)}\right)_\alpha^-, \left(b_m^{(k)}\right)_\alpha^+\right] \end{array}\right] \tag{3.11}$$

dengan indeks $(k)$ menunjukkan iterasi ke-$(k)$ di mana $(k) = (1), (2), \dots, (m)$

Selanjutnya pada langkah keenam dari metode eliminasi Gauss-Jordan yakni dengan memulai persamaan (3.11) dari baris tak nol terakhir dan bekerja ke atas, maka ditambahkan dengan kelipatan yang sesuai dari setiap baris pada baris-baris yang ada di atas untuk mendapatkan nol di atas 1 utama.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[\left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^-, \left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^+\right] \\ \left[\left(b_2^{(k)}\right)_\alpha^-, \left(b_2^{(k)}\right)_\alpha^+\right] \\ \vdots \\ \left[\left(b_m^{(k)}\right)_\alpha^-, \left(b_m^{(k)}\right)_\alpha^+\right] \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Lalu langkah ketujuh yakni mengubah matriks ekstensi $\boldsymbol{A}_{m\times(n+1)}$ pada persamaan (3.12) menjadi sistem persamaan linier *fuzzy* $\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{X}} = \widetilde{\boldsymbol{B}}$ seperti pada persamaan (3.1)

$$\begin{matrix} \left[\left(x_1^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(x_1^{(0)}\right)_\alpha^+\right] & & & = & \left[\left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^-, \left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^+\right] \\ & \left[\left(x_2^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(x_2^{(0)}\right)_\alpha^+\right] & & = & \left[\left(b_2^{(k)}\right)_\alpha^-, \left(b_2^{(k)}\right)_\alpha^+\right] \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & \left[\left(x_n^{(0)}\right)_\alpha^-, \left(x_n^{(0)}\right)_\alpha^+\right] & = & \left[\left(b_m^{(k)}\right)_\alpha^-, \left(b_m^{(k)}\right)_\alpha^+\right] \end{matrix} \quad (3.13)$$

Sehingga diperoleh solusi dari persamaan (3.1) dalam bentuk potongan-$\alpha$-nya sebagai berikut:

$$\begin{matrix} \tilde{x}_1 & = & \left(x_1^{(0)}\right)_\alpha & = & \left[\left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^-, \left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^+\right] \\ \tilde{x}_2 & = & \left(x_2^{(0)}\right)_\alpha & = & \left[\left(b_2^{(k)}\right)_\alpha^-, \left(b_2^{(k)}\right)_\alpha^+\right] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \tilde{x}_n & = & \left(x_n^{(0)}\right)_\alpha & = & \left[\left(b_m^{(k)}\right)_\alpha^-, \left(b_m^{(k)}\right)_\alpha^+\right] \end{matrix} \quad (3.14)$$

Persamaan (3.14) di atas dapat dijadikan suatu bentuk umum dari solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* dengan menggunakan potongan-$\alpha$-nya menjadi

$$\left(x_n^{(0)}\right)_\alpha = \left[\left(b_m^{(k)}\right)_\alpha^-, \left(b_m^{(k)}\right)_\alpha^+\right] \quad (3.15)$$

## 3.4. Pengubahan Solusi yang Berbentuk Potongan-$\alpha$ Menjadi Berbentuk Bilangan *Fuzzy* Trapesium

Solusi yang terletak pada persamaan (3.14) sudah dapat dikatakan sebagai sebuah solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy*. Akan tetapi solusinya masih dalam bentuk potongan-$\alpha$ dan belum berbentuk bilangan *fuzzy* trapesium. Sehingga untuk mengubah solusi yang berupa potongan-$\alpha$ menjadi solusi yang berbentuk bilangan *fuzzy* trapesium dapat diperoleh dari fungsi keanggotaan trapesium. Misal diambil salah satu solusi dari persamaan (3.14), yakni

$$\left(x_1^{(0)}\right)_\alpha = \left[\left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^-, \left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^+\right] \tag{3.16}$$

di mana

$$\left[\left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^-, \left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^+\right] = \left[\Delta L_{1A}^{(k)}.\alpha - \left(\Delta L_{1A}^{(k)} - b_{1A}^{(k)}\right), \left(\Delta R_{1B}^{(k)} + b_{1B}^{(k)}\right) - \Delta R_{1B}^{(k)}.\alpha\right]$$

Lalu dicari derajat keanggotaan dari bilangan *fuzzy* $\tilde{b}_1^{(k)}$ yang monoton naik dan monoton turun berdasarkan potongan-$\alpha$ pada persamaan (3.16).

Untuk derajat keanggotaan dari bilangan *fuzzy* $\tilde{b}_1^{(k)}$ yang monoton naik adalah

$$\left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^- = \Delta L_{1A}^{(k)}.\alpha - \left(\Delta L_{1A}^{(k)} - b_{1A}^{(k)}\right)$$

$$\alpha = 1 - \frac{b_{1A}^{(k)} - \left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^-}{\Delta L_{1A}^{(k)}} \tag{3.17}$$

Untuk derajat keanggotaan dari bilangan *fuzzy* $\tilde{b}_1^{(k)}$ yang monoton turun adalah

$$\left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^+ = \left(\Delta R_{1B}^{(k)} + b_{1B}^{(k)}\right) - \Delta R_{1B}^{(k)}.\alpha$$

$$\alpha = 1 - \frac{\left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^+ - b_{1B}^{(k)}}{\Delta R_{1B}^{(k)}} \tag{3.18}$$

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\tilde{b}_1^{(k)}}\left(\left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^-\right) = \mu_{\tilde{b}_1^{(k)}}\left(\left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^+\right)$ maka

$$\mu_{\tilde{b}_1^{(k)}}\left(\left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^-\right) = 1 - \frac{b_{1A}^{(k)} - \left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^-}{\Delta L_{1A}^{(k)}} \quad (3.19)$$

dan

$$\mu_{\tilde{b}_1^{(k)}}\left(\left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^+\right) = 1 - \frac{\left(b_1^{(k)}\right)_\alpha^+ - b_{1B}^{(k)}}{\Delta R_{1B}^{(k)}} \quad (3.20)$$

Dari persamaan (3.19) dan (3.20) didapatkan fungsi keanggotaan trapesium dari bilangan *fuzzy* $\tilde{b}_1^{(k)}$ yakni:

$$\mu_{\tilde{b}_1^{(k)}}\left(b_1^{(k)}\right) = \begin{cases} 1 - \dfrac{b_{1A}^{(k)} - x}{\Delta L_{1A}^{(k)}}, & \text{untuk } b_{1A}^{(k)} - \Delta L_{1A}^{(k)} \leq x \leq b_{1A}^{(k)}, \Delta L_{1A}^{(k)} > 0 \\ 1, & \text{untuk } b_{1A}^{(k)} \leq x \leq b_{1B}^{(k)} \\ 1 - \dfrac{x - b_{1B}^{(k)}}{\Delta R_{1B}^{(k)}}, & \text{untuk } b_{1B}^{(k)} \leq x \leq b_{1B}^{(k)} + \Delta R_{1B}^{(k)}, \Delta R_{1B}^{(k)} > 0 \\ 0, & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Sehingga diperoleh solusi dari $\tilde{x}_1 = \text{Trapesium}\left(x; b_{1A}^{(k)}, b_{1B}^{(k)}, \Delta L_{1A}^{(k)}, \Delta R_{1B}^{(k)}\right)$. Begitu pula untuk mencari solusi dari $\tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_n$.

**Contoh:**

Diberikan sistem persamaan linier *fuzzy* sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 2\tilde{x}_1 - 4\tilde{x}_2 + 4\tilde{x}_3 - 2\tilde{x}_4 &= \tilde{6} \\ 4\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3 + 6\tilde{x}_4 &= \widetilde{12} \\ -2\tilde{x}_1 + 10\tilde{x}_2 - 4\tilde{x}_3 + 4\tilde{x}_4 &= \widetilde{16} \\ 4\tilde{x}_1 + 6\tilde{x}_2 - 3\tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 &= \tilde{9} \end{aligned} \tag{3.21}$$

dengan masing-masing koefisien berupa bilangan *fuzzy* trapesium

$\tilde{6} = \text{Trapesium}(x; 4,9,2,3)$ $\widetilde{16} = \text{Trapesium}(x; 15,19,1,3)$

$\widetilde{12} = \text{Trapesium}(x; 8,14,4,2)$ $\tilde{9} = \text{Trapesium}(x; 7,10,2,1)$

**Jawaban:**

Pertama, sistem persamaan linier *fuzzy* (3.16) diubah ke dalam bentuk matriks.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 6 \\ -2 & 10 & -4 & 4 \\ 4 & 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{6} \\ \widetilde{12} \\ \widetilde{16} \\ \tilde{9} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 6 \\ -2 & 10 & -4 & 4 \\ 4 & 6 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \widetilde{\boldsymbol{X}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix}, \widetilde{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{6} \\ \widetilde{12} \\ \widetilde{16} \\ \tilde{9} \end{bmatrix}$$

di mana $\boldsymbol{A}_{4\times 4}$ merupakan matriks koefisien tegas dengan ordo $4 \times 4$, $\widetilde{\boldsymbol{X}}$ merupakan matriks variabel *fuzzy*, dan $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ merupakan matriks konstanta *fuzzy*.

Kemudian mencari fungsi keanggotaan dari masing-masing koefisien yang berupa bilangan *fuzzy* trapesium. Variabel-variabel yang berupa bilangan *fuzzy* juga dinyatakan dalam bentuk potongan-$\alpha$-nya.

**Untuk bilangan *fuzzy* $\tilde{6} = \mathbf{Trapesium}(x; 4, 9, 2, 3)$,** maka fungsi keanggotaannya adalah:

$$\mu_{\tilde{6}} = \begin{cases} 1 - \frac{4-x}{2} & \text{untuk } 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{untuk } 4 \leq x \leq 9 \\ 1 - \frac{x-9}{3} & \text{untuk } 9 \leq x \leq 12 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\tilde{6}}(6_\alpha^-) = \mu_{\tilde{6}}(6_\alpha^+)$ yaitu

$$\alpha = 1 - \frac{4 - 6_\alpha^-}{2} = 1 - \frac{6_\alpha^+ - 9}{3}$$

maka $6_\alpha^- = 2\alpha + 2$ dan $6_\alpha^+ = 12 - 3\alpha$. Jadi, potongan-$\alpha$ dari bilangan *fuzzy* $\tilde{6}$ adalah $6_\alpha = [2\alpha + 2\,, 12 - 3\alpha]$.

**Untuk bilangan *fuzzy* $\widetilde{12} = \mathbf{Trapesium}(x; 8, 14, 4, 2)$,** maka fungsi keanggotaannya adalah:

$$\mu_{\widetilde{12}} = \begin{cases} 1 - \frac{8-x}{4} & \text{untuk } 4 \leq x \leq 8 \\ 1 & \text{untuk } 8 \leq x \leq 14 \\ 1 - \frac{x-14}{2} & \text{untuk } 14 \leq x \leq 16 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\widetilde{12}}(12_\alpha^-) = \mu_{\widetilde{12}}(12_\alpha^+)$ yaitu

$$\alpha = 1 - \frac{8 - 12_\alpha^-}{4} = 1 - \frac{12_\alpha^+ - 14}{2}$$

maka $12_\alpha^- = 4\alpha + 4$ dan $12_\alpha^+ = 14 - 2\alpha$. Jadi, potongan-$\alpha$ dari bilangan *fuzzy* $\widetilde{12}$ adalah $12_\alpha = [4\alpha + 4\,, 14 - 2\alpha]$.

**Untuk bilangan *fuzzy* $\widetilde{\mathbf{16}} = \mathbf{Trapesium}(\boldsymbol{x}; \mathbf{15}, \mathbf{19}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$,** maka fungsi keanggotaannya adalah:

$$\mu_{\widetilde{16}} = \begin{cases} 1 - \frac{15-x}{1} & \text{untuk } 14 \le x \le 15 \\ 1 & \text{untuk } 15 \le x \le 19 \\ 1 - \frac{x-19}{3} & \text{untuk } 19 \le x \le 22 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\widetilde{16}}(16_\alpha^-) = \mu_{\widetilde{16}}(16_\alpha^+)$ yaitu

$$\alpha = 1 - \frac{15 - 16_\alpha^-}{1} = 1 - \frac{16_\alpha^+ - 19}{3}$$

maka $16_\alpha^- = \alpha + 14$ dan $16_\alpha^+ = 22 - 3\alpha$. Jadi, potongan-$\alpha$ dari bilangan *fuzzy* $\widetilde{16}$ adalah $16_\alpha = [\alpha + 14\,, 22 - 3\alpha]$.

**Untuk bilangan *fuzzy* $\tilde{\mathbf{9}} = \mathbf{Trapesium}(\boldsymbol{x}; \mathbf{7}, \mathbf{10}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$,** maka fungsi keanggotaannya adalah:

$$\mu_{\tilde{9}} = \begin{cases} 1 - \frac{7-x}{2} & \text{untuk } 5 \le x \le 7 \\ 1 & \text{untuk } 7 \le x \le 10 \\ 1 - \frac{x-10}{1} & \text{untuk } 10 \le x \le 11 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\tilde{9}}(9_\alpha^-) = \mu_{\tilde{9}}(9_\alpha^+)$ yaitu

$$\alpha = 1 - \frac{7 - 9_\alpha^-}{2} = 1 - \frac{9_\alpha^+ - 11}{1}$$

maka $9_\alpha^- = 2\alpha + 5$ dan $9_\alpha^+ = 11 - \alpha$. Jadi, potongan-$\alpha$ dari bilangan *fuzzy* $\tilde{9}$ adalah $9_\alpha = [2\alpha + 5\,, 11 - \alpha]$.

Kemudian semua potongan-$\alpha$ yang telah diperoleh disubstitusikan ke dalam bilangan-bilangan *fuzzy* pada konstanta sistem persamaan linier *fuzzy*.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & 6 \\ -2 & 10 & -4 & 4 \\ 4 & 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(x_1^{(0)}\right)_\alpha \\ \left(x_2^{(0)}\right)_\alpha \\ \left(x_3^{(0)}\right)_\alpha \\ \left(x_4^{(0)}\right)_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2\alpha + 2\,, 12 - 3\alpha] \\ [4\alpha + 4\,, 16 - 2\alpha] \\ [\alpha + 14\,, 22 - 3\alpha] \\ [2\alpha + 5\,, 11 - \alpha] \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, pencarian solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* dilakukan dengan mengikuti langkah-langkah metode eliminasi Gauss-Jordan.

1. Memperluas matriks koefisien $\boldsymbol{A}_{4\times4}$ menjadi matriks ekstensi $\boldsymbol{A}_{4\times(4+1)}$ dengan menambahkan satu kolom terakhir dengan matriks konstanta *fuzzy*.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 4 & -2 & [2\alpha + 2\,, 12 - 3\alpha] \\ 4 & 2 & -2 & 6 & [4\alpha + 4\,, 16 - 2\alpha] \\ -2 & 10 & -4 & 4 & [\alpha + 14\,, 22 - 3\alpha] \\ 4 & 6 & -3 & 1 & [2\alpha + 5\,, 11 - \alpha] \end{array}\right]$$

2. Menggunakan operasi baris elementer untuk mengubah matriks koefisien $\boldsymbol{A}_{4\times4}$ yang terdapat dalam matriks ekstensi $\boldsymbol{A}_{4\times(4+1)}$ menjadi matriks segitiga atas (elemen-elemen di bawah diagonal utama menjadi bernilai nol)

$$\begin{array}{l} \\ B_2^{(1)} \to B_{21}^{(0)}\left(-\frac{4}{2}\right) \\ B_3^{(1)} \to B_{31}^{(0)}\left(\frac{2}{2}\right) \\ B_4^{(1)} \to B_{41}^{(0)}\left(-\frac{4}{2}\right) \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 4 & -2 & [2\alpha + 2\,, 12 - 3\alpha] \\ 0 & 10 & -10 & 10 & [0\,, -8 + 4\alpha] \\ 0 & 6 & 0 & 2 & [3\alpha + 16\,, 34 - 6\alpha] \\ 0 & 14 & -11 & 5 & [-2\alpha + 1\,, -13 + 5\alpha] \end{array}\right]$$

$$
\begin{array}{l} \\ \\ B_3^{(2)} \to B_{32}^{(1)}\left(-\frac{6}{10}\right) \\ B_4^{(2)} \to B_{42}^{(1)}\left(-\frac{14}{10}\right) \end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & -4 & 4 & -2 & [2\alpha+2\,,12-3\alpha] \\
0 & 10 & -10 & 10 & [0\,,-8+4\alpha] \\
0 & 0 & 6 & -4 & [3\alpha+16\,,38-8.4\alpha] \\
0 & 0 & 3 & -9 & [-2\alpha+1\,,-1.8-0.6\alpha]
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{l} \\ \\ \\ B_4^{(3)} \to B_{43}^{(2)}\left(-\frac{3}{6}\right) \end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & -4 & 4 & -2 & [2\alpha+2\,,12-3\alpha] \\
0 & 10 & -10 & 10 & [0\,,-8+4\alpha] \\
0 & 0 & 6 & -4 & [3\alpha+16\,,38-8.4\alpha] \\
0 & 0 & 0 & -7 & [-3.5\alpha-7\,,-21.2+3.6\alpha]
\end{array}\right]
$$

3. Menggunakan operasi baris elementer lagi untuk menjadikan elemen-elemen di atas diagonal utama juga bernilai nol sehingga diperoleh suatu matriks diagonal di mana elemen-elemen di bawah dan di atas diagonal utama bernilai nol.

$$
\begin{array}{l} B_1^{(1)} \to B_{14}^{(0)}\left(-\frac{2}{7}\right) \\ B_2^{(2)} \to B_{24}^{(1)}\left(\frac{10}{7}\right) \\ B_3^{(3)} \to B_{34}^{(2)}\left(-\frac{4}{7}\right) \\ \end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & -4 & 4 & 0 & [3\alpha+4\,,18.06-4.03\alpha] \\
0 & 10 & -10 & 0 & [-5\alpha-10\,,-38.29+9.14\alpha] \\
0 & 0 & 6 & 0 & [5\alpha+20\,,50.91-10.46\alpha] \\
0 & 0 & 0 & -7 & [-3.5\alpha-7\,,-21.2+3.6\alpha]
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{l} B_1^{(2)} \to B_{13}^{(1)}\left(-\frac{4}{6}\right) \\ B_2^{(3)} \to B_{23}^{(2)}\left(\frac{10}{6}\right) \\ \\ \end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & -4 & 0 & 0 & [-0.33\alpha-9.33\,,-15.89+2.94\alpha] \\
0 & 10 & 0 & 0 & [3.33\alpha+23.33\,,46.57-8.29\alpha] \\
0 & 0 & 6 & 0 & [5\alpha+20\,,50.91-10.46\alpha] \\
0 & 0 & 0 & -7 & [-3.5\alpha-7\,,-21.2+3.6\alpha]
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{l} B_1^{(3)} \to B_{12}^{(2)}\left(\frac{4}{10}\right) \\ \\ \\ \end{array}
\left[\begin{array}{cccc|c}
2 & 0 & 0 & 0 & [\alpha\,,2.74-0.37\alpha] \\
0 & 10 & 0 & 0 & [3.33\alpha+23.33\,,46.57-8.29\alpha] \\
0 & 0 & 6 & 0 & [5\alpha+20\,,50.91-10.46\alpha] \\
0 & 0 & 0 & -7 & [-3.5\alpha-7\,,-21.2+3.6\alpha]
\end{array}\right]
$$

4. Menjadikan matriks ekstensi $\boldsymbol{A}_{4\times(4+1)}$ ke bentuk semula, yakni berupa sistem persamaan linier *fuzzy*.

$$\begin{aligned} 2(x_1)_\alpha &= [\alpha\,, 2.74 - 0.37\alpha] \\ 10(x_2)_\alpha &= [3.33\alpha + 23.33\,, 46.57 - 8.29\alpha] \\ 6(x_3)_\alpha &= [5\alpha + 20\,, 50.91 - 10.46\alpha] \\ -7(x_4)_\alpha &= [-3.5\alpha - 7\,, -21.2 + 3.6\alpha] \end{aligned}$$

5. Membagi koefisien dengan konstanta yang terletak pada tiap-tiap persamaan untuk memperoleh solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy*.

$$(x_1)_\alpha = \frac{[\alpha\,, 2.74 - 0.37\alpha]}{2} = [0.5\alpha\,, 1.37 - 0.19\alpha]$$

$$(x_2)_\alpha = \frac{[3.33\alpha + 23.33\,, 46.57 - 8.29\alpha]}{10} = [0.33\alpha + 2.33\,, 4.66 - 0.83\alpha]$$

$$(x_3)_\alpha = \frac{[5\alpha + 20\,, 50.91 - 10.46\alpha]}{6} = [0.83\alpha + 3.33\,, 8.49 - 1.74\alpha]$$

$$(x_4)_\alpha = \frac{[-3.5\alpha - 7\,, -21.2 + 3.6\alpha]}{-7} = [0.5\alpha + 1\,, 3.03 - 0.51\alpha]$$

Jadi solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* adalah

$$(x_1)_\alpha = [0.5\alpha\,, 1.37 - 0.19\alpha]$$

$$(x_2)_\alpha = [0.33\alpha + 2.33\,, 4.66 - 0.83\alpha]$$

$$(x_3)_\alpha = [0.83\alpha + 3.33\,, 8.49 - 1.74\alpha]$$

$$(x_4)_\alpha = [0.5\alpha + 1\,, 3.03 - 0.51\alpha]$$

Untuk membuktikan kebenarannya, maka solusi-solusi di atas disubstitusikan ke dalam masing-masing sistem persamaan linier *fuzzy* yang awal.

Bukti Persamaan 1

$$\begin{array}{c} 2[0.5\alpha\,, 1.37 - 0.19\alpha] \\ -4[0.33\alpha + 2.33\,, 4.66 - 0.83\alpha] \\ 4[0.83\alpha + 3.33\,, 8.49 - 1.74\alpha] \\ -2[0.5\alpha + 1\,, 3.03 - 0.51\alpha] \\ \hline [2\alpha + 2\,, 12 - 3\alpha] \end{array} +$$

Bukti Persamaan 2

$$\begin{array}{r} 4[0.5\alpha\,,1.37-0.19\alpha] \\ 2[0.33\alpha+2.33\,,4.66-0.83\alpha] \\ -2[0.83\alpha+3.33\,,8.49-1.74\alpha] \\ 6[0.5\alpha+1\,,3.03-0.51\alpha] \\ \hline [4\alpha+4\,,16-2\alpha] \end{array} +$$

Bukti Persamaan 3

$$\begin{array}{r} -2[0.5\alpha\,,1.37-0.19\alpha] \\ 10[0.33\alpha+2.33\,,4.66-0.83\alpha] \\ -4[0.83\alpha+3.33\,,8.49-1.74\alpha] \\ 4[0.5\alpha+1\,,3.03-0.51\alpha] \\ \hline [\alpha+14\,,22-3\alpha] \end{array} +$$

Bukti Persamaan 4

$$\begin{array}{r} 4[0.5\alpha\,,1.37-0.19\alpha] \\ 6[0.33\alpha+2.33\,,4.66-0.83\alpha] \\ -3[0.83\alpha+3.33\,,8.49-1.74\alpha] \\ 1[0.5\alpha+1\,,3.03-0.51\alpha] \\ \hline [2\alpha+5\,,11-\alpha] \end{array} +$$

Solusi sistem persamaan linier di atas masih dalam bentuk bilangan *fuzzy* trapesium yang dinyatakan dengan potongan-$\alpha$ ($X_\alpha = [X_\alpha^-, X_\alpha^+]$). Sedangkan bilangan *fuzzy* trapesium yang awal berbentuk $\tilde{X} = \text{Trapesium}(b, c, \Delta L, \Delta R)$. Oleh karena itu, solusi-solusi tersebut diubah menjadi bentuk fungsi keanggotaan trapesium.

Potongan-$\alpha$ untuk $\tilde{x}_1$ adalah $(x_1)_\alpha = [0.5\alpha\,, 1.37 - 0.19\alpha]$. Fungsi keanggotaan trapesiumnya adalah

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{x}_1} &= \text{Trapesium}(x, 0.5\,, 1.18\,, 0.5\,, 0.19) \\ &= \begin{cases} 1 - \dfrac{0.5 - x}{0.5} & \text{untuk } 0 \le x \le 0.5 \\ 1 & \text{untuk } 0.5 \le x \le 1.18 \\ 1 - \dfrac{x - 1.18}{0.19} & \text{untuk } 1.18 \le x \le 1.37 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases} \end{aligned}$$

Potongan-$\alpha$ untuk $\tilde{x}_2$ adalah $(x_2)_\alpha = [0.33\alpha + 2.33\,, 4.66 - 0.83\alpha]$. Fungsi keanggotaan trapesiumnya adalah

$$\mu_{\tilde{x}_2} = \text{Trapesium}(x, 2.66\,, 3.83\,, 0.33\,, 0.83)$$
$$= \begin{cases} 1 - \dfrac{2.66 - x}{0.33} & \text{untuk } 2.33 \leq x \leq 2.66 \\ 1 & \text{untuk } 2.66 \leq x \leq 3.83 \\ 1 - \dfrac{x - 3.74}{0.83} & \text{untuk } 3.83 \leq x \leq 4.66 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Potongan-$\alpha$ untuk $\tilde{x}_3$ adalah $(x_3)_\alpha = [0.83\alpha + 3.33\,, 8.49 - 1.74\alpha]$. Fungsi keanggotaan trapesiumnya adalah

$$\mu_{\tilde{x}_3} = \text{Trapesium}(x, 4.16\,, 6.75\,, 0.83\,, 1.74)$$
$$= \begin{cases} 1 - \dfrac{4.16 - x}{0.83} & \text{untuk } 3.33 \leq x \leq 1.48 \\ 1 & \text{untuk } 4.16 \leq x \leq 6.75 \\ 1 - \dfrac{x - 6.75}{1.74} & \text{untuk } 6.75 \leq x \leq 8.49 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Potongan-$\alpha$ untuk $\tilde{x}_4$ adalah $(x_4)_\alpha = [0.5\alpha + 1\,, 3.03 - 0.51\alpha]$. Fungsi keanggotaan trapesiumnya adalah

$$\mu_{\tilde{x}_4} = \text{Trapesium}(x, 1.5\,, 2.52\,, 0.5\,, 0.51)$$
$$= \begin{cases} 1 - \dfrac{1.5 - x}{0.5} & \text{untuk } 1 \geq x \geq 1.5 \\ 1 & \text{untuk } 1.5 \geq x \geq 2.52 \\ 1 - \dfrac{x - 2.52}{0.51} & \text{untuk } 2.52 \geq x \geq 3.03 \\ 0 & \text{untuk lainnya} \end{cases}$$

Sehingga solusi akhir dari sistem persamaan linier *fuzzy* (3.6) adalah $\tilde{x}_1 = \tilde{1}$ dengan bilangan *fuzzy* trapesium $\tilde{x}_1 = \text{Trapesium}(x, 0.5\,, 1.18\,, 0.5\,, 0.19)$, $\tilde{x}_2 = \tilde{3}$ dengan bilangan *fuzzy* trapesium $\tilde{x}_2 = \text{Trapesium}(x, 2.66\,, 3.83\,, 0.33\,, 0.83)$, $\tilde{x}_3 = \tilde{5}$ dengan bilangan *fuzzy* trapesium $\tilde{x}_3 = \text{Trapesium}(x, 4.16\,, 6.75\,, 0.83\,, 1.74)$ dan $\tilde{x}_4 = \tilde{2}$ dengan bilangan *fuzzy* trapesium $\tilde{x}_4 = \text{Trapesium}(x, 1.5\,, 2.52\,, 0.5\,, 0.51)$.

## 3.5. Kajian Keagamaan

### 3.5.1. Konsep Logika *Fuzzy* dalam al-Quran

Sepanjang perjalanan kehidupan, seorang hamba senantiasa dituntut untuk berusaha menjaga, memperbaiki kualitas iman dan ketakwaan dalam menghambakan diri kepada Allah Swt sudah sewajarnya bagi manusia untuk terus meningkatkan mutu keyakinan kepada Allah Swt, agar Allah Swt juga selalu yakin untuk memberikan apa pun yang diminta dan yang tidak diminta. Untuk mencapai keyakinan *Haqqul Yaqin*, semuanya melalui proses belajar ilmu, tidak hanya sekedar mendengar "kata orang". Oleh karena itu, seseorang perlu mengetahui seberapa tinggi tingkat keyakinan yang ia miliki saat ini. Keyakinan terhadap segala sesuatu dibagi menjadi tiga tingkatan yang telah Allah Swt paparkan dalam QS. At-Takātsur/102 ayat 5-7 yang berbunyi:

كَلَّا لَوۡ تَعۡلَمُونَ عِلۡمَ ٱلۡيَقِينِ ۝٥ لَتَرَوُنَّ ٱلۡجَحِيمَ ۝٦ ثُمَّ لَتَرَوُنَّهَا عَيۡنَ ٱلۡيَقِينِ ۝٧ ثُمَّ لَتُسۡـَٔلُنَّ يَوۡمَئِذٍ عَنِ ٱلنَّعِيمِ ۝٨

*"Janganlah begitu, jika kamu mengetahui dengan 'Ilmul Yaqin, niscaya kamu benar-benar akan melihat neraka Jahiim, dan sesungguhnya kamu benar-benar akan melihatnya dengan 'Ainul Yaqin." (QS. At-Takātsur/102: 5-7)*

dan dalam dan QS. Al-Wāqi'ah/56 ayat 92-95 yang berbunyi:

فَسَلَٰمٞ لَّكَ مِنۡ أَصۡحَٰبِ ٱلۡيَمِينِ ۝٩١ وَأَمَّآ إِن كَانَ مِنَ ٱلۡمُكَذِّبِينَ ٱلضَّآلِّينَ ۝٩٢ فَنُزُلٞ مِّنۡ حَمِيمٖ ۝٩٣ وَتَصۡلِيَةُ جَحِيمٍ ۝٩٤ إِنَّ هَٰذَا لَهُوَ حَقُّ ٱلۡيَقِينِ ۝٩٥

*"Dan adapun jika dia termasuk golongan yang mendustakan lagi sesat, maka dia mendapat hidangan air yang mendidih, dan dibakar di dalam Jahannam. Sesungguhnya (yang disebutkan itu) adalah Haqqul Yaqin." (QS. Al-Wāqi'ah/56: 92-95)*

Menurut ayat di atas, keyakinan akan suatu kebenaran dibagi dalam tiga tingkatan, yaitu:

1. *'Ilmul Yaqin*

Keyakinan akan suatu kebenaran berdasarkan ilmu, yaitu mengetahui suatu kebenaran dengan cara mempelajari ilmu yang sudah ada mengenai pengetahuan tentang hal tersebut. Misal ingin mengetahui tentang api, bisa diketahui berdasarkan ilmu pengetahuan yang mengajarkannya. Bagaimana ciri-cirinya, seperti rasanya panas, warnanya kuning kemerahan, bentuknya menjilat seperti lidah, menghasilkan asap dan seterusnya. Dari sini dapat digambarkan bentuk api sebagaimana ilmu pengetahuan yang sudah dipaparkan di atas. *'Ilmul Yaqin* bisa dijadikan sebagai salah satu dasar pembenar suatu fakta yang objektif dalam taraf yang paling rendah. Tetapi walaupun ilmu didapatkan berdasarkan fakta kebenaran, adakalanya dalam penyampaian ilmu tidak tersampaikan secara sempurna, entah karena kelemahan pembawa ilmu atau penerima ilmu. Dengan demikian *'Ilmul Yaqin* belum tentu menghasilkan kebenaran yang objektif.

2. *'Ainul Yaqin*

Keyakinan akan suatu kebenaran berdasarkan penyaksian, yaitu mengetahui suatu kebenaran dengan cara melihat langsung fakta yang ada. Misal ingin mengetahui tentang api, dapat diketahui dengan melihat langsung keberadaan api dan mengetahui kebenaran faktanya. *'Ainul Yaqin* menjadi dasar pembenar yang lebih objektif atas fakta suatu kebenaran. Karena seseorang bisa mengetahui fakta suatu kebenaran berdasar mata kepalanya sendiri atau melihat langsung. Tetapi kelemahan tetap masih ada, jika penglihatan seseorang tidak sempurna atau ada penghalang, maka pandangan seseorang itu menjadi terganggu, sehingga benda yang dilihat menjadi samar atau tidak sesuai dengan bentuk aslinya. Misalkan seseorang melihat gajah, tetapi karena terhalang kabut atau karena mata yang katarak, mungkin seseorang dapat menyimpulkan apa yang ia lihat itu bukit. Dengan demikian *'Ainul Yaqin* juga belum tentu menghasilkan kebenaran objektif.

3. *Haqqul Yaqin*

Keyakinan akan suatu kebenaran berdasarkan pengalaman, yaitu mengetahui suatu kebenaran dengan cara mengalaminya langsung. Misalkan ingin mengetahui tentang api, dapat diketahui dengan memasukkan badan ke dalam api, sehingga dapat merasakan langsung panasnya api. *Haqqul Yaqin* menjadi dasar pembenar yang paling objektif atas fakta suatu kebenaran. Karena seseorang bisa mengetahui fakta suatu kebenaran berdasar pengalaman yang dialami sendiri, sehingga sulit terbantahkan kebenarannya.

Dari ketiga tingkat keyakinan atas suatu kebenaran di atas, semuanya tetap diperlukan untuk mendapatkan fakta suatu kebenaran. Hanya saja ketika seseorang memanfaatkan *'Ilmul Yaqin* untuk mendapatkan fakta suatu kebenaran diperlukan kebersihan hati, pikiran dan jiwa. Apabila hati, pikiran dan jiwa tidak bersih, maka ilmu yang didapatkan bisa terkontaminasi, sehingga faktanya menjadi tersamarkan bahkan berubah. Laksana gelas kotor jika diisi air bersih, maka air yang bersih menjadi kotor di dalam gelas. Di masa sekarang di negeri tercinta ini, sering terjadi kesalahpahaman yang mengakibatkan kerugian yang tidak sedikit, bahkan penderitaan yang tak kunjung reda dirasakan atas suatu kelompok minoritas, karena mendapat justifikasi salah bahkan dianggap kafir atau sesat hanya karena informasi yang didapat tidak sesuai faktanya. Atau karena suatu kepentingan dan keterbatasan ilmu, bahkan mungkin karena kedengkian, menyebabkan penyampai kebenaran memelintirkan fakta menjadi sebuah fitnah. Seperti pipa paralon yang mengalirkan air dari sumber air bersih, jika paralonnya bersih, maka air yang sampai ke rumah juga bersih. Tetapi sebaliknya jika paralonnya kotor, air bersih yang dialirkan ke rumah menjadi kotor. Tentu hal ini sangat berbahaya bagi kelangsungan kehidupan kebangsaan yang berlandaskan Pancasila dan Bhinneka Tunggal Ika. Maka perlu usaha untuk mendapatkan fakta dari suatu kebenaran dari sumbernya langsung, sehingga tidak timbul kesalahan, keraguan dan fitnah.

Demikian juga ketika *'Ainul Yaqin* digunakan untuk mendapatkan fakta kebenaran, maka perlu membuka mata lebar-lebar, menyingkirkan segala hal yang dapat menghalangi pandangan. Apalagi jika yang dicari adalah kebenaran rohani, maka mata hati juga harus bersih dan suci sehingga fakta kebenaran menjadi terang.

*Haqqul Yaqin* menjadi media yang paling meyakinkan atas fakta suatu kebenaran. Adakalanya ketika *'Ilmul Yaqin* dan *'Ainul Yaqin* belum memenuhi hasrat seseorang atas fakta suatu kebenaran, maka perlu dirasakan langsung dengan pengalaman yang bisa membuka fakta sebenar-benarnya. Seseorang tentu akan lebih yakin ketika ia mencicipi manisnya gula dengan lidah, dari pada sekedar mengetahui cerita bahwa gula itu manis atau hanya sekedar melihat bentuk gula yang tidak akan membuktikan bahwa gula itu manis.

Allah Swt berfirman dalam QS. Al-Kahfi/18 ayat 29 yang berbunyi:

وَقُلِ ٱلْحَقُّ مِن رَّبِّكُمْ ۖ فَمَن شَآءَ فَلْيُؤْمِن وَمَن شَآءَ فَلْيَكْفُرْ ۚ ... ﴿٢٩﴾

*"Dan katakanlah: "Kebenaran itu datangnya dari Tuhanmu; maka barangsiapa yang ingin (beriman) hendaklah ia beriman, dan barangsiapa yang ingin (kafir) biarlah ia kafir…" (QS. Al-Kahfi/18: 29)*

Pada hakikatnya kebenaran memang hanya milik Allah Swt semata. Akan tetapi manusia sebagai makhluk ciptaan-Nya memiliki suatu keistimewaan yakni dikaruniai akal untuk berpikir dan dapat digunakan mendapat fakta suatu kebenaran yang paling objektif melalui *'Ilmul Yaqin*, *'Ainul Yaqin* dan *Haqqul Yaqin*.

Hampir setiap hari manusia menyaksikan sendiri bagaimana kejujuran menjadi barang yang sangat sulit ditemukan. Orang benar menjadi salah karena kebenarannya dan orang salah menjadi benar karena kesalahannya. Seorang hakim bisa menjadi terdakwa karena dakwaannya, seorang jaksa bisa dituntut karena tuntutannya, bahkan ada terdakwa tidak perlu menjalani hukuman, cukup diwakilkan orang yang mau menggantikannya di tahanan. Hal seperti inilah yang membuat Allah Swt seakan marah karena manusia telah begitu berani menjadi "Tuhan" sang penentu kebenaran. Oleh karena itu, perlu adanya keyakinan yang kuat dan tertanam di hati supaya terhindar dari keangkuhan dan senantiasa ingat akan peringatan Rasulullah Saw dengan sabdanya: "*Tiada seorang pria (wanita termasuk di dalamnya) mencaci maki kepada pria lain, dengan ucapan fasik atau kafir, kecuali ucapannya membalik pada diri pribadinya, apabila tidak sesuai dengan kenyataannya.*" (HR. Bukhari)

### 3.5.2. Penyelesaian Masalah dalam al-Quran

Setiap manusia pasti mempunyai masalah. Entah masalah ekonomi, masalah rumah tangga atau pun masalah-masalah yang lainnya. Banyak manusia yang mudah mengeluh mengenai problematika kehidupannya. Manusia selalu merasa bingung bagaimana menyelesaikan masalah-masalah yang dihadapinya. Apalagi jika masalah yang dihadapinya cukup besar dan pelik. Hal itu sangatlah lumrah terjadi dalam kehidupan manusia yang hanya sementara di dunia ini. Sebenarnya Allah Swt memberikan masalah kepada manusia tidak lain dan tidak bukan hanya untuk ujian hidup, untuk menguji keimanan dan ketakwaan manusia kepada Allah

Swt. Allah Swt tidak akan pernah membebani seseorang kecuali orang tersebut sebenarnya mampu untuk mengatasinya. Allah Swt berfirman dalam QS. Al-Baqarah/2 ayat 286 yang berbunyi:

لَا يُكَلِّفُ ٱللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَاۚ ...٢٨٦

*"Allah Swt tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya ..." (QS. Al-Baqarah/2: 286).*

Ayat ini menerangkan bahwa dalam mencapai tujuan hidup, manusia diberi beban oleh Allah Swt sesuai kesanggupannya. Seseorang diberi pahala lebih dari yang telah diusahakannya dan mendapat siksa seimbang dengan kejahatan yang telah dilakukannya. Dengan ayat ini Allah Swt mengatakan bahwa seseorang diberi suatu permasalahan hanyalah sesuai dengan kesanggupannya. Agama Islam adalah agama yang tidak mempersulit seseorang dengan masalah yang berat dan sukar. Asas pokok dari agama Islam adalah mempermudah dan bersifat meluas.

Setiap masalah yang diberikan oleh Allah Swt kepada hamba-Nya pasti terdapat solusi untuk keluar dari masalah tersebut. Sebagaimana firman Allah Swt dalam QS. Al-Insyirah/94 ayat 5-6 yang berbunyi:

فَإِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ٥ إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ٦

*"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (QS. Al-Insyirah/94: 5-6).*

Dari ayat di atas, Allah Swt mengulang dua kalimat yang sama yang artinya "*Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan*". Dua ayat ini menjelaskan bahwasanya Allah Swt menegaskan dalam firman-Nya bahwa setiap kesulitan atau masalah yang dihadapi setiap orang pasti akan diberi petunjuk untuk memudahkan manusia mencari solusinya. Hanya saja banyak manusia yang tidak mengetahui bagaimana cara memperoleh solusi tersebut sehingga banyak yang terjerumus ke dalam jurang putus asa. Kemudian Allah Swt menuturkan sebuah solusi yang baik untuk membantu manusia menghadapi masalahnya dalam QS. Al-Baqarah/2 ayat 153 yang berbunyi:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ ٱسۡتَعِينُواْ بِٱلصَّبۡرِ وَٱلصَّلَوٰةِۚ إِنَّ ٱللَّهَ مَعَ ٱلصَّٰبِرِينَ ١٥٣

*"Hai orang-orang yang beriman, jadikanlah sabar dan salat sebagai penolongmu. Sesungguhnya Allah Swt beserta orang-orang yang sabar." (QS. Al-Baqarah/2: 153)*

Memohon pertolongan hanya kepada Allah merupakan ikrar yang selalu dilafalkan dalam setiap salat seseorang, "Hanya kepada-Mu-lah kami menyembah dan hanya kepada-Mu kami memohon pertolongan." Agar permohonan seseorang diterima oleh Allah Swt, tentu harus mengikuti tuntunan dan petunjuk-Nya. Salah satu dari petunjuk-Nya dalam memohon pertolongan adalah dengan sentiasa bersikap sabar dan memperkuat hubungan yang baik dengan-Nya dengan menjaga salat yang berkualitas. Disinilah salat merupakan cerminan dari penghambaan seseorang yang tulus kepada Allah Swt.

Esensi sabar dapat dilihat dari dua hal. Pertama, sabar karena Allah Swt atas apa yang disenangi-Nya, meskipun terasa berat bagi jiwa dan raga. Kedua, sabar karena Allah Swt atas apa yang dibenci-Nya. Walaupun hal itu bertentangan keinginan hawa nafsu, seseorang yang bersikap seperti ini akan termasuk orang yang sabar yang akan mendapat tempat terhormat di sisi Allah Swt.

# BAB IV

# PENUTUP

## 4.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan penelitian, maka dapat diperoleh beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Sistem persamaan linier *fuzzy* dengan bilangan *fuzzy* trapesium yang memiliki bentuk umum $\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{X}} = \widetilde{\boldsymbol{B}}$ dapat dicari solusinya menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan. Adapun langkah untuk mencari solusi sistem persamaan linier *fuzzy* menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan adalah:
   a. Menjadikan sistem persamaan linier *fuzzy* dalam bentuk matriks $\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{X}} = \widetilde{\boldsymbol{B}}$.
   b. Menyatakan bilangan *fuzzy* pada variabel tak diketahui dan konstanta menjadi bilangan *fuzzy* trapesium dengan menggunakan potongan-$\alpha$-nya.
   c. Mentransformasi matriks $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ menjadi matriks ekstensi $\boldsymbol{A}_{m\times(n+1)}$ dengan memasukan matriks $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ pada kolom terakhir matriks $\boldsymbol{A}_{m\times(n+1)}$.
   d. Melakukan eliminasi Gauss-Jordan dengan bantuan operasi baris elementer pada matriks ekstensi $\boldsymbol{A}_{m\times(n+1)}$ sampai diperoleh matriks $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ yang berbentuk eselon baris tereduksi.
   e. Mengubah bentuk matriks ekstensi $\boldsymbol{A}_{m\times(n+1)}$ menjadi bentuk sistem persamaan linier *fuzzy* sehingga diperoleh solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* dalam bentuk potongan-$\alpha$.
   f. Mengubah solusi yang berbentuk potongan-$\alpha$ menjadi solusi akhir dari sistem persamaan linier *fuzzy* yang berbentuk bilangan *fuzzy* trapesium yang diperoleh menggunakan fungsi keanggotaannya.

2. Kajian agama dalam penelitian ini memuat dua pembahasan, yaitu tentang konsep logika *fuzzy* dan penyelesaian masalah.
   a. Konsep logika *fuzzy* dapat ditemui pada QS.At-Takātsur/102 ayat 5-7 dan QS. Al-Wāqi'ah/56 ayat 92-95. Dalam ayat-ayat tersebut menjelaskan tentang konsep tingkatan-tingkatan yang berkaitan dengan keyakinan manusia. Keyakinan pada manusia sendiri memiliki tiga tingkatan, yaitu *'ilmul yaqin*, *ainul yaqin*, dan *haqqul yaqin*. Manusia akan benar-benar memiliki kemantapan hati dan keyakinan yang kuat apabila telah sampai pada tingkatan *haqqul yaqin* karena pada tingkatan ini, manusia tidak hanya meyakini sesuatu hanya dari ucapan seseorang dan melihat dengan mata kepala, akan tetapi manusia dapat merasakan langsung apa yang sedang diyakininya.
   b. Kajian keagamaan tentang penyelesaian masalah terdapat pada QS. Al-Insyirah/94 ayat 5-6. Dalam ayat tersebut menjelaskna bahwasanya segala sesuatu yang dianggap rumit dan susah oleh manusia sebenarnya tidaklah serumit dan sesusah yang mereka bayangkan. Semua yang rumit akan menjadi mudah apabila manusia yakin akan kemudahan yang selalu diberikan oleh Allah Swt.

**4.2. Saran**

Berdasarkan hasil penelitian, penulis memberi beberapa saran supaya penelitian selanjutnya dapat dikembangkan lebih baik lagi, diantaranya:

1. Menggunakan bilangan *fuzzy* yang lain dalam sistem persamaan linier *fuzzy*, seperti bilangan *fuzzy* sigmoid dan bilangan *fuzzy* berbentuk lonceng.

2. Menggunakan metode yang lain dalam sistem persamaan linier *fuzzy*, seperti metode Gauss-Seidel dan metode Dekomposisi Crout.
3. Menggunakan pemrograman komputer untuk mendapatkan hasil secara akurat dan cepat, misalnya menggunakan program MATLAB dan Maple.

## DAFTAR RUJUKAN


Adenegan, K. E. dan Aluko, T. M. 2012. *Gauss* and Gauss-Jordan Elimination Methods for Solving Sistem of Linear Equations: Comparisons and Applications. *Journal of Science and Science Education, Ondo Vol. 3(1), 97-105.*

Al-Jazairi, S. A. B. J. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar (Jilid 7)*. Jakarta Timur: Darus Sunnah Press.

Al-Qarni, A. 2008. *Tafsir Muyassar (Jilid 4)*. Jakarta Timur: Qisthi Press.

Al Qurthubi, S. I. 2009. *Tafsir Al Qurthubi (Juz 'Amma)*. Jakarta Selatan: Pustaka Azzam.

Anton, H. 1997. *Aljabar Linier Elementer Edisi Kelima*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

At-Tubany, Ziyad Ul-Had. 2009. *Struktur Matematika Al-Qur'an.* Surakarta: Rahma Media Pustaka.

Gere, J. M. dan Weaver, W. 1987. *Aljabar Matriks untuk Para Insinyur*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Imrona, M. 2013. *Aljabar Linear Dasar*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Klir, G. J. dan Yuan, B. 1995. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications.* New York: Prentice-Hall Internasional, Inc.

Kusumadewi, S. 2003. *Artificial Intelligence: Teknik dan Aplikasinya.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Kusumadewi, S., Hartati, S., Harjoko, A. dan Wardoyo, R. 2006. *Fuzzy Multi-Attribute Decision Making (Fuzzy MADM).* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Larson, R. 2013. *Elementary Linear Algebra 7th Edition International Edition.* Canada: Cengage Learning.

Lipschutz, S. dan Lipson, M. L. 2006. *Schaum's Outline: Linear Algebra.* New York: The McGraw-Hill Companies, Inc.

Marzuki, C. C. dan Hasmita, N. 2014. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Fuzzy Kompleks Menggunakan Metode Dekomposisi Doolittle. *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri, Vol. 11 No. 2, 166-174.*

Marzuki, C. C. dan Herawati. 2015. Penyelesaian Sitem Persamaan Linear *Fully Fuzzy* Menggunakan Metode Iterasi Jacobi. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika Vol. 1 No. 1.*

Nasseri, H. 2008. Fuzzy Numbers: Positive and Nonnegative. *International Mathematical Forum No. 36, 1777-1780.*

Ruminta. 2014. *Matriks Persamaan Linier dan Pemrograman Linier*. Bandung: Penerbit Rekayasa Sains.

Susanti, T., Mashadi dan Sukamto. 2013. *Mereduksi Sistem Persamaan Linear Fuzzy Penuh dengan Bilangan Fuzzy Trapesium*. Artikel Susi Susanti.

Susilo, F. 2006. *Himpunan dan Logika Fuzzy serta Aplikasinya.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Zimmermann, H. J. 2001. *Fuzzy Sets Theory - and Its Application.* New York: Springer Science+Business Media.

## RIWAYAT HIDUP

Misbahul Munir Setiawan, dilahirkan di Blitar pada hari Jumat tanggal 15 September 1995. Bertempat tinggal di Jl. Sunan Giri Gg. I Kel. Rejomulyo, Kec. Kota, Kota Kediri. Selama di Malang, bertempat tinggal di Pondok Pesantren Anwarul Huda Karangbesuki Kota Malang. Anak pertama dari tiga bersaudara, pasangan Bapak Imam Bakri dan Ibu Binti Afidah.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Al-Irsyad Al-Islamiyyah Kota Kediri sampai kelas 4. Kemudian kelas 5 dia pindah sekolah di MIN Doko Kab. Kediri dan lulus pada tahun 2007. Setelah itu melanjutkan ke MTsN 2 Kediri dan lulus pada tahun 2010. Kemudian dia melanjutkan pendidikan ke MAN Kota Kediri 3 (sekarang MAN 2 Kota Kediri) dan lulus pada tahun 2013. Selanjutnya, pada tahun 2013 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil jurusan Matematika.

Selama menjadi mahasiswa, dia berperan aktif pada organisasi KSR-PMI Unit UIN Malang dalam rangka mengembangkan kompetensi akademiknya. Dia pernah menjabat sebagai pengurus pada tahun 2015 dan 2016.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

## BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Misbahul Munir Setiawan
NIM : 13610105
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Solusi Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* dengan Bilangan *Fuzzy* Trapesium Menggunakan Metode Eliminasi Gauss-Jordan
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D

| No | Tanggal | Hal | Tanda Tangan |
|---|---|---|---|
| 1. | 9 Oktober 2017 | Konsultasi Bab I, Bab II dan Bab III | 1. |
| 2. | 9 Maret 2018 | Konsultasi Kajian Agama Bab I dan Bab II | 2. |
| 3. | 16 Maret 2018 | Revisi Bab I dan Bab III | 3. |
| 4. | 11 April 2018 | Revisi Kajian Agama Bab I | 4. |
| 5. | 12 April 2018 | ACC Bab I, Bab II dan Bab III | 5. |
| 6. | 13 April 2018 | ACC Kajian Agama Bab I, Bab II dan Bab III | 6. |
| 7. | 4 Oktober 2018 | Konsultasi Bab III dan Bab IV | 7. |
| 8. | 21 Februari 2019 | Revisi Bab III | 8. |
| 9. | 11 Maret 2019 | Revisi Bab III dan Bab IV | 9. |
| 10. | 4 April 2019 | Konsultasi Kajian Agama Bab III dan Bab IV | 10. |
| 11. | 5 April 2019 | Revisi Kajian Agama Bab III dan Bab IV | 11. |
| 12. | 8 April 2019 | ACC Keseluruhan | 12. |
| 13. | 8 April 2019 | ACC Kajian Agama Keseluruhan | 13. |

Malang, 8 April 2019
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001